Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
"Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины"

В. В. АНИСЬКОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ В 3 ЧАСТЯХ. Часть 1. ВЕКТОРЫ. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Гомель, 2007

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
“Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины”

В. В. АНИСЬКОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ В 3 ЧАСТЯХ. ЧАСТЬ 1. ВЕКТОРЫ. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

для студентов 1 курса
специальности 1–31 03 01–02 — “Математика (научно-педагогическая деятельность)”

Гомель, 2007

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.151 я 73
А 674

Рецензент:

кафедра алгебры и геометрии учреждения образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины"

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины"

А 674 Аниськов В.В.
Аналитическая геометрия: практическое пособие для студентов 1 курса специальности 1 -31 03 01–02 — "Математика (научно-педагогическая деятельность)". В 3 частях. Ч1. Векторы. Линии и поверхности первого порядка / В. В. Аниськов. Мин-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф.Скорины. — Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, — 2007. — 87 с.

Практическое пособие предназначено студентам 1 курса математического факультета специальности 1–31 03 01–02 — "Математика (научно-педагогическая деятельность)", изучающим дисциплину "Аналитическая геометрия". Может быть использовано для самостоятельного изучения.

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.151 я 73 ..

ISBN

Содержание

Введение

Данное пособие является первой частью пособия для проведения практических занятий по дисциплине “Аналитическая геометрия” для студентов дневного математического факультета специальности 1-31 03 01-02 — “математика (научно-педагогическая деятельность)”.

В пособии представлены следующие разделы: “Векторная алгебра”, “Прямая и плоскость”.

Для задач принята сквозная нумерация. В начале каждой темы даются краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач данной темы. Типовые задачи темы даны с решениями, что позволяет использовать пособие для самоподготовки. На остальные задачи в конце пособия даны ответы.

Пособие может использоваться прежде всего студентами математического факультета. Оно так же может быть использовано и студентами заочного факультета.

1 ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1.1 Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция вектора

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на действительное число α называется такой вектор $\vec{b}$, что выполняются следующие условия:

1) $|\vec{b}| = |\alpha|\ |\vec{a}|$;
2) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны;
3) если $\alpha > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и, если $\alpha < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что если $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ — представители векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то $\overrightarrow{AC}$ — представитель вектора $\vec{c}$.

Произведение вектора на число и сумму векторов принято называть линейными операциями над векторами. Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;
3) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ для любого действительного числа α и любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (дистрибутивность);
4) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ для любых действительных чисел α и β и любого вектора $\vec{a}$;
5) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$ и любых двух действительных чисел α и β.

Векторы называются *коллинеарными,* если их представители параллельны одной и той же прямой.

Векторы называются *компланарными,* если их представители параллельны одной и той же плоскости.

Пусть дан ненулевой вектор $\vec{a}$. Для любого коллинеарного ему вектора $\vec{b}$ существует единственное действительное число λ такое, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ называется *базисом на плоскости.*

Если некоторый произвольный вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде $\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$, где $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ — некоторый базис на плоскости, а $\alpha,\ \beta$ —

некоторые действительные числа, то говорят, что вектор $\vec{a}$ разложен по векторам базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$, а числа α и β называют коэффициентами разложения вектора $\vec{a}$ по векторам базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ или *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ называется *базисом в пространстве.*

Если некоторый произвольный вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде $\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$, где $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ — некоторый базис в пространстве, а $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ — некоторые действительные числа, то говорят, что вектор $\vec{a}$ разложен по векторам базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$, а числа $\alpha,\ \beta$ и γ называют коэффициентами разложения вектора $\vec{a}$ по векторам базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ или *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$.

Если базис состоит из единичных и взаимно перпендикулярных векторов, то он называется *ортонормированным*, а координаты произвольного вектора в этом базисе — *прямоугольными координатами.*

Осью называется некоторая прямая на которой выбран представитель некоторого единичного вектора.

Векторной проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется вектор $\overrightarrow{CD}$, начало и конец которого являются соответственно проекциями в обычном смысле на прямую l начала и конца некоторого представителя $\overrightarrow{AB}$ вектора $\vec{a}$.

Пусть $\vec{b}$ — векторная проекция вектора $\vec{a}$ на ось l. *Проекцией* вектора $\vec{a}$ на ось l называется число p такое, что $p = |\vec{b}|$, если направление вектора $\vec{b}$ совпадает с направлением оси l и $p = -|\vec{b}|$ в противном случае. Обозначается проекция вектора $\vec{a}$ на ось l следующим образом: $Pr_l\vec{a}$.

Проекция вектора на ось обладает следующими свойствами:

1)$Pr_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a}, l})$;
2) $Pr_l(\lambda\vec{a}) = \lambda Pr_l\vec{a}$ для любого действительного числа λ;
3) $Pr_l(\vec{a} + \vec{b}) = Pr_l\vec{a} + Pr_l\vec{b}$.

Задача 1. Точки A, B, C, D — вершины параллелограмма, O — его центр. Найдите разложение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AO}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BO}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CO}$, $\vec{d} = \overrightarrow{DO}$.

Решение. Построим параллелограмм $ABCD$ (рис. 1). Вначале заметим, что, поскольку диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам, то $\vec{a} = -\vec{c},\ \vec{b} = -\vec{d}$.

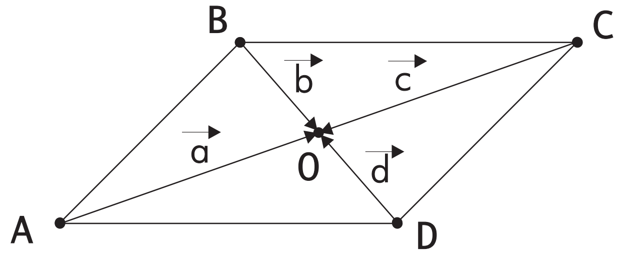

Рис. 1:

Поскольку $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$, то получим $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$. Теперь, используя замеченное выше, можно получить еще три разложения для вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = -\vec{c} - \vec{b} = -\vec{c} - \vec{d} = \vec{a} - \vec{d}.$$

Аналогично получим разложения для остальных векторов:

$$\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{c} = -\vec{d} - \vec{c} = -\vec{d} + \vec{a} = \vec{b} + \vec{a}.$$

$$\overrightarrow{CD} = \vec{c} - \vec{d} = -\vec{a} - \vec{d} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{b}.$$

$$\overrightarrow{DA} = \vec{d} - \vec{a} = -\vec{b} - \vec{a} = -\vec{b} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{c}.$$

Задача 2. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найдите разложения векторов $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{ED}$ по векторам $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{q} = \overrightarrow{AF}$.

Задача 3. Дан тетраэдр $ABCD$. Найдите суммы векторов:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$;
2) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}$;
3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}$.

Задача 4. $ABCD$ — тетраэдр. Докажите, что $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$. Верно ли это утверждение для четырех произвольных точек?

Решение. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$.
Поскольку при доказательстве этого векторного равенства нигде не используются геометрические свойства фигуры $ABCD$, то утверждение верно для любых точек A, B, C, D.

Задача 5. Точки E и F — середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$.

Задача 6. Докажите, что если точки A, B, C, D — середины последовательных сторон четырехугольника, то $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

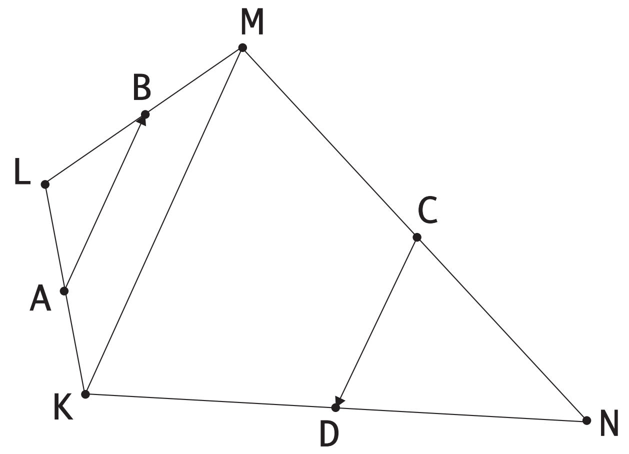

Рис. 2:

Решение. Для того, чтобы не возникало визуальных обманов, четырехугольник должен быть как можно более "неправильным"(рис. 2).

Обозначим вершины четырехугольника через K, L, M, N. Проведем дополнительное построение — соединим вершины K и M. Тогда KM будет основанием одновременно для двух треугольников — KLM и MNK, средними линиями которых будут соответственно AB и CD. Тогда $AB = \frac{1}{2}KM = CD$. Следовательно, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. Кроме того, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ противоположно направлены. Следовательно, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$. Отсюда и следует доказываемое равенство.

Задача 7. Дан правильный шестиугольник $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$. Докажите, что

$$\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_1C_3}+\overrightarrow{C_1C_4}+\overrightarrow{C_1C_5}+\overrightarrow{C_1C_6}=3\overrightarrow{C_1C_4}.$$

Задача 8. Найдите вектор, определяющий направление биссектриссы угла между ненулевыми векторами $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$.

Задача 9. Точки M_1 и M_2 делят отрезок AB на три равные части. Q — произвольная точка. Найдите разложение векторов $\overrightarrow{QM_1}$ и $\overrightarrow{QM_2}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{QA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{QB}$.

Решение.

Поскольку $|\overrightarrow{AM_1}| = |\overrightarrow{M_1M_2}| = |\overrightarrow{M_2B}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QB} = -\vec{a}+\vec{b}$, то для вектора $\overrightarrow{QM_1}$ разложение можно получить двумя способами:

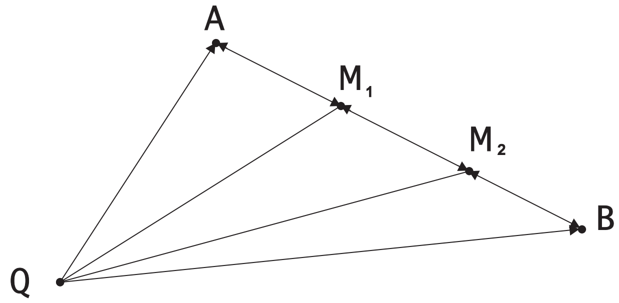

Рис. 3:

$$\overrightarrow{QM_1} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b};$$

$$\overrightarrow{QM_1} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BM_1} = \vec{b} - \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}.$$

Аналогично и для вектора $\overrightarrow{QM_2}$ разложение получим двумя способами:

$$\overrightarrow{QM_2} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AM_2} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b};$$

$$\overrightarrow{QM_2} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BM_2} = \vec{b} - \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}.$$

Ответ: $\overrightarrow{QM_1} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}; \overrightarrow{QM_2} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$

Задача 10. В треугольнике ABC проведена биссектрисса AD угла A. Найдите разложение вектора $\overrightarrow{AD}$ по векторам $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Задача 11. Две перпендикулярные прямые, проходящие через точку M пересекают окружность в точках $A,\ B,\ C,\ D$. Докажите, что

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM},$$

где O — центр окружности.

Задача 12. Точки E и F являются серединами диагоналей AC и BD соответственно четырехугольника $ABCD$. Найдите разложение вектора $\overrightarrow{EF}$ по векторам $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$, если $\overrightarrow{AB} = \vec{m},\ \overrightarrow{BC} = \vec{n},\ \overrightarrow{CD} = \vec{p}$.

Задача 13. Пусть S — точка пересечения средних линий произвольного четырехугольника $ABCD$ и M — некоторая произвольная точка плоскости. Докажите, что

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MS}.$$

Задача 14. Даны четыре вектора $\vec{a}(1,5,3);\vec{b}(6,-4,-2);\vec{c}(0,-\\-5,7);\vec{d}(-20,27,-35)$. Подберите числа α,β,γ так, чтобы векторы $\alpha\vec{a},\beta\vec{b},\gamma c,\vec{d}$ образовывали замкнутую ломаную линию, если начало представителя каждого последующего вектора совместить с концом представителя предыдущего.

Решение. Если указанные векторы образуют замкнутую линию, то их сумма равна нулевому вектору:

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}. \tag{1}$$

Поскольку векторы даны в координатной форме, то существует некоторый базис $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ такой. что $\vec{a}=1\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$; $\vec{b}=6\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}$; $\vec{c}=\\=0\vec{i}-5\vec{j}+7\vec{k}$; $\vec{d}=-20\vec{i}+27\vec{j}-35\vec{k}$. Поэтому векторное уравнение (1) принимает вид:

$$\alpha(1\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k})+\beta(6\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k})+\gamma(0\vec{i}-5\vec{j}+7\vec{k})+(-20\vec{i}+27\vec{j}-35\vec{k})=$$

$$0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}. \tag{2}$$

Поскольку векторы $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ являются векторами базиса, то ни один из них не может быть выражен через остальные. Следовательно, равенство коэффициентов левой и правой частей последнего равенства возможно только при одних и тех же векторах базиса. Значит из равенства (2) получаем систему, состоящую из трех уравнений:

$$\begin{cases}\alpha+6\beta+0\gamma-20=0;\\ 5\alpha-4\beta-5\gamma+27=0;\\ 3\alpha-2\beta+7\gamma-35=0.\end{cases}$$

Перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases}\alpha+6\beta+0\gamma=20;\\ 5\alpha-4\beta-5\gamma=-27;\\ 3\alpha-2\beta+7\gamma=35.\end{cases}$$

Прибавим ко второму уравнению первое уравнение, умноженное на -5, а к третьему уравнению прибавим первое уравнение, умноженное на -3 и приведем подобные:

$$\begin{cases} \alpha + 6\beta + 0\gamma = 20; \\ -34\beta - 5\gamma = -127; \\ -20\beta + 7\gamma = -25. \end{cases}$$

Теперь умножим третье уравнение на 5 и прибавим к нему второе уравнение, умноженное на 7, а затем приведем подобные:

$$\begin{cases} \alpha + 6\beta + 0\gamma = 20; \\ -34\beta - 5\gamma = -127; \\ -338\beta = -1014. \end{cases}$$

Отсюда получим, что $\beta = 3$. Тогда из второго уравнения последней системы: $\gamma = 5$. Подставив полученные значения в первое уравнение, получим: $\alpha = 2$.

