Содержание

Введение

Данное пособие является пособием для проведения практических занятий по дисциплине “Дискретная математика” для студентов дневного отделения математического факультета специальности 1-31 03 01-02 — “математика (научно-педагогическая деятельность)”. Согласно учебной программе на эти занятия отведено 18 часов.

Материал задачника разбит на три раздела — “Элементы комбинаторики”, “Булевы функции”, “Схемы из функциональных элементов” (последний раздел представлен только одной темой — “Контактные схемы”). В начале каждой темы даются краткие теоретические сведения, которых достаточно для решения всех задач темы.

Весь объем задач по каждой теме разбит на две части — обязательные задачи и дополнительные задачи, которые являются, как правило задачами повышенной трудности и, поэтому, могут быть полезны наиболее сильным студентам.

Многие задачи обязательной части даны с решениями, что позволяет использовать данное пособие для самоподготовки. К некоторым задачам даны ответы, к некоторым не даны. Такой дифференцированный подход оправдан, поскольку материал задачника охватывает различные разделы дискретной математики. Так, например, все ответы на задачи из темы “Рекуррентные соотношения” и разделов “Булевы функции”, “Схемы из функциональных элементов” легко проверяются. Поэтому ответов для этих задач нет. Ответы же на задачи из тем “Перестановки и сочетания”, “Принцип включения и исключения” проверить самостоятельно практически невозможно и поэтому все обязательные задачи этих тем даны с ответами.

Материал задачника опробирован на практических занятиях по указанной дисциплине. Значительная часть задач (это касается в большей мере булевых функций и контактных схем) составлена авторами самостоятельно.

Учебное издание

Аниськов Валерий Валерьевич
Близнец Игорь Васильевич

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

для студентов 1 курса специальности 1–31 03 01–02 — “Математика (научно-педагогическая деятельность)”

В авторской редакции

Подписано в печать 23.11.2006 г. (73) Формат 60×84 1/16. Бумага писчая № 1. Гарнитура “Таймс”. Усл. п. л. 5,5 Уч.-изд. л. 4,3 Тираж 25 экз.

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
“Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины”
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104

1. Элементы комбинаторики

1.1. Перестановки и сочетания

Пусть дано некоторое множество, состоящее из n элементов. Выберем из A некоторое подмножество, состоящее из m элементов ($m \geqslant 1$). Такое подмножество называется *выборкой* или, более точно, *выборкой из n элементов по m элементов.*

Например, $1, 2, 4$ — трёхэлементная выборка из множества 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Если получено некоторое множество выборок, с одинаковым количеством элементов, то говорят, что *сделан выбор.*

Выбор называется *неупорядоченным*, если полученные в результате такого выбора выборки, состоящие из одних и тех же элементов и различающиеся лишь порядком их следования, считаются равными. Такие выборки называются *неупорядоченными* и обозначаются $[r_1, r_2, \dots, r_t]$.

Например, $[1, 4, 3] = [4, 3, 1]$.

Выбор называется *упорядоченным*, если две выборки, полученные в результате такого выбора, равны только в том случае, когда они состоят из одинакового количества элементов и одинаковы по порядку их следования. Такие выборки называются *упорядоченными* и обозначаются $(r_1, r_2, \dots, r_t)$.

Например, $(1, 3, 5) \neq (5, 3, 1)$.

Выбор называется *без возвращения*, если каждый элемент выбирается только один раз.

Выбор называется *с возвращением*, если каждый элемент может быть выбран сколь угодно раз.

Например, $(1, 1, 3)$, $(3, 1, 1)$, $[3, 3, 4, 4, 4, 5]$ — выборки с возвращением.

Упорядоченная выборка из n элементов по n элементов называется *перестановкой n-элементного множества.*

Число всех возможных перестановок n-элементного множества без возвращения обозначается $P(n)$, с возвращением — $\tilde{P}(n)$.

Упорядоченная выборка из n элементов по m элементов называется *размещением из n элементов по m элементов* ($0 \leqslant m \leqslant n$).

Число различных размещений из n элементов по m элементов без возвращения обозначается A_n^m. Считается, что если $m > n$, то $A_n^m = 0$. Число различных размещений из n элементов по m элементов с возвращением обозначается $\tilde{A}_n^m$.

Неупорядоченная выборка из n элементов по m элементов называется *сочетанием из n элементов по m элементов*.

Различают сочетания без повторений (число различных сочетаний без повторений обозначается C_n^m) и сочетания с повторениями (число различных сочетаний с повторениями обозначается H_n^m).

Для комбинаторики следующее утверждение является аксиомой, которая называется правилом суммы:

Если объект A может быть выбран m способами, а объект B может быть выбран n способами, то выбор "или A, или B"может быть осуществлен $m+n$ способами.

Еще одно утверждение в комбинаторике считается аксиомой и называется правилом произведения:

Если объект A может быть выбран m способами и для каждого из таких выборов объект B может быть выбран n способами, то выбор AB в этом порядке может быть осуществлен mn способами.

Имеют место следующие равенства:

1) $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$;

2) $P(n) = n!$;

3) $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$;

4) $H_n^m = C_{n+m-1}^m$;

5) $\tilde{P}(n) = n^n$;

6) $\tilde{A}_n^m = n^m$.

7) $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$.

Если $m > n$ или $m = 0$, то считается, что $C_n^m = 1$.

Для любых действительных чисел x, y и натуральных n и k имеет место равенство:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}.$$

Для любых действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ и натурального n имеет место равенство:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_m=n \\ k_i \geqslant 0 \ (i=\overline{1,m})}} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m},$$

Литература

1 Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. — М.: Мир, 1965.

2 Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. — М.: Наука, 1977.

3 Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М.: Наука, 1984.

4 Аниськов В.В, Новиков С.П., Скиба А.Н. Учебно-методические указания по курсу “Дискретная математика и математическая логика” для студентов первого курса математического факультета. — Гомель: ГГУ, 1996.

5 Карпов.В.Г., Мощенский В.А. Математическая логика и дискретная математика. — Мн.: Выш. шк., 1977.

6 Мощенский В.А. Лекции по математической логике. — Мн.: БГУ, 1973.

7 Мощенский А.В., Мощенский В.А. Математические основы информатики. — Мн.: БГУ, 2002.

8 Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Под общей редакцией С.В. Яблонского и О.Б. Лупанова. — М.: Наука, 1974.

9 Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1979.

10 Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. — М.: Наука, 1972.

из переключателей свет включался, если он до этого был выключен и выключался, если до этого он был включен и схема снова была готова к работе.

Задача 125. Построить простейшую контактную схему из пяти переключателей таким образом, чтобы свет включался нажатием на один из первых шести переключателей, выключался нажатием на седьмой и схема вновь была готова к работе.

Задача 126. Построить простейшую контактную схему из шести переключателей так, чтобы свет горел только тогда, когда включено ровно два переключателя.

Задача 127. Построить простейшую контактную схему из шести переключателей таким образом, чтобы свет включался нажатием на один из первых трех переключателей, выключался нажатием на один из оставшихся трех и схема вновь была готова к работе.

где суммирование ведется по всем возможным целым неотрицательным разбиениям числа n.

Число всех возможных разбиений n-элементного множества на k непересекающихся подмножеств имеющих порядки $n_1, n_2, \ldots, n_k$ $(0 \leqslant \leqslant n_i \leqslant n)$ выражается формулой

$$C_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Для решения задач этой темы вначале нужно определить с каким видом выборок мы сталкиваемся. Если это сделано правильно, то решение задачи сводится к применению соответствующей формулы.

Основные задачи

Задача 1. Города A и B сооединены 3 различными дорогами. Сколькими способами можно совершить круговой рейс от A к B и обратно? Сколько будет таких способов, если на обратном пути необходимо выбирать новую дорогу?

Решение. Если дорогу выбирать не надо, то это упорядоченная выборка с возвращением: $\widetilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$. Если же нужно выбирать новую дорогу, то получаем упорядоченную выборку без возвращения: $A_3^2 = \dfrac{3!}{1!} = 6$.

Задача 2. Сколько различных ожерелий можно составить из:

а) 7 бусинок различных размеров?

Решение. Все 7 бусинок различны. Зафиксируем, например, самую маленькую и разорвем на ней ожерелье. Тогда остальные будут составлять упорядоченные перестановки без возвращения. Различных таких перестановок (т.е. различных вариантов составления ожерелья) будет $P(6) = 6! = 720$ (рис. 2.1).

Если теперь снова собрать ожерелье, то окажется, что среди полученных вариантов составления будут “симметричные” ввиду того,

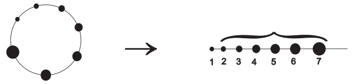


Рис. 1.1:

что ожерелье можно просто повернуть. Эти выборки образуют пары (рис. 1.2).

Значит, разделив пополам, получим 360 различных ожерелий.

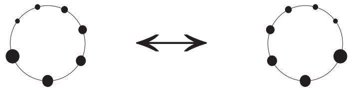


Рис. 1.2:

б) из 6 одинаковых бусинок и одной несколько большей? (*Ответ:* 1)

в) из 5 одинаковых бусинок и еще 2 одинаковых, но несколько больших? (*Ответ:* 3)

Задача 3. Сколькими способами можно рассадить за столом n человек? (*Ответ:* $(n-1)!$)

Задача 4. Сколькими способами можно расставить 5 человек для выполнения их группового портрета? (*Ответ:* 120)

Задача 5. Четверо студентов получают оценки из множества оценок A, B, C, D $(A < B < C < D)$. Сколькими различными способами можно расставить оценки так, чтобы:

а) никаких два студента не получили бы одну и ту же оценку? (*Ответ:* 24)

б) никаких два студента не получили бы одинаковую оценку и при этом один какой-либо определенный студент получил бы оценку выше, чем другой какой-либо определенный? (*Ответ:* 12)

в) чтобы все студенты получили бы высшие оценки C и D? (*Ответ:* 16)

Задача 6. Сколькими способами можно расселить 9 студентов в 3 комнатах, рассчитанных на 3 человека каждая? Сколькими способами

Задача 117. Комитет состоит из пяти человек, среди которых первые два имеют право на 2 голоса каждый. Решение принимается большинством голосов. Построить простейшую контактную схему для голосования.

Задача 118. Нужно, чтобы включение света в комнате производилось тремя различными переключателями так, чтобы при нажатии на любой из переключателей свет выключался, если он перед этим был включен и включался, если он перед этим был выключен. Построить простейшую контактную схему с таким условием.

Задача 119. Построить простейшую контактную схему из четырех переключателей так, чтобы свет горел только тогда, когда включено ровно два переключателя.

Задача 120. Построить простейшую контактную схему из четырех переключателей таким образом, чтобы свет включался нажатием на один из первых трех переключателей, выключался нажатием на четвертый и схема вновь была готова к работе.

Задача 121. Построить простейшую контактную схему из четырех переключателей таким образом, чтобы свет включался нажатием на один из первых двух переключателей, выключался нажатием на один из оставшихся двух и схема вновь была готова к работе.

Дополнительные задачи

Задача 122. Построить простейшую контактную схему для голосования комитета, состоящего из девяти человек при условии, что решение принимается большинством голосов.

Задача 123. Построить простейшую контактную схему для голосования комитета, состоящего из десяти человек при условии, что решение принимается большинством голосов и пять человек имеют право на два голоса.

Задача 124. Построить простейшую контактную схему, состоящую из пяти переключателей таким образом, чтобы при нажатии на любой

Выделим теперь отдельно первую часть формулы и упростим ее.

$$
\begin{aligned}
&(A \wedge B) \vee (\rceil A \wedge B \wedge C) \overset{3.2}{=}\\
&((A \wedge B) \vee \rceil A) \wedge ((A \wedge B) \vee B) \wedge ((A \wedge B) \vee C) \overset{2.2,3.2}{=}\\
&((A \vee \rceil A) \wedge (B \vee \rceil A)) \wedge ((A \vee B) \wedge (B \vee B)) \wedge ((A \vee C) \wedge (B \vee C)) \overset{5.4,4.2}{=}\\
&1 \wedge (B \vee \rceil A) \wedge (A \vee B) \wedge B \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C) \overset{7.2,2.1,5.3}{=}\\
&(B \vee \rceil A) \wedge B \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C) \overset{2.1,7.2}{=}\\
&B \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C) \overset{2.1}{=}\\
&B \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee C) \overset{7.2}{=}\\
&B \wedge (A \vee C) \overset{3.1}{=}\\
&(B \wedge A) \vee (B \wedge C).
\end{aligned}
$$

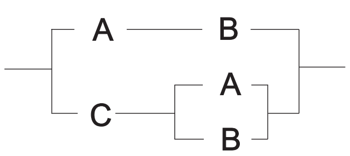
Аналогично рассуждая, для второй половины формулы получим такое же упрощение.

$$(B \wedge A) \vee (A \wedge C).$$

Соединив обе части получим.

$$
\begin{aligned}
&(B \wedge A) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge A) \vee (A \wedge C) \overset{2.2,4.2}{=}\\
&(B \wedge A) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge C) \overset{3.1,2.1}{=}\\
&(B \wedge A) \vee (C \wedge (A \vee B)).
\end{aligned}
$$

Для этой формулы соответствующая схема имеет следующий вид.



Задача 116. Комитет состоит из пяти человек. Решение принимается большинством голосов при условии, что среди проголосовавших оказался председатель. Построить простейшую контактную схему для голосования.

можно это сделать, если какие-либо 2 студента не хотят жить вместе? (*Ответ:* 1680, 1260)

Задача 7. Некоторая комиссия собиралась ровно 40 раз. Каждый раз на заседаниях присутствовало по 10 человек, причем никакие двое из ее членов не были на заседаниях вместе более одного раза. Доказать, что число членов такой комиссии больше 60.

Задача 8. Группа из 41 студента успешно сдала сессию из 3 экзаменов. Возможны оценки 3, 4, 5. Доказать, что независимо от количества экзаменов, по крайней мере 5 студентов сдали сессию с одинаковыми оценками.

Задача 9. Лифт отправляется с r пассажирами и останавливается на n этажах. Сколько всех возможностей выхода пассажиров имеется? Сколько имеется возможностей, когда никакие два пассажира не выйдут на одном этаже, если $r \leqslant n$? (*Ответ:* n^r; $\dfrac{n!}{(n-r)!}$).

Задача 10. Пользуясь полиноминальной теоремой найти:

1) $(x+y+z)^4$;

Решение.

$$
\begin{gathered}
(x+y+z)^4 = \sum_{k_1+k_2+k_3=4} \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} = \frac{4!}{4!0!0!}x^4 + \frac{4!}{0!4!0!}y^4 + \frac{4!}{0!0!4!}z^4 +\\
\frac{4!}{3!1!0!}x^3y + \frac{4!}{1!3!0!}xy^3 + \frac{4!}{0!3!1!}y^3z + \frac{4!}{0!1!3!}yz^3 + \frac{4!}{1!0!3!}xz^3 + \frac{4!}{3!0!1!}x^3z +\\
\frac{4!}{2!1!1!}x^2yz + \frac{4!}{1!2!1!}xy^2z + \frac{4!}{1!1!2!}xyz^2 + \frac{4!}{2!2!0!}x^2y^2 + \frac{4!}{2!0!2!}x^2z^2 + \frac{4!}{0!2!2!}y^2z^2 =\\
x^4 + y^4 + z^4 + 4(x^3y + xy^3 + y^3z + yz^3 + xz^3 + x^3z) +\\
12(x^2yz + xy^2z + xyz^2) + 6(x^2y^2 + x^2z^2 + x^2z^2).
\end{gathered}
$$

Проверка: $(1+1+1)^4 = 3 + 4 \cdot 6 + 12 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 81.$

Ответ:

$$x^4 + y^4 + z^4 + 4x^3y + 4xy^3 + 4y^3z + 4yz^3 + 4xz^3 + 4x^3z+$$
$$12x^2yz + 12xy^2z + 12xyz^2 + 6x^2y^2 + 6x^2z^2 + 6y^2z^2.$$

2) $(2x + y - z)^3$;

Задача 11. Чему равен коэффициент при $x^2y^3z^2$ в выражении
$$(x + y + z)^7$$

Решение. Этот коэффициент будет равен
$$\frac{7!}{2!3!2!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210.$$
Ответ: 210

Задача 12. Чему равен коэффициент при $x^6y^3z^2$ в выражении
$$(x - 2y + 5z)^{11}$$
(*Ответ:* -924000)

Задача 13. Сколько членов имеется в каждом из выражений:

1) $(x + y + z)^6$;

Решение. Рассмотрим различные разбиения числа 6 на целые слагаемые:

1) 6 = 6+0+0. Возможны еще два варианта: 6 = 0+6+0, 6 = 0+0+6. Получаем выборки по одному элементу из трехэлементного множества. Число всевозможных таких выборок равно числу всевозможных размещений без возвращения из трех элементов по одному элементу:
$$A_3^1 = \frac{3!}{(3-1)!} = \frac{3!}{2!} = 3.$$

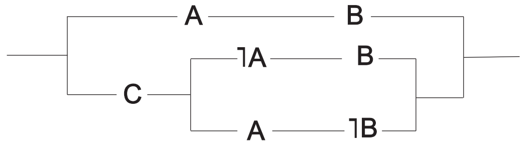
2) 6 = 5+1+0. В данном случае получаем перестановку трехэлементного множества. Число всевозможных таких перестановок находится по формуле
$$P(3) = 3! = 6.$$

A	B	C	f
0	0	0	**0**
0	0	1	**0**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

Дадим для функции значение 1, если в строке среди значений переменных больше единиц, чем нулей и значение 0 в противном случае. Векторное задание функции содержит равное количество единиц и нулей. Следовательно, по количеству символов, нет разницы между СКНФ и СДНФ. Составим, например, СДНФ и упростим ее.

$$(\rceil A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \rceil B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \rceil C) \vee (A \wedge B \wedge C) \overset{2.2}{=}$$
$$(A \wedge B \wedge \rceil C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (\rceil A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \rceil B \wedge C) \overset{3.1}{=}$$
$$(A \wedge B \wedge (C \vee \rceil C)) \vee (\rceil A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \rceil B \wedge C) \overset{5.4,5.3}{=}$$
$$(A \wedge B) \vee (\rceil A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \rceil B \wedge C) \overset{2.1,3.1}{=}$$
$$(A \wedge B) \vee (((\rceil A \wedge B) \vee (A \wedge \rceil B)) \wedge C).$$

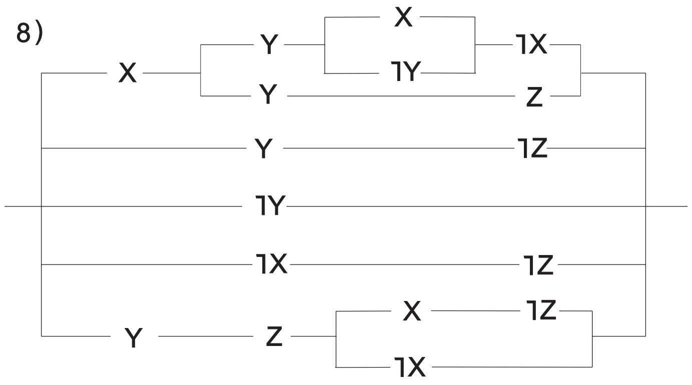
Теперь построим соответствующую схему.



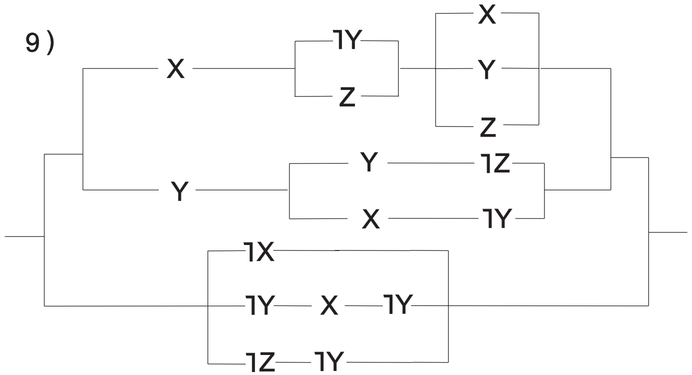
Эта схема является решением задачи. Однако можно построить другую схему, которая так же является решением задачи, но содержит меньшее число переключателей. Для этого вернемся к предпоследнему шагу упрощения и совершим другие преобразования.

$$(A \wedge B) \vee (\rceil A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \rceil B \wedge C) \overset{4.2}{=}$$
$$(A \wedge B) \vee (A \wedge B) \vee (\rceil A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \rceil B \wedge C) \overset{2.2}{=}$$
$$(A \wedge B) \vee (\rceil A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge \rceil B \wedge C).$$

8)



9)



Задача 115. В состав комитета входит три человека. Решение принимается большинством голосов. Построить наиболее простую цепь для голосования.

Решение. Составим таблицу истинности для булевой функции, которая зависит от трех переменных.

3) $6 = 4+1+1$. Снова получаем размещения без возвращения из трех элементов по одному элементу, т.е. число всевозможных таких выборок равно 3.

4) $6 = 4+2+0$. Поскольку, как и в случае 2), у нас опять возникают трехэлементные перестановки, то и в этом случае число всевозможных вариантов равно 6.

5) $6 = 3+3+0$. Это размещения без возвращения из трехэлементного множества по одному элементу, следовательно, снова получаем 3 варианта.