Ответ: $\alpha = 2,\ \beta = 3,\ \gamma = 5$.

Задача 15. Найдите разложение вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

1) $\vec{a}(4, -2); \vec{b}(3, 5); \vec{c}(1, -7)$;
2) $\vec{a}(5, 4); \vec{b}(-3, 0); \vec{c}(19, 8)$;
3) $\vec{a}(-6, 2); \vec{b}(4, 7); \vec{c}(9, -3)$.

Задача 16. В ромбе $ABCD$ за базисные взяты векторы $\overrightarrow{AC} = \vec{e}_1$ и $\overrightarrow{BD} = \vec{e}_2$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ в этом базисе.

Задача 17. При каких значениях l и m векторы $\vec{a}(l, -2, 5)$ и $\vec{b}(1, m, -3)$ коллинеарны?

Задача 18. Какие из следующих троек векторов можно выбрать в качестве базиса?

1) $\vec{e}_1(-3, 0, 2); \vec{e}_2(2, 1, -4); \vec{e}_3(11, -2, -2)$;
2) $\vec{k}_1(1, 0, 7); \vec{k}_2(-1, 2, 4); \vec{k}_3(3, 2, 1)$;
3) $\vec{p}_1(5, -1, 4); \vec{p}_2(3, -5, 2); \vec{p}_3(-1, -13, -2)$.

Решение. 1) Предположим, что векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ нельзя взять в качестве базиса. Поскольку эти векторы ненулевые, то тогда они будут компланарны и поэтому один из них может быть разложен по двум другим при условии, что эти два вектора неколлинеарны. Возьмем например векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Они не являются коллинеарными, поскольку в противном случае их соответствующие координаты были бы пропорциональны с одним коэффициентом пропорциональности. Значит вектор $\vec{e}_3$ может быть по ним разложен. Следовательно, найдутся единственные действительные числа α и β такие, что $\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 = \vec{e}_3$. Используя данные в условии коэффициенты разложения векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ по векторам некоторого базиса, получим систему:

$$\begin{cases} -3\alpha + 2\beta = 11; \\ 0\alpha + 1\beta = -2; \\ 2\alpha - 4\beta = -2. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем, что $\beta = -2$. Подставив это значение в третье уравнение, получим, что $\alpha = -5$. Такое же значение для коэффициента α мы получаем и из первого уравнения. Это значит, что указанные действительные числа существуют, т.е. вектор $\vec{e}_3$ может быть выражен через векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Значит наше предположение о том, что векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ нельзя взять в качестве базиса верно.

Ответ: Векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ нельзя взять в качестве базиса.

Задача 19. Даны четыре вектора $\vec{a}(2, 1, -1); \vec{b}(1, -1, 2); \vec{c}(3, -$ $-2, 1); \vec{d}(-8, 9, -1)$. Покажите, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ можно взять в качестве базиса и найдите координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Задача 20. Разложите вектор $\vec{a} = 8\vec{i} + 10\vec{j}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, где $\vec{e}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$; $\vec{e}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{e}_3 = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.

Задача 21. Докажите, что каковы бы ни были три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и три числа α, β, γ, векторы $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$, $\gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}$, $\beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$ компланарны.

Задача 22. Найдите $Pr_{\vec{a}}\overrightarrow{AC}$, если $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; $|\overrightarrow{AB}| = 6$; $|\overrightarrow{BC}| =$ $= 2\sqrt{2}$; $|\vec{a}| = 2$; $(\widehat{\overrightarrow{AB}; \vec{a}}) = 60°$; $(\widehat{\overrightarrow{BC}; \vec{a}}) = 45°$.

Задача 23. Вектор $\vec{a}$ образует с вектором $\vec{i}$ угол α. Вычислите прямоугольные координаты вектора $\vec{a}$ на плоскости:

1) $\alpha = 0°$; $|\vec{a}| = 3$;
2) $\alpha = 90°$; $|\vec{a}| = 2$;
3) $\alpha = 180°$; $|\vec{a}| = \dfrac{3}{2}$;
4) $\alpha = -90°$; $|\vec{a}| = \dfrac{1}{2}$;
5) $\alpha = 45°$; $|\vec{a}| = 1$;
6) $\alpha = 60°$; $|\vec{a}| = 2$;
7) $\alpha = -120°$; $|\vec{a}| = 5$;

8) $\alpha = -30^\circ$; $|\vec{a}| = 4$.

Задача 24. Найдите прямоугольные координаты вектора $\vec{a}$, если известны углы $\alpha = (\widehat{\vec{a}, \vec{i}})$, $\beta = (\widehat{\vec{a}, \vec{j}})$, $\gamma = (\widehat{\vec{a}, \vec{k}})$ и $|\vec{a}|$:

1) $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 60^\circ, |\vec{a}| = 4$;
2) $\alpha = 135^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 60^\circ, |\vec{a}| = 8$;
3) $\alpha = 120^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 120^\circ, |\vec{a}| = 2$;
4) $\alpha = 120^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 45^\circ, |\vec{a}| = 6$.

1.2 Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — это число, которое обозначается $\vec{a}\vec{b}$ и вычисляется по формуле: $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$;
2) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$;
3) $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$;
4) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.
5) $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$
6) $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|Pr_{\vec{a}}\vec{b}$.
7) для того, чтобы ненулевые векторы были перпендикулярны (ортогональны), необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

Пусть векторы $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ заданы своими прямоугольными координатами, тогда их скалярное произведение находится по формуле

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

модуль вектора, заданного прямоугольными координатами —

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что выполняются следующие условия:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$;
2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку.
Обозначается векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через $\vec{a} \times \vec{b}$.

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

1) модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на представителях этих векторов;

2) для того, чтобы ненулевые векторы были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулю;

3) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (антикоммутативность);

4) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ (линейность);

5) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (дистрибутивность).

Пусть векторы $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ заданы своими прямоугольными координатами, тогда их векторное произведение находится по формуле

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}.$$

Смешанным произведением трёх ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется скалярное произведение векторного произведения первых двух векторов на третий вектор. Обозначается смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Смешанное произведение обладает следующими свойствами:

1) модуль смешанного произведения равен объёму параллелепипеда, построенного на представителях векторов-сомножителей;

2) если смешанное произведение положительно, то векторы образуют правую тройку, если смешанное произведение отрицательно, то тройка левая;

3) для того, чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение было равно нулю;

4) $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$;

5) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$;

6) $(\vec{a_1} + \vec{a_2})\vec{b}\vec{c} = \vec{a_1}\vec{b}\vec{c} + \vec{a_2}\vec{b}\vec{c}$;

7) $(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

Пусть векторы $\vec{a}(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$ заданы своими прямоугольными координатами, тогда их смешанное произведение находится по формуле

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_3 y_1 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2.$$

Всюду далее если векторы заданы в координатной форме, то речь идет о прямоугольном базисе, состоящем из единичных векторов.

Задача 25. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1)$|\vec{a}| = 8, |\vec{b}| = 5, (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60^\circ$;
2)$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 135^\circ$;
3)$|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1, \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$;
4)$|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1, \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$;

Задача 26. Зная, что $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 5, (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60^\circ$, вычислите:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$;
2) $\vec{a}^2$;
3) $\vec{b}^2$;
4) $(\vec{a} + \vec{b})^2$;
5) $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (3\vec{a} + 4\vec{b})$.

Задача 27. Вычислите:

1) $(\vec{m} + \vec{n})^2$, если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — единичные векторы и $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = 30^\circ$;
2) $(\vec{a} - \vec{b})^2$, если $|\vec{a}| = 2\sqrt{2},\ |\vec{b}| = 4$ и $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 135^\circ$.

Задача 28. Вычислите длины диагоналей параллелограмма, построенного на представителях векторов $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — единичные векторы, угол между которыми 60°.

Задача 29. Найдите угол между векторами $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — единичные векторы и $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = 120^\circ$.

Задача 30. Найдите угол между векторами $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ и $\vec{b} = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$, если $|\vec{e}_1| = 1,\ |\vec{e}_2| = 2,\ |\vec{e}_3| = 3$; $(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}) = (\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_3}) = 60^\circ,\ (\widehat{\vec{e}_2, \vec{e}_3}) = 90^\circ$.

Задача 31. Пользуясь скалярным произведением векторов, докажите, что:

1) диагонали ромба взаимно перпендикулярны;
2) диагонали прямоугольника равны между собой.

Решение. 1). Диагонали ромба могут быть рассмотрены как представители разности и суммы векторов, представителями которых являются стороны ромба (рис. 4).

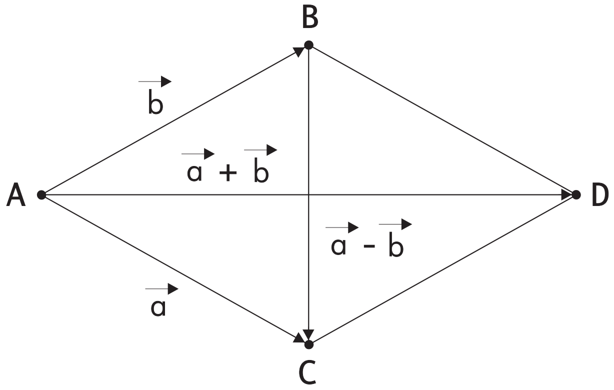

Рис. 4:

Найдем скалярное произведение диагоналей ромба, а затем используем свойства скалярного произведения и тот факт, что стороны ромба равны по длине:

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\vec{a} - \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a} - \vec{b}\vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0.$$

Поскольку диагонали ромба не могут быть представителями нулевых векторов, то приходим к заключению, что они перпендикулярны.

Задача 32. Длина гипотенузы AB треугольника ABC равна c. Вычислите сумму

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}.$$

Задача 33. Докажите, что при любом расположении точек A, B, C, D на плоскости имеет место равенство

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0.$$

Задача 34. Докажите, что высоты произвольного треугольника пересекаются в одной точке.

Решение. Построим треугольник ABC (рис. 5).

Пусть AK — высота, опущенная из вершины A, а BL — высота, опущенная из вершины B. Поскольку они проведены к пересекающимся прямым BC и AC соответственно, то эти высоты пересекаются в некоторой точке O. Докажем, что прямая CO перпендикулярна прямой AB. Для этого воспользуемся скалярным произведением векторов:

$$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BO})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) =$$

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{CB} =$$

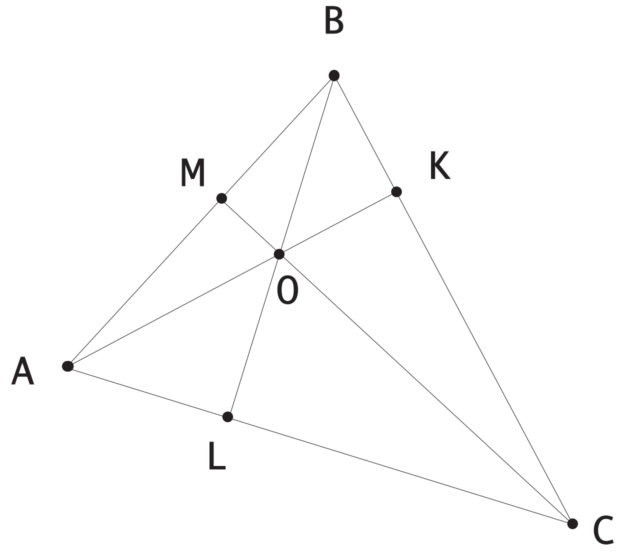

Рис. 5:

$$\overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BO}) = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AO} = 0.$$

Итак, воспользовавшись перпендикулярностью векторов $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{AC}$, мы доказали перпендикулярность векторов $\overrightarrow{CO}$ и $\overrightarrow{AB}$. Значит отрезок CM, проходящий через точку пересечения высот AK и BL перпендикулярен стороне AB. С другой стороны, отрезок CM является высотой, проведенной к стороне AB. Следовательно, мы доказали, что высоты произвольного треугольника пересекаются в одной точке.