6) $6 = 3+2+1$. Опять приходим к перестановкам трехэлементного множества. Поэтому число всевозмозных вариантов равно 6.

7) $6 = 2+2+2$. При таком разбиении возможен только единственный вариант (который как раз и указан).

Теперь осталось сложить всевозможные варианты для всех случаев вместе:

$$3+6+3+6+3+6+1 = 28.$$

Ответ: 28.

2) $(a+2b+5c+d)^4$; (*Ответ:* 35)
3) $(r+s+t+u+v)^6$. (*Ответ:* 210)

Задача 14. Доказать следующие равенства:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$;

Решение.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = C_n^{n-m};$$

2) $\sum\limits_{i=o}^{n} C_n^i = 2^n$;

3) $\sum\limits_{i=o}^{n} (-1)^i C_n^i = 0$;

4) $C_n^k \cdot C_k^r = C_{n-r}^{k-r} \cdot C_n^r$;

5) $C_{2n}^n = \sum\limits_{i=o}^{n} (C_n^i)^2$;

Дополнительные задачи

Задача 15. В некотором энциклопедическом словаре на 3000 страниц имеется около 600000 слов. Пусть из такого словаря выбрано произвольно некоторое слово. Задавая вопросы на которые можно получать только ответ “да”, либо только ответ “нет”, можно в конечном итоге точно определить какое это слово. Достаточно ли для этого только 20 вопросов?

Задача 16. Сколькими способами можно число n представить в виде суммы k слагаемых (представления, отличающиеся только порядком слагаемых считаются различными), если:

1) каждое слагаемое является целым неотрицательным числом ;

2) каждое слагаемое является натуральным числом.

Задача 17. Город имеет форму прямоугольника, разделенного улицами на квадраты. Таких квадратов в направлении с севера на юг n, а в направлении с востока на запад — k. Сколько имеется кратчайших дорог от одной из вершин прямоугольника до другой?

Задача 18. В университете учатся 1240 студентов. Нужно связаться с каждым из них по телефону, чтобы известить о предстоящем собрании. Комитетом, состоящим из n студентов, решено, что каждый из них позвонит m студентам и попросит из них каждого позвонить k другим студентам и рассказать им о собрании. Если при таком методе ни один студент не извещается дважды, то:

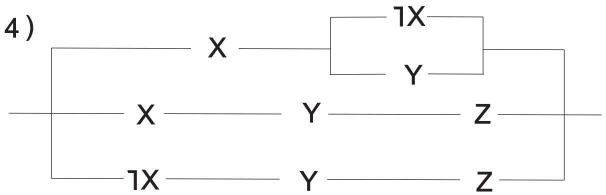
1) сколько человек узнает о собрании?

2) если комитет состоит из 40 студентов и намечено известить о собрании всех 1240 студентов, то какими должны быть m и k при условии, что они одинаковы?

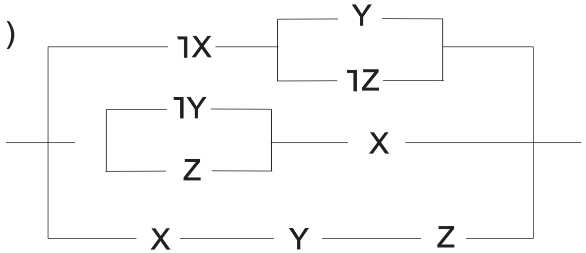
Задача 19. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если ему дают не более трех имен, а общее число имен 300 (два способа, различающиеся лишь порядком имен считаются различными)?

Задача 20. Бросаются три игральные кости (с шестью гранями каждая). Сколькими способами они могут упасть так, что либо все ока-

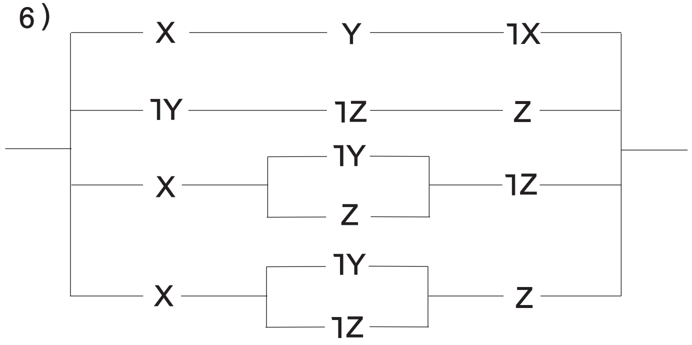
4)



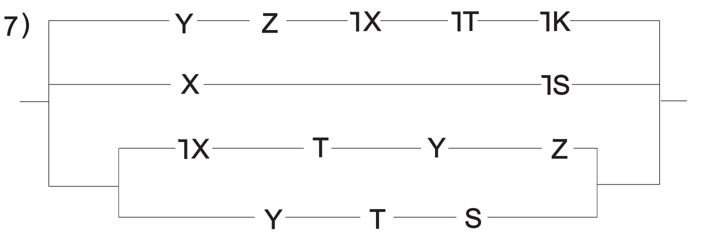
5)



6)

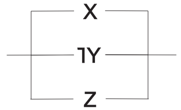


7)

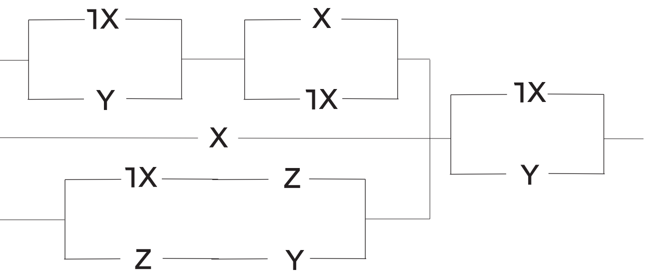


$X \vee ((X \vee \rceil Y) \wedge (Y \vee \rceil Z)) \vee \rceil Y \vee Z \overset{3.1}{=}$
$X \vee ((X \vee \rceil Y) \wedge Y) \vee ((X \vee \rceil Y) \wedge \rceil Z) \vee \rceil Y \vee Z \overset{3.1,2.1}{=}$
$X \vee (X \wedge Y) \vee (\rceil Y \wedge Y) \vee (X \wedge \rceil Z) \vee (\rceil Y \wedge \rceil Z) \vee \rceil Y \vee Z \overset{5.1,5.6}{=}$
$X \vee (X \wedge Y) \vee (X \wedge \rceil Z) \vee (\rceil Y \wedge \rceil Z) \vee \rceil Y \vee Z \overset{7.1}{=}$
$X \vee (X \wedge \rceil Z) \vee (\rceil Y \wedge \rceil Z) \vee \rceil Y \vee Z \overset{7.1,2.1}{=} X \vee \rceil Y \vee Z.$

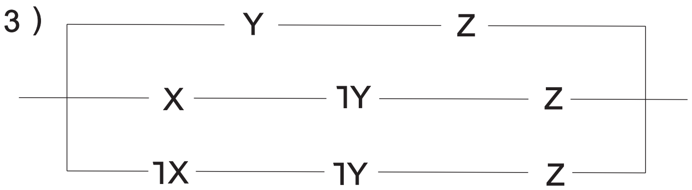
Теперь построим по полученной формуле соответствующую схему.



2)



3)



завшиеся вверху грани одинаковы, либо все попарно различны?

Задача 21. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу (т.е. некоторое число очков встретилось бы на обеих костях)?

Задача 22. Сколько и каких цифр понадобится для того, чтобы записать все натуральные числа, меньшие чем 10^n?

Задача 23. Футбольная команда определяется составом игроков и ролью, которую играет в команде каждый отдельный игрок. Сколько различных футбольных команд можно составить из 13 человек (общее число игроков в футбольной команде — 11 человек), если:
1) каждое из этих лиц может занимать в команде любое место;
2) двое играющих могут быть только вратарями?

Задача 24. Множество состоит из n букв, среди которых буква a встречается α раз. буква b — β раз, а остальные буквы попарно различны. Составляются сочетания с повторениями по r элементов. Сколько среди этих сочетаний будет таких, которые содержат h раз букву a и k раз букву b?

Задача 25. Доказать следующие тождества:

1) $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^{2i} = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^{2i+1};$

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1};$

3) $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1) \cdot C_k^n = n(n-1) \cdot 2^{n-2};$

4) $\sum\limits_{k=0}^{n} (2k+1) \cdot C_n^k = (n+1) \cdot 2^n;$

5) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot C_n^k = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n};$

6) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_{2k}^k \cdot \left(\dfrac{1}{8}\right)^k = \sqrt{\dfrac{2}{3}}.$

1.2. Принцип включения и исключения

Пусть имеется множество X из N элементов. Пусть каждый из элементов может обладать одним или несколькими свойствами a_1, a_2, $\ldots$, a_n. Через $N(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ обозначим количество элементов из X, которые обладают свойствами $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и может быть некоторыми другими. Число элементов, не обладающих ни одним из свойств обозначим через $N(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n)$. Тогда справедлива следующая формула включений и исключений:

$$\begin{gathered}
N(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n) = N - N(a_1) - N(\overline{a}_2) - \ldots - N(a_n) + N(a_1, a_2) + \\
+ N(a_1, a_3) + \ldots + N(a_{n-1}, a_n) - N(a_1, a_2, a_3) - \\
- N(a_1, a_2, a_4) - \ldots - N(a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) + \ldots \\
+ (-1)^n N(a_1, \ldots, a_k).
\end{gathered} \tag{1.1}$$

При решении задач этой темы можно использовать не только формулу включений и исключений, но и сведения из темы “Перестановки и сочетания”. Это касается в большей мере дополнительных задач.

Основные задачи

Задача 26. При обследовании читательских интересов, выяснилось, что 60 процентов студентов читает журнал A, 50 процентов студентов читает журнал C, 50 процентов читает журнал B, 30 процентов читают журналы A и B, 20 — журналы B и C, 40 — журналы A и C, 10 — журналы A, B, C. Сколько процентов студентов:

1) не читает ни один журнал?
2) читает в точности 2 журнала?
3) читает не менее 2 журналов?

Решение. Введем следующие обозначения:

$N = 100\%$ — процент всех студентов;
$N(A) = 60\%$ — процент всех студентов, которые читают журнал A;
$N(B) = 50\%$ — процент всех студентов, которые читают журнал B;
$N(C) = 50\%$ — процент всех студентов, которые читают журнал C;

3) построить контактную схему, которая соответствует упрощенной формуле и, следовательно, содержит меньшее число контактов.

Среди задач на составление контактных схем следует выделить два наиболее часто встречающихся типа.

Первый тип задач — это так называемые “задачи на голосование”. В них требуется составить схему для проведения голосования при соблюдении каких-либо условий. Для решения задач этого типа необходимо составить вначале таблицу истинности. Каждая строка этой таблицы может быть отождествлена с конкретной ситуацией, которая возникает при голосовании. По условию задачи определяется принимается ли в этом случае решение или нет. Если решение принимается, то булева функция имеет в этой строке значение 1. Если же решение не принимается, то значение функции равно 0. Таким образом находится векторное задание функции. Теперь остается составить для нее СДНФ или СКНФ (что короче), упростить и составить по полученной формуле простейшую схему.

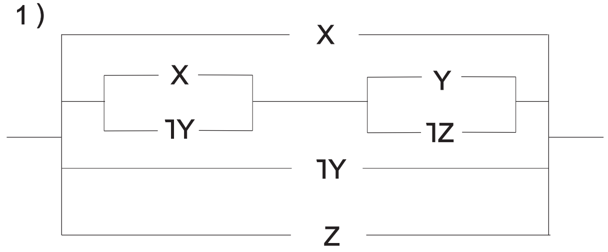
Второй тип задач — это задачи на составление электрических схем. Они требуют индивидуального решения и, поэтому, для них общего алгоритма решения привести нельзя.

В задачах этой темы в целях простоты обозначений вместо символов $x_1, x_2, \ldots$ будем употреблять большие буквы латинского алфавита.

Основные задачи

Задача 114. Для данной схемы построить простейшую

1)



Решение. Составим соответствующую данной схеме формулу и упростим ее.

3. Схемы из функциональных элементов

3.1. Контактные схемы

Контактной схемой называется схема, состоящая из следующих элементов:

1) замыкающие контакты (которым соответствуют некоторые пропозициональные переменные);

2) размыкающие контакты (которым соответствуют отрицания некоторых пропозициональных переменных);

3) последовательное соединение контактов (которым соответствует конъюнкция некоторых пропозициональных переменных или их отрицаний);

4) параллельное соединение контактов (которым соответствует дизъюнкция некоторых пропозициональных переменных или их отрицаний).

Поскольку каждый из определенных выше элементов контактной схемы можно рассматривать как некоторую булеву функцию, то их можно отождествить с некоторыми пропозициональными переменными и тогда, согласно принципу суперпозиции, возможно построение более сложных схем.

Между множеством всех контактных схем и множеством всех булевых функций, построенных над базисом $\rceil$, $\vee$, $\wedge$ очевидно взаимнооднозначное соответствие: для каждой контактной схемы можно построить над базисом $\rceil$, $\vee$, $\wedge$ единственную булеву функцию и, с другой стороны, для каждой булевой функции, построенной над базисом $\rceil$, $\vee$, $\wedge$, можно построить единственную контактную схему. Таким образом, для контактных схем можно сформулировать следующие задачи.

Задача синтеза. Как по известным условиям работы некоторого контактного устройства построить его схему.

Задача анализа. Как по известной схеме контактного устройства определить условия его работы.

Задача упрощения. Задача упрощения состоит из следующих этапов:

1) решить задачу анализа и построить для данного контактного устройства соответствующую формулу;

2) используя законы для булевых функций, максимально упростить полученную формулу;

$N(A,B) = 30\%$ — процент всех студентов, которые читают журналы A и B;

$N(B,C) = 20\%$ — процент всех студентов, которые читают журналы B и C;

$N(A,C) = 40\%$ — процент всех студентов, которые читают журналы A и C;

$N(A,B,C) = 10\%$ — процент всех студентов, которые читают журналы A, B и C;

$N(\overline{A},\overline{B},\overline{C})$ — процент всех студентов, которые не читают ни один журнал.

Тогда: а) процент студентов, которые не читают ни один журнал:

$$N(\overline{A},\overline{B},\overline{C}) = N - N(A) - N(B) - N(C)$$
$$+N(A,B) + N(B,C) + N(A,C) - N(A,B,C) =$$
$$100\% - 60\% - 50\% - 50\% + 30\% + 20\% + 40\% - 10\% = 20\%.$$

б) найдем процент студентов, которые читают в точности журналы A и B:

$$N(A,B) - N(A,B,C) = 30\% - 10\% = 20\%,$$

процент студентов, которые читают в точности журналы B и C:

$$N(B,C) - N(A,B,C) = 20\% - 10\% = 10\%,$$

процент студентов, которые читают в точности журналы A и C:

$$N(A,C) - N(A,B,C) = 40\% - 10\% = 30\%.$$

Тогда процент студентов, которые читают в точности два журнала:

$$20\% + 10\% + 30\% = 60\%.$$

в) процент студентов, которые читают не менее двух журналов:

$$60\% + 10\% = 70\%$$

Задача 27. В отделе научно-исследовательского института работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 6 человек знают английский, 6 — немецкий, 7 — французский, 4 — английский и немецкий, 3 — немецкий и французский, 2 — французский и английский. Один человек знает все три языка. Сколько человек работает в отделе? Сколько из них знает только английский? Сколько — только французкий? (Ответ: 11; 1; 3).

Задача 28. На одной из кафедр университета работают 13 человек, причем каждый из них знает хотябы один иностранный язык. 10 человек знают английский, 7 — немецкий, 6 — французский, 5 — английский и немецкий, 4 — английский и французский, 3 — немецкий и французский. Сколько человек знают все три языка? Сколько — ровно два языка? Сколько — только английский? (Ответ: 2; 6; 3).

Задача 29. Староста одного класса дал следующие сведения об учениках:

В классе учатся 45 учеников, в том числе 25 мальчиков. Спортом занимаются 28 учеников, из них 18 мальчиков и 17 хорошо успевающих школьников. 15 мальчиков в классе учатся хорошо и в то же время занимаются спортом. Всего успевающих мальчиков в классе 16, а всех успевающих учеников класса — 30.

Показать, что сведения, данные старостой противоречивы.

Решение. Введем следующие обозначения:

a_1 — принадлежность к мужскому полу;
a_2 — успеваемость;
a_3 — занятие спортом.

Тогда:

$N(a_1)$ — число мальчиков;
$N(a_2)$ — число хорошо успевающих учеников класса;
$N(a_3)$ — число учеников, занимающихся спортом;
$N(a_1, a_3)$ — число мальчиков, которые занимаются спортом;
$N(a_1, a_2)$ — число мальчиков, которые хорошо успевают;
$N(a_2, a_3)$ — число хорошо успевающих школьников, которые занимаются спортом;
$N(a_1, a_2, a_3)$ — число мальчиков, которые хорошо успевают и в то же время занимаются спортом;
$N(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ — число девочек, которые плохо учатся и не занимаются спортом.

Теперь обозначим через N число учеников в классе. Все готово для применения формулы принципа включения и исключения:

Задача 112. Доказать, что любая функция из класса L принадлежит хотя бы одному из классов $T_0,\ T_1,\ S,\ M$.

Задача 113. Привести примеры линейных функций, содержащихся ровно в одном из классов $T_0,\ T_1, S$.

Задача 103. Показать, что не существует самодвойственных функций, существенно зависящих от двух переменных.

Задача 104. Подсчитать число самодвойственных функций, зависящих существенно от n переменных.

Задача 105. Выяснить, можно ли функцию $x_1 \Rightarrow x_2$ реализовать формулой над следующим множеством

1) $L \cup \{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3\}$;
2) $L \setminus S$;
3) $(L \cup \{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3\}) \setminus S$;
4) $(L \cup \{x_1x_2\}) \setminus S$.

Задача 106. Сколькими способами можно расставить скобки в выражении

$$x_1 \Rightarrow x_2 \Rightarrow x_3 \Rightarrow x_4 \Rightarrow x_1$$

так, чтобы получилась линейная функция?

Задача 107. Доказать следующие тождества.

1) $T_0^* = T_1$;
2) $(T_0 \cup T_1)^* = T_0 \cup T_1$;
3) $(T_0 \setminus S)^* = T_1 \setminus S$;
4) $(S \setminus T_0)^* = S \setminus T_1$.

Задача 108. Доказать, что если булева функция монотонна, то двойственная к ней функция так же является монотонной.

Задача 109. Показать, что всякая монотонная булева функция содержится не менее чем в двух классах из $T_0, \quad T_1, \quad L$.

Задача 110. Показать, что класс M не содержится ни в одном из классов $T_0, \quad T_1, \quad S, \quad L$.

Задача 111. Доказать, что всякая самодвойственная функция, не принадлежащая множеству $T_0 \cup T_1 \cup L \cup M$, образует базис в классе S.

$$N(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}) = N - N(a_1) - N(a_2) - N(a_3) +$$

$$N(a_1, a_2) + N(a_1, a_3) + N(a_2, a_3) - N(a_1, a_2, a_3) =$$

$$45 - 25 - 30 - 28 + 16 + 17 + 18 - 15 = -2.$$

Однако, понятно, что количество неуспевающих девочек, которые не занимаются спортом не может быть отрицательным числом. Поэтому сведения, поданные старостой противоречивы.

Задача 30. Найти число перестановок $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из n элементов в которых ни один элемент не остается на месте. (Ответ: $(n-k)!$).

Задача 31. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 3, 5, 7. (Ответ: 457).

Задача 32. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10, 15. (Ответ: 734).

Задача 33. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 20 два числа так, чтобы их сумма была нечетным числом? (Ответ: 100).

Задача 34. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если каждая из них может повториться несколько раз? (Ответ: 2058).

Задача 35. Сколькими способами можно переставить цифры числа 1234114546 так, чтобы три одинаковые цифры не стояли друг за другом? (Ответ: 88080).

Дополнительные задачи

Задача 36. В самолете находится 9 мальчиков, 5 белорусских детей, 9 взрослых мужчин, 7 иностранных детей, 14 белорусов, 6 белорусов мужского пола и 7 иностранок женского пола. Сколько всего людей находится в самолете?

Задача 37. Компания из 7 юношей и 10 девушек танцует. Если в каком-то танце учавствуют все юноши, то сколько имеется вариантов участия девушек в этом танце? Сколько имеется вариантов, когда какие-либо из девушек оказываются неприглашенными? Решить тот же вопрос при условии, что три конкретные девушки оказываются приглашенными на танец.

Задача 38. Допустим, что 15 студентов должны явиться на стадион для выполнения обязательного задания в один из трех указанных им дней.

а) сколькими способами могут студенты распределиться по дням явки на стадион;

б) сколько имеется способов распределения студентов по дням явки на стадион, если в каждый из этих дней выполняют задание одинаковое количество студентов.

Задача 39. Преподаватель рассчитывает читать один и тот же курс в течение 35 лет. Чтобы не наскучить студентам своими шутками, он решил рассказывать каждый год в точности три анекдота и не повторять никакие два года подряд одни и те же три анекдота. Каково минимальное количество анекдотов, которые он должен приготовить? Чему равно число анекдотов, если преподаватель решил не повторять ни одного анекдота два года подряд?

Задача 40. Сколькими способами можно ответить на десять вопросов, в которых предлагается установить истинность или ложность некоторых десяти утверждений, если на половину вопросов отвечать утвердительно и на половину отрицательно? Сколькими способами можно ответить на эти вопросы, если желать, чтобы никакие два последовательных ответа не были одинаковыми?

Задача 41. Комиссия из 8 человек должна быть разбита на три подкомитета, состоящих из 3, 2 и 3 человек соответственно, причем никакой из членов комиссии не должен одновременно учавствовать в двух подкомитетах. Сколькими различными способами можно провести деление комиссии на подкомитеты?

Задача 42. Сколькими различными способами можно распределить

данная в условии система не содержится целиком ни в одном из предполных классов. Следовательно, она полна.

Ответ: система полна.

2) $x_1\bar{x}_2, \;\; \bar{x}_1 \Leftrightarrow x_2x_3$;
3) $0, \; 1, \; x_1(x_2 \Leftrightarrow x_3) \vee \bar{x}_1(x_2 \oplus x_3)$;
4) $f_1(\tilde{x}^3) = (01101001), \; f_2(\tilde{x}^3) = (10001101), \; f_3(\tilde{x}^3) = (00011100)$;
5) $f_1(\tilde{x}^2) = (0010), \; f_2(\tilde{x}^4) = (1010110111110011)$;
6) $(S \setminus M) \cup (L \setminus (T_0 \cup T_1))$;
7) $(S \cap M) \cup (L \setminus M) \cup (T_0 \setminus S)$;
8) $(M \setminus (T_0 \cap T_1)) \cup (L \setminus S)$.

Задача 101. Выяснить, какое из соотношений $\supset$, $\subset$, $=$ имеет место для классов K_1 и K_2.

1) $K_1 = [x_1 \vee (x_1 \oplus x_2) \vee x_3]; \quad K_2 = [x_1 \vee x_2, \; x_1 \oplus x_2]$;

Решение. Функция $x_1 \vee (x_1 \oplus x_2) \vee x_3$ может быть получена с помощью функций $x_1 \vee x_2$ и $x_1 \oplus x_2$:
$x_1 \vee (x_1 \oplus x_2)$;
$(x_1 \vee (x_1 \oplus x_x)) \vee x_3 = x_1 \vee (x_1 \oplus x_2) \vee x_3$.
Получаем, что $K_1 \subseteq K_2$.

С другой стороны, функция $x_1 \oplus x_2$ не может быть получена из функции $x_1 \vee (x_1 \oplus x_2) \vee x_3$. Следовательно, $K_1 \subset K_2$.

Ответ: $K_1 \subset K_2$.

2) $K_1 = [x_1 \Leftrightarrow x_2, \; x_1 \vee x_2x_3]; \quad K_2 = [x_1 \oplus x_2x_3]$;
3) $K_1 = [x_1x_2, \; x_1 \oplus x_2]; \quad K_2 = [x_1 \Rightarrow x_2, \; x_1 \Leftrightarrow x_2]$;
4) $K_1 = [1, \; x_1 \vee x_2], \quad K_2 = [x_1 \oplus x_2, \; x_1 \vee x_2\bar{x}_3]$;
5) $K_1 = [x_1 \Rightarrow x_2], \quad K_2 = [x_1 \oplus x_2, \; x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3]$.

Дополнительные задачи

Задача 102. Доказать, что если самодвойственная функция зависит от n переменных, то $|N_f| = 2^{n-1}$.

одну переменную x_1:

$$(x_1 \wedge x_1) \oplus x_1 \overset{4.2}{=} x_1 \oplus x_1 \overset{5.7}{=} 0.$$

Таким образом мы получаем константу 0. Снова воспользуемся этой же формулой, подставив полученную константу:

$$(x_1 \wedge x_2) \oplus 0 \overset{5.8}{=} x_1 \wedge x_2.$$

Следовательно, нами получена функция $\wedge$.

Теперь воспользуемся второй формулой, в которую так же подставим только одну переменную x_1:

$$(x_1 \Leftrightarrow x_1) \oplus x_1 \overset{6.3}{=} ((x_1 \wedge x_1) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_1)) \oplus x_1 \overset{4.2}{=}$$

$$(x \vee \bar{x}_1) \oplus x_1 \overset{5.4}{=} 1 \oplus x_1 \overset{5.9}{=} \bar{x}_1.$$

Следовательно, нами получена функция $\rceil$.

Итак, используя данные в условии формулы, мы получили систему $\{\rceil, \wedge\}$, которая является полной. Следовательно, полной системой является и данное в условии множество формул.

2) $x_1 \Rightarrow x_2, \quad \rceil(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3)$;
3) $x_1 \Rightarrow x_2, \quad f(\tilde{x}^4) = (1100001100111100)$;
4) $f(\tilde{x}^2) = (1011) \quad f(\tilde{x}^4) = (1111110011000000)$;

Задача 100. Используя критерий полноты, выяснить, полна ли следующая система булевых функций.

1) $x_1 \Rightarrow x_2, \quad x_1 \Rightarrow \bar{x}_2 x_3$;

Решение. Для того, чтобы система была полна, необходимо и достаточно чтобы она не содержалась ни в одном из предполных классов, т.е. в классах $T_1,\ T_0,\ L,\ M,\ S$. Поскольку $0 \Rightarrow 0 = 1$, то функция $x_1 \Rightarrow x_2$ не принадлежит классу T_0. Поскольку $1 \Rightarrow (\bar{1} \wedge 1) = 1 \Rightarrow (0 \wedge 1) = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 0 = 0$, то функция $x_1 \Rightarrow \bar{x}_2 x_3$ не принадлежит классу T_1. Поскольку векторное задание функции $x_1 \Rightarrow x_2$ содержит нечетное число единиц, то эта функция не принадлежит классу S. Кроме того, для этой же функции не сохраняется отношение предшествования на наборах $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Значит, она не принадлежит классу M. Наконец для функции $x_1 \Rightarrow x_2$ полином Жегалкина имеет вид $(x_1 x_2) \oplus x_1 \oplus 1$. Следовательно, эта функция не принадлежит так же и классу L. Итак, получили, что

два красных и два синих ярлыка между четырьмя предметами? Сколькими различными способами между этими же предметами можно распределить красные, синие и зеленые ярлыки при условии, что у нас есть два красных, два синих и ни одного зеленого ярлыка? Используйте полученный ответ для того, чтобы показать целесообразность соглашения $C_n^m = 1$.

Задача 43. Студенту нужно выбрать два факультативных курса из шести возможных.

а) сколькими способами может быть сделан этот выбор?

б) сколько имеется способов выбора, если чтение каких-либо двух курсов совпадает по времени?

в) сколько имеется способов для выбора, если чтение двух курсов начинается в 10 часов, чтение двух других — в 12 часов, а в остальном курсы не пересекаются во времени?

Задача 44. Доказать, что множество из десяти элементов содержит больше подмножеств из пяти элементов, чем подмножеств из любого другого фиксированного числа элементов.

Задача 45. Сколькими способами можно расположить за круглым столом n супружеских пар так, чтобы мужчины и женщины чередовались и никакие из супругов не сидели бы вместе?

1.3. Рекуррентные соотношения

Рекуррентным соотношением (*рекуррентной формулой*) называется формула вида $a_n = f(n, a_{n-1} \dots a_{n-k})$ выражающая при $n > k$ каждый член последовательности a_n через предыдущие k членов a_{n-1}, $a_{n-2}, \dots$, a_{n-k}. Число k называется *порядком* рекуррентного соотношения.

Последовательность $\{a_n\}$ называют *решением рекуррентного соотношения*, если при ее подстановке в это рекуррентное соотношение, оно тождественно выполняется.

Решение рекуррентного соотношения называется *частным*, если оно не зависит от произвольной постоянной и каждый его член определяется однозначно, завися лишь от номера.

Решение рекуррентного соотношения k-того порядка называется *общим*, если оно зависит от k произвольных постоянных C_1, $C_2, \dots$, C_k. Путем подбора этих постоянных можно получить любое частное решение данного рекуррентного соотношения, удовлетворяющее k начальным условиям.

Общее решение рекуррентного соотношения — это общая формула, "собирающая" все частные решения.

Рекуррентное соотношение вида:

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \dots + a_k f(n) + \vartheta(n), \quad (1.2)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{C}$, $\vartheta(n) \not\equiv 0$ называется *линейным рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами*.

Рекуррентное соотношение вида:

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \dots + a_k f(n) \qquad (1.3)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ называется *линейным однородным рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами.*

Уравнение

$$x^k - a_1 x^{k-1} \dots - a_k = 0 \qquad (1.4)$$

называется *характеристическим уравнением* рекуррентного соотношения (1.3).

Общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения (1.3) имеет вид

$$\alpha(n) = \sum_{i=1}^{s} (C_{i_1} + C_{i_2} n + \dots + C_{i_r} n^{r-1}) \lambda_i^n,$$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	**0**
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	1	1	**0**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

Проведем анализ этой таблицы. Нужно просмотреть все наборы, которые находятся в отношении предшествования и проверить, сохраняется ли предшествование для значений функции на этих наборах.

Набор $(0,0,0)$ предшествует любому набору. Значение функции на этом наборе равно 0. Следовательно, отношение предшествования в данном случае не нарушается. Набор $(1,1,1)$ не может предшествовать никакому другому набору, наоборот, любой набор предшествует набору $(1,1,1)$. Поскольку значение функции на наборе $(1,1,1)$ равно 1, то и в данном случае отношение предшествования сохраняется.

Перейдем теперь к просмотру других наборов значений переменных. Поскольку набор $(0,1,0)$ предшествует набору $(0,1,1)$, но

$$f(0,1,0) \not\preccurlyeq f(0,1,1),$$

то в данном случае отношение предшествования нарушается. Следовательно, данная функция монотонной не является.

Ответ: функция монотонной не является.

7 $f(\tilde{x}^4) = (0001010101010111)$;
8 $f(\tilde{x}^4) = (0000000010111111)$.

Задача 99. Сведением к заведомо полным системам в P_2 показать, что данное множество является полным в P_2.

1) $(x_1 \wedge x_2) \oplus x_3, \quad (x_1 \Leftrightarrow) \oplus x_3$;

Решение. Воспользуемся первой формулой, подставив в нее только

1) $((x_1 \vee x_2) \Rightarrow (x_1 x_2 x_3)) \oplus ((x_1 \Leftrightarrow x_2) \Rightarrow x_3)$;

2) $(x_1 x_2 \Rightarrow) \oplus ((x_1 \Rightarrow x_2) \Leftrightarrow (x_3 \oplus \bar{x}_1 x_2))$;

3) $((x_1 \Rightarrow x_2) \wedge (x_2 \Rightarrow x_3)) \vee (x_3 \Rightarrow x_2)$;

Решение. Для того, чтобы выяснить, принадлежит ли данная булева функция классу T_0, достаточно найти ее значение на наборе $(0, 0, \dots, 0)$, а для того, чтобы выяснить, принадлежит ли данная булева функция классу T_1, достаточно найти ее значение на наборе $(1, 1, \dots, 1)$.

$$((0 \Rightarrow 0) \wedge (0 \Rightarrow 0)) \vee (0 \Rightarrow 0) = (1 \wedge 1) \vee 1 = 1.$$

$$((1 \Rightarrow 1) \wedge (1 \Rightarrow 1)) \vee (1 \Rightarrow 1) = (1 \wedge 1) \vee 1 = 1.$$

Следовательно, данная функция сохраняет константу 1, но не сохраняет константу 0. Поэтому она принадлежит множеству $T_1 \setminus T_0$.

Ответ: функция принадлежит множеству $T_1 \setminus T_0$.

4) $\rceil(((x_1 \vee x_2) \Rightarrow (x_1 \vee x_2 x_3)) \vee (x_2 \Leftrightarrow) \Rightarrow x_1))$;

5) $(x_1 x_2 \oplus x_3) \Rightarrow \rceil((x_1 \Rightarrow x_2) \vee (x_3 \oplus x_1 x_2))$;

6) $((x_1 \Rightarrow x_2) \wedge (\rceil(x_2 \vee x_3)) \vee (x_3 \Rightarrow x_2)$.

Задача 98. Какие из указанных функций являются монотонными.

1) $x_1 \Rightarrow (x_1 \Rightarrow x_2)$;

2) $x_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow x_1)$;

3) $x_1 x_2 (x_1 \oplus x_2)$;

4) $x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_3$;

5) $f(\tilde{x}^3) = (00110111)$;

6) $f(\tilde{x}^3) = (01100111)$;

Решение. Составим таблицу истинности для данной функции.

где C_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant s;\ 1 \leqslant j \leqslant r)$ — комплексные числа, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ — различные корни характеристического уравнения соответственно кратности $r_1, r_2, \dots, r_s$.

Общее решение рекуррентного соотношения (1.2) можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного соотношения (1.3) и некоторого частного решения соотношения (1.2).

Для каждого из видов функции $\vartheta(n)$ рекуррентного соотношения (1.2), частное решение имеет определенный вид.

В случае, когда $\vartheta(n) = R_m(n)\lambda^n$, где R_m — многочлен степени m, соответствующий n-ному члену последовательности и $\lambda \neq 0$, частное решение соотношения (1.2) имеет вид $Q_m(n)\lambda^n$, где Q_m — многочлен степени m, соответствующий n-ному члену последовательности, если λ не является корнем характеристического уравнения и вид $n^r Q_m(n)\lambda^n$, если λ — корень характеристического уравнения кратности r $(r \geqslant 1)$.

Основные задачи

Задача 46. Показать, что рекуррентное соотношение

$$f(n) = \frac{\dfrac{x}{f(n-1)} + f(n-1)}{2}$$

при начальном условии $f(0) = 2$ можно использовать для вычисления квадратного корня из числа x.

Задача 47. Найти общее решение рекуррентного соотношения

$$f(n+2) = 3f(n+1) - 2f(n).$$

Решение. Составим характеристическое уравнение, соответствующее данному рекуррентному соотношению:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Корнями данного характеристического уравнения являются числа $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$. Кратность каждого из корней — единица. Следовательно, решение данного рекуррентного соотношения запишется в виде:

$$\alpha(n) = \sum_{i=1}^{s} C_{i1}\lambda_i^n = C_{11} \cdot 1^n + C_{21} \cdot 2^n = C_1 + C_2 \cdot 2^n.$$

Проверка:

$$C_1 + C_2 \cdot 2^{n+2} = 3(C_1 + C_2 \cdot 2^{n+1}) - 2(C_1 + C_2 \cdot 2^n);$$
$$C_1 + 4C_2 \cdot 2^n = 3C_1 + 6C_2 \cdot 2^n - 2C_1 - 2C_2 \cdot 2^n;$$
$$C_1 + 4C_2 \cdot 2^n = C_1 + 4C_2 \cdot 2^n.$$

Ответ: $C_1 + C_2 \cdot 2^n$.

Задача 48. Найти частное решение рекуррентного соотношения
$$f(n+2) = 4f(n+1) - 4f(n),$$
удовлетворяющее начальным условиям $f(0) = 1$; $f(1) = 4$.

Решение. Данному рекуррентному соотношению соответствует характеристическое уравнение:
$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$
Это характеристическое уравнение имеет один корень $\lambda_1 = 2$ кратности 2. Следовательно, решение данного рекуррентного соотношения запишется в виде:
$$\alpha(n) = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n.$$
Учитывая начальные значения, получаем систему:
$$\begin{cases} (C_1 + C_2 \cdot 0) \cdot 2^0 = 1; \\ (C_1 + C_2 \cdot 1) \cdot 2^1 = 4 \end{cases}$$
из которой легко получается
$$\begin{cases} C_1 = 1; \\ C_1 + C_2 = 2. \end{cases}$$
Поэтому $C_1 = C_2 = 1$. Следовательно, искомое решение — $(1+n) \cdot 2^n$.

Проверка:

$$(1+n+2) \cdot 2^{n+2} = 4(1+n+1) \cdot 2^{n+1} - 4(1+n) \cdot 2^n;$$
$$4(n+3) \cdot 2^n = 8(n+2) \cdot 2^n - 4(1+n) \cdot 2^n;$$
$$4n \cdot 2^n + 12 \cdot 2^n = 8n \cdot 2^n + 16 \cdot 2^n - 4 \cdot 2^n - 4n \cdot 2^n;$$
$$4n \cdot 2^n + 12 \cdot 2^n = 4n \cdot 2^n + 12 \cdot 2^n.$$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	1	1	**0**
1	0	0	**1**
1	0	1	**0**
1	1	0	**0**
1	1	1	**0**

Построим полином Жегалкина в общем виде:
$$\alpha_1 x_1 x_2 x_3 \oplus \alpha_2 x_1 x_2 \oplus \alpha_3 x_1 x_3 \oplus \alpha_4 x_2 x_3 \oplus \alpha_5 x_1 \oplus \alpha_6 x_2 \oplus \alpha_7 x_3 \oplus \alpha_8.$$
Используя построенную таблицу истинности, получаем:

$f(0,0,0) = 1$, следовательно $\alpha_8 = 1$;
$f(1,0,0) = 1$, следовательно $\alpha_5 = 0$;
$f(0,1,0) = 1$, следовательно $\alpha_6 = 0$;
$f(0,0,1) = 1$, следовательно $\alpha_7 = 0$;
$f(1,1,0) = 0$, следовательно $\alpha_2 = 1$;
$f(0,1,1) = 0$, следовательно $\alpha_3 = 1$;
$f(1,0,1) = 0$, следовательно $\alpha_4 = 1$;
$f(1,1,1) = 0$, следовательно $\alpha_1 = 0$.

Подставив полученные значения для коэффициентов, получаем, что полином Жегалкина данной в условии функции имеет вид:
$$x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_3.$$
По определению, функция не является линейной. Следовательно, данная функция удовлетворяет условию задачи.

Ответ: может.

4) $f(\tilde{x}^4) = (1111000110101000)$;
5) $f(\tilde{x}^4) = (1110110101010000)$;
6) $f(\tilde{x}^4) = (1110011000001000)$.

Задача 97. Выяснить, каким из множеств $T_0 \cap T_1$, $T_1 \setminus T_0$, $T_0 \setminus T_1$ принадлежат функции.

1) $f(\tilde{x}^3) = (11001010)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (00110011)$;

3) $f(\tilde{x}^4) = (1010101001101000)$;

Решение. Если булева функция является линейной, то ее векторное задание должно содержать четное число единиц. Векторное задание данной функции содержит нечетное число единиц. Следовательно, функция линейной не является.

Ответ: функция не является линейной.

4) $f(\tilde{x}^4) = (1101011010010111)$;

5) $f(\tilde{x}^4) = (1001011001101001)$;

6) $f(\tilde{x}^4) = (0100100010100101)$.

Задача 96. Выяснить, можно ли из данной функции с помощью подстановки на места ее переменных функций $0,\ 1,\ x,\ y,\ \bar{x},\ \bar{y}$, получить xy.

1) $f(\tilde{x}^3) = (11101010)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (10001000)$;

3) $f(\tilde{x}^3) = (11101000)$;

Решение. Для того, чтобы булева функция удовлетворяла условию задачи, необходимо, чтобы она не была линейной. Поскольку векторное задание функции содержит $2^{n-1} = 2^2 = 4$ единиц, то необходимое условие для того, чтобы функция была линейной, выполняется. Но это условие не является достаточным. Составим таблицу истинности для этой функции

Из первоначального соотношения получим:

$$f(n) = f(n+1) - \frac{1}{4}f(n+2).$$

Теперь проверим, получатся ли заданные в условии задачи значения для начальных условий:

$$f(0) = f(1) - \frac{1}{4}f(2).$$

$$f(0) = 2\cdot 2^1 - \frac{1}{4}\cdot 3\cdot 2^2 = 1;$$

$$f(1) = f(2) - \frac{1}{4}f(3);$$

$$f(1) = 3\cdot 2^2 - \frac{1}{4}\cdot 4\cdot 2^3 = 4.$$

Ответ: $(1+n)\cdot 2^n$.

Задача 49. Найти частное решение рекуррентного соотношения

$$f(n+1) = \frac{1}{3}f(n) + 2,$$

удовлетворяющее начальному условию $f(0) = 6$.

Решение. Данное рекуррентное соотношение является неоднородным. Решим вначале соответствующее ему однородное рекуррентное соотношение, т.е. рекуррентное соотношение

$$f(n+1) = \frac{1}{3}f(n).$$

Составим характеристическое уравнение для этого рекуррентного сооотношения:

$$\lambda - \frac{1}{3} = 0.$$

Это характеристическое уравнение имеет один корень — $\lambda_1 = \dfrac{1}{3}$. Следовательно, общим решением однородного рекуррентного соотношения является выражение

$$C_1(\frac{1}{3})^n.$$

В исходном неоднородном рекуррентном соотношении $v(n) = 2$. Это выражение запишем в виде

$$R_m(n)\lambda^n = 2\cdot 1.$$

Следовательно, $m = 0$, $R_0(n) = 2$ и $\lambda = 1$. Поскольку 1 не является корнем характеристического уравнения, то должно существовать решение вида $Q_0(n) \cdot 1^n$, где $Q_0(n)$ — многочлен нулевой степени, т.е. частное решение будем искать в виде $C \cdot 1^n = C$. Подставив в исходное рекуррентное соотношение это выражение, получим:

$$C = \frac{C}{3} + 2.$$

Значит, C=3. Поэтому общее решение данного в условии рекуррентного соотношения можно получить в виде суммы общего решения соответствующего однородного рекуррентного соотношения и полученного частного решения:

$$C_1(\frac{1}{3})^n + 3.$$

Из начального условия $f(0) = 6$ находим, что

$$C_1(\frac{1}{3})^0 + 3 = 6$$

и поэтому $C_1 = 3$. Теперь частное решение данного в условии задачи рекуррентного соотношения, которое удовлетворяет заданным условиям, будет иметь вид:

$$\alpha(n) = 3 \cdot (\frac{1}{3})^n + 3 = 3 \cdot \big((\frac{1}{3})^n + 1\big).$$

Подставив полученное решение в исходное соотношение, легко сделать проверку (нужно так же проверить и выполнимость начальных условий).