Задача 35. В треугольнике ABC проведены медианы AD , BE и CF. Вычислите

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF}.$$

Задача 36. Вычислите скалярное произведение векторов:

1) $\vec{a}(1, 2)$; $\vec{b}(3, -4)$;
2) $\vec{a}(1, 3, -5)$; $\vec{b}(5, 0, 1)$;
3) $\vec{a}(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; $\vec{b}(0,2,\ 0,15,\ 0,1)$;
4) $\vec{a}(1, 2\sin 15°, \cos 15°)$; $\vec{b}(0, \sin 15°, 2\cos 15°)$;
5) $\vec{a}(\cos 30°, 2, \sin 30°)$; $\vec{b}(\cos 30°, -1, 3\sin 30°)$.

Решение. 4). $\vec{a}\vec{b} = 1 \cdot 0 + 2\sin 15° \sin 15° + 2\cos 15° \cos 15° = 2(\sin^2 15° + \cos^2 15°) = 2$.

Ответ: 2.

Задача 37. Найдите углы между векторами:

1) $\vec{a}(3,3),\ \vec{b}(3,0)$;
2) $\vec{a}(1,-1,-1), \vec{b}(2,0,2)$;
3) $\vec{p}(2,\cos 10^\circ, -\sin 10^\circ),\ \vec{q}(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sin 10^\circ, \cos 10^\circ)$;
4) $\vec{p}(\cos 3^\circ, \sin 3^\circ, 0),\ \vec{q}(1,0,0)$.

Задача 38. Найдите число λ такое, чтобы были ортогональны векторы $\vec{a} = \vec{i} + 5\vec{j} - 6\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \lambda\vec{k}$.

Задача 39. Дано: $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 5, (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60^\circ$. Найдите:

1)$|\vec{a} \times \vec{b}|$;
2)$|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|$;
3)$|(3\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - 3\vec{b})|$.

Задача 40. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы векторы $\vec{m} = 3\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{n} = \vec{a} - 3\vec{b}$ были коллинеарны?

Задача 41. Вычислите площадь треугольника, построенного на представителях векторов $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, отложенных из одной точки, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 6,\ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 45^\circ$.

Задача 42. Найдите $\vec{a} \times \vec{b}$, если:

1) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j},\ \vec{b} = 3\vec{k}$;
2) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k},\ \vec{b} = 7\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$;
3) $\vec{a}(0,1,2);\ \vec{b}(2,0,3)$;
4) $\vec{a}(8,6,4);\ \vec{b}(1,2,-2)$.

Задача 43. Зная векторы $\overrightarrow{AB}(-3,-2,6)$ и $\overrightarrow{BC}(-2,4,4)$, вычислите длину высоты AD треугольника ABC.

Решение. Построим на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$ параллелограмм (рис. 6)

По свойствам векторного произведения, площадь параллелограмма $ABCE$ равна модулю векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AE}$:

$$S_{ABCE} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| =$$

$$|((-2)\cdot 4 - 6\cdot 4,\ (-2)\cdot 6 - (-3)\cdot 4,\ (-3)\cdot 4 - (-2)\cdot(-2))| =$$

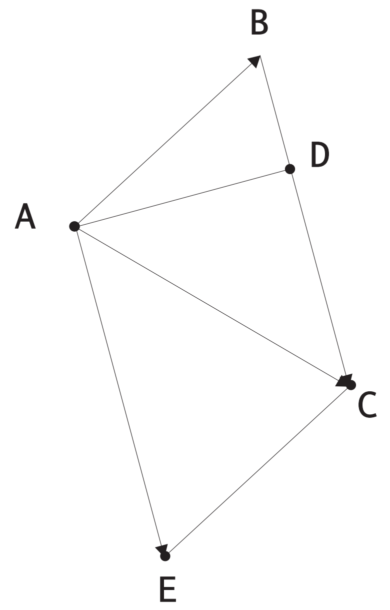

Рис. 6:

$$\sqrt{(-32)^2+0^2+(-16)^2}=\sqrt{1280}=16\sqrt{5}.$$

Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABCE$. С другой стороны, она может быть найдена по известной формуле:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot BC.$$

Следовательно, получим соотношение

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot BC$$

из которого

$$AD=\frac{S_{ABCE}}{BC}=\frac{S_{ABCE}}{|\overrightarrow{BC}|}=$$

$$\frac{16\sqrt{5}}{\sqrt{(-2)^2+4^2+4^2}}=\frac{16\sqrt{5}}{\sqrt{36}}=\frac{16\sqrt{5}}{6}=\frac{8\sqrt{5}}{3}.$$

Ответ: $\frac{8\sqrt{5}}{3}$.

Задача 44. Убедитесь, что представители векторов $\vec{a}(2,1,2)$ и $\vec{b}(-2,2,1)$, отложенные от одной точки, можно взять в качестве ребер куба и найдите третье ребро куба, идущее из той же вершины.

Задача 45. Вектор $\vec{x}$, ортогональный векторам $\vec{a}(2,3,-1)$ и $\vec{b}(1,-$ $-1,3)$. образует с вектором $\vec{i}$ тупой угол. Зная, что $|\vec{x}| = \sqrt{138}$, найдите координаты вектора $\vec{x}$.

Задача 46. Компланарны ли векторы $\vec{m} = 2\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{n} = 3\vec{q}-5\vec{r}$, $\vec{l} =$ $= 2\vec{p}+5\vec{r}$, если векторы $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ некомпланарны?

Задача 47. Вычислите смешанное произведение векторов:

1) $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$;
2) $\vec{k},\vec{j},\vec{i}$;
3) $\vec{i},\vec{k},\vec{j}$;
4) $\vec{i},\vec{j},(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$;

Решение. 1). $\vec{i} = (1,0,0)$; $\vec{j} = (0,1,0)$; $\vec{k} = (0,0,1)$. Следовательно:

$$\vec{i}\vec{j}\vec{k} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+0-0-0-0 = 1.$$

Ответ: 1.

Задача 48. Укажите, какой тройкой (правой или левой) является тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

1) $\vec{a} = \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i}$, $\vec{c} = \vec{k}$;
2) $\vec{a} = \vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{k}$;
3) $\vec{a} = \vec{i}+\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i}$;
4) $\vec{a} = \vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i}+\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i}$?

Задача 49. Вычислите смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и укажите какой тройкой (правой или левой) является тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

1) $\vec{a} = \vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c} = 8\vec{i}+6\vec{j}+4\vec{k}$;
2) $\vec{a} = \vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$;
3) $\vec{a}(13,12,11)$, $\vec{b}(24,23,22)$, $\vec{c}(35,34,33)$;
4) $\vec{a}(1,3,5)$, $\vec{b}(2,4,6)$, $\vec{c}(8,9,7)$.

Задача 50. Выясните, компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

1) $\vec{a} = \vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b} = 9\vec{i}-11\vec{j}+13\vec{k}$; $\vec{c} = 2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$;

2) $\vec{a} = 8\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k},\ \vec{b} = 2\vec{j} - \vec{k}, \vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$;

3) $\vec{a}(-2,-1,1),\ \vec{b}(4,-4,1),\ \vec{c}(4,-6,2)$;

4) $\vec{a}(1,1,1), \vec{b}(1,0,1),\ \vec{c}(0,1,1)$.

Задача 51. Даны три вектора $\vec{a}(8,4,1),\ \vec{b}(2,2,1),\ \vec{c}(1,1,1)$. Найдите единичный вектор $\vec{d}$, образующий с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равные углы, перпендикулярный вектору $\vec{c}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ и $\vec{a}, \vec{b},\ \vec{d}$ имели одинаковую ориентацию, т.е. обе были правыми или левыми.

Задача 52. Даны три вектора $\vec{a}(8,4,1),\ \vec{b}(2,-2,1),\ \vec{c}(1,1,1)$. Найдите единичный вектор $\vec{d}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ортогональный вектору $\vec{c}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}$ имели противоположную ориентацию.

Задача 53. Даны два вектора $\vec{a}(11,10,2)$ и $\vec{b}(4,0,3)$. Найдите единичный вектор $\vec{c}$, ортогональный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направленный так, чтобы тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ была правой.

1.3 Множество точек. Системы координат

Если по геометрическим свойствам плоской линии l удается найти в некоторой ПДСК-2 такое уравнение

$$F(x, y) = 0, \qquad (*)$$

что координаты любой точки линии l в этой ПДСК-2 определяют некоторое решение уравнения (*) и, с другой стороны, всякое решение этого уравнения определяет некоторую точку данной линии, то говорят, что (*) — *уравнение линии* l.

Если по геометрическим свойствам поверхности s удается найти в некоторой ПДСК-3 такое уравнение

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (**)$$

что координаты любой точки поверхности s в этой ПДСК-3 определяют некоторое решение уравнения (**) и, с другой стороны, всякое решение этого уравнения определяет некоторую точку данной поверхности, то говорят, что (**) — *уравнение поверхности* s.

Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ — две различные точки, данные в некоторой ПДСК-3. Тогда $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$. Поскольку расстояние между точками A и B равно модулю связанного вектора $\overrightarrow{AB}$, то получим *формулу расстояния между точками:*

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Пусть нужно найти такую точку C, которая лежит на отрезке AB и делит его в заданном соотношении λ. Пусть $C(x, y, z)$. Тогда *формулы деления отрезка в данном соотношении* имеют вид

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Если точка C — середина отрезка AB, то $\lambda = 1$ и тогда получаем *формулы середины отрезка:*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}; z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Если точки A и B даны в некоторой ПДСК-2, т. е. $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то в формулах деления отрезка в данном соотношении и формулах середины отрезка, аппликата не используется.

Формулы перехода от полярных координат к прямоугольным —

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

от прямоугольных координат к полярным —

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Формулы перехода от сферических координат к прямоугольным —

$$x = r\ cos\psi\cos\varphi, \quad y = r\cos\psi\sin\varphi, \quad z = \sin\psi,$$

от прямоугольных координат к сферическим —

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
$$\sin\psi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\psi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Задача 54. Найти множество точек, равноудаленных от двух данных точек $A(2,-1)$ и $B(-1,4)$.

Решение. Пусть $M(x,y)$ — такая точка. Тогда, поскольку $AM = BM$, то
$$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}.$$
Возведя в квадрат и раскрыв скобки, получим:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16.$$

Отсюда $-6x + 10y - 12 = 0$ или $3x - 5y + 6 = 0$.

Ответ: $3x - 5y + 6 = 0$.

Задача 55. Даны две точки $M(-1,5)$ и $N(5,-3)$. Составить уравнение прямой линии, перпендикулярной к отрезку MN и делящей его в отношении $\lambda = 2$.

Решение. Такая прямая линия пройдет прежде всего через точку A, которая делит отрезок MN в отношении λ. Пусть $A(x_0, y_0)$. Тогда

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{-1 + 2\cdot 5}{1+2} = \frac{9}{3} = 3;$$

$$y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{5 + 2 \cdot (-3)}{1 + 2} = -\frac{1}{3}.$$

Пусть $X(x, y)$ — произвольная точка искомой прямой линии. Тогда вектор $\overrightarrow{AX}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{MN}$. Следовательно, равно нулю их скалярное произведение:

$$\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{MN} = 0.$$

Перейдя к координатам, получаем:

$$(x - x_0, y - y_0)(5 - (-1), -3 - 5) = 0;$$

$$6(x - 3) - 8(y - (-\frac{1}{3})) = 0;$$

$$6x - 8y - 20\frac{2}{3} = 0$$

или

$$18x - 24y - 62 = 0;$$
$$9x - 12y - 31 = 0.$$

Ответ: $9x - 12y - 31 = 0$.

Задача 56. Определить траекторию точки M, которая при своем движении все время остается вдвое ближе к точке $A(1, 0)$, чем к точке $B(4, 0)$.

Задача 57. Составить уравнение множества точек, находящихся от точки $A(3, 0)$ вдвое ближе, чем от прямой $x = 12$.

Задача 58. Составить уравнение множества центров окружностей, касающихся оси X и проходящих через точку $M(3, 4)$.

Задача 59. Прямая перемещается так, что треугольник, образованный ею с осями координат. меняется, но сохраняет постоянную площадь. Найти траекторию середины отрезка, отсекаемого осями координат на этой прямой.

Задача 60. Найти множество точек, находящихся на расстоянии четырех единиц от плоскости OYZ и на расстоянии трех единиц от точки $A(5, 2, -1)$.

Задача 61. Определить траекторию точки, движущейся в плоскости OXZ так, что дина ее радиус-вектора все время равна расстоянию ее от точки $A(5, -3, 1)$.

Задача 62. Отрезок, ограниченный точками $A(-2, 5, 13)$ и $B(6, 17, -$ $-7)$ разделен точками C, D, E на четыре равные части. Найдите координаты этих точек.

Задача 63. Найдите координаты концов отрезка, который точками $C(7,0,3)$ и $D(-5,0,0)$ разделен на три равные части.

Решение: Пусть $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$ — концы этого отрезка. Тогда точка C является серединой отрезка AD. Применим формулы середины отрезка:

$$7=\frac{x_1-5}{2};\quad 0=\frac{y_1+0}{2};\quad 3=\frac{z_1+0}{2}.$$

Из этих формул в результате вычислений, получим координаты точки: $A(19,0,6)$. Аналогично, точка D является серединой отрезка CB. Следовательно,

$$-5=\frac{7+x_2}{2};\quad 0=\frac{0+y_2}{2};\quad 0=\frac{3+z_2}{2}.$$

Поэтому $B(-17,0,-3)$.