Ответ: $3 \cdot \big((\frac{1}{3})^n + 1\big)$.

Задача 50. Найти частное решение рекуррентного соотношения

$$f(n+1) = f(n) + n + 1,$$

удовлетворяющее начальному условию $f(0) = 1$.

Решение: Соответствующее однородное рекуррентное соотношение имеет вид:

$$f(n+1) = f(n).$$

Его характеристическим уравнением будет уравнение $\lambda = 1$. Его корнем будет $\lambda_1 = 1$. Кратность корня равна 1. Поэтому общим решением

$((x_1$	$\Rightarrow$	$x_2)$	$\wedge$	$(x_2$	$\Rightarrow$	$x_1))$	$\Leftrightarrow$	x_3
0	1	0	0	0	1	0	**0**	0
0	1	0	0	0	1	0	**1**	1
0	1	1	0	1	0	0	**1**	0
0	1	1	0	1	0	0	**0**	1
1	0	0	0	0	1	1	**1**	0
1	0	0	0	0	1	1	**0**	1
1	1	1	0	1	1	1	**0**	0
1	1	1	0	1	1	1	**1**	1

Теперь построим полином Жегалкина методом неопределенных коэффициентов, который был подробно разобран в предыдущей теме. Для этого вначале построим полином Жегалкина в общем виде:

$$\alpha_1 x_1 x_2 x_3 \oplus \alpha_2 x_1 x_2 \oplus \alpha_3 x_1 x_3 \oplus \alpha_4 x_2 x_3 \oplus \alpha_5 x_1 \oplus \alpha_6 x_2 \oplus \alpha_7 x_3 \oplus \alpha_8.$$

Используя построенную таблицу истинности, получаем:

$f(0,0,0) = 0$, следовательно $\alpha_8 = 0$;
$f(1,0,0) = 1$, следовательно $\alpha_5 = 1$;
$f(0,1,0) = 1$, следовательно $\alpha_6 = 1$;
$f(0,0,1) = 1$, следовательно $\alpha_7 = 1$;
$f(1,1,0) = 0$, следовательно $\alpha_2 = 0$;
$f(0,1,1) = 0$, следовательно $\alpha_3 = 0$;
$f(1,0,1) = 0$, следовательно $\alpha_4 = 0$;
$f(1,1,1) = 1$, следовательно $\alpha_1 = 0$.

Подставив полученные значения для коэффициентов, получаем, что полином Жегалкина данной в условии функции имеет вид:

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3.$$

По определению, данная в условии функция является линейной.

Ответ: функция является линейной.

5) $(((x_1 \vee x_2) \Rightarrow x_3) \Rightarrow x_4) \vee x_1$;
6) $(x_1 \oplus x_2) \wedge (x_2 \oplus x_3) \wedge (x_1 \oplus x_3)$.

Задача 95. Выяснить, является ли функция линейной.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	**0**
0	0	1	**0**
0	1	0	**1**
0	1	1	**1**
1	0	0	**1**
1	0	1	**0**
1	1	0	**0**
1	1	1	**1**

Из таблицы видно, что указанным набором является набор $(0, 1, 1)$.

$\bar{x}$	x	x	f
1	0	0	**1**
0	1	1	**1**

Итак, нами получена константа 1.

2) $((x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge x_4) \vee \bar{x}_1 x_2 x_3$;
3) $(x_1 x_2) \Rightarrow (x_1 \oplus x_3)$;
4) $x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_4 \vee x_3 x_4$;
5) $x_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow (x_3 \Rightarrow x_4))$;
6) $(x_1 \Rightarrow x_2) \vee (x_3 \Rightarrow x_4)$.

Задача 94. Разлагая функцию в полином Жегалкина, выяснить, является ли она линейной.

1) $(x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2) \oplus x_3$;
2) $x_1 x_2 (x_1 \oplus x_2)$;
3) $\bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_4 x_1$;
4) $((x_1 \Rightarrow x_2) \wedge (x_2 \Rightarrow x_1)) \Leftrightarrow x_3$;

Решение. Построим для данной функции таблицу истинности.

однородного рекуррентного соотношения будет выражение
$$C_1 \cdot 1^n = C_1.$$
Поскольку в исходном рекуррентном соотношении
$$v(n) = (n+1) \cdot 1^n = R_1(n) \cdot 1^n$$
и 1 является корнем характеристического уравнения соответствующего однородного соотношения, то частное решение исходного рекуррентного соотношения будем искать в виде $n(an+b)$. Подставив это выражение в исходное рекуррентное соотношение, получим:
$$(n+1)(a(n+1)+b) = n(an+b) + n + 1$$
или, после приведения подобных,
$$2an + a + b = n + 1.$$
Поэтому, приравняв коэффициенты при степенях многочлена, получаем систему
$$\begin{cases} 2a = 1; \\ a + b = 1. \end{cases}$$
Решив эту систему, получаем: $a = b = \dfrac{1}{2}$.

Следовательно, общее решение исходного рекуррентного соотношения имеет вид:
$$\alpha(n) = \frac{n}{2}(n+1) + C_1.$$
Подставив в это соотношение начальное условие $f(0) = 1$, получим, что
$$\frac{0}{2}(0+1) + C_1 = 1,$$
откуда $C_1 = 1$. Таким образом, получаем, что для заданного начального условия, частным решением исходного рекуррентного соотношения является
$$\frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Теперь, как и в предыдущих задачах, осталось сделать проверку.

Ответ: $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1, \quad (n \geqslant 0)$.

Задача 51. Найти общее решение рекуррентного соотношения:

1) $f(n+3) = -10f(n+2) - 32f(n+1) - 32f(n)$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение для данного рекуррентного соотношения:

$$\lambda^3 + 10\lambda^2 + 32\lambda + 32 = 0.$$

Проверка дает корень $\lambda_1 = -4$. Разделив уголком, получим разложение

$$(\lambda+4)(\lambda^2 + 6\lambda + 8) = 0.$$

Вторая скобка представляет собой квадратный трехчлен, который можно разложить на линейные множители и представить уравнение в виде:

$$(\lambda+4)(\lambda+4)(\lambda+2) = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \lambda+4=0; \\ \lambda+4=0; \\ \lambda+2=0. \end{array}\right.$$

Следовательно, в нашем случае, получаем корень $\lambda_1 = -4$ кратности 2 и корень $\lambda_2 = -2$ кратности 1. Следовательно, общим решением исходного рекуррентного соотношения будет соотношение

$$(C_1 + C_2 n)\cdot(-4)^n + C_3(-2)^n.$$

Проверка:

$$(C_1 + C_2(n+3))\cdot(-4)^{n+3} + C_3(-2)^{n+3} =$$
$$-10((C_1+C_2(n+2))\cdot(-4)^{n+2}+C_3(-2)^{n+2})-32((C_1+C_2(n+1))\cdot(-4)^{n+1}+$$
$$C_3(-2)^{n+1}) - 32((C_1 + C_2 n)\cdot(-4)^n + C_3(-2)^n);$$

$$-64(C_1 + C_2(n+3))\cdot(-4)^n - 8C_3(-2)^n =$$
$$-10(16(C_1+C_2(n+2))\cdot(-4)^n+4C_3(-2)^n)-32(-4(C_1+C_2(n+1))\cdot(-4)^n-$$
$$2C_3(-2)^n) - 32((C_1 + C_2 n)\cdot(-4)^n + C_3(-2)^n);$$

$$-64(C_1 + C_2(n+3))\cdot(-4)^n - 8C_3(-2)^n =$$
$$-64(C_1 + C_2(n+3))\cdot(-4)^n - 8C_3(-2)^n.$$

Ответ: $(C_1 + C_2 n)\cdot(-4)^n + C_3(-2)^n$.

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	**0**
0	0	0	1	**0**
0	0	1	0	**0**
0	0	1	1	**1**
0	1	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**
0	1	1	0	**1**
0	1	1	1	**0**
1	0	0	0	**0**
1	0	0	1	**1**
1	0	1	0	**1**
1	0	1	1	**0**
1	1	0	0	**0**
1	1	0	1	**1**
1	1	1	0	**1**
1	1	1	1	**1**

Поскольку $(1,0,0,0) = (\bar{0},\bar{1},\bar{1},\bar{1})$, то для самодвойственной функции должно выполняться равенство $f(1,0,0,0) = \bar{f}(\bar{0},\bar{1},\bar{1},\bar{1})$. Из таблицы видно, что $f(1,0,0,0) = 0$ и $f(0,1,1,1) = 0$. Следовательно, данная функция самодвойственной не является.

Ответ: функция не является самодвойственной.

5) $f(\tilde{x}^4) = (0011001111001100)$;
6) $f(\tilde{x}^4) = (1100011100011100)$.

Задача 93. Из несамодвойственной функции с помощью подстановки на места переменных функций x и $\bar{x}$ получить константу.

1) $f((\tilde{x}^3) = (00111001)$;

Решение. Поскольку функция несамодвойственна, то найдется хотя бы один набор (a_1, a_2, a_3) значений переменных x_1, x_2, x_3 такой, что $f(a_1, a_2, a_3) = f(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$. Построим для данной функции таблицу истинности:

$$f(0,1) = 1 = \bar{0} = \bar{g}(1,0) = \bar{g}(\bar{0},\bar{1});$$

$$f(1,0) = 1 = \bar{0} = \bar{g}(0,1) = \bar{g}(\bar{1},\bar{0});$$

$$f(1,1) = 0 = \bar{1} = \bar{g}(0,0) = \bar{g}(\bar{1},\bar{1}),$$

то, по определению двойственной функции (это определение было дано в теме “Булевы функции и их свойства”), функция g является двойственной к функции f.

Ответ: является.

2) $f(\tilde{x}^2) = x_1 \Rightarrow x_2$
$g(\tilde{x}^2) = x_2 \Rightarrow x_1$;
3) $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$;
$g(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3$;
4) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$;
$g(\tilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$;
5) $f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1(x_2 \Leftrightarrow x_3)$;
$g(\tilde{x}^3) = (01101101)$;
6) $f(\tilde{x}^3) = (11001100)$;
$g(\tilde{x}^3) = (10101100)$.

Задача 92. Самодвойственны ли следующие функции?

1) $(x_1x_2 \vee x_3) \Rightarrow x_1$;
2) $\rceil((x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow x_1x_3) \Rightarrow (x_2 \Rightarrow x_3)$;
3) $((\bar{x}_1 \vee x_x \vee \bar{x}_3) \wedge x_4) \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$;
4) $f(\tilde{x}^4) = (0001001001100111)$;

Решение. Составим таблицу истинности по векторному заданию функции:

2) $f(n+3) = -3f(n+2) - 3f(n+1) - f(n)$.

Задача 52. Найти a_n по рекуррентным соотношениям и начальным условиям:

1) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$; $a_1 = 10$; $a_2 = 16$;
2) $a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$; $a_1 = 3$; $a_2 = 7$; $a_3 = 27$;

Решение. Данное рекуррентное соотношение запишем в виде

$$f(n+3) = 3f(n+1) - 2f(n).$$

Составляем соответствующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Проверка показывает, что $\lambda_1 = 1$ — корень. После деления уголком, получаем разложение

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0.$$

После разложения второй скобки:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0.$$

Следовательно, получаем корень $\lambda_1 = 1$ кратности 2 и корень $\lambda_2 = -2$ кратности 1. Тогда общее решение исходного рекуррентного соотношения будет иметь вид:

$$C_1 + C_2n + C_3(-2)^n.$$

Воспользуемся теперь начальными условиями:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 2 \cdot C_3 = 3; \\ C_1 + 2 \cdot C_2 + 4 \cdot C_3 = 7; \\ C_1 + 3 \cdot C_2 - 8 \cdot C_3 = 27. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим следующие значения:

$$C_1 = -\frac{73}{9}; \quad C_2 = \frac{84}{9}; \quad C_3 = -\frac{8}{9}.$$

Следовательно:

$$a_n = -\frac{73}{9} + \frac{84}{9}n - \frac{8}{9}(-2)^n.$$

Теперь осталось сделать проверку.

Ответ: $a_n = -\dfrac{73}{9} + \dfrac{84}{9}n - \dfrac{8}{9}(-2)^n$.

3) $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 27 \cdot 5^n$; $a_1 = -9$; $a_2 = 45$.

4) $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_1 1 - 6a_n = 6n^2 - 4n - 17$; $a - 1 = 3$; $a_2 = 15$: $a_3 = 41$.

Задача 53. Найти общее решение рекуррентного соотношения:

1) $f(n+3) = 3f(n+1) - 2f(n)$;
2) $f(n+3) = 2f(n+2) - f(n+1) - 4f(n)$;
3) $f(n+3) = 3f(n+2) + 3f(n+1) - 10f(n)$;
4) $f(n+3) = 7f(n+1) - 6f(n)$.

Задача 54. Найти частное решение неоднородного рекуррентного соотношения, заданного начальными условиями:

1) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 41 \cdot 3^n$;
2) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 12 \cdot 6^n$;
3) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 6 \cdot 5^n$;
4) $a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 19 \cdot 5^n$.

Дополнительные задачи

Задача 55. Найти общее решение рекуррентного соотношения:

1) $a_{n+2} + 3a_n = 0$;
2) $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$;
3) $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0$.

Задача 56. Найти a_n по рекуррентным соотношениям и начальным условиям:

1) $a_{n+3} - 3a_{n+2} + a_{n+1} - 3a_n = 0$; $a_1 = 3$; $a_2 = 7$; $a_3 = 27$;
2) $a_{n+2} - 2 \cdot (\cos\alpha) \cdot a_{n+1} = a - n = 0$; $a_1 = \cos\alpha$; $a_2 = \cos 2\alpha$.

Задача 57. Доказать, что если $x = 1$ не является корнем многочлена $x^2 - 2x - 6$, то частным решением соответствующего рекуррентного соотношения

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 6a_n = 4n + 5$$

Класс $K \subset P_2$ называется *предполным* (или *максимальным*), если K не является полным, но для любой функции $f \in P_2 \setminus K$ система $\{f\} \cup K$ полна.

Предполный класс является замкнутым.

Существует ровно 5 предполных классов — T_0, T_1, S, M, L.

Система $A = \{x_1x_2; 0; 1; x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$ является полной.

Система A из замкнутого класса M называется полной в M, если любая функция из M может быть задана формулой над A.

Система A из замкнутого класса M называется его *базисом*, если система A полна в M, но любая ее собственная подсистема не полна в M.

Из любой полной системы булевых функций можно выделить подсистему, содержащую не более четырех функций, которая также полна.

Система $A = \{x_1x_2; 0; 1; x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$ является базисом в P_2. Ввиду этого нельзя требовать дальнейшего уменьшения числа функций в базисе.

Первая теорема Поста Каждый замкнутый класс булевых функций имеет конечный базис.

Вторая теорема Поста Множество всех замкнутых классов в P_2 счетно.

Основные задачи

Задача 91. Является ли функция g двойственной к функции f?

1) $f(\tilde{x}^2) = x_1 \oplus x_2$;
$g(\tilde{x}^2) = x_1 \Leftrightarrow x_2$;

Решение. Составим таблицы истинности для обеих функций:

x_1	$\oplus$	x_2	x_1	$\Leftrightarrow$	x_2
0	**0**	0	0	**1**	0
0	**1**	1	0	**0**	1
1	**1**	0	1	**0**	0
1	**0**	1	1	**1**	1

Поскольку

$$f(0,0) = 0 = \bar{1} = \bar{g}(1,1) = \bar{g}(\bar{0},\bar{0});$$

Если булева функция $f(\tilde{x})$ не является линейной, то из нее путем подстановки констант $0, 1$, функций $x, \overline{x}$, а также может быть и взятием от нее отрицания, можно получить формулу, которая реализует булеву функцию $x_1 x_2$.

Система булевых функций M называется *полной*, если любую булеву функцию можно представить как формулу над M.

Система P_2 является полной; система $\{0, 1\}$ не является полной.

Система $\{\rceil, \wedge, \vee\}$ является полной.

Пусть даны две системы булевых функций

$$\{f_1, f_2, \ldots, f_m\} \tag{2.1}$$

и

$$\{g_1, g_2, \ldots, g_s\} \tag{2.2}$$

такие, что система (2.1) является полной и каждая ее функция может быть задана формулой над (2.2). Тогда система (2.2) является полной.

Полными являются системы $\{\rceil, \wedge\}$, $\{\rceil, \vee\}$, $\{0, 1, \wedge, \oplus\}$.

Понятно, что система, содержащая все операции полна. Системы $\{\rceil, \vee\}$ и $\{\rceil, \wedge\}$ содержат всего две операции. Возникает вопрос: существуют ли системы, которые состоят из одной операции и являются полными?

Вспомогательными булевыми функциями называются булевы функции, заданные с помощью следующей таблицы

x	y	$\vert$	$\downarrow$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

$x|y$ — *штрих Шеффера*;

$x \downarrow y$ — *стрелка Пиркса.*

Справедливы следующие равенства: $\overline{x} = x|x$; $\overline{x} = x \downarrow x$; $x \vee y = \overline{x}|\overline{y}$; $xy = \overline{x} \downarrow \overline{y}$.

Системы $\{|\}$ и $\{\downarrow\}$ полны.

Для того, чтобы система булевых функций была полной необходимо и достаточно чтобы она целиком не содержалась ни в одном из классов T_0, T_1, S, M, L.

Всякий замкнутый класс K булевых функций такой, что $K \neq P_2$ содержится хотя бы в одном из классов T_0, T_1, S, M, L.

является последовательность $a_n = an + b$. Найти a и b.

Задача 58. Доказать, что если $x = 1$ — простой корень многочлена $x^2 - 5x + 6$, то частное решение соответствующего рекуррентного соотношения может быть найдено в виде $a_n = n(an + b)$. Найти a и b.

Задача 59. Доказать, что если $x = 1$ — кратный корень многочлена x^2+2x-3, то частное решение может быть найдено в виде $a_n = n^2(an+b)$. Найти a и b.

2. Булевы функции

2.1. Булевы функции и их свойства

Функция $f : B^n \to B$, где $B = \{0, 1\}$ называется *булевой функцией* или *функцией алгебры логики*.

Аргументы булевых функций берутся из некоторого множества $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m, \dots\}$.

Наборами значений переменных являются упорядоченные n-элементные выборки с возвращением из множества $\{0, 1\}$.

Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — булева функция и $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ — некоторая выборка из B^2, то $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ есть *значение этой функции на наборе* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, если это значение на указанном наборе определено (может быть и противное).

Через P_2 обозначается множество *всех всюду определенных булевых функций*, а через $P_2^{(n)}$ — *множество всех булевых функций от n аргументов* $(n \geqslant 1)$.

Выражение $\tilde{x}^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *векторным заданием аргумента.*

Булеву функцию можно задавать с помощью таблицы в которой в первых n столбцах стоят все возможные наборы значений переменных, а в $n+1$ столбце — значения самой булевой функции. Наборы значений переменных принято располагать в так называемом естественном порядке. Для того, что бы понять принцип такого расположения, достаточно привести пример булевой функции от трех переменных:

x_1	x_2	x_3		f
0	0	0		**1**
0	0	1		**1**
0	1	0		**0**
0	1	1		**1**
1	0	0		**0**
1	0	1		**1**
1	1	0		**1**
1	1	1		**0**

Задание значений переменных в естественном порядке позволяет использовать более компактное векторное задание булевой функции. На-

Класс L замкнут.

Булева функция $f(\tilde{x}^n)$ называется *самодвойственной булевой функцией*, если $f(\tilde{x}^n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$. Множество всех самодвойственных булевых функций называется *классом самодвойственных булевых функций* и обозначается через S. Класс S можно определить еще и так: $S = \{f \mid f = f^*\}$.

Наборы $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n)$ переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются *противоположными.*

Класс S замкнут и содержит ровно $\sqrt{2^{2^n}}$ булевых функций от n переменных.

На противоположных наборах самодвойственная функция принимает противоположные значения (векторное задание такой функции является как-бы "симметричным наоборот").

На множестве $\{0, 1\}$ определим бинарное отношение $\leqslant$ следующим образом: $0 \leqslant 0,\ 0 \leqslant 1,\ 1 \leqslant 1$.

Вектор $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *предшествует* вектору $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ если $a_1 \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant b_2, \dots, a_n \leqslant b_n$. При этом используется обозначение

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \prec (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Булева функция $f(\tilde{x}^n)$ называется *монотонной булевой функцией*, если для любых наборов $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ таких, что

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \prec (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

всегда выполняется

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \leqslant f(b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Множество всех монотонных булевых функций называется *классом монотонных булевых функций* и обозначается через M.

Класс M замкнут.

Если монотонная булева функция не является константой, то она может быть задана ДНФ без отрицаний переменных.

Классы T_0, T_1, S, M, L различны.

Если булева функция $f(\tilde{x}^n)$ не является самодвойственной, то из нее путем подстановки функций x и $\overline{x}$ можно получить формулу, которая реализует несамодвойственную булеву функцию одного переменного, т.е. константу.

Если булева функция $f(\tilde{x}_n)$ не является монотонной, то из нее путем подстановки констант $0, 1$ и функции x, можно получить формулу, которая реализует булеву функцию $\overline{x}$.

2.3. Полнота и замкнутость систем булевых функций

Пусть M — некоторое непустое множество булевых функций. *Замыканием* множества M называется множество, которое обозначается через $[M]$ и состоит из всех булевых функций, которые могут быть заданы формулой над M.

Класс M называется *замкнутым*, если $[M] = M$.

Для замыкания справедливы следующие соотношения:

1) $M \subseteq [M]$;

2) $[M] = [[M]]$;

3) если $M_1 \subseteq M_2$, то $[M_1] \subseteq [M_2]$;

4) $[M_1] \cup [M_2] \subseteq [M_1 \cup M_2]$.

Булева функция $f(\tilde{x}^n)$ называется *булевой функцией, сохраняющей константу* 0, если $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$. Множество всех булевых функций от n переменных, сохраняющих константу 0 называется *классом булевых функций сохраняющих константу* 0 и обозначается T_0.

Булева функция $f(\tilde{x}^n)$ называется *булевой функцией, сохраняющей константу* 1, если $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$. Множество всех булевых функций от n переменных, сохраняющих константу 1 называется *классом булевых функций сохраняющих константу* 1 и обозначается T_1.

Класс T_0 булевых функций замкнут и содержит ровно $2^{2^n - 1}$ булевых функций, зависящих от n переменных.

Класс T_1 булевых функций замкнут и содержит ровно $2^{2^n - 1}$ булевых функций, зависящих от n переменных.

Булева функция $f(\tilde{x}^n)$ называется *линейной булевой функцией*, если существуют $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1\}$ такие, что

$$f(\tilde{x}^n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n.$$

Множество всех булевых функций от n переменных, которые являются линейными, называется *классом линейных булевых функций* и обозначается L.

Если линейная булева функция $f(\tilde{x}^n)$ не является константой, то ее векторное задание содержит 2^{n-1} единиц.

При $n \geqslant 2$ векторное задание линейной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ содержит четное число единиц.

Если при $n \geqslant 2$ векторное задание булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ содержит нечетное число единиц, то функция $f(\tilde{x}^n)$ не является линейной.

пример, $f(\tilde{x}^3) = (11010110)$.

Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *существенно зависит* от переменной x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, если существует такой набор $(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, что

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Эта переменная x_i называется *существенной*. Переменная которая не является существенной называется *фиктивной*.

Пусть булева функция $f(\tilde{x}^n)$ задана таблично и для некоторого $i = 1, 2, \ldots, n$ переменная x_i является ее фиктивной переменной. Вычеркивание из этой таблицы всех строк, которые соответствуют наборам $(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, где $(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ — некоторые наборы переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ и столбца в котором стоит переменная x_i, задает булеву функцию $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ от $n - 1$ переменных. Такое вычеркивание называется *удалением фиктивной переменной* x_i.

Необходимым признаком наличия в формуле фиктивной переменой является четное количество единиц или нулей в таблице истинности.

Операция, обратная операции удаления фиктивной переменной называется *операцией введения фиктивной переменной.*

Две булевы функции называются *равными*, если одна из них может быть получена из другой, путем удаления или введения фиктивных переменных.

Равенство булевых функций можно определить и по-другому. Две булевы функции называются равными, если на одних и тех же наборах значений их переменных, значения этих функций равны. Если две булевы функции заданы векторно, то они будут равны тогда и только тогда, когда совпадают их векторные задания.

Элементарными булевыми функциями называются функции, заданные с помощью следующих таблиц.

x	$\overline{x}$	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

x — *тождественная функция*;
$\bar{x}$ — *отрицание*;
0 — *константа* 0;
1 — *константа* 1;
$x \wedge y$ — *конъюнкция*;
$x \vee y$ — *дизъюнкция*;
$x \Rightarrow y$ — *импликация* (x — *посылка*, y — *заключение*);
$x \Leftrightarrow y$ — *эквиваленция*;
$x \oplus y$ — *сумма по модулю* 2.

Справедливы следующие утверждения:

1. Ассоциативные законы:

1.1. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
1.2. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$;
1.3. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$;

2. Коммутативные законы:

2.1. $x \wedge y = y \wedge x$;
2.2. $x \vee y = y \vee x$;
2.3. $x \oplus y = y \oplus x$;

3. Дистрибутивные законы:

3.1. $x(y \vee z) = xy \vee xz$;
3.2. $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$;
3.3. $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$.

4. Свойства операций $\rceil, \wedge, \vee$:

4.1. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{x}} = x$;
4.2. $x \wedge x = x \vee x = x$;

Законы де-Моргана:

4.3. $\overline{x \vee y} = \overline{x}\overline{y}$;

1) $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;
2) $(x_1 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;
3) $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$.

Задача 89. Найти длину сокращенной дизъюнктивной нормальной формы для следующих функций.

1) $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;
2) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus \ldots \oplus x_n$;
3) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_4 \oplus x_5 \oplus \ldots \oplus x_n)$;
4) $(x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_k) \wedge (x_{k+1} \oplus x_{k+2} \oplus \ldots \oplus x_n)$; $1 \leqslant k \leqslant n$;
5) $(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_k \vee \bar{x}_{k+1} \vee \bar{x}_{k+2} \vee \ldots \vee \bar{x}_n)$; $1 \leqslant k \leqslant n$;

Задача 90. Для следующих булевых функций найти сокращенную дизъюнктивную нормальную форму с помощью геометрической интерпретации.

1) $f(\tilde{x}^4) = (0110000101000110)$;
2) $f(\tilde{x}^4) = (0110101001011110)$;
3) $f(\tilde{x}^4) = (1110011000010000)$.

5) $f(\tilde{x}^3) = (10001010)$;
6) $f(\tilde{x}^3) = (10001000)$.

Дополнительные задачи

Задача 82. Построить все тупиковые дизъюнктивные нормальные формы для следующих функций:

1) $f(\tilde{x}^3) = (01111110)$;
2) $f(\tilde{x}^3) = (01111110)$;
3) $f(\tilde{x}^4) = (0110010101100110)$;
4) $f(\tilde{x}^4) = (0110101111011110)$;
5) $f(\tilde{x}^4) = (1110011000010101)$.

Задача 83. Выяснить, являются ли тупиковыми, минимальными или сокращенными следующие дизъюнктивные нормальные формы:

1) $x_1x_2 \vee x_2$;
2) $\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$;
3) $x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_2x_3$.

Задача 84. Найти длину СДНФ для следующих функций:

1)$f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;
2)$f(\tilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee \bar{x}_n)$;
3)$f(\tilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \oplus x_2 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus \ldots \oplus x_n$.

Задача 85. Среди функций, зависящих от переменных x_1 и x_2 найти те, которые имеют наибольшее число различных подфункций.

Задача 86. Подсчитать число булевых функций $f(\tilde{x}^n)$, которые после перестановки местами x_1 и x_2 не изменяют множества своих значений.

Задача 87. Указать функцию $f(\tilde{x}^n)$ у которой длина полинома Жегалкина в 2^n раз превосходит длину ее СДНФ.

Задача 88. Построить сокращенную дизъюнктивную нормальную форму по заданной конъюнктивной нормальной форме.

4.4. $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$.

5. Свойства констант:

5.1. $x\overline{x} = \overline{x}x = 0$;
5.2. $x0 = 0x = 0$;
5.3. $x1 = 1x = x$;
5.4. $x \vee \overline{x} = \overline{x} \vee x = 1$;
5.5. $x \vee 1 = 1 \vee x = 1$;
5.6. $x \vee 0 = 0 \vee x = x$;
5.7. $x \oplus x = 0$;
5.8. $x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$;
5.9. $x \oplus 1 = 1 \oplus x = \bar{x}$;

6. Выражение $\oplus$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ через $\rceil$, $\vee$, $\wedge$:

6.1. $x \oplus y = x\overline{y} \vee \overline{x}y = y\overline{x} \vee \overline{y}x$;
6.2. $x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y$;
6.3. $x \Leftrightarrow y = xy \vee \overline{xy} = \overline{xy} \vee xy$
6.4. $x \Leftrightarrow y = (x \vee \overline{y})(\overline{x} \vee y) = (y \vee \overline{x})(\overline{y} \vee x)$.

7. Справедливы следующие правила:

7.1. $x \vee xy = x$ — правило поглощения конъюнкции;
7.2. $x(x \vee y) = x$ — правило поглощения дизъюнкции;
7.3. $xy \vee x\overline{y} = x$ — правило склеивания;

8. Имеют место следующие равенства:

8.1. $0 \Rightarrow x = 1$;
8.2. $1 \Rightarrow x = x$;
8.3. $x \Rightarrow 0 = \overline{x}$;
8.4. $x \Rightarrow 1 = 1$;

Через F обозначается некоторое непустое множество булевых функций, а через F_0 — множество элементарных булевых функций.

Формула над множеством F булевых функций определяется индуктивно. Каждая функция $f(\tilde{x}^n)$ из множества F называется *формулой* над F. Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F$ и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — формулы над F или переменные из некоторого множества переменных U, то выражение $f(A_1, A_1, \ldots, A_n)$ называется *формулой* над F.

Например, $x \vee y$ и $y \vee (x \oplus z)$ — формулы над F_0; $x_1 \vee \wedge x_2$, $\vee(x_1 \Rightarrow x_2)$ — не формулы. Обычно, всюду, где это возможно, вместо $x \wedge y$, употребляется запись xy, если конечно при этом не возникает разночтений. Для таблиц истинности такое обозначение, как правило, не используется.

Если A и B — некоторые формулы и $f(A, B) \in F_0$, то говорят, что к формулам A и B применена операция булевой алгебры. Таким образом, в множество операций булевой алгебры входят элементарные булевы функции: дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквиваленция, сумма по модулю 2. Кроме этих операций в булевой алгебре существуют еще две операции, которые так же являются элементарными булевыми функциями, но применимы только к одной формуле — взятие отрицания: $\bar{A}$ и тождественная операция: A.

Иногда вместо записи $\bar{A}$ используется запись $\rceil A$. Это обозначение оказывается удобным, если отрицание применяется к большой формуле, либо отрицаний достаточно много. Особенно удобным такое обозначение оказывается при составлении таблиц истинности.

Правило раскрытия скобок: $((((\rceil)\ \wedge)\ \vee)\ \Rightarrow)\ \Leftrightarrow$. Для операции $\oplus$ правило раскрытия скобок можно определить так: $((((\rceil)\ \wedge)\ \vee)\ \Rightarrow)\ \oplus$.

Формулы, которые используются в построении данной формулы называются ее *подформулами*.

Если некоторая формула (или некоторая ее подформула) построена только при помощи одной из операций $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, то скобки в этом случае можно вовсе не использовать (поскольку эти операции обладают свойствами ассоциативности и коммутативности) и выполнять операции в любом порядке. Как правило, в этом случае операции выполняют в обычном порядке, т.е. слева направо.

Каждой формуле $A(x_1, x_2, \ldots x_n)$ над множеством F можно сопоставить булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по правилу: для каждого набора $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по определению полагается $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Такую функцию $f(\tilde{x}^n)$ называют *суперпозицией функций* из множества F.

Говорят, что формула $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ реализует некоторую булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$. Эту функцию для A обозначают f_A.

Формулы A и B называют *эквивалентными*, если равны булевы функции, которые реализуют эти формулы, т.е. $f_A = f_B$, при этом пишут

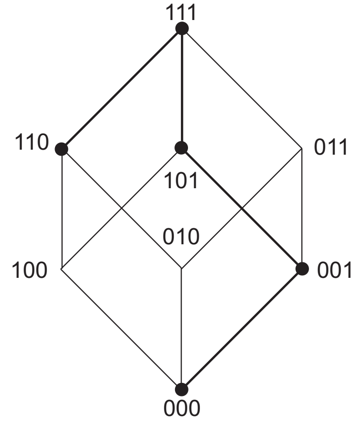


Рис. 2.1:

форму:

$$\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2.$$

Для того, чтобы проверить, является ли найденная форма искомой, достаточно по таблице истинности найти ее векторное задание:

$(\bar{x}_2$	$\wedge$	$x_3)$	$\vee$	$(x_1$	$\wedge$	$x_3)$	$\vee$	$(\bar{x}_1$	$\wedge$	$\bar{x}_2)$	$\vee$	$(x_1$	$\wedge$	$x_2)$
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	**1**	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	**1**	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	**0**	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	**0**	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	**0**	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	**1**	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	**1**	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	**1**	1	1	1

Векторное задание полученной формы — (11000111). Поскольку оно совпадает с векторным заданием функции, данной в условии, то найденная форма является искомой.

Ответ:

$$\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2.$$

Задача 81. Найти сокращенную дизъюнктивную нормальную форму для следующих булевых функций, используя геометрическую интерпретацию.

1) $f(\tilde{x}^2) = (1100)$;
2) $f(\tilde{x}^2) = (1010)$;
3) $f(\tilde{x}^3) = (11100000)$;
4) $f(\tilde{x}^3) = (11000111)$;

Решение: По векторному заданию функции составим ее таблицу истинности:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	**0**
0	1	1	**0**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

Теперь построим множество N_f следующим образом: выберем все строки в которых данная функция имеет значение 1 и для каждой из таких строк составим набор значений переменных, входящих в формулу. В результате мы получим: $\{(000), (001), (101), (110), (111)\}$. По построенному множеству нужно составить максимальные грани, т.е. такие грани, которые не содержатся ни в одной другой грани, составленной из элементов того же множества: $g_1 = \{(000), (001)\}$, $g_2 = \{(001), (101)\}$, $g_3 = \{(101), (111)\}$, $g_4 = \{(111), (110)\}$.

Эти грани легко составить, если рассмотреть геометрическую интерпретацию, т.е. в данном случае трехмерный куб (рис. 2.1).

Грани g_1 соответствует конъюнкция $\bar{x}_1\bar{x}_2$, грани g_2 соответствует конъюнкция $\bar{x}_2 x_3$, грани g_3 соответствует конъюнкция $x_1 x_3$, грани g_4 соответствует конъюнкция $x_1 x_2$.

Теперь остается составить дизъюнкцию полученных элементарных конъюнкций, т.е. составить сокращенную дизъюнктивную нормальную

$A = B$.

Понятия формулы, эквивалентной формулы и суперпозиции булевых функций позволяют использовать свойства элементарных булевых функций для получения формулы, которая равносильна данной (т.е. реализует ту же функцию), но имеет более простое строение. Такие действия называются *равносильными преобразованиями.*

Формула A называется *тавтологией*, если при любом наборе истинностных значений ее переменных она принимает значение 1.

Если A — тавтология, то пишут: $\models A$.

Формула A называется *противоречием*, если для любого набора истинностных значений ее переменных она принимает значение 0.

Если A — противоречие, то пишут: $\models \overline{A}$.

Формула A равна B тогда и только тогда, когда $\models A \Leftrightarrow B$.

Булева функция $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ называется *двойственной* к булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Если M — некоторое множество булевых функций, то множество всех их двойственных функций обозначается через M^*.

0 двойственна к 1; 1 двойственна к 0; x двойственна к x; $\overline{x}$ двойственна к $\overline{x}$; $\wedge$ двойственна к $\vee$; $\vee$ двойственна к $\wedge$.

Принцип двойственности заключается в том, чтобы заменить всюду в данной конкретной формуле каждую операцию на операцию, ей двойственную. Таким образом, доказав некоторое тождество, мы получим после замены всех операций на двойственные, новое тождество.

При выполнении равносильных преобразований формул, реализующих булевы функции, над знаком равенства будем писать номера тех перечисленных выше свойств элементарных булевых функций, которые используются на данном этапе преобразований. Например:

$$x_1 \Rightarrow (x_2 x_1) \overset{6.2}{=} \bar{x}_1 \vee (x_2 x_1) \overset{2.1,3.2}{=} (\bar{x}_1 \vee x_1) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) \overset{5.3,5.4}{=} \bar{x}_1 \vee x_2.$$

Основные задачи

Задача 60. Упростить формулы, используя равносильные преобразования и сделать проверку, используя таблицы истинности.

1) $(x_1 \Rightarrow x_2 x_3) \vee (x_1 \Rightarrow x_2 x_1)$;

Решение:

$(x_1 \Rightarrow x_2x_3) \vee (x_1 \Rightarrow x_2x_1) \overset{6.2}{=}$
$(\bar{x}_1 \vee x_2x_3) \vee (\bar{x}_1 \vee x_2x_1) \overset{1.2}{=}$
$\bar{x}_1 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1 \vee x_2x_1 \overset{2.2,\ 4.2}{=}$
$\bar{x}_1 \vee x_2x_3 \vee x_2x_1 \overset{3.2}{=}$
$(\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_2x_3 \overset{5.4,\ 5.3}{=}$
$\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_2x_3 \overset{7.1}{=} \bar{x}_1 \vee x_2.$

Теперь построим таблицу истинности.

$(x_1$	$\Rightarrow$	x_2	$\wedge$	$x_3)$	$\vee$	$(x_1$	$\Rightarrow$	x_2	$\wedge$	$x_1)$	$\bar{x}_1$	$\vee$	x_2
0	1	0	0	0	**1**	0	1	0	0	0	1	**1**	0
0	1	0	0	1	**1**	0	1	0	0	0	1	**1**	0
0	1	1	0	0	**1**	0	1	1	0	0	1	**1**	1
0	1	1	1	1	**1**	0	1	1	0	0	1	**1**	1
1	0	0	0	0	**0**	1	0	0	0	1	0	**0**	0
1	0	0	0	1	**0**	1	0	0	0	1	0	**0**	0
1	0	1	0	0	**1**	1	1	1	1	1	0	**1**	1
1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	0	**1**	1

Выделенные столбцы представляют собой значения функций, реализованных формулами $(x_1 \Rightarrow x_2x_3) \vee (x_1 \Rightarrow x_2x_1)$ и $\bar{x}_1 \vee x_2$. Поскольку эти столбцы равны, то равны и указанные формулы.

Ответ: $\bar{x}_1 \vee x_2$.

2) $(x_1 \Rightarrow x_2x_3)\overline{(x_2 \vee x_3 \Rightarrow x_1)}$;
3) $(\bar{x}_1 \Rightarrow \overline{x_1x_2})x_1$;
4) $(\overline{x_1x_2 \Rightarrow \bar{x}_1})(\overline{x_1x_2 \Rightarrow \bar{x}_2})$;
5) $(x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow ((x_3 \Rightarrow x_1) \Rightarrow (x_3 \Rightarrow x_2))$;
6) $(\overline{x_1 \Rightarrow \overline{x_2x_3}}) \Rightarrow x_1 \vee x_3$;

Решение:
$(\overline{x_1 \Rightarrow \overline{x_2x_3}}) \Rightarrow x_1 \vee x_3 \overset{6.2}{=} (\overline{\overline{x_1 \Rightarrow \overline{x_2x_3}}}) \vee x_1 \vee x_3 \overset{4.1}{=}$
$(x_1 \Rightarrow \overline{x_2x_3}) \vee x_1 \vee x_3 \overset{6.2}{=} (\bar{x}_1 \vee \overline{x_2x_3}) \vee x_1 \vee x_3 \overset{1.2}{=}$
$\bar{x}_1 \vee \overline{x_2x_3} \vee x_1 \vee x_3 \overset{4.4}{=} \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_1 \vee x_3 \overset{2.2}{=}$
$\bar{x}_1 \vee x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_3 \vee x_2 \overset{5.4}{=} 1 \vee 1 \vee x_2 \overset{5.5}{=} 1.$
Данная в условии задачи формула оказалась тавтологией.

$(x_1 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \overset{2.1,\ 3.1}{=}$
$((x_1(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)) \vee (x_3(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)))(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \overset{3.1,\ 1.2}{=}$
$(x_1x_1 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_3x_1 \vee x_3\bar{x}_2 \vee x_3\bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \overset{4.2,\ 5.1}{=}$
$(x_1 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_3x_1 \vee x_3\bar{x}_2 \vee 0)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \overset{5.6}{=}$
$(x_1 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_3x_1 \vee x_3\bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \overset{7.1}{=}$
$(x_1 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_3x_1 \vee x_3\bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \overset{7.1}{=}$
$(x_1 \vee x_3x_1 \vee x_3\bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \overset{7.1,\ 2.1}{=}$
$(x_1 \vee x_3\bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \overset{3.1}{=}$
$((x_1 \vee x_3\bar{x}_2)\bar{x}_1) \vee ((x_1 \vee x_3\bar{x}_2)\bar{x}_2) \overset{3.1,\ 2.1}{=}$
$x_1\bar{x}_1 \vee x_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_3\bar{x}_2\bar{x}_2 \overset{5.1,\ 5.6,\ 4.2}{=}$
$x_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_3\bar{x}_2 \overset{2.2}{=}$
$x_1\bar{x}_2 \vee x_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_3\bar{x}_2 \overset{7.1}{=}$
$x_1\bar{x}_2 \vee x_3\bar{x}_2.$

Теперь сделаем проверку, построив для полученной сокращенной дизъюнктивной нормальной формы таблицу истинности.