Ответ: $A(19,0,6)$, $B(-17,0,-3)$.

Задача 64. Дан треугольник с вершинами $A(7,5,-4)$, $B(4,9,1)$ и $C(6,-3,-7)$. Вычислите длину медианы, проведенной из вершины A.

Задача 65. Даны две вершины $A(1,3,5)$ и $B(-1,2,1)$ параллелограмма $ABCD$ и точка пересечения его диагоналей $E(1,0,1)$. Найдите две другие вершины параллелограмма.

Задача 66. Вычислите длину биссектрисы внутреннего угла при вершине B треугольника ABC, если $A(1,2,-1)$, $B(2,-1,3)$, $C(-4,7,5)$.

Задача 67. Дан треугольник с вершинами $A(-1,2,4)$, $B(1,4,5)$, $C(2,6,4)$. Найдите единичный вектор биссектрисы угла при вершине A и длину этой биссектрисы.

Задача 68. Найдите полярные координаты точек $A(0,\frac{1}{2})$, $B(1,1)$, $C(\sqrt{3},1)$, $D(-3,3)$, $E(1,-\sqrt{3})$, заданных координатами в соответствующей прямоугольной системе координат.

Задача 69. Зная полярные координаты точек $A(2,\frac{\pi}{3})$, $B(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4})$, $C(5,\frac{\pi}{2})$, $D(3,\frac{\pi}{6})$, $E(2,\frac{\pi}{4})$, найдите их координаты в соответствующей прямоугольной системе координат.

Задача 70. Найдите полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси точкам $A(3,\frac{\pi}{4})$, $B(2,\frac{3\pi}{2})$, $C(3,\frac{5\pi}{3})$, заданным полярными координатами.

Решение. Построим полярную систему координат и в ней точку A (рис. 7). Опустив перпендикуляр из точки A на ось P, получим точку M. Построим точку A_1, симметричную точке A и рассмотрим треугольники OAM и OA_1M. Из определения симметрии, углы OMA и OMA_1 прямые, а расстояния AM и A_1M равны. Поэтому, поскольку сторона OM у указанных треугольников общая, то эти треугольники равны. Следовательно, $\varphi_1 = -\varphi$ и $r_1 = r = 3$. Теперь учитывая ограничения, которые накладываются на полярный угол $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$, получаем, что $\varphi_1 = 2\pi - \varphi = 2\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4}$.

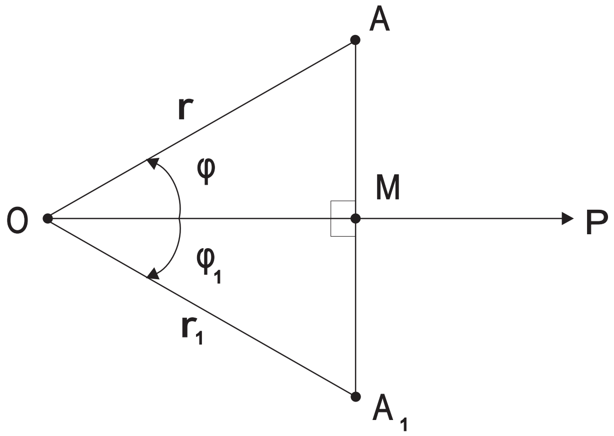

Рис. 7:

Ответ: $A_1(3, \dfrac{7\pi}{3})$.

Задача 71. В полярной системе координат даны координаты двух вершин $A(3, \dfrac{14}{9}\pi)$ и $B(5, \dfrac{3}{14}\pi)$ параллелограмма $ABCD$, точка пересечения диагоналей которого совпадает с полюсом. Вычислите полярные координаты двух других вершин параллелограмма.

Задача 72. Даны полярные координаты точек $A(8, \dfrac{4}{3}\pi)$ и $B(6, \dfrac{\pi}{3})$. Вычислите полярные координаты середины отрезка, образуемого этими точками.

Задача 73. Даны полярные координаты точек $A(12, \dfrac{4}{9}\pi)$ и $B(12, \dfrac{16}{9}\pi)$. Вычислите полярные координаты середины отрезка, образуемого этими точками.

Задача 74. Зная полярные координаты точек $A(5, \dfrac{\pi}{4})$ и $B(8, \dfrac{23\pi}{12})$, вычислите AB.

Задача 75. Одна из вершин треугольника OAB находится в полюсе O, две другие — точки $A(5, \frac{\pi}{4})$ и $B(4, \frac{\pi}{12})$. Вычислите площадь этого треугольника.

Задача 76. Вычислите площадь треугольника, вершины которого $A(3, \frac{\pi}{8})$, $B(8, \frac{7}{24}\pi)$, $C(6, \frac{5}{8}\pi)$ заданы в полярных координатах.

Задача 77. Зная полярные координаты точки: $\rho = 10, \varphi = \frac{\pi}{6}$, найдите ее прямоугольные координаты, если полюс находится в точке $A(2,3)$, а полярная ось параллельна оси Ox.

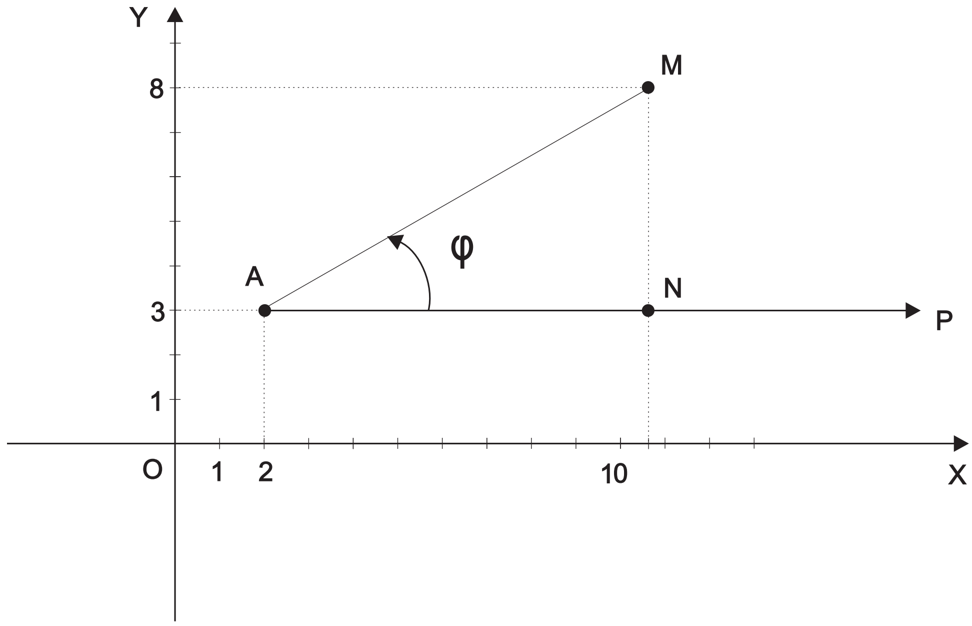

Рис. 8:

Решение. Построим прямоугольный треугольник AMN (рис. 8). Тогда

$$AN = AM \cos \frac{\pi}{6} = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

и

$$NM = AM \sin \frac{\pi}{6} = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5.$$

Следовательно, точка M в прямоугольной системе координат имеет следующие координаты: $x = 2 + 5\sqrt{3}$; $y = 3 + 5 = 8$.

Ответ: $M(2 + 5\sqrt{3}, 8)$.

Задача 78. Полюс полярной системы координат находится в точке $A(3, 5)$, а положительное направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси Oy. Найдите в этой системе полярные координаты точек $B(9, -1)$ и $C(5, 5, -2\sqrt{3})$.

Задача 79. Найдите сферические координаты точек, заданных прямоугольными координатами: $A(-8, -4, 1)$, $B(-2, -2, -1)$, $C(0, -4, 3)$, $D(1, -1, -1)$, $E(0, 1, 0)$.

Задача 80. Найдите сферические координаты точки M, зная, что вектор $\overrightarrow{OM}$ образует с осями Ox и Oy углы, соответственно равные $\dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{\pi}{3}$ и третья ее прямоугольная координата равна 1.

2 ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

2.1 Прямая на плоскости

Всякий ненулевой вектор, параллельный некоторой прямой называется, *направляющим вектором* этой прямой.

Всякий ненулевой вектор плоскости, перпендикулярный некоторой прямой из этой плоскости, называется *нормальным вектором* этой прямой.

Всякая прямая в некоторой ПДСК-2 определяется уравнением первой степени

$$Ax + By + C = 0,$$

где $A,\ B,\ C$ — некоторые действительные числа, удовлетворяющие условию $A^2 + B^2 \neq 0$.

Всякому уравнению первой степени

$$Ax + By + C = 0,$$

где $A,\ B,\ C$ — некоторые действительные числа, удовлетворяющие условию $A^2 + B^2 \neq 0$ в некоторой ПДСК-2 соответствует некоторая прямая.

Это уравнение первой степени называется общим уравнением прямой на плоскости.

Если в общем уравнении прямой отсутствует коэффициент C, то прямая походит через начало координат. Если в общем уравнении равен нулю коэффициент при переменной x, то прямая параллельна оси OX, если при переменной y, то прямая параллельна оси OY.

Пусть в некоторой ПДСК-2 некоторая прямая задана своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Все точки плоскости, для которых

$$Ax + By + C > 0,$$

лежат в одной полуплоскости относительно данной прямой, а все точки плоскости для которых

$$Ax + By + C < 0,$$

лежат в другой полуплоскости.

Если прямая не параллельна оси ординат, то она определяется уравнением

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$ и α — угол между этой прямой и положительным направлением оси OX, а $M(x_0, y_0)$ — некоторая фиксированная точка этой прямой. Это уравнение называется *уравнением прямой по угловому коэффициенту и точке.*

Если $B(0, b)$ — точка пересечения прямой a с осью OY, то прямая определяется уравнением

$$y = kx + b,$$

которое называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

Если прямая параллельна оси Oy, то у нее углового коэффициента не существует. Если прямая параллельна оси Ox, то ее угловой коэффициент равен 1.

Если прямая a проходит через две различные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то она определяется уравнением

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

которое называется *уравнением прямой по двум точкам.*

Если $A(a, 0)$ — точка пересечения прямой a с осью OX, а $B(0, b)$ — точка пересечения с осью OY, то прямая определяется уравнением

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

которое называется *уравнением прямой в отрезках по осям.*

Если $\vec{a}(a_1, a_2)$ — направляющий вектор прямой a, а $M_0(x_0, y_0)$ — некоторая её фиксированная точка, то прямая определяется уравнением

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2},$$

которое называется *каноническим уравнением прямой на плоскости.* Используя тот же вектор и ту же точку, прямую можно определить также двумя уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t; \\ y = y_0 + a_2 t, \end{cases}$$

которые называются *параметрическими уравнениями прямой на плоскости.* Число t называется *параметром.*

Пусть α — угол между нормальным вектором прямой a и положительным направлением оси OX, p — расстояние от прямой до начала координат. Тогда прямая определяется уравнением

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

которое называется *нормальным уравнением прямой.* Для того, чтобы получить из общего уравнения прямой её нормальное уравнение, необходимо это общее уравнение умножить на множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

который называется нормирующим множителем. Знак этого множителя выбирается противоположным знаку C из общего уравнения.

Пусть две прямые — a_1 и a_2 заданы своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. Тогда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

— *условие параллельности,*

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

— *условие перпендикулярности.*

Углом φ между прямыми a_1 и a_2 называется наименьший угол поворота на который нужно повернуть прямую a_1 вокруг некоторой её точки так, чтобы прямая a_1 совпала с прямой a_2 или стала ей параллельной. Этот угол считается положительным, если поворот происходит против часовой стрелке и отрицательным в противном случае.

Если k_1 и k_2 — угловые коэффициенты прямых a_1 и a_2, то *формула угла между прямыми* —

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

$$k_1 = k_2$$

—*условие параллельности,*

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

—*условие перпендикулярности.* Если прямая параллельна оси Ox, то ее угловой коэффициент равен 0, если прямая параллельна оси Oy, то у нее углового коэффициента не существует.

Пусть в некоторой ПДСК-2 дана некоторая точка $M(x_1, y_1)$ и задана некоторая прямая a своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Тогда расстояние от точки M до прямой a находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пучком прямых называется совокупность всех прямых, проходящих через некоторую точку S, которая называется *центром пучка.*

Для задания пучка достаточно задать его центр или любые две прямые пучка.

Пусть в ПДСК-2 две непараллельные прямые, заданы своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогда пучок прямых, проходящих через точку пересечения данных прямых задаётся уравнением

$$A_1x + B_1y + C_1 + t(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

где t — некоторое число.

Условие принадлежности прямой, заданной уравнением $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ пучку прямых, заданному уравнениями двух прямых — $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Если вектор $\vec{n}(x_1, y_1)$ является нормальным вектором прямой, то вектор $\vec{a}(-y_1, x_1)$ является направляющим вектором этой прямой. Направляющим вектором этой прямой будет так же и вектор $\vec{a}(y_1, -x_1)$.

При решении задач на прямую, необходимо сначала определиться какой вид уравнения прямой следует искать. Так же важно освоить приемы перехода от одного вида уравнения прямой к другому.

Задача 81. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через:

1) точку $M_0(1, 2)$ параллельно вектору $\vec{a}(3, -1)$;
2) начало координат параллельно вектору $\vec{b}(3, 4)$;
3) точку $A(1, 7)$ параллельно оси OY;
4) точку $M_1(2, 4)$ и точку $M_2(2, -5)$.

Решение. 1). Поскольку M_0 — фиксированная точка, то для параметрических уравнений прямой получаем: $x_0 = 1,\ y_0 = 2$. Поскольку вектор $\vec{a}$ параллелен прямой, то его можно выбрать в качестве направляющего. Следовательно, $a_1 = 3,\ a_2 = -1$. Теперь осталось подставить найденные коэффициенты в параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t; \\ y = 2 - 1t. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t; \\ y = 2 - 1t. \end{cases}$$

Задача 82. Прямая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 1 - 4t; \\ y = 3 + t. \end{cases}$$

Найдите:

1) направляющий вектор данной прямой;
2) координаты точек для которых $t_1 = 3, \quad t_2 = -1, \quad t_3 = 0, \quad t_4 = 2, \quad t_5 = 10$;
3) значения параметра для точек пересечения прямой с осями координат;
4) среди точек $A(-3,4);\ B(1,1);\ C(9,1);\ D(3,8)$ точки, принадлежащие данной прямой.

Решение: 1). Координаты направляющего вектора — это коэффициенты при параметре t в параметрических уравнениях, т.е. $\vec{a}(-4,1)$.

Ответ: $\vec{a}(-4,1)$.

2). Для того, чтобы найти координаты этих точек, нужно подставить каждое из значений параметра t в оба параметрические уравнения. Тогда первое уравнение даст первую координату, второе — вторую. Таким образом, получаем, например, точку $A(1 - 4t_1, 3 + t_1) = A(1 - 4 \cdot 3, 3 + 3) = A(-11,6)$. Аналогично, получим: $B(5,2);\ C(1,3);\ D(-7,5);\ K(-39,13)$.

Ответ: $A(-11,6);\ B(5,2);\ C(1,3);\ D(-7,5);\ K(-39,13)$.

3). Если $A(x_1, y_1)$ — точка пересечения данной прямой с осью OX, то $y_1 = 0$, следовательно, подставив во второе параметрическое уравнени, получим: $0 = 3 + t$. Значит, для точки A, $t = -3$. Аналогично, для того, чтобы найти значение параметра для точки пересечения с координатной осью OY, воспользуемся первым параметрическим уравнением: $0 = 1-4t$ или $t = \dfrac{1}{4}$.

Ответ: -3, $\dfrac{1}{4}$.

4). Для того, чтобы выяснить, принадлежит ли точка A данной прямой, подставим ее координаты в параметрические уравнения:

$$\begin{cases} -3 = 1 - 4t; \\ 4 = 3 + t. \end{cases}$$

Тогда из первого уравнения получим $t = 1$, из второго, $t = 1$. Поскольку полученные значения для параметра совпадают, то точка A принадлежит данной прямой. Подставив координаты точки B в параметрические уравнения, получим:

$$\begin{cases} 1 = 1 - 4t; \\ 1 = 3 + t. \end{cases}$$

Тогда из первого уравнения $t = 0$, а из второго $t = -2$. Следовательно, нельзя указать такое значение параметра, чтобы оба уравнения обращались в верное равенство. Поэтому точка B не принадлежит данной прямой. Аналогично рассуждая, получим, что точка C принадлежит прямой, а точка D не принадлежит.

Ответ: A и C.

Задача 83. Напишите уравнение прямой:

1) имеющей угловой коэффициент $k = -5$ и проходящей через точку $A(1, -2)$;
2) имеющей угловой коэффициент $k = 8$ и отсекающей на оси OY отрезок длины два;
3) проходящей через две точки $A(1, 5)$ и $B(2, 3)$;
4) проходящей через точку $A(-2, 3)$ и составляющей с осью OX угол $60°$;
5) проходящей через точку $B(1, 7)$ ортогонально вектору $\vec{n}(4, 3)$.

Решение. 4). Поскольку угловой коэффициент прямой — это тангенс угла наклона, то $k = tg60° = \sqrt{3}$. Следовательно, остается воспользоваться уравнением прямой по угловому коэффициенту и точке, т.е. уравнением $y - y_0 = k(x - x_0)$, подставив в него найденное значение углового коэффициента и координаты данной точки: $y - 3 = \sqrt{3}(x + 2)$.

Ответ: $y - 3 = \sqrt{3}(x + 2)$.

5). Поскольку вектор $\vec{n}$ ортогонален прямой, то его можно выбрать в качестве нормального вектора этой прямой. Следовательно, общее уравнение прямой имеет вид $4x + 3y + D = 0$. Для того, чтобы найти коэффициент D, нужно подставить в это уравнение координаты точки B :

$$4 \cdot 1 + 3 \cdot 7 + D = 0;$$

$$25 + D = 0.$$

Отсюда $D = -25$ и тогда уравнение прямой имеет вид

$$4x + 3y - 25 = 0.$$

Ответ: $4x + 3y - 25 = 0$.

Задача 84. Написать параметрические уравнения прямых:

1) $y = 2x - 3$;

2) $y = \dfrac{1}{2}x + 1$;

3) $5x - y = 0$;

4) $6x + 11y + 9 = 0$;

5) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$;

6) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{4} = 1$;

7) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3}$;

8) $2x - 3 = 0$;

9) $4y + 5 = 0$.

Указание. Для решения данной задачи необходимо в каждом случае найти координаты некоторой точки данной прямой и координаты ее некоторого направляющего вектора. Координаты точки — это решения уравнения прямой. Координаты направляющего вектора могут быть найдены по-разному. Например, можно найти координаты еще одной точки и построить по этим двум точкам вектор. Так как обе точки лежат на прямой, то этот вектор будет направляющим.

Важно также отметить, что одна и та же прямая может иметь различные параметрические уравнения — все зависит от того, какая точка и какой вектор мы взяли.

Решение. 1). Поскольку пары $(0,-3)$ и $(1,-1)$ являются решениями данного уравнения, то соответствующие им точки $A(0,-3)$ и $B(1,-1)$ принадлежат данной прямой. Тогда вектор $\overrightarrow{AB}(1,2)$ можно выбрать в качестве направляющего. Следовательно, данная прямая имеет следующие параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = t; \\ y = -3 + 2t. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = t; \\ y = -3 + 2t. \end{cases}$$

Задача 85. Написать общее уравнение прямой:

1) $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 - 3t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 2, \\ y = 2 + t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = t, \\ y = 1; \end{cases}$

4) $y = \dfrac{1}{3}x - 1;$

5) $y = -5x;$

6) $\dfrac{x}{9} + \dfrac{y}{11} = 1;$

7) $2x + \dfrac{y}{-3} = 1;$

8) $\dfrac{x+3}{-5} = \dfrac{y+1}{2}.$

Указание. Общее уравнение прямой — это уравнение прямой в линейном виде. Для нахождения общего уравнения прямой можно пользоваться различными способами. Самый универсальный — способ построения уравнения прямой по двум точкам. Нужно найти две различные точки, используя данное уравнение, подставить их координаты в уравнение прямой по двум точкам и привести его к линейному виду. Следует однако не торопиться с применением этого метода, поскольку часто оказывается, что для получения общего уравнения достаточно сделать одно-два равносильных преобразования с уравнением, данным в условии.

Задача 86. Дан треугольник ABC: $A(1,1)$, $B(-2,3)$, $C(4,7)$. Напишите уравнения сторон и медианы этого треугольника, проведенной из вершины A.

Задача 87. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2,5)$ и отсекающей на координатных осях отрезки равной длины.

Решение: Будем искать уравнение прямой в отрезках по осям. Пусть это уравнение имеет вид:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Подставим в него координаты точки A :

$$\frac{-2}{a}+\frac{5}{b}=1.$$

Поскольку на осях отсекаются одинаковые по длине отрезки, то $|a|=|b|$. Следовательно, полученное уравнение будет равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{-2}{a}+\dfrac{5}{b}=1;\\ a=b;\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{-2}{a}+\dfrac{5}{b}=1;\\ a=-b,\end{cases}\end{array}\right.$$

из которой получим совокупность

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{-2}{a}+\dfrac{5}{a}=1;\\ \dfrac{-2}{a}+\dfrac{5}{-a}=1.\end{array}\right.$$

Из первого уравнения совокупности получим: $a_1=3$ и тогда $b_1=3$. Из второго уравнения получим: $a_2=-7$ и тогда $b_2=7$. Следовательно, через точку A, отсекая на координатных осях отрезки равной длины, проходит прямая

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1,$$

общее уравнение которой $x+y-3=0$ и прямая

$$\frac{x}{-7}+\frac{y}{7}=1,$$

общее уравнение которой $x - y + 7 = 0$.

Ответ: $x + y - 3 = 0$ и $x - y + 7 = 0$.

Задача 88. Вычислите площадь треугольника, заключенного между координатными осями и прямой $2x - 3y - 12 = 0$.

Задача 89. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(12, 6)$ так, чтобы площадь треугольника, образованного ею и координатными осями, была равна 150.

Задача 90. Установить, какие из следующих пар прямых совпадают, параллельны, пересекаются. В случае пересечения, найти общую точку.

1) $2x + 3y = 0$ и $\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 2 - t; \end{cases}$

2) $x + 2y - 15 = 0$ и $\begin{cases} x = 5 + 4t, \\ y = -2 - 2t; \end{cases}$

3) $3x + 4y - 20 = 0$ и $\begin{cases} x = 4 - 8t, \\ y = 2 + 6t; \end{cases}$

4) $x - 2y + 4 = 0$ и $-3x + 6y - 12 = 0$;

5) $x - 5y = 0$ и $2x - 10y = 0$;

6) $2x + 3y - 8 = 0$ и $x + y - 3 = 0$;

7) $\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -9 - t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 + 5t', \\ y = -1 + 2t'; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = -3 + 4t, \\ y = 1 - 3t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 - 4t', \\ y = -2 + 3t'; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 7 + t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 5 + 8t', \\ y = -2 - 4t'; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x = -2 + 2t, \\ y = -9 + 5t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 9 - 5t', \\ y = 4 + 2t'. \end{cases}$

Указание. Для решения этих задач в каждом конкретном случае нужно искать координаты общей точки, которые будут решением как уравнения первой прямой, так и уравнения второй.

Если обе прямые заданы общими уравнениями, то нужно объединить их в систему и искать для этой системы решение. Если одна прямая задана параметрическими уравнениями,а вторая — общим, то достаточно подставить x и y из параметрических уравнений в общее уравнение. Если обе прямые заданы параметрическими уравнениями, то приравняв x и y из уравнений первой прямой соответственно к x и y из уравнений второй, мы получим систему относительно двух неизвестных — параметра первой прямой и параметра второй.

В любом случае, если решение единственно, то прямые пересекаются и найденное решение определяет координаты точки пересечения. Если решений бесконечное множество, то прямые совпадают. Если же решений нет, то прямые параллельны.

Решение. 10).

$$\begin{cases} -2+2t=9-5t'; \\ -9+5t=4+2t'. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем:

$$t=\frac{11-5t'}{2},$$

а из второго:

$$t=\frac{13+2t'}{5}.$$

Поскольку левые части полученных соотношений равны, то равны и правые. Поэтому получаем:

$$\frac{11-5t'}{2}=\frac{13+2t'}{5}.$$

Отсюда, по свойствам пропорций, получаем: $55-25t'=26+4t'$, откуда $t'=1$. Получено единственное решение. Следовательно, прямые пересекаются. Для того, чтобы найти точку пересечения, нужно подставить полученное значение параметра t' в параметрические уравнения второй прямой:

$$x=9-5=4,\quad y=4+2=6.$$

Если по составленной выше системе найти значение параметра для первой прямой, то по параметрическим уравнениям этой прямой будет найдена точка с такими же координатами. (Можно проделать эти действия в качестве самопроверки).

Ответ: прямые пересекаются в точке $A(4,6)$.

Задача 91. Найти угловой коэффициент прямой:

1) $\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 2 - t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 3t, \\ y = -2t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 3, \\ y = 1 + t; \end{cases}$

4) $3x + 4y + 5 = 0;$

5) $2x - 5y - 35 = 0;$

6) $5y - 2 = 0;$

7) $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{1} = 1;$

8) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{-7} = 1;$

9) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-5}.$

Указание. Для нахождения углового коэффициента необходимо сначала получить общее уравнение прямой. Затем нужно в этом уравнении выразить явно y. Тогда коэффициент при x и будет угловым коэффициентом.

Решение. 3). Поскольку в одном из уравнений отсутствует параметр, то данная прямая параллельна одной из координатных осей. В данном случае, для всех точек прямой $x = 3$. Следовательно, прямая параллельна оси Oy и поэтому угловой коэффициент у нее не существует.

Ответ: угловой коэффициент не существует.

7). Перенесем все в левую часть и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{x - 2y + 2}{-2} = 0;$$

$$x - 2y + 2 = 0.$$

Отсюда выражаем явно $y : y = \dfrac{1}{2}x + 1$. Следовательно, угловой коэффициент данной прямой равен $\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 92. Точки $M_1(1,2)$, $M_2(3,4)$, $M_3(5,-1)$ являются серединами сторон треугольника. Написать уравнения сторон треугольника.