$(x_1$	$\wedge$	$\bar{x}_2)$	$\vee$	$(x_3$	$\wedge$	$\bar{x}_2)$
0	0	1	**0**	0	0	1
0	0	1	**1**	1	1	1
0	0	0	**0**	0	0	0
0	0	0	**0**	1	0	0
1	1	1	**1**	0	0	1
1	1	1	**1**	1	1	1
1	0	0	**0**	0	0	0
1	0	0	**0**	1	0	0

Поскольку векторное задание полученной формы совпадает с векторным заданием исходной функции, то найденная форма — искомая.

Ответ: $x_1\bar{x}_2 \vee x_3\bar{x}_2$.

4) $f(\tilde{x}^3) = (11010111)$;
5) $f(\tilde{x}^3) = (00001010)$;
6) $f(\tilde{x}^3) = (11101000)$.

Поскольку векторное задание полученной тупиковой дизъюнктивной нормальной формы совпадает с векторным заданием данной в условии функции, то построенная форма — искомая.

Ответ: x_2.

4) $f(\tilde{x}^3) = (10010011)$;
5) $f(\tilde{x}^3) = (01001010)$;
6) $f(\tilde{x}^3) = (11101011)$.

Задача 80. Для следующих булевых функций построить сокращенные дизъюнктивные нормальные формы, используя алгоритм построения сокращенных дизъюнктивных нормальных форм.

1) $f(\tilde{x}^2) = (0101)$;
2) $f(\tilde{x}^2) = (1110)$;
3) $f(\tilde{x}^3) = (01001100)$;

Решение: По векторному заданию функции легко построить ее СКНФ:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3).$$

Упростим вначале произведение первого и второго множителей:

$(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \overset{2.2}{=}$
$(x_2 \vee x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_1 \vee x_3) \overset{1.2}{=}$
$(x_2 \vee (x_1 \vee x_3))(\bar{x}_2 \vee (x_1 \vee x_3)) \overset{3.2}{=}$
$(x_2\bar{x}_2) \vee (x_1 \vee x_3) \overset{5.1}{=}$
$0 \vee (x_1 \vee x_3) \overset{5.6}{=} x_1 \vee x_3$.

Используя те же правила равносильных преобразований, упростим произведение четвертого и пятого множителей:

$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) =$
$((\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \vee x_3)((\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \vee \bar{x}_3) =$
$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \vee (x_3\bar{x}_3) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$.

Подставим теперь полученные упрощенные части в исходную формулу и продолжим преобразования:

Для того, чтобы построить таблицу истинности, представим данную формулу с использованием символа $\rceil$:

$$(\rceil(x_1 \Rightarrow \rceil(x_2x_3))) \Rightarrow x_1 \vee x_3.$$

Теперь построим таблицу истинности:

$\rceil$	(	x_1	$\Rightarrow$	$\rceil$	(	x_2	$\wedge$	x_3	)	)	$\Rightarrow$	x_1	$\vee$	x_3
0		0	1	1		0	0	0			**1**	0	0	0
0		0	1	1		0	0	1			**1**	0	1	1
0		0	1	1		1	0	0			**1**	0	0	0
0		0	1	0		1	1	1			**1**	0	1	1
0		1	1	1		0	0	0			**1**	1	1	0
0		1	1	1		0	0	1			**1**	1	1	1
0		1	1	1		1	0	0			**1**	1	1	0
1		1	0	0		1	1	1			**1**	1	1	1

Выделенный столбик, соответствующий функции, которая реализуется данной формулой, состоит полностью из 1. Следовательно, эта формула является тавтологией.

Ответ: 1.

7) $(x_1 \Rightarrow x_2x_3)(x_1 \vee x_2)$;
8) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_3 \vee x_1)$;
9) $(x_1 \Rightarrow x_2)((x_2 \Rightarrow x_3)(x_3 \Rightarrow x_1))$;
10) $(\overline{x_1 \Rightarrow x_2}) \vee (\overline{x_2 \Rightarrow x_1})$;
11) $((x_1 \oplus x_2)(x_2 \oplus x_3) \Rightarrow x_1) \oplus (x_1 \vee x_2)$;
12) $((x_1 \oplus x_2) \Rightarrow (x_2 \oplus x_3)) \Rightarrow (x_1 \oplus x_2)$.

Задача 61. При помощи равносильных преобразований выяснить какие из следующих формул являются тавтологиями.

1) $(x_1 \Rightarrow x_2)(x_3 \Rightarrow x_4) \Rightarrow ((x_1 \vee x_3) \Rightarrow (x_4 \vee x_2))$;
2) $(x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow (x_1x_3 \Rightarrow x_2x_4)$;
3) $((x_1 \Rightarrow x_2)\bar{x}_2) \Rightarrow x_1$;
4) $((x_1 \Rightarrow x_2)(x_3 \Rightarrow x_4)) \Rightarrow (x_1x_3 \Rightarrow x_2x_4)$;

Решение:
$((x_1 \Rightarrow x_2)(x_3 \Rightarrow x_4) \Rightarrow (x_1x_3 \Rightarrow x_2x_4) \overset{6.2}{=}$
$(\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_3 \vee x_4) \Rightarrow (\overline{x_1x_3} \vee x_2x_4) \overset{6.2}{=}$

$\overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_3 \vee x_4)} \vee (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_2x_4) \overset{1.2,\ 4.4}{=}$
$\overline{\bar{x}_1 \vee x_2} \vee \overline{\bar{x}_3 \vee x_4} \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_2x_4 \overset{4.1,\ 4.3}{=}$
$x_1\bar{x}_2 \vee x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_2x_4 \overset{2.1,\ 2.2}{=}$
$\bar{x}_2x_1 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4x_3 \vee \bar{x}_3 \vee x_2x_4 \overset{3.2}{=}$
$((\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1)(x_1 \vee \bar{x}_1)) \vee ((\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee \bar{x}_3)) \vee x_2x_4 \overset{5.4}{=}$
$((\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) \wedge 1) \vee ((\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3) \wedge 1) \vee x_2x_4 \overset{5.3}{=}$
$(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) \vee (\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3) \vee x_2x_4 \overset{2.2}{=}$
$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2x_4 \overset{3.2}{=}$
$(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \overset{2.2}{=}$
$(\bar{x}_2 \vee x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 \vee x_4 \vee \bar{x}_3) \overset{5.4}{=}$
$(1 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee 1 \vee \bar{x}_3) \overset{5.5}{=} 1 \wedge 1 \overset{5.3}{=} 1.$
Ответ: Данная формула является тавтологией.

5) $((p \Rightarrow q)(q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$;
6) $(\bar{q} \Rightarrow \bar{p}) \Rightarrow ((\bar{q} \Rightarrow p) \Rightarrow q)$;
7) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$;
8) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow \bar{q}) \Rightarrow \bar{p})$;
9) $(\bar{x}_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \Rightarrow ((\bar{x}_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow x_1)$;
10) $(x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow ((x_3 \Rightarrow x_1) \Rightarrow (x_3 \Rightarrow x_2))$.

Задача 62. Путем введения фиктивных переменных в формулу A, получить формулу B, используя равносильные преобразования.

1) $A = x_1 \Rightarrow x_2x_3$;
$B = (\overline{x_1 \Rightarrow x_4x_2x_3}) \Rightarrow (x_1 \Rightarrow x_3x_2\bar{x}_4)$;

Решение:
$x_1 \Rightarrow x_2x_3 \overset{6.2}{=} \bar{x}_1 \vee x_2x_3 \overset{5.3,\ 5.4}{=}$
$\bar{x}_1 \vee x_2x_3(x_4 \vee \bar{x}_4) \overset{3.1}{=}$
$\bar{x}_1 \vee x_2x_3x_4 \vee x_2x_3\bar{x}_4 \overset{4.2}{=}$
$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 \vee x_2x_3x_4 \vee x_2x_3\bar{x}_4 \overset{2.2}{=}$
$\bar{x}_1 \vee x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1 \vee x_2x_3\bar{x}_4 \overset{6.2}{=}$
$(x_1 \Rightarrow x_2x_3x_4) \vee (x_1 \Rightarrow x_2x_3\bar{x}_4) \overset{6.2}{=}$
$(\overline{x_1 \Rightarrow x_2x_3x_4}) \Rightarrow (x_1 \Rightarrow x_2x_3\bar{x}_4)$.

№	Вид просматриваемой формы	Просматриваемая конъюнкция	Действие
1	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	Конъюнкцию $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ удалить нельзя
2	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	Удаление множителя $\bar{x}_1$
3	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$	$\bar{x}_2\bar{x}_3$	Множители $\bar{x}_2$ и $\bar{x}_3$ удалить нельзя
4	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	Конъюнкцию $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$ удалить нельзя
5	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	Удаление множителя $\bar{x}_1$
6	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$	$\bar{x}_2x_3$	Множитель $\bar{x}_2$ удалить нельзя
7	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$	$\bar{x}_2x_3$	Удаление множителя x_3
8	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	Удаление конъюнкции $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
9	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2x_3$	$x_1\bar{x}_2x_3$	Удаление конъюнкции $x_1\bar{x}_2x_3$
10	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_2\bar{x}_3$	Удаление конъюнкции $\bar{x}_2\bar{x}_3$
11	$\bar{x}_2$		
	Вторичный просмотр результатов не дает		Алгоритм закончен

Итак, в результате работы алгоритма, получаем сокращенную дизъюнктивную нормальную форму . Можно сделать проверку, построив таблицу истинности для этой функции, только нужно помнить о том, что данная в условии функция является функцией от трех переменных.

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_2$
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	**0**
0	1	1	**0**
1	0	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	0	**0**
1	1	1	**0**

Задача 79. Для следующих булевых функций построить тупиковые дизъюнктивные нормальные формы

1) $f(\tilde{x}^2) = (1001)$;

Решение: По векторному заданию функции, данному в условии, построим СДНФ: $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2$.

Теперь будем исследовать каждую из конъюнкций на предмет выполнения двух операций — удаления конъюнкции и удаления множителя, двигаясь слева направо. Результаты действий будем отражать в таблице.

№	Вид просматриваемой формы	Просматриваемая конъюнкция	Действие
1	$\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2$	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	неприменимы
2	$\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2$	x_1x_2	неприменимы
	Вторичный просмотр ничего не дает		

В результате работы алгоритма, получаем, что относительно операции удаления конъюнкции и относительно операции удаления множителя, полученная СДНФ является тупиковой дизъюнктивной нормальной формой.

Ответ: $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2$.

2) $f(\tilde{x}^2) = (0010)$;
3) $f(\tilde{x}^3) = (11001100)$;

Решение: Составим по векторному заданию функции ее СДНФ:

$$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3.$$

Работу алгоритма упрощения представим в виде таблицы.

2) $A = x_1 \Rightarrow x_2$;
$B = (\bar{x}_1 \vee x_3 \vee (x_2x_4))(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee \overline{x_2 \Rightarrow \overline{x_4}}) \vee (\overline{x_2 \Rightarrow x_4})$;

3) $A = (x_1 \oplus x_2) \Rightarrow x_1$;
$B = (\overline{\overline{x_2} \Rightarrow x_4}) \vee (\bar{x}_3 \Rightarrow x_1) \vee (\overline{\overline{x_2} \Rightarrow \overline{x}_4})((x_3 \Rightarrow x_1) \vee (\overline{\overline{x_2} \Rightarrow \bar{x}_4})$.

Задача 63. Удалить фиктивные переменные из формул, используя таблицы истинности.

1) $((x_1 \oplus x_2) \Rightarrow (x_2x_3x_4 \vee x_2x_3\bar{x}_4)) \oplus (x_1 \vee x_3)$;
2) $(x_1 \Rightarrow x_3) \Rightarrow ((x_1 \vee \bar{x}_2) \vee \bar{x}_1)$;
3) $((\bar{x}_2 \Rightarrow x_1)x_3) \vee (x_4(\overline{x_2x_3} \Rightarrow x_1x_3))$;

Решение:

$((\bar{x}_2$	$\Rightarrow$	$x_1)$	$\wedge$	$x_3)$	$\vee$	$(x_4$	$\wedge$	$(\rceil$	$(x_2$	$\wedge$	$x_3)$	$\Rightarrow$	x_1	$\wedge$	$x_3))$
1	0	0	0	0	**0**	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	**0**	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	**0**	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	**0**	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	**0**	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	**0**	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	**1**	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	**1**	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	**0**	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	**0**	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	**1**	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	**0**	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	**0**	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	**1**	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	**1**	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1

Необходимый признак наличия фиктивной переменной — четное количество единиц или нулей — выполняется. Теперь нужно внимательно просмотреть все строки таблицы истинности. Анализ данной таблицы приводит к наблюдению о том, что

$f(0,0,0,0) = f(0,0,0,1);$
$f(0,0,1,0) = f(0,0,1,1);$
$f(0,1,0,0) = f(0,1,0,1);$
$f(0,1,1,0) = f(0,1,1,1);$
$f(1,0,0,0) = f(1,0,0,1);$
$f(1,0,1,0) = f(1,0,1,1);$
$f(1,1,0,0) = f(1,1,0,1);$
$f(1,1,1,0) = f(1,1,1,1).$

По определению, переменная x_4 является фиктивной. После ее удаления, получаем вместо исходной формулы, формулу $((\bar{x}_2 \Rightarrow x_1)x_3) \vee$ $\vee (\overline{x_2 x_3} \Rightarrow x_1 x_3)$.

Ответ: $((\bar{x}_2 \Rightarrow x_1)x_3) \vee (\overline{x_2 x_3} \Rightarrow x_1 x_3)$.

4) $((x_1 \vee x_2) \Rightarrow (\bar{x}_1 x_2)) \vee (x_1 \bar{x}_2 x_3)$;
5) $((x_1 \oplus x_2) \oplus x_3) \vee (x_1 \Rightarrow x_2)$;
6) $(x_1 \Rightarrow x_2) \oplus (x_2 \Rightarrow x_3) \oplus (x_3 \Rightarrow x_1)$;
7) $(x_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow x_3)) \oplus (x_3 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow x_1))$;
8) $(x_1 \Rightarrow (x_2 \oplus x_3))(\bar{x}_1 \Rightarrow (x_3 \oplus x_2))$.

Задача 64. Построить векторные задания для следующих функций.

1) $(x_1 \Rightarrow x_2 x_3) \vee (x_1 \Rightarrow x_2 x_1)$;

Решение: Для того, чтобы построить векторное задание булевой функции, необходимо построить таблицу истинности для формулы, которая реализует эту функцию.

(x_1	$\Rightarrow$	(x_2	$\wedge$	x_3))	$\vee$	(x_1	$\Rightarrow$	(x_2	$\wedge$	x_1))
0	1	0	0	0	**1**	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	**1**	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	**1**	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	**1**	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	**0**	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	**0**	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	**1**	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1

(x_1	$\wedge$	x_2)	$\vee$	(x_2	$\wedge$	x_3)	$\vee$	(x_3	$\wedge$	x_1)
0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	**0**	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	**0**	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	**1**	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	**1**	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	**1**	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1

Из таблицы получаем векторное задание исходной функции — (00010111).

Теперь построим таблицу истинности для найденной СИНФ.

(x_1	$\Rightarrow$	$\bar{x}_2$)	$\Rightarrow$	((x_1	$\Rightarrow$	($\bar{x}_2$	$\Rightarrow$	$\bar{x}_3$))	$\Rightarrow$	$\rceil$	($\bar{x}_1$	$\Rightarrow$	(x_2	$\Rightarrow$	$\bar{x}_3$)))
0	1	1	**0**	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	**0**	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	**0**	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	**1**	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	**0**	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	1	1	**1**	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	**1**	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	**1**	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0

Из таблицы следует, что векторное задание найденной СИНФ имеет вид (00010111). Поскольку это векторное задание совпадает с векторным заданием исходной функции, которое мы нашли выше, то полученная СИНФ является искомой.

Ответ:

$$(\bar{x}_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \Rightarrow ((x_1 \Rightarrow (\bar{x}_2 \Rightarrow \bar{x}_3)) \Rightarrow \rceil(\bar{x}_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow \bar{x}_3))).$$

4) $((x_1 x_3) \vee (x_2 \bar{x}_3)) \vee (x_1 \Rightarrow x_3)$;
5) $((x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3)) \vee x_1$;
6) $((x_1 \vee x_2) \Rightarrow x_1 x_2)x_3$;
7) $(x_1 x_2 \Rightarrow (x_1 \vee x_2)) \vee x_3$.

Поскольку значения данной в условии формулы и полученной СИНФ на одних и тех же наборах совпадают, то полученная СИНФ — искомая.

Ответ: $(x_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \Rightarrow \bar{x}_1$.

2) $\bar{x}_1 \vee (x_2 \oplus x_1)$;
3) $(x_1x_2) \vee (x_2x_3) \vee (x_3x_1)$;

Решение:

$$(x_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow \rceil(f(1,1,x_3)))) \Rightarrow ((x_1 \Rightarrow (\bar{x}_2 \Rightarrow \rceil(f(1,0,x_3)))) \Rightarrow$$
$$((\bar{x}_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow \rceil(f(0,1,x_3))))) \Rightarrow \rceil(\bar{x}_1 \Rightarrow (\bar{x}_2 \Rightarrow \rceil(f(0,0,x_3)))))) =$$

$$(x_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow \rceil((1 \cdot 1) \vee (1 \cdot x_3) \vee (x_3 \cdot 1)))) \Rightarrow$$
$$((x_1 \Rightarrow (\bar{x}_2 \Rightarrow \rceil((1 \cdot 0) \vee (0 \cdot x_3) \vee (x_3 \cdot 1)))) \Rightarrow$$
$$((\bar{x}_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow \rceil((0 \cdot 1) \vee (1 \cdot x_3) \vee (x_3 \cdot 0))))) \Rightarrow$$
$$\rceil(\bar{x}_1 \Rightarrow (\bar{x}_2 \Rightarrow \rceil((0 \cdot 0) \vee (0 \cdot x_3) \vee (x_3 \cdot 0)))))) \overset{5.2,\ 5.3,\ 5.5,\ 5.6}{=}$$

$$(x_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow 0)) \Rightarrow ((x_1 \Rightarrow (\bar{x}_2 \Rightarrow \bar{x}_3)) \Rightarrow$$
$$((\bar{x}_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow \bar{x}_3))) \Rightarrow \rceil(\bar{x}_1 \Rightarrow (\bar{x}_2 \Rightarrow 1)))) \overset{8.3,\ 8.4}{=}$$

$$(\bar{x}_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \Rightarrow ((x_1 \Rightarrow (\bar{x}_2 \Rightarrow \bar{x}_3)) \Rightarrow ((\bar{x}_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow \bar{x}_3)) \Rightarrow 0))) \overset{8.3}{=}$$

$$(\bar{x}_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \Rightarrow ((x_1 \Rightarrow (\bar{x}_2 \Rightarrow \bar{x}_3)) \Rightarrow \rceil(\bar{x}_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow \bar{x}_3))).$$

Построим таблицу истинности для исходной формулы.

Из таблицы истинности получаем:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (11110011).$$

Ответ: (11110011).

2) $(x_1 \Rightarrow x_2x_3)\overline{(x_2 \vee x_3 \Rightarrow x_1)}$;
3) $(\bar{x}_1 \Rightarrow \overline{x_1x_2})x_1$;
4) $(\overline{x_1x_2 \Rightarrow \bar{x}_1})(\overline{x_1x_2 \Rightarrow \bar{x}_2})$;
5) $(x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow ((x_3 \Rightarrow x_1) \Rightarrow (x_3 \Rightarrow x_2))$;
6) $(\overline{x_1 \Rightarrow \overline{x_2x_3}}) \Rightarrow x_1 \vee x_3$;
7) $(x_1 \Rightarrow x_2x_3)(x_1 \vee x_2)$;
8) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_3 \vee x_1)$;
9) $(x_1 \Rightarrow x_2)((x_2 \Rightarrow x_3)(x_3 \Rightarrow x_1))$;
10) $(\overline{x_1 \Rightarrow x_2}) \vee (\overline{x_2 \Rightarrow x_1})$;
11) $((x_1 \oplus x_2)(x_2 \oplus x_3) \Rightarrow x_1) \oplus (x_1 \vee x_2)$;
12) $((x_1 \oplus x_2) \Rightarrow (x_2 \oplus x_3)) \Rightarrow (x_1 \oplus x_2)$.

Задача 65. Доказать следующие тождества, используя таблицы истинности или свойства булевых функций и, воспользовавшись принципом двойственности, получить новые тождества.

1) $(A \vee (\bar{A} \wedge B)) = (A \vee B)$;
2) $((A \wedge B) \vee ((A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B})) = A \vee B$;

Решение:
$((A \wedge B) \vee ((A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B})) \overset{4.4}{=}$
$((A \wedge B) \vee ((A \vee B) \wedge (\overline{A \wedge B})) \overset{3.2}{=}$
$((A \wedge B) \vee (A \vee B)) \wedge ((A \wedge B) \vee (\overline{A \wedge B})) \overset{5.4}{=}$
$((A \wedge B) \vee (A \vee B)) \wedge 1 \overset{5.3}{=} (A \wedge B) \vee (A \vee B) \overset{1.2}{=}$
$(A \wedge B) \vee A \vee B \overset{2.1,\ 7.1}{=} A \vee B$.