Указание. Поскольку средняя линия треугольника, т.е. линия, проходящая через середины сторон, параллельна третьей стороне, то нужно совершить следующие действия. Написать уравнение средней линии M_1M_2, найти у нее угловой коэффициент k, составить уравнение стороны, параллельной прямой M_1M_2 по найденному коэффициенту k и координатам третьей точки M_3. Поскольку точка M_3 лежит на третьей стороне, то полученное уравнение будет уравнением этой стороны. Аналогичные действия нужно проделать и для остальных сторон.

Задача 93. Точки $A(1,5)$, $B(-4,3)$, $C(2,9)$ являются вершинами треугольника. Написать уравнение высоты, опущенной из вершины A.

Решение. Найдем уравнение прямой BC, как уравнение прямой по двум точкам:

$$\frac{x+4}{2+4}=\frac{y-3}{9-3}.$$

Воспользовавшись свойством пропорций, получим уравнение:

$$x-y+7=0.$$

Высота AD проходит через точку A и перпендикулярна прямой BC. Следовательно, ее уравнение нужно искать как уравнение по угловому коэффициенту и точке. Выразив явно y из полученного уравнения прямой BC, получим, что угловой коэффициент этой прямой равен 1. Используя условие перпендикулярности прямых по угловым коэффициентам, получим, что угловой коэффициент высоты AD равен -1. Теперь осталось подставить в уравнение прямой по угловому коэффициенту и точке координаты точки A и найденное значение углового коэффициента:

$$y-5=-1(x-1);$$

$$x+y-6=0.$$

Ответ: $x+y-6=0$.

Задача 94. Найти координаты точки, которая симметрична точке $M(10,10)$, относительно прямой $3x+4y-20=0$.

Задача 95. Найти координаты центра окружности, описанной около треугольника, вершинами которого являются точки $A(1,2)$, $B(3,-$ $-2)$, $C(5,6)$.

Задача 96. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(3,1)$ и наклоненных к прямой $2x+3y-1=0$ под углом $45°$.

Задача 97. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $y=3x+5$ и координаты одной из вершин $(4,-1)$.

Решение. Подставив в уравнение гипотенузы координаты данной вершины, получаем, что указанная вершина не принадлежит гипотенузе. Следовательно, каждый из катетов проходит через эту вершину. Из уравнения гипотенузы находим, что ее угловой коэффициент равен 3. Пусть k_1 и k_2 — угловые коэффициенты катетов. Воспользовавшись формулой угла между прямыми через угловые коэффициенты, получим, что с первым катетом гипотенуза образует угол φ_1 такой, что

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{3-k_1}{1+3k_1},$$

а со вторым катетом — угол φ_2 такой, что

$$\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{k_2-3}{1+3k_2}.$$

Поскольку треугольник равнобедренный, то углы, образованные катетами с гипотенузой равны. Следовательно:

$$\frac{3-k_1}{1+3k_1}=\frac{k_2-3}{1+3k_2}.$$

По свойству пропорций получаем:

$$(1+3k_2)(3-k_1)=(1+3k_1)(k_2-3).$$

Поскольку катеты лежат на перпендикулярных прямых, то $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$. Подставим это выражение в полученное выше уравнение:

$$(1-\frac{3}{k_1})(3-k_1)=(1+3k_1)(-\frac{1}{k_1}-3).$$

Умножим обе части уравнения на k_1 :

$$(k_1-3)(3-k_1)=(1+3k_1)(-1-3k_1);$$

$$(k_1-3)(k_1-3)=(1+3k_1)(1+3k_1);$$

$$k_1^2-6k_1+9=1+6k_1+9k_1^2;$$

$$2k_1^2+3k_1-2=0;$$

$$k_{1_{1,2}} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4};$$

$$k_{1_1} = \frac{-3-5}{4} = -2; \quad k_{1_2} = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}.$$

Теперь осталось воспользоваться уравнением прямой по угловому коэффициенту и точке:

$$y + 1 = -2(x-4);$$

$$2x + y - 7 = 0$$

и

$$y + 1 = \frac{1}{2}(x-4);$$

$$x - 2y - 6 = 0.$$

Ответ: $2x + y - 7 = 0; \;\; x - 2y - 6 = 0.$

Замечание. При решении последней задачи, было получено соотношение

$$\frac{3-k_1}{1+3k_1} = \frac{k_2-3}{1+3k_2}.$$

Решая задачи подобного типа именно так и следует поступать, т.е. располагать коэффициенты в некотором определенном порядке и придерживаться этого порядка в обеих формулах. Так, в указанной задаче было принято расположение k, k_1, k_2, k. Если бы это расположение нарушилось, т.е. было получено соотношение

$$\frac{3-k_1}{1+3k_1} = \frac{3-k_2}{1+3k_2},$$

то мы не смогли бы решить задачу. При решении аналогичных задач, там где это возможно, как правило, коэффициенты располагают в порядке убывания.

Задача 98. Зная уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $6x - 2y + 5 = 0, \;\; x + 3y - 1 = 0$, найти уравнение третьей стороны, если известно, что она проходит через точку $A(1, 1)$.

Задача 99. Составить уравнения сторон квадрата, зная, что точка $A(-4, 5)$ является его вершиной и одна из диагоналей лежит на прямой $7x - y + 8 = 0$.

Задача 100. Даны уравнения сторон треугольника $x + 2y - 1 = 0, \;\; 5x + 4y - 17 = 0, \;\; x - 4y + 11 = 0$. Составить уравнения:

1) высот треугольника;

2) прямых, проходящих через вершины треугольника параллельно противоположным сторонам.

Задача 101. Составить уравнение биссектрисы угла между прямыми $x+2y-11=0$ и $3x-6y-5=0$, которому принадлежит точка $A(1,-3)$.

Задача 102. Даны вершины треугольника $A(-2,1)$, $B(3,1)$ и $C(1,5)$. Вычислить длину перпендикуляра, проведенного из вершины B к медиане, идущей из вершины A.

Задача 103. Даны две смежные вершины квадрата $A(0,3)$ и $B(4,0)$. Составить уравнения его сторон.

Задача 104. Известна точка пересечения медиан треугольника — начало координат и уравнения двух его сторон $x+y-4=0$ и $2x+y-1=0$. Найдите координаты вершин треугольника и уравнение третьей стороны.

Задача 105. Даны уравнения медиан треугольника: $x-y-3=0$, $5x+4y-9=0$, $4x+5y-6=0$. Его площадь $S=6$. Найти вершины треугольника.

Решение. Введем следующие обозначения:

$$x-y-3=0 \tag{1}$$

$$5x+4y-9=0 \tag{2}$$

$$4x+5y-6=0 \tag{3}$$

Для каждой прямой составим ее параметрические уравнения:

(1). Поскольку $\vec{n}_1(1,-1)$ — нормальный вектор прямой, то $\vec{a}_1(1,1)$ — ее направляющий вектор. Проверка показывает, что точка $M_1(3,0)$ принадлежит прямой (1). Следовательно, данная прямая будет иметь следующие параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x=t_1+3; \\ y=t_1. \end{cases}$$

(2). Аналогично, $\vec{n}_2(5,4)$ — нормальный, а $\vec{a}_2(4,-5)$ — направляющий, точка $M_2(1,1)$ принадлежит прямой. Следовательно, параметрические уравнения прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x=4t_2+1; \\ y=-5t_2+1. \end{cases}$$

(3). Снова, рассуждая аналогично, получаем, что $\vec{n}_2(4,5)$ — нормальный, а $\vec{a}_2(5,-4)$ — направляющий, точка $M_3(-1,2)$ принадлежит прямой. Следовательно, параметрические уравнения прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x = 5t_3 - 1; \\ y = -4t_3 + 2. \end{cases}$$

Итак, нами составлены параметрические уравнения медиан.

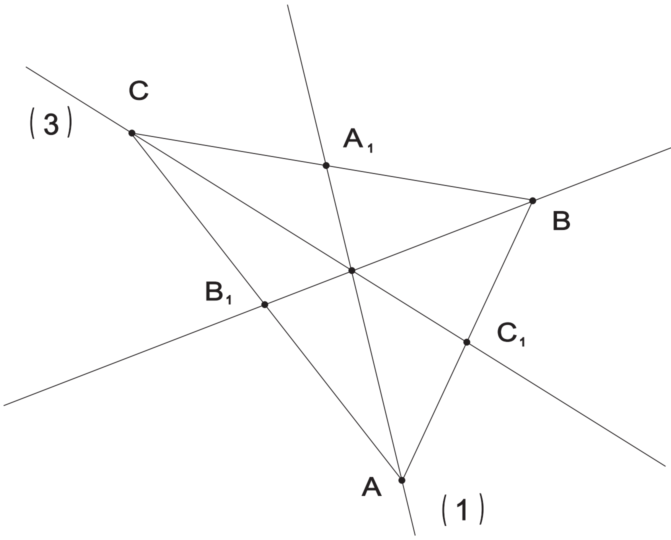

Рис. 9:

Пусть A, B, C — вершины треугольника, которые лежат на медианах (1), (2) и (3) соответственно (рис. 9). Тогда можно воспользоваться составленными выше параметрическими уравнениями и определить координаты указанных вершин следующим образом:

$$A(t_1+3, t_1); \quad B(4t_2+1, -5t_2+1); \quad C(5t_3-1, -4t_3+2).$$

Пусть A_1, B_1, C_1 — середины отрезков BC, AC, AB соответственно. Тогда, используя формулу середины отрезка, получим:

$$A_1\left(\frac{4t_2+1+5t_3-1}{2}, \frac{-5t_2+1-4t_3+2}{2}\right) = \left(\frac{4t_2+5t_3}{2}, \frac{-5t_2-4t_3+3}{2}\right);$$

$$B_1\left(\frac{t_1+3+5t_3-1}{2}, \frac{t_1-4t_3+2}{2}\right) = \left(\frac{t_1+5t_3+2}{2}, \frac{t_1-4t_3+2}{2}\right);$$

$$C_1\left(\frac{t_1+3+4t_2+1}{2}, \frac{t_1-5t_2+1}{2}\right) = \left(\frac{t_1+4t_2+4}{2}, \frac{t_1-5t_2+1}{2}\right).$$

Поскольку точка A_1 лежит на медиане (1), то ее координаты общее уравнение этой медианы превращают в верное равенство, т.е.

$$\frac{4t_2 + 5t_3}{2} - \frac{-5t_2 - 4t_3 + 3}{2} - 3 = 0.$$

Приведем к общему знаменателю:

$$4t_2 + 5t_3 + 5t_2 + 4t_3 - 3 - 6 = 0,$$

а теперь подобные:

$$t_2 + t_3 - 1 = 0.$$

Аналогично рассуждая, получим так же уравнения для точек B_1 и C_1:

$$5(\frac{t_1 + 5t_3 + 2}{2}) + 4(\frac{t_1 - 4t_3 + 2}{2}) - 9 = 0;$$
$$5t_1 + 25t_3 + 10 + 4t_1 - 16t_3 + 8 - 18 = 0;$$
$$t_1 + t_3 = 0;$$
$$4(\frac{t_1 + 4t_2 + 4}{2}) + 5(\frac{t_1 - 5t_2 + 1}{2}) - 6 = 0;$$
$$4t_1 + 16t_2 + 16 + 5t_1 - 25t_2 + 5 - 12 = 0;$$
$$t_1 - t_2 + 1 = 0.$$

Следовательно, получаем систему:

$$\begin{cases} t_2 + t_3 - 1 = 0; \\ t_1 + t_3 = 0; \\ t_1 - t_2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения получим: $t_2 = 1 - t_3$, из второго $t_1 = -t_3$. После подстановки полученных выражений в третье уравнение системы, получим верное равенство. Следовательно, найденные нами соотношения верны.

Теперь, используя полученные выражения, координаты вершин можно записать следующим образом:

$$A(-t_3 + 3, -t_3); \quad B(5 - 4t_3, 5t_3 - 4); \quad C(5t_3 - 1, -4t_3 + 2).$$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}(2 - 3t_3, 6t_3 - 4); \quad \overrightarrow{AC}(6t_3 - 4, 2 - 3t_3.$$

Вычислим теперь площадь треугольника ABC, используя векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Поскольку векторное произведение находится для векторов пространства, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ будем рассматривать в пространстве, считая что у них есть третья координата, равная нулю:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})| =$$

$$\frac{1}{2}|((2-3t_3, 6t_3-4, 0) \times (6t_3-4, 2-3t_3, 0))| =$$

$$\frac{1}{2}mod\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2-3t_3 & 6t_3-4 & 0 \\ 6t_3-4 & 2-3t_3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}|0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + ((2-3t_3)(2-3t_3) - (6t_3-4)(6t_3-4))\vec{k}| =$$

$$\frac{1}{2}|(2-3t_3)(2-3t_3)-(6t_3-4)(6t_3-4)| = \frac{1}{2}|4-12t_3+9t_3^2+48t_3-16-36t_3^2| =$$

$$\frac{1}{2}|-27t_3^2+36t_3-12|.$$

По условию, $S_{ABC} = 6$, следовательно, $|-27t_3^2+36t_3-12| = 12$ или $|27t_3^2-36t_3+12| = 12$. Полученное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 27t_3^2 - 36t_3 + 12 = 12; \\ 27t_3^2 - 36t_3 + 12 = -12. \end{array}\right.$$

Второе уравнение совокупности имеет отрицательный дискриминант, поэтому у него корней нет. Первое уравнение равносильно уравнению

$$27t_3^2 - 36t_3 = 0$$

или уравнению

$$t_3(27t_3 - 36) = 0,$$

которое имеет корни $t_{3_1} = 0$ и $t_{3_2} = \frac{4}{3}$. Подставив полученные значения для параметра t_3 в найденные выше координаты точек $A,\ B,\ C$, получим два набора точек:

$$A(3,0);\ B(5,-4);\ C(-1,2) \text{ и } A(\frac{5}{3},-\frac{4}{3});\ B(-\frac{1}{3},\frac{8}{3});\ C(\frac{17}{3},-\frac{10}{3}).$$

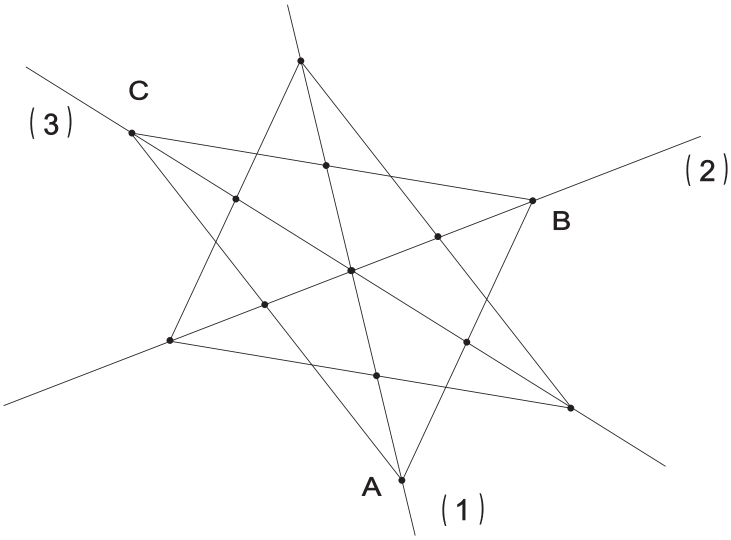

Рис. 10:

Два множества точек получилось по той причине, что на одних и тех же медианах можно построить два различных треугольника, площади которых будут равны заданному значению, т.е. 6 (рис. 10)

Ответ: $A(3,0)$; $B(5,-4)$; $C(-1,2)$ и $A(\frac{5}{3},-\frac{4}{3})$; $B(-\frac{1}{3},\frac{8}{3})$; $C(\frac{17}{3},-$ $-\frac{10}{3})$.

Задача 106. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B(2,6)$ и уравнения $x-7y+15=0$ высоты и $7x+y+5=0$ биссектрисы внешнего угла, проведенных из одной вершины.

Задача 107. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B(2,-1)$, а также уравнения $3x-4y+27=0$ высоты и $x+2y-5=0$ биссектрисы, проведенных из разных вершин.

Задача 108. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $C(4,3)$, а также уравнения $x+2y-5=0$ биссектрисы и $4x+13y-10=0$ медианы, проведенных из одной вершины.

Задача 109. Найти расстояние между параллельными прямыми.

1) $x-2y+3=0$ и $2x-4y+7=0$;

2) $3x-4y+1=0$ и $\begin{cases} x=1+4t, \\ y=3t. \end{cases}$

3) $y=3x+5$ и $6x-2y+12=0$;

4) $\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = -3 + 2t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 2t', \\ y = 5 - 4t'. \end{cases}$

Указание. Для того, чтобы решить эту задачу, нужно на одной прямой взять произвольную точку. Тогда расстояние от этой точки до прямой (которое вычисляется по известной формуле) и будет равно расстоянию между данными прямыми.

Задача 110. Прямые $3x + 4y - 30 = 0$ и $3x - 4y + 12 = 0$ касаются окружности, радиус которой $R = 5$. Найти площадь четырехугольника, образованного этими касательными и радиусами окружности, проведенными в точки касания.

2.2 Плоскость в пространстве

Всякий ненулевой вектор, перпендикулярный некоторой плоскости, называется *нормальным вектором* этой плоскости.

Любые два неколлинеарные вектора, параллельные некоторой плоскости, называются *направляющими векторами* этой плоскости.

Всякая плоскость в некоторой ПДСК-3 определяется уравнением первой степени

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где $A,\ B,\ C,\ D$ — некоторые действительные числа, удовлетворяющие условию $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Всякому уравнению первой степени

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где $A,\ B,\ C, D$ — некоторые действительные числа, удовлетворяющие условию $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ в некоторой ПДСК-3 соответствует некоторая плоскость.

Это уравнение называется *общим уравнением плоскости.*

В общем уравнении плоскости геометрический смысл знака выражения $Ax + By + Cz + D$ такой же как и геометрический смысл знака трёхчлена $Ax + By + C$ в уравнении прямой.

Пусть в некоторой ПДСК-3 некоторая плоскость задана своим общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Все точки пространства, для которых $Ax + By + Cz + D > 0$ лежат в одном полупространстве относительно данной плоскости, а все точки пространства для которых $Ax + By + Cz + D < 0$ лежат в другом полупространстве.

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ — три различные точки, не лежащие на одной прямой, то плоскость α, проходящая через эти точки, определяется уравнением

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

которое называется *уравнением плоскости по трём точкам.*

Если плоскость α проходит через точки $A(a, 0, 0)$; $B(0, b, 0)$; $C(0, 0, c)$, то эта плоскость определяется уравнением

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

которое называется *уравнением плоскости в отрезках по осям.*

Пусть α, β, γ — направляющие косинусы нормального вектора плоскости α, p — расстояние от плоскости до начала координат. Тогда плоскость определяется уравнением

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0,$$

которое называется *нормальным уравнением плоскости.* Для того, чтобы получить из общего уравнения плоскости её нормальное уравнение, необходимо это общее уравнение умножить на множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

который называется *нормирующим множителем.* Знак этого множителя выбирается противоположным знаку D из общего уравнения.

Пусть $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ — направляющие векторы некоторой плоскости α и пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — некоторая фиксированная точка этой плоскости. Тогда плоскость определяется уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t + b_1 k; \\ y = y_0 + a_2 t + b_2 k; \\ z = z_0 + a_3 t + b_3 k, \end{cases}$$

которые называются *параметрическими уравнениями плоскости.* Числа t и k — параметры.

Пусть плоскости α_1 и α_2 заданы своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ соответственно. Тогда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

— *условие параллельности,*

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

— *условие перпендикулярности.*

Углом φ между плоскостями α_1 и α_2 называется угол между их нормальными векторами.

Угол между плоскостями таким образом вычисляется по формуле угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Пусть дана некоторая точка $M(x_1, y_1, z_1)$ и задана некоторая плоскость α своим общим уравнением $Ax+By+Cz+D = 0$. Тогда расстояние от точки M до плоскости α находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пучком плоскостей называется совокупность всех плоскостей, проходящих через некоторую прямую a.

Для задания пучка достаточно задать любые две плоскости пучка.

Пусть две непараллельные плоскости заданы своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Тогда пучок плоскостей, проходящих через линию пересечения данных плоскостей задаётся уравнением

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + t(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

При решении задач на плоскость, необходимо сначала определиться какой вид уравнения плоскости следует искать. Так же важно освоить приемы перехода от одного вида уравнения плоскости к другому.

Задача 111. Составьте параметрические уравнения плоскости, которая проходит через:

1) точку $M_0(1, 0, 2)$ параллельно векторам $\vec{a}_1(1, 2, 3)$ и $\vec{a}_2(0, 3, 1)$;

2) точку $A(1, 2, 1)$ параллельно векторам $\vec{i},\ \vec{j}$;

3) точку $A(1, 7, 1)$ параллельно плоскости OXZ;

4) точки $M_1(5, 3, 2),\ M_2(1, 0, 1)$ параллельно вектору $\vec{a}(1, 3, -3)$;

5) точку $A(1, 5, 7)$ и ось OX;

6) ось OY параллельно вектору $\vec{a}(1, 2, 1)$;

7) начало координат и точки $M_1(1, 0, 1),\ M_2(-2, -3, 1)$;

8) три точки $A(1,2,3),\ B(2,4,4),\ C(3,3,1)$.

Решение. 1). Поскольку плоскость проходит параллельно данным векторам, то эти векторы можно выбрать в качестве направляющих. Следовательно, параметрические уравнения плоскости будут иметь вид:

$$\begin{cases} x = 1 + u; \\ y = 2u + 3v; \\ z = 2 + 3u + v. \end{cases}$$

7). Данная плоскость будет параллельна векторам $\overrightarrow{OM_1}(1,0,1)$ и $\overrightarrow{OM_2}(-2,-3,1)$. Следовательно, эти векторы можно выбрать в качестве направляющих векторов плоскости. В качестве же фиксированной точки плоскости лучше всего взять конечно начало координат. Следовательно, параметрические уравнения плоскости будут иметь вид:

$$\begin{cases} x = u - 2v; \\ y = -3v; \\ z = u + v. \end{cases}$$

Задача 112. Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через:

1) точку $M_0(1,1,1)$ параллельно векторам $\vec{a}_1(1,2,0),\ \vec{a}_2(0,1,3)$;

2) точку $M_0(31,0,1)$ и ось OX;

3) точку $C(1,2,2)$ параллельно плоскости OXZ;

4) начало координат и точки $M_1(1,0,2),\ M_2(0,0,3)$;

5) точки $M_1(1,0,1),\ M_2(0,2,3),\ M_3(0,2,1)$.

Решение. 1). Нормальным вектором плоскости будет вектор, который перпендикулярен направляющим векторам. Следовательно, в качестве нормального вектора плоскости можно взять векторное произведение его направляющих векторов:

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 1\vec{k}.$$

Следовательно, общее уравнение данной плоскости будет иметь вид:

$$6x - 3y + z + D = 0.$$

Отсюда, подставив координаты точки M_0, получим: $D = -6x + 3y - z = -4$. Следовательно, общее уравнение плоскости имеет вид: $6x - 3y + z - 4 = 0$.

Ответ: $6x - 3y + z - 4 = 0$.

Задача 113. Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(1, 2, -2)$ и перпендикулярна к вектору $\vec{n}(2, -1, 3)$.

Задача 114. Написать общее уравнение плоскости по ее параметрическим уравнениям:

$$1) \begin{cases} x = 2 + 3u - 4v \\ y = 4 - v, \\ z = 2 + 3u; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = u + v, \\ y = u - v, \\ z = 5 + 6u - 4v. \end{cases}$$

Задача 115. Написать параметрические уравнения плоскости, зная ее общее уравнение:

1) $3x - 6y + z = 0$;
2) $2x - y - z - 3 = 0$.

Решение. 1). Пусть вектор $\vec{a}(x, y, z)$ — направляющий вектор данной плоскости. Поскольку он перпендикулярен нормальному вектору этой плоскости, т.е. вектору $\vec{n}(3, -6, 1)$, то скалярное произведение этих векторов равно нулю. Следовательно, получаем уравнение:

$$3x - 6y + z = 0$$

Из этого уравнения получим соотношение $z = -3x + 6y$. Таким образом, переменные x и y выступают свободными переменными. Поэтому, взяв $x = 0$ и $y = 1$, получим направляющий вектор $\vec{a}_1(0, 1, 6)$, а, взяв $x = 1$ и $y = 0$, получим направляющий вектор $\vec{a}_2(1, 0, -3)$. В качестве фиксированной точки возьмем начало координат, поскольку общее уравнение данной плоскости имеет особый вид. Итак, параметрические уравнения плоскости имеют вид:

$$\begin{cases} x = v; \\ y = u; \\ z = 6u - 3v. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = v; \\ y = u; \\ z = 6u - 3v. \end{cases}$$

Задача 116. Найти величины отрезков, которые отсекает на координатных осях плоскость:

1) $2x + 3y - 9z + 18 = 0$;

2) $x - 2y + 5z - 20 = 0$;

3) $\begin{cases} x = 1 + u + v, \\ y = 2 + u, \\ z = 3 + u - v; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = 3 + 2u, \\ y = 2 - 2u + 4v, \\ z = 1 + u + 3v. \end{cases}$

Указание. Для решения этой задачи нужно получить уравнение плоскости в отрезках по осям. Тогда модули знаменателей и будут равны длинам этих отрезков.

Задача 117. Вычислить объем тетраэдра, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью $3x - 5y + 15z - 30 = 0$.

Задача 118. Даны вершины тетраэдра $A(2, 1, 0)$, $B(1, 3, 5)$, $C(6, 3, 4)$, $D(0, -7, 8)$. Написать уравнение плоскости, которая проходит через ребро AB и середину ребра CD.