Теперь, используя принцип двойственности, получаем тождество:

$((A \vee B) \wedge ((A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})) = A \wedge B$.

3) $((A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})) = A$;
4) $(A \wedge (A \vee C)) \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
5) $A \vee (B \wedge \bar{B}) = A$;

6) $((A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (C \vee D) = ((A \wedge D) \vee (B \wedge C))$;
7) $(A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (C \vee D) = ((A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee B \wedge D))$;
8) $(A \vee B \vee C) \wedge (B \vee C \vee D) \wedge (C \vee D \vee A) = (A \wedge B) \vee (A \wedge D) \vee (\wedge D) \vee C$.

Задача 66. Указать существенные переменные для следующих булевых функций, заданных векторно.

1) $f(\tilde{x}^3) = (11110000)$;

Решение: Составим таблицу истинности для данной булевой функции:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	0	1	**0**
1	1	0	**0**
1	1	1	**0**

Анализ таблицы позволяет сделать вывод о том, что переменные x_2 и x_3 являются фиктивными. Следовательно, существенной переменной является только одна переменная x_1.

Ответ: $\{x_1\}$.

2) $f(\tilde{x}^3) = (00110011)$;
3) $f(\tilde{x}^3) = (00111100)$;
4) $f(\tilde{x}^3) = (01010101)$;
5) $f(\tilde{x}^4) = (1011100111001010)$;

Решение: Поскольку необходимый признак наличия фиктивных переменных — четное количество единиц или нулей — не выполняется, то в данной функции нет фиктивных переменных. Следовательно, все переменные существенны.

Ответ: $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

6) $f(\tilde{x}^4) = (0011110011000011)$;

$$x_1x_2 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_2x_3 \oplus$$

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_3 \oplus 1 \overset{5.7,5.8}{=} x_1 \oplus x_2 \oplus 1.$$

Осталось сделать проверку по таблице истинности.

x_1	$\oplus$	x_2	$\oplus$	1
0	0	0	1	1
0	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	0	1	1	1

Отсюда получаем векторное задание найденного полинома: (11000011), которое совпадает с векторным заданием данной в условии функции.

Ответ: $x_1 \oplus x_2 \oplus 1$.

Задача 78. Для следующих булевых функций построить СИНФ и сделать проверку, используя таблицы истинности.

1) $(x_1x_2) \vee (x_1 \Rightarrow x_2)$;

Решение:

$$(x_1 \Rightarrow \rceil(f(1, x_2))) \Rightarrow \rceil(\bar{x}_1 \Rightarrow \rceil(f(0, x_2))) =$$

$$(x_1 \Rightarrow \rceil((1 \wedge x_2) \vee (1 \Rightarrow x_2))) \Rightarrow \rceil(\bar{x}_1 \Rightarrow \rceil((0 \wedge x_2) \vee (0 \Rightarrow x_2))) \overset{5.3,\ 8.2,\ 5.2,\ 8.1}{=}$$

$$(x_1 \Rightarrow \rceil(x_2 \vee x_2)) \Rightarrow \rceil(\bar{x}_1 \Rightarrow \rceil(0 \vee 1)) \overset{4.2,\ 5.6}{=}$$

$$(x_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \Rightarrow \rceil(\bar{x}_1 \Rightarrow 0) \overset{8.3,\ 4.1}{=} (x_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \Rightarrow \bar{x}_1.$$

(	x_1	$\wedge$	x_2	)	$\vee$	(	x_1	$\Rightarrow$	x_2	)		(	x_1	$\Rightarrow$	$\bar{x}_2$	)	$\Rightarrow$	$\bar{x}_1$
	0	0	0		1		0	**1**	0				0	1	1		**1**	1
	0	1	1		1		0	**1**	1				0	1	0		**1**	1
	1	1	0		0		1	**0**	0				1	1	1		**0**	0
	1	1	1		0		1	**1**	1				1	0	0		**1**	0

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	**0**
0	1	1	**0**
1	0	0	**0**
1	0	1	**0**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

Составим СДНФ для этой функции:

$$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3.$$

Теперь заменим знак операции $\vee$ на знак операции $\oplus$ и выражение $\bar{x}$ заменим на выражение $x \oplus 1$:

$$((x_1\oplus 1)(x_2\oplus 1)(x_3\oplus 1))\oplus((x_1\oplus 1)(x_2\oplus 1)x_3)\oplus(x_1x_2(x_3\oplus 1))\oplus(x_1x_2x_3).$$

Раскроем скобки в каждом слагаемом по отдельности:

$$(x_1\oplus 1)(x_2\oplus 1)(x_3\oplus 1) \overset{3.3}{=} (x_1(x_2\oplus)(x_3\oplus 1))\oplus(1\cdot(x_2\oplus 1)(x_3\oplus 1)) \overset{3.3,\ 5.3}{=}$$

$$((x_1x_2(x_3\oplus 1))\oplus(x_1\cdot 1\cdot(x_3\oplus 1)))\oplus((x_2(x_3\oplus 1))\oplus(1\cdot(x_3\oplus 1))) \overset{3.3,\ 5.3}{=}$$

$$(((x_1x_2x_3)\oplus(x_1x_2\cdot 1))\oplus((x_1x_3)\oplus(x_1\cdot 1)))\oplus(((x_2x_3)\oplus(x_2\cdot 1))\oplus((1\cdot x_3)\oplus(1\cdot))) \overset{1.3,\ 5.3}{=}$$

$$x_1x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1x_3\oplus x_1\oplus x_2x_3\oplus x_2\oplus x_3\oplus 1;$$

$$(x_1\oplus 1)(x_2\oplus 1)x_3 \overset{3.3}{=} (x_1(x_2\oplus 1)x_3)\oplus(1\cdot(x_2\oplus 1)x_3) \overset{3.3,\ 5.3}{=}$$

$$((x_1x_2x_3)\oplus(x_1\cdot 1\cdot x_3))\oplus((x_2x_3)\oplus(1\cdot x_3)) \overset{1.3,\ 5.3}{=}$$

$$x_1x_2x_3\oplus x_1x_3\oplus x_2x_3\oplus x_3;$$

$$x_1x_2(x_3\oplus 1) \overset{3.3}{=} (x_1x_2x_3)\oplus(x_1x_2\cdot 1) \overset{5.3}{=} x_1x_2x_3\oplus x_1x_2.$$

Теперь сложим вместе полученные части:

$$x_1x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1x_3\oplus x_1\oplus x_2x_3\oplus x_2\oplus x_3\oplus 1\oplus$$

$$x_1x_2\oplus x_1x_3\oplus x_2x_3\oplus x_3\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1x_2x_3 \overset{2.3}{=}$$

$$x_1x_2x_3\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1x_2x_3\oplus$$

7) $f(\tilde{x}^4) = (0111011101110111)$;
8) $f(\tilde{x}^4) = (0101111100001010)$.

Дополнительные задачи

Задача 67. Упростить следующие формулы.

1) $((x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow (x_3 \Rightarrow x_4)) \Rightarrow x_1x_3$;
2) $((x_1 \Leftrightarrow x_2) \Rightarrow (x_1 \Leftrightarrow x_3)) \Rightarrow x_4$;
3) $((x_1 \Rightarrow x_2)(x_2 \Rightarrow x_3)(x_3 \Rightarrow x_4)) \vee (x_2 \Rightarrow x_3)$;
4) $((x_1 \Leftrightarrow x_2) \vee (x_2 \oplus x_3) \vee (x_1 \Rightarrow x_3))(x_1 \oplus x_2)$;

Задача 68. По функциям $f(x_1, x_2)$ и $g(x_3, x_4)$, заданным векторно, построить векторное задание функции h.

1) $f(x_1, x_2) = (1011)$; $g(x_3, x_4) = (1001)$;
$h(x_2, x_3, x_4) = f(g(x_3, x_4), x_2)$;
2) $f(x_1, x_2) = (1011)$; $g(x_3, x_4) = (1001)$;
$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_2) \vee g(x_3, x_4)$;
3) $f(x_1, x_2) = (1000)$; $g(x_3, x_4) = (0111)$;
$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_2) \wedge g(x_3, x_4)$.

Задача 69. Сколькими способами можно расставить скобки в данном выражении, чтобы получить формулу.

1) $\bar{x} \Rightarrow y \wedge x$;
2) $x \wedge y \wedge \rceil\rceil z \vee x$;
3) $x \Rightarrow \rceil y \Rightarrow z \wedge \rceil x$.

Задача 70. Реализовать функцию f формулой над F.

1) $f = x \Rightarrow y$; $F = \{\rceil, \vee\}$;
2) $f = x \vee y$; $F = \{\Rightarrow\}$;
3) $f = x \Leftrightarrow y$; $F = \{\wedge, \Rightarrow\}$.

Задача 71. Доказать, что функцию f нельзя реализовать над F.

1) $f = x \oplus y$; $F = \{\wedge\}$;
2) $f = x \wedge y$; $F = \{\Rightarrow\}$;
3) $f = x \vee y$; $F = \{\Leftrightarrow\}$.

2.2. Разложения булевых функций

Пусть $a \in B = \{0; 1\}$. Для некоторой переменной x и ее некоторого значения a определим величину x^a:

$$x^a = \begin{cases} x, & \text{если } a = 1, \\ \overline{x}, & \text{если } a = 0. \end{cases}$$

Равенство

$$f(\tilde{x}^n) = x_n f(\tilde{x}^{n-1}, 1) \vee \overline{x}_n f(\tilde{x}^{n-1}, 0)$$

называют *разложением булевой функции по переменной.*

Если булева функция $f(\tilde{x}^n)$ не является противоречием, то выражение

$$f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{\substack{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1}} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$$

называют ее *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (*СДНФ*).

Если булева функция $f(\tilde{x}^n)$ не является тавтологией, то выражение

$$f(\tilde{x}^n) = \bigwedge_{\substack{a_1, a_2, \ldots, a_k \\ f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0}} (x_1^{\overline{a}_1} \vee x_2^{\overline{a}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{a}_n})$$

называется ее *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (*СКНФ*)

СДНФ и СКНФ можно определить индуктивно.

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция некоторого числа переменных и отрицаний переменных из множества $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m, \ldots\}$, причем для любой переменной указанного множества в этой конъюнкции может присутствовать либо сама переменная, либо ее отрицание. Любая переменная или ее отрицание так же является элементарной конъюнкцией.

Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция некоторого числа переменных и отрицаний переменных из множества $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m, \ldots\}$, причем для любой переменной указанного множества в этой дизъюнкции может присутствовать либо сама переменная, либо ее отрицание. Любая переменная или ее отрицание так же является элементарной дизъюнкцией.

$((x_1$	$\Rightarrow$	$x_2)$	$\wedge$	$(x_2$	$\Rightarrow$	$x_1))$	$\oplus$	x_3		x_1	$\oplus$	x_2	$\oplus$	x_3	$\oplus$	1
0	1	0	1	0	1	0	**1**	0		0	0	0	0	0	**1**	1
0	1	0	1	0	1	0	**0**	1		0	0	0	1	1	**0**	1
0	1	1	0	1	0	0	**0**	0		0	1	1	1	0	**0**	1
0	1	1	0	1	0	0	**1**	1		0	1	1	0	1	**1**	1
1	0	0	0	0	1	1	**0**	0		1	1	0	1	0	**0**	1
1	0	0	0	0	1	1	**1**	1		1	1	0	0	1	**1**	1
1	1	1	1	1	1	1	**1**	0		1	0	1	0	0	**1**	1
1	1	1	1	1	1	1	**0**	1		1	0	1	1	1	**0**	1

Из таблицы истинности видно, что найденный полином действительно является полиномом Жегалкина для данной в условии функции.

Ответ: $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$.

2) $((x_1 \oplus x_2) \Rightarrow (\bar{x}_1 \oplus x_3)) \vee (x_2 \Rightarrow \bar{x}_3)$;
3) $((x_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \Rightarrow x_3) \oplus (\overline{x_1 \vee x_2})$;
4) $((x_2 \oplus (x_1 x_3)) \Rightarrow (x_1 \vee x_2)) \Rightarrow \bar{x}_3$;
5) $f(\tilde{x}^2) = (1001)$;
6) $f(\tilde{x}^3) = (10010110)$;
7) $f(\tilde{x}^4) = (10011011)$.

Задача 77. Найти полиномы Жегалкина для следующих функций с использованием СДНФ и сделать проверку с помощью таблиц истинности.

1) $(x_1 \Rightarrow x_2)(x_2 \Rightarrow x_1) \oplus x_3$;
2) $((x_1 \oplus x_2) \Rightarrow (\bar{x}_1 \oplus x_3)) \vee (x_2 \Rightarrow \bar{x}_3)$;
3) $((x_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \Rightarrow x_3) \oplus (\overline{x_1 \vee x_2})$;
4) $((x_2 \oplus (x_1 x_3)) \Rightarrow (x_1 \vee x_2)) \Rightarrow \bar{x}_3$;
5) $f(\tilde{x}^2) = (1001)$;
6) $f(\tilde{x}^3) = (10010110)$;
7) $f(\tilde{x}^3) = (11000011)$.

Решение: По векторному заданию функции построим ее таблицу истинности:

$$\alpha_1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0 \oplus \alpha_2 \cdot 0 \cdot 0 \oplus \alpha_3 \cdot 0 \cdot 0 \oplus \alpha_4 \cdot 1 \cdot 0 \oplus 1 \cdot 0 \oplus \alpha_6 \cdot 1 \oplus \alpha_7 \cdot 0 \oplus 1 =$$

$$0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \alpha_6 \oplus 0 \oplus 1 = 0.$$

Следовательно, $\alpha_6 = 1$.

$$f(0,0,1) = ((0 \Rightarrow 0)(0 \Rightarrow 0)) \oplus 1 = (1 \wedge 1) \oplus 1 = 1 \oplus 1 = 0.$$

$$\alpha_1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 \oplus \alpha_2 \cdot 0 \cdot 0 \oplus \alpha_3 \cdot 0 \cdot 1 \oplus \alpha_4 \cdot 0 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 0 \oplus 1 \cdot 0 \oplus \alpha_7 \cdot 1 \oplus 1 =$$

$$0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \alpha_7 \oplus 1 = 0.$$

Следовательно, $\alpha_7 = 1$.

$$f(1,1,0) = ((1 \Rightarrow 1)(1 \Rightarrow 1)) \oplus 0 = (1 \wedge 1) \oplus 0 = 1 \oplus 0 = 1.$$

$$\alpha_1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 \oplus \alpha_2 \cdot 1 \cdot 1 \oplus \alpha_3 \cdot 1 \cdot 0 \oplus \alpha_4 \cdot 1 \cdot 0 \oplus 1 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 0 \oplus 1 = 1;$$

$$\alpha_2 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1.$$

Следовательно, $\alpha_2 = 0$.

$$f(0,1,1) = ((0 \Rightarrow 1)(1 \Rightarrow 0)) \oplus 1 = (1 \wedge 0) \oplus 1 = 0 \oplus 1 = 1.$$

$$\alpha_1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 \oplus 0 \cdot 0 \cdot 1 \oplus \alpha_3 \cdot 0 \cdot 1 \oplus \alpha_4 \cdot 1 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 0 \oplus 1 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1 \oplus 1 = 1;$$

$$\alpha_4 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1.$$

Следовательно, $\alpha_4 = 0$.

$$f(1,0,1) = ((1 \Rightarrow 0)(0 \Rightarrow 1)) \oplus 1 = (0 \wedge 1) \oplus 1 = 0 \oplus 1 = 1.$$

$$\alpha_1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 \oplus 0 \cdot 1 \cdot 0 \oplus \alpha_3 \cdot 1 \cdot 1 \oplus 0 \cdot 1 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 0 \oplus 1 \cdot 1 \oplus 1 = 1;$$

$$\alpha_3 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1.$$

Следовательно, $\alpha_3 = 0$.

$$f(1,1,1) = ((1 \Rightarrow 1)(1 \Rightarrow 1)) \oplus 1 = (1 \wedge 1) \oplus 1 = 1 \oplus 1 = 0.$$

$$\alpha_1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \oplus 0 \cdot 1 \cdot 1 \oplus 0 \cdot 1 \cdot 1 \oplus 0 \cdot 1 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1 \oplus 1 = 1;$$

$$\alpha_2 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1.$$

Следовательно, $\alpha_1 = 0$.

Итак, все коэффициенты полинома найдены. Следовательно, для данной в условии формулы, полином Жегалкина имеет вид:

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1.$$

Составим теперь объединенную таблицу истинности для исходной формулы и для полученного полинома

Конъюнктивной нормальной формой (*КНФ*) называется всякая элементарная дизъюнкция, либо конъюнкция некоторого числа элементарных дизъюнкций.

Дизъюнктивной нормальной формой (*ДНФ*) называется всякая элементарная конъюнкция, либо дизъюнкция некоторого числа элементарных конъюнкций.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (*СКНФ*) называется всякая КНФ, в каждую элементарную дизъюнкцию которой всякая переменная либо ее отрицание входит ровно 1 раз, если эта переменная либо ее отрицание, входит в какую-либо другую элементарную дизъюнкцию этой СКНФ.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (*СДНФ*) называется всякая ДНФ, в каждую элементарную конъюнкцию которой всякая переменная либо ее отрицание входит ровно 1 раз, если эта переменная либо ее отрицание, входит в какую-либо другую элементарную конъюнкцию этой СКНФ.

Для произвольной элементарной конъюнкции всякий ее элемент (т.е. некоторая переменная, либо отрицание некоторой переменной) называется ее *множителем*.

Всякая булева функция, отличная от константы, имеет единственные СДНФ и СКНФ, но может иметь несколько ДНФ и КНФ.

Строятся СКНФ и СДНФ двумя способами. Первый способ — использование таблиц истинности. Для СДНФ выбираются те строки в которых функция имеет значение 1 и для каждой из таких строк составляются соответствующие элементарные конъюнкции следующим образом: если в рассматриваемой строке некоторая переменная имеет значение 1. то в конъюнкцию вставляют саму переменную, если же эта переменная имеет значение 0, то в конъюнкцию вставляют отрицание эой переменной. Наконец, составленные для каждой из выбранных строк элементарные конъюнкции соединяются между собой операцией дизъюнкции.

Для СКНФ выбираются те строки в которых функция имеет значение 0 и для каждой из таких строк составляются соответствующие элементарные дизъюнкции следующим образом: если в рассматриваемой строке некоторая переменная имеет значение 0. то в конъюнкцию вставляют саму переменную, если же эта переменная имеет значение 1, то в конъюнкцию вставляют отрицание эой переменной. Наконец, составленные для каждой из выбранных строк элементарные дизъюнкции соединяются между собой операцией конъюнкции.

Второй способ — это использование равносильных преобразований. Вначале исходную формулу упрощают и получают формулу над $\{\vee, \wedge, \rceil\}$. Затем, пользуясь дистрибутивными законами, получают дизъюнктивную, либо конъюнктивную нормальную форму (смотря что требуется в условии задачи) и наконец, используя свойства констант, дополняют полученную нормальную форму до совершенной.

Если булева функция $f(\tilde{x}^n)$ не является противоречием, то выражение

$$f(\tilde{x}^n) = \underset{\substack{(v_1,v_2,\ldots,v_n)\\ f(v_1,v_2,\ldots,v_n)=1}}{\rightarrow} (x_1^{v_1} \Rightarrow (x_2^{v_2} \Rightarrow (\ldots(x_{n-1}^{v_{n-1}} \Rightarrow \overline{x}_n^{v_n})\ldots))).$$

называется ее *совершенной импликативной нормальной формой* (*СИНФ*).

Строится СИНФ следующим образом. Вначале составляют непосредственно по определению общий вид СИНФ для данной формулы, а затем в полученную форму подставляют значения исходной булевой функции для каждого конкретного набора значений переменных. При этом можно воспользоваться таблицей истинности.

Полиномом по модулю 2 (полиномом Жегалкина) от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется выражение, которое записывается следующим образом:

$$\bigoplus_{i_1,i_2,\ldots,i_s} a_{i_1,i_2,\ldots,i_s} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_s},$$

где сумма берется по всевозможным подмножествам индексов из множества $1, 2, \ldots, n$, $a_{i_1 \ldots i_s} \in B$.

Каждая булева функция может быть задана полиномом по модулю 2 и притом единственным образом.

Полином Жегалкина для конкретной булевой функции может быть построен двумя способами. Первый способ — метод неопределенных коэффициентов. По этому способу вначале составляется полином Жегалкина в общем виде. Затем, используя значения функции на каждом из конкретных наборов значений переменных, находят по очереди каждый из коэффициентов α.

При построении полинома Жегалкина вторым способом вначале нужно построить СДНФ. Затем в этой формуле операцию $\vee$ нужно всюду заменить на операцию $\oplus$, а выражение $\bar{x}$ на выражение $x \oplus 1$. Наконец, нужно использовать дистрибутивный закон 3.3 и свойство 5.7 до тех пор, пока не получится полином Жегалкина.

Всякая булева функция имеет несколько дизъюнктивных нормальных форм. В связи с этим возникает проблема нахождения дизъюнктив-

$(\bar{x}_3 \vee x_1) \vee (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_1) \overset{1.2}{=}$
$\bar{x}_3 \vee x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_1 \overset{2.2,\ 4.2}{=}$
$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$.
Ответ:

5) $(x_2 \oplus x_3) \vee (x_1 \wedge x_2) \Rightarrow (x_2 x_3)$;
6) $((x_1 \vee x_2) \Rightarrow (x_2 \vee x_3)) \vee (x_1 x_4)$.

Задача 76. Найти полиномы Жегалкина для следующих функций методом неопределенных коэффициентов и сделать проверку с помощью таблиц истинности.

1) $(x_1 \Rightarrow x_2)(x_2 \Rightarrow x_1) \oplus x_3$;

Решение: Составим полином Жегалкина в общем виде:

$$\alpha_1 x_1 x_2 x_3 \oplus \alpha_2 x_1 x_2 \oplus \alpha_3 x_1 x_3 \oplus \alpha_4 x_2 x_3 \oplus \alpha_5 x_1 \oplus \alpha_6 x_2 \oplus \alpha_7 x_3 \oplus \alpha_8.$$

Теперь найдем значение функции на наборе (0, 0, 0). Это можно сделать пользуясь только таблицами истинности элементарных булевых функций, которые входят в данную формулу.

$$f(0,0,0) = ((0 \Rightarrow 0)(0 \Rightarrow 0)) \oplus 0 = (1 \wedge 1) \oplus 0 = 1 \oplus 0 = 1.$$

Подставим тот же набор значений переменных в полином Жегалкина:

$$\alpha_1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \oplus \alpha_2 \cdot 0 \cdot 0 \oplus \alpha_3 \cdot 0 \cdot 0 \oplus \alpha_4 \cdot 0 \cdot 0 \oplus \alpha_5 \cdot 0 \oplus \alpha_6 \cdot 0 \oplus \alpha_7 \cdot 0 \oplus \alpha_8 =$$
$$0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \alpha_8 = 1.$$

Отсюда, снова воспользовавшись таблицами истинности, получаем, что $\alpha_8 = 1$.

Остальные коэффициенты находятся по тем же правилам. При этом, найденное на очередном этапе значение для некоторого коэффициента подставляется в дальнейшем в полином на всех последующих этапах.

$$f(1,0,0) = ((1 \Rightarrow 0)(0 \Rightarrow 1)) \oplus 0 = (0 \wedge 1) \oplus 0 = 0 \oplus 0 = 0.$$

$$\alpha_1 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0 \oplus \alpha_2 \cdot 1 \cdot 0 \oplus \alpha_3 \cdot 1 \cdot 0 \oplus \alpha_4 \cdot 0 \cdot 0 \oplus \alpha_5 \cdot 1 \oplus \alpha_6 \cdot 0 \oplus \alpha_7 \cdot 0 \oplus 1 =$$
$$0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \alpha_5 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0.$$

Следовательно, $\alpha_5 = 1$

$$f(0,1,0) = ((0 \Rightarrow 1)(1 \Rightarrow 0)) \oplus 0 = (1 \wedge 0) \oplus 0 = 0 \oplus 0 = 0.$$

$\rceil$	(	(	x_1	$\wedge$	x_2	)	$\Rightarrow$	$\bar{x}_1$	)	$\oplus$	(	(	x_1	$\oplus$	x_2	)	$\Rightarrow$	$\bar{x}_2$	)
0			0	0	0		1	1		**1**			0	0	0		1	1	
0			0	0	1		1	1		**0**			0	1	1		0	0	
0			1	0	0		1	0		**1**			1	1	0		1	1	
1			1	1	1		0	0		**0**			1	0	1		1	0	

Теперь составляем СКНФ:

$$(x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2).$$

Каждая элементарная дизъюнкция этой СКНФ составлена по соответствующей строке таблицы истинности, в которой функция имеет значение 0. Если в этой строке значение переменной равно 0, то в составляемой дизъюнкции нужно поставить символ самой переменной, а если значение переменной равно 1, то вставить нужно отрицание переменной. Число различных элементарных дизъюнкций равно числу строк таблицы истинности, в которых функция имеет значение 0. Число членов в каждой элементарной дизъюнкции одинаково и равно числу всех переменных, входящих в формулу, т.е. 2.

Ответ: $(x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$.

4) $(x_3 \Rightarrow x_1) \Rightarrow ((\overline{x_2 \vee x_3}) \Rightarrow x_1)$;
5) $((x_2 \oplus x_3) \Rightarrow (x_1 \vee x_2)) \Rightarrow (x_2 x_3)$;
6) $((x_1 \vee x_2) \Rightarrow (x_2 \vee x_3)) \oplus (x_1 x_4)$.

Задача 75. Для следующих булевых функций построить СКНФ используя равносильные преобразования.

1) $\bar{x}_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_2$;
2) $((x_1 \vee x_2) \wedge x_1) \oplus (x_1 \vee (x_1 x_2))$;
3) $((x_1 \vee x_2) \wedge x_1) \oplus ((x_1 \vee x_2) \wedge \bar{x}_2)$;
4) $(x_3 \Rightarrow x_1) \vee ((x_2 x_3) \Rightarrow x_1)$;

Решение:

$(x_3 \Rightarrow x_1) \vee ((x_2 x_3) \Rightarrow x_1) \overset{6.2}{=}$
$(\bar{x}_3 \vee x_1) \vee (\overline{x_2 x_3} \vee x_1) \overset{4.4}{=}$

ных нормальных форм более простого вида. Причем оказывается, что найти дизъюнктивную нормальную форму простого вида гораздо труднее, чем построить совершенную дизъюнктивную нормальную форму. Для того, чтобы для каждой конкретной булевой функции можно было однозначно определить, является ли одна дизъюнктивная нормальная форма более простой, чем другая, используется понятие индекса простоты.

Для данной дизъюнктивной нормальной формы индексами простоты являются:

$L_{\text{Б}}(K)$ — число букв переменных;
$L_{\text{К}}(K)$ — число элементарных конъюнкций;
$L_{\text{О}}(K)$ — число символов отрицания.

Число всевозможных дизъюнктивных нормальных форм для всех булевых функций от n переменных равно 2^{3^n}.

Дизъюнктивная нормальная форма K, реализующая функцию $f(\overline{x}^n)$ и имеющая минимальный индекс $L(K)$, называется минимальной дизъюнктивной нормальной формой относительно K.

В дальнейшем минимальную дизъюнктивную нормальную форму относительно $L_{\text{Б}}(K)$ будем называть просто минимальной дизъюнктивной нормальной формой, а минимальную дизъюнктивную нормальную форму относительно индекса $L_{\text{К}}(K)$ — кратчайшей дизъюнктивной нормальной формой.

Конечно, существует простейший алгоритм полного перебора, который требует построения всех возможных дизъюнктивных нормальных форм и выбора среди них минимальных. Однако такой алгоритм является очень трудоемким.

Пусть K — произвольная дизъюнктивная нормальная форма. Пусть M — некоторая элементарная конъюнкция из K и K' — дизъюнктивная нормальная форма, образованная остальными элементарными конъюнкциями из K. Пусть $x_i^{\sigma_i}$ — некоторый множитель из M и M' — произведение остальных множителей из M. Допустим, что выполняются равенства $K = K' \vee M$ и $K = K' \vee x_i^{\sigma_i} M'$. Тогда можно рассмотреть следующие 2 операции:

I. *Операция удаления элементарной конъюнкции* В результате этой операции осуществляется переход от K к K'. При этом происходит удаление элементарной конъюнкции M. Это преобразование определено тогда и только тогда, когда $K = K'$.

II. *Операция удаления множителя* В результате этой операции осуществляется переход от K к $K' \vee M'$. При этом происходит удаление множителя $x_i^{\sigma_i}$. Это преобразование определено тогда и только тогда, когда $K' \vee M' = K$.

Дизъюнктивная нормальная форма, которую нельзя упростить при помощи операций I и II называется тупиковой дизъюнктивной нормальной формой (относительно операций I и II).

Алгоритм упрощения дизъюнктивной нормальной формы

1. Выбирается некоторая дизъюнктивная нормальная форма для функции $f(\tilde{x}^n)$ в качестве исходной. Проще всего взять совершенную дизъюнктивную нормальную форму.

2. Осуществляется упорядочение элементарных конъюнкций и в каждой элементарной конъюнкции упорядочение множителей. Таким образом, выбирается определенная запись дизъюнктивной нормальной формы.

3. Слева направо производится просмотр записи дизъюнктивной нормальной формы. Для очередной элементарной конъюнкции сначала пробуют применить операцию удаления элементарной конъюнкции. Если это не удается, то просматривают в том же порядке (слева направо) все множители этой конъюнкции и для каждого из них пробуют применить операцию удаления множителя. После этого переходят к следующей элементарной конъюнкции.

4.Закончив обработку последней элементарной конъюнкции, еще раз просматривают полученную дизъюнктивную нормальную форму и пробуют применить операцию удаления элементарной конъюнкции (такое действие возможно даст результаты, если на предыдущем этапе в каких-либо элементарных конъюнкциях удалось применить операцию удаления множителя).

Результат действия алгоритма зависит от упорядочения исходной дизъюнктивной нормальной формы.

Дизъюнктивная нормальная форма, полученная в результате применения алгоритма упрощения дизъюнктивной нормальной формы, является тупиковой нормальной формой (относительно операций I и II).

Операцию удаления элементарной конъюнкции можно применить если есть меньший множитель:

$$x_1x_2x_3 \vee x_2x_3 = x_2x_3.$$

Операцию удаления множителя можно применить если существует возможность для двух конъюнкций применить закон дистрибутивности

5) $((x_2 \oplus x_3) \Rightarrow (x_1 \vee x_2)) \Rightarrow (x_2x_3)$;
6) $((x_1 \vee x_2) \Rightarrow (x_2 \vee x_3)) \oplus (x_1x_4)$.

Задача 73. Для следующих булевых функций построить СДНФ используя равносильные преобразования.

1) $(\bar{x}_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \vee \rceil((x_2x_3) \Rightarrow (x_1x_2))$;
2) $((x_1 \vee x_2)\bar{x}_1) \oplus (x_1 \Rightarrow (x_1x_2))$;

Решение:
$((x_1 \vee x_2) \wedge \bar{x}_1) \oplus (x_1 \Rightarrow (x_1 \wedge x_2)) \overset{2.1,\ 3.1,\ 6.2}{=}$
$(x_1\bar{x}_1 \vee x_2\bar{x}_1) \oplus (\bar{x}_1 \vee (x_1x_2)) \overset{3.2,\ 5.3,\ 5.4}{=}$
$(x_2\bar{x}_1) \oplus ((\bar{x}_1 \vee x_1)(\bar{x}_1 \vee x_2)) \overset{5.3,\ 5.4}{=}$
$(x_2\bar{x}_1) \oplus (\bar{x}_1 \vee x_2) \overset{6.1}{=}$
$((x_2\bar{x}_1)(\rceil(\bar{x}_1 \vee x_2)) \vee (\rceil(x_2\bar{x}_1)(\bar{x}_1 \vee x_2)) \overset{4.1,\ 4.3,\ 4.4}{=}$
$(x_2\bar{x}_1)(x_1\bar{x}_2) \vee (\bar{x}_2 \vee x_1)(\bar{x}_1 \vee x_2) \overset{1.1}{=}$
$(\bar{x}_2 \vee x_1)(\bar{x}_1 \vee x_2) \overset{1.1,\ 3.1}{=}$
$\bar{x}_2(\bar{x}_\vee x_2) \vee x_1(\bar{x}_1 \vee x_2) \overset{3.1,\ 1.2}{=}$
$\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2x_2 \vee x_1\bar{x}_1 \vee x_1x_2 \overset{5.1,\ 5.6}{=}$
$\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_1x_2$.

Ответ: $\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_1x_2$.

3) $((x_1x_2) \Rightarrow \bar{x}_1) \oplus ((x_1 \oplus x_2) \Rightarrow \bar{x}_2)$;
4) $(x_3 \Rightarrow x_1) \oplus ((\overline{x_2 \vee x_3}) \Rightarrow x_1)$;
5) $((x_2x_3) \vee (x_1 \vee x_2)) \Rightarrow (x_2x_3)$;
6) $((x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3)) \oplus (x_1x_4)$.

Задача 74. Для следующих булевых функций построить СКНФ используя таблицы истинности.

1) $(\bar{x}_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \Rightarrow ((x_2x_3) \Rightarrow (x_1x_2))$;
2) $((x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow \bar{x}_1) \oplus (x_1 \Rightarrow (x_1x_2))$;
3) $\rceil((x_1x_2) \Rightarrow \bar{x}_1) \oplus ((x_1 \oplus x_2) \Rightarrow \bar{x}_2)$;

Решение: Вначале построим таблицу истинности для этой формулы

Основные задачи

Задача 72. Для следующих булевых функций построить СДНФ используя таблицы истинности.

1) $(\bar{x}_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \wedge ((x_2x_3) \Rightarrow (x_1x_2))$;

Решение: Вначале построим таблицу истинности для этой формулы

(	$\bar{x}_1$	$\Rightarrow$	$\bar{x}_2$	)	$\wedge$	(	(	x_2	$\wedge$	x_3	)	$\Rightarrow$	(	x_1	$\wedge$	x_2	)	)
	1	1	1		**1**			0	0	0		1		0	0	0		
	1	1	1		**1**			0	0	1		1		0	0	0		
	1	0	0		**0**			1	0	0		1		0	0	1		
	1	0	0		**0**			1	1	1		0		0	0	1		
	0	1	1		**1**			0	0	0		1		1	0	0		
	0	1	1		**1**			0	0	1		1		1	0	0		
	0	1	0		**1**			1	0	0		1		1	1	1		
	0	1	0		**1**			1	1	1		1		1	1	1		

Теперь составляем СДНФ:

$$(\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1\bar{x}_2x_3) \vee (x_1\bar{x}_2\bar{x}_3) \vee (x_1\bar{x}_2x_3) \vee (x_1x_2\bar{x}_3) \vee x_1x_2x_3)$$

.

Каждая элементарная конъюнкция этой СДНФ составлена по соответствующей строке таблицы истинности, в которой функция имеет значение 1. Если в этой строке значение переменной равно 1, то в составляемой конъюнкции нужно поставить символ самой переменной, а если значение переменной равно 0, то вставить нужно отрицание переменной. Число различных элементарных конъюнкций равно числу строк таблицы истинности, в которых функция имеет значение 1. Число множителей в каждой элементарной конъюнкции одинаково и равно числу всех переменных, входящих в формулу, т.е. 3.

Ответ: $(\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1\bar{x}_2x_3) \vee (x_1\bar{x}_2\bar{x}_3) \vee (x_1\bar{x}_2x_3) \vee (x_1x_2\bar{x}_3) \vee x_1x_2x_3)$.

2) $((x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow \bar{x}_1) \oplus (x_1 \Rightarrow (x_1x_2))$;
3) $\rceil((x_1x_2) \Rightarrow \bar{x}_1) \oplus ((x_1 \oplus x_2) \Rightarrow \bar{x}_2)$;
4) $(x_3 \Rightarrow x_1) \Rightarrow ((\overline{x_2 \vee x_3}) \Rightarrow x_1)$;

"в обратную сторону":

$$x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 = (x_1 \vee \bar{x}_1)\bar{x}_2x_3 = 1 \cdot \bar{x}_2x_3 = \bar{x}_2x_3.$$

После того, как вся форма просмотрена, нужно сделать вторичный просмотр, который возможно даст результаты.

Поскольку результат работы алгоритма зависит от выбора упорядочения как самих элементарных конъюнкций, так и упорядочения множителей в каждой из них, то, перебрав все возможные варианты упорядочения и применив к каждому из вариантов указанный алоритм, мы получим все возможные тупиковые дизъюнктивные нормальные формы.

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — некоторая булева функция, которая не является тавтологией. Пусть

$$K = \bigvee_{i=1}^{s} M_i$$

— ее произвольная тупиковая дизъюнктивная нормальная форма (относительно операций I и II). Тогда существует такое упорядочение для совершенной дизъюнктивной нормальной формы функции $f(\tilde{x}^n)$ из которого, при помощи алгоритма упрощения дизъюнктивной нормальной формы, получается K.

При подходящем выборе упорядочения, алгоритм упрощения дизъюнктивной нормальной формы позволяет получить из совершенной дизъюнктивной нормальной формы минимальную дизъюнктивную нормальную форму (относительно операций I и II).

Множество E^n можно рассматривать как множество вершин n-мерного куба.

Пусть $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_r}$ — фиксированная система чисел из множества $\{0, 1\}$. Множество всех вершин n-мерного куба $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ таких, что

$$a_{i_1} = s_{i_1}, \quad a_{i_2} = s_{i_2}, \quad \ldots, \quad a_{i_r} = s_{i_r},$$

называется $(n - r)$-*мерной гранью.*

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — некоторая булева функция. Составим множество N_f следующим образом: $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in N_f$ тогда и только тогда, когда $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$. Тогда $N_f \subseteq E^n$. Очевидно, что если известно множество N_f, то функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно построить единственным образом.

Рангом элементарной конъюнкции называется число ее множителей.

Множество N_K, которое соответствует некоторой элементарной конъюнкции

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{a_2} \ldots x_{i_r}^{a_r}$$

называется *интервалом ранга n*.

Интервал r-го ранга является $(n-r)$-мерной гранью.

Покрытием множества N_f интервалами $N_{K_1}, N_{K_2}, \ldots, N_{K_s}$ называется выражение

$$N_f = N_{K_1} \cup N_{K_2} \cup \ldots \cup N_{K_s},$$

т.е. представление множества N_f в виде объединения множеств $N_{K_1}, N_{K_2}, \ldots, N_{K_s}$.

Тогда и только тогда функция $f(\tilde{x}^n)$ обладает дизъюнктивной нормальной формой D такой, что

$$D = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_s,$$

когда

$$N_f = N_{K_1} \cup N_{K_2} \cup \ldots \cup N_{K_s},$$

т.е. представление булевой функции дизъюнктивной нормальной формой равносильно покрытию множества N_f интервалами, соответствующими элементарным конъюнкциям этой дизъюнктивной нормальной формы.

Покрытием множества N_f называется всякое выражение вида $N_{K_1} \cup N_{K_2} \cup \ldots \cup N_{K_s}$, где $N_{K_1}, N_{K_2}, \ldots N_{K_s}$ — интервалы, соответствующие элементарным конъюнкциям $K_1, K_2, \ldots, K_s$, которые составляют некоторую дизъюнктивную нормальную форму функции $f(\tilde{x}^n)$.

Пусть $N_{K_1} \cup N_{K_2} \cup \ldots \cup N_{K_s}$ — некоторое покрытие. *Рангом покрытия* называется число

$$r = \sum_{i=1}^{s} r_i,$$

где r_i — ранг интервала N_{K_i}.

Теперь задачу минимизации дизъюнктивной нормальной формы можно свести к эквивалентной задаче: найти для данного множества N_f такое покрытие интервалами, принадлежащими этому множеству, чтобы его ранг был наименьшим.

Интервал N_K, содержащийся в N_f называется *максимальным* (относительно N_f), если не существует интервала $N_{K'}$ такого, что:

1) ранг интервала $N_{K'}$ меньше ранга интервала N_K;

2) $N_K \subseteq N_{K'} \subseteq N_f$.

Конъюнкция K, соответствующая максимальному интервалу N_K множества N_f, называется *простой импликантой функции* f.

Из простой импликанты нельзя удалить ни одного множителя.

Дизъюнктивная нормальная форма, являющаяся дизъюнкцией всех простых импликант, называется *сокращенной дизъюнктивной нормальной формой.*

Алгоритм построения сокращенной дизъюнктивной нормальной формы.

1. Для данной булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ берут некоторую конъюнктивную нормальную форму (можно взять совершенную конъюнктивную нормальную форму).

2. Производят раскрытие скобок, которое сводится к преобразованию вида

$$\wedge\vee \to \vee\wedge\,.$$

3. В полученном выражении совершают преобразования вида

$$K_1K_2 \vee K_1 = K_1,$$
$$K_1 \vee K_1 = K_1,$$

которые ликвидируют поглощаемые и дублирующие множители. Кроме того, удаляют элементарные конъюнкции, которые содержат одновременно какую-либо переменную и ее отрицание.

В результате этих преобразований получается сокращенная дизъюнктивная нормальная форма.

Тогда и только тогда функция $f(\tilde{x}^n)$ обладает дизъюнктивной нормальной формой D такой, что

$$D = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_s,$$

когда

$$N_f = N_{K_1} \cup N_{K_2} \cup \ldots \cup N_{K_s},$$

т.е. представление булевой функции дизъюнктивной нормальной формой равносильно покрытию множества N_f интервалами, соответствующими элементарным конъюнкциям этой дизъюнктивной нормальной формы.

Это утверждение позволяет решать задачу нахождения сокращенной дизъюнктивной нормальной формы с помощью геометрической интерпретации. Сначала для данной булевой функции составляется множество N_f. Затем из элементов этого множества составляются грани куба. По составленным граням строятся элементарные конъюнкции (ранг которых как правило оказывается меньше числа неизвестных). Наконец построенные элементарные конъюнкции объединяются дизъюнкциями и получается сокращенная дизъюнктивная нормальная форма.