Задача 119. Установить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны, совпадают:

1) $x - y + 3z + 1 = 0$ и $2x - y + 5z - 2 = 0$;

2) $2x+y+2z+4=0$ и $4x+2y+4z+8=0$;

3) $3x+2y-z+2=0$ и $6x+4y-2z+1=0$;

4) $\begin{cases} x=1+u+v, \\ y=2+u, \\ z=3+u-v \end{cases}$ и $\begin{cases} x=3+2u', \\ y=2-2u'+4v', \\ z=1+u'+3v'; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=u+2v, \\ y=1+v, \\ z=u-v \end{cases}$ и $\begin{cases} x=2+3u'+v', \\ y=1+u'+v', \\ z=2-2v'; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x=2+u+2v, \\ y=2+v, \\ z=3+u-v \end{cases}$ и $\begin{cases} x=3u'+v', \\ y=u'+v', \\ z=-2v'. \end{cases}$

Решение. 1). Выпишем нормальные векторы плоскостей: $\vec{n}_1(1,-1,3)$ и $\vec{n}_2(2,-1,5)$. Поскольку векторы неколлинеарны, то плоскости пересекаются.

Ответ: плоскости пересекаются.

Задача 120. Написать уравнение плоскости, проведенной через точку $A(1,-2,3)$ параллельно плоскости, проходящей через точки $M_1(1,1,1)$, $M_2(2,0,-1)$, $M_3(3,4,5)$.

Решение: Составим вначале уравнение плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3 :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2-1 & 0-1 & -1-1 \\ 3-1 & 4-1 & 5-1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$2(x-1)-8(y-1)+5(z-1)=0.$$

Нормальный вектор этой плоскости имеет координаты $\vec{n}_1(2, -8, 5)$. Следовательно, уравнение искомой плоскости имеет вид:

$$2x - 8y + 5z + D = 0.$$

Для того, чтобы найти коэффициент D, нужно подставить в это уравнение координаты точки A :

$$2 \cdot 1 - 8 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 + D = 0.$$

Отсюда получаем: $D = -33$. Следовательно, уравнение плоскости имеет вид: $2x - 8y + 5z - 33 = 0$.

Ответ: $2x - 8y + 5z - 33 = 0$.

Задача 121. Найти основание перпендикуляра, проведенного из точки $A(1, 3, 5)$ к прямой, по которой пересекаются плоскости $2x + y + z - 1 = 0$ и $3x + y + 2z - 3 = 0$.

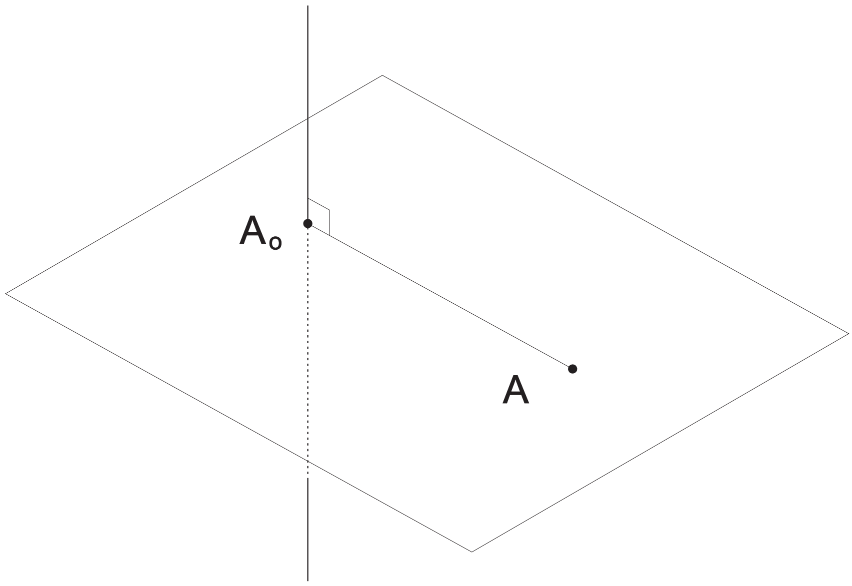

Рис. 11:

Решение. Основание такого перпендикуляра — это точка пересечения данной прямой и плоскости, которая проходит перпендикулярно этой прямой через данную точку (рис. 11). Найдем сначала направляющий вектор прямой. Поскольку этот вектор будет перпендикулярен нормальному вектору каждой из плоскостей, то в качестве него можно взять векторное произведение нормальных векторов, т.е. векторов $\vec{n}_1(2, 1, 1)$ и

$\vec{n}_2(3,1,2):$

$$\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=(1,-1,-1).$$

Найденный направляющий вектор прямой можно выбрать в качестве нормального вектора плоскости, перпендикулярной этой прямой. Следовательно, уравнение плоскости принимает вид:

$$x-y-z+D=0.$$

Подставив в него координаты точки A, получим, что $D=7$. Следовательно, уравнение плоскости имеет вид:

$$x-y-z+7=0.$$

Для того, чтобы найти точку пересечения этой плоскости и данной в условии прямой, достаточно решить систему уравнений, состоящую из уравнений всех трех плоскостей, т.е. систему

$$\begin{cases}2x+y+z-1=0;\\ 3x+y+2z-3=0;\\ x-y-z+7=0.\end{cases}$$

Сложив первое уравнение с третьим, получим, что $3x+6=0$. Отсюда $x=-2$. Теперь полученное значение можно подставить в решаемую нами систему:

$$\begin{cases}y+z-5=0;\\ y+2z-9=0;\\ -y-z+5=0.\end{cases}$$

Сложив второе уравнение и третье, получим: $z=4$. Подставив полученное значение в третье уравнение, найдем последнюю координату: $y=1$. Следовательно, основание перпендикуляра имеет следующие координаты: $A_0(-2,1,4)$.

Ответ: $A_0(-2,1,4)$.

Задача 122. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases}2x+3y-z+5=0,\\ 3x-2y+2z-1=0\end{cases}$$

параллельно вектору $\vec{e}$:

1) $\vec{e}(1,1,1)$;

2) $\vec{e}(4,-7,-13)$.

Решение. 2). Найдем направляющий вектор прямой как векторное произведение нормальных векторов плоскостей линией пересечения которых является прямая:

$$\vec{a} = n_1 \times n_2 = (2,3,-1) \times (3,-2,2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (4,-7,-13).$$

Полученный направляющий вектор совпадает с данным в условии вектором $\vec{e}$. Это означает, что любая плоскость, проходящая через данную прямую будет параллельна данному вектору. Следовательно, получаем любую плоскость пучка плоскостей, проходящих через данную прямую.

Ответ: любая плоскость пучка

$$\begin{cases} 2x+3y-z+5=0, \\ 3x-2y+2z-1=0 \end{cases}$$

Задача 123. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $5x-y+3z-2=0$ и:

1) пересекающей ее по прямой, лежащей в плоскости OXY;

2) проходящей через прямую $2x-y+3z-5=0,\ x+2y-z+2=0$;

3) проходящей через прямую $2x-y+3z-5=0,\ x-2y+z+2=0$;

4) проходящей через прямую $5x-8y-11z-4=0,\ x+2y-z+2=0$.

Решение. 1). Пусть уравнение искомой плоскости имеет вид:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

По условию, она проходит через линию пересечения координатной плоскости OXY и плоскости, данной в условии задачи, т.е. через прямую определяемую системой

$$\begin{cases} 5x-y+3z-2=0; \\ z=0. \end{cases} \qquad (*)$$

В качестве направляющего вектора этой прямой можно взять векторное произведение нормальных векторов плоскостей:

$$\vec{a} = (5, -1, 3) \times (0, 0, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (1, 5, 0).$$

Поскольку искомая плоскость перпендикулярна данной, то равно нулю скалярное произведение их нормальных векторов. Поскольку же искомая плоскость проходит через прямую, упомянутую выше, то нормальный вектор плоскости перпендикулярен направляющему вектору прямой и поэтому их скалярное произведение так же равно нулю. Следовательно, получаем систему:

$$\begin{cases} 5A - B + 3C = 0; \\ A + 5B = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения сразу получаем: $A = -5B$. Подставив полученное выражение в первое уравнение, получим: $3C = 26B$. Следовательно, нормальный вектор искомой плоскости имеет вид: $\vec{n}(-5B, B, \dfrac{26}{3}B)$. Пусть $B = -3$. Тогда $\vec{n}(15, -3, -26)$. Значит уравнение искомой плоскости принимает вид:

$$15x - 3y - 26z + D = 0.$$

Для того, чтобы найти значение для коэффициента D, необходимо найти какую-либо точку, принадлежащую этой плоскости. В качестве такой точки можно взять любую точку из системы (*), поскольку искомая плоскость проходит через прямую, определяемую этой системой. Такой точкой будет, например, $A(1, 1, 0)$. Подставив ее координаты в уравнение (**), получим, что $D = -6$. Итак, искомая плоскость имеет уравнение $15x - 3y - 26z - 6 = 0$.

Ответ: $15x - 3y - 26z - 6 = 0$.

Задача 124. Найти расстояния между параллельными плоскостями:

1) $x - 2y - 2z + 7 = 0$ и $2x - 4y - 4z + 17 = 0$;

2) $6x + 2y - 4z + 15 = 0$ и $9x + 3y - 6z + 10 = 0$.

Задача 125. Даны вершины тетраэдра $A(0, 6, 4)$, $B(3, 5, 3)$, $C(-2, 11, -5)$, $D(1, -1, 4)$. Вычислить длину высоты, проведенной из вершины A к грани BCD.

Задача 126. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3, 5, -7)$ и отсекающей на координатных осях отрезки равной длины.

Указание. Нужно рассмотреть все возможные варианты, когда отрезки отсекаются как в положительном, так и в отрицательном направлении. Всего оказывается 8 вариантов. Некоторые из них приведут к противоречию, остальные дадут правильный ответ.

Задача 127. Известны координаты вершин тетраэдра $A(0, 0, 2)$, $B(3, 0, 5)$, $C(1, 1, 0)$, $D(4, 1, 2)$. Составить уравнения его граней.

Задача 128. Установить, какая из координатных плоскостей принадлежит пучку, определяемому плоскостями $4x - y + 2z - 6 = 0$, $6x + 5y + 3z - 9 = 0$.

Задача 129. Написать уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x - 2y - z - 6 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии $d = 7$.

Задача 130. Найти координаты центра и радиус шара, вписанного в тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $11x - 10y - 2z - 57 = 0$.

2.3 Прямая и плоскость в пространстве

В пространстве мы будем рассматривать прямую как линию пересечения двух плоскостей.

Пусть даны две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Прямая, проходящая через эти точки, задаётся уравнениями

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

которые называются *уравнениями прямой по двум точкам в пространстве.*

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — некоторая фиксированная точка прямой a, а $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ — её направляющий вектор. Тогда прямая a может быть задана уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t, \end{cases}$$

которые называются *параметрическими уравнениями прямой в пространстве* и уравнениями

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3},$$

которые называются *каноническими уравнениями прямой в пространстве.*

Если некоторая прямая a является линией пересечения двух плоскостей α_1 и α_2, заданных соответственно своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то она может быть задана системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Иногда эти уравнения называют *общими уравнениями прямой в пространстве.*

Допустим, что некоторая прямая a задана как линия пресечения двух плоскостей, т.е. системой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Пусть (x_0, y_0, z_0) — одно из решений этой системы Тогда точка $M(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит указанной прямой. В качестве же направляющего вектора прямой a можно взять векторное произведение нормальных векторов $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$. Тогда канонические уравнения прямой a можно записать в виде:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Пусть две прямые — a_1 и a_2 имеют направляющие векторы соответственно $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. Тогда угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами:

$$\cos\alpha = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

— *условие параллельности;*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

— *условие перпендикулярности.*

Пусть $\vec{n}(A, B, C)$ — нормальный вектор некоторой плоскости, а вектор $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ — направляющий вектор некоторой прямой. Если эти плоскость и прямая параллельны, то указанные векторы перпендикулярны, т.е. условие параллельности прямой и плоскости в пространстве:

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0;$$

если же плоскость и прямая перпендикулярны, то указанные векторы коллинеарны, т.е. условие перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве:

$$\frac{A}{a_1} = \frac{B}{a_2} = \frac{C}{a_3}.$$

Если β — угол между нормальным вектором плоскости и направляющим вектором прямой, то $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \beta$ — угол между прямой и плоскостью.

Следовательно, угол между прямой и плоскостью вычисляется по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

Пусть некоторая прямая a задана своими каноническими уравнениями: $\dfrac{x-x_0}{a_1} = \dfrac{y-y_0}{a_2} = \dfrac{z-z_0}{a_3}$ и пусть дана некоторая точка $M(x_1, y_1, z_1)$. Тогда расстояние от точки M до прямой a находится по формуле:

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

Пусть кроме заданной выше прямой a, ещё одна прямая b задана своими каноническими уравнениями: $\dfrac{x-x_1}{b_1} = \dfrac{y-y_1}{b_2} = \dfrac{z-z_1}{b_3}$. Тогда расстояние между этими прямыми находится по формуле:

$$d = \frac{mod\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

Задача 131. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через:

1) точку $M_0(2, 0, 3)$ параллельно вектору $\vec{a}(3, -2, -2)$;
2) точку $A(1, 2, 3)$ параллельно оси Ox;
3) точки $M_1(1, 2, 3)$ и $M_2(4, 4, 5)$.

Задача 132. Установить, какие из точек $M_1(3, 4, 7)$, $M_2(2, 0, 4)$, $M_3(0, -5, 1)$, $M_4(-1, 3, -2)$ принадлежат прямой

$$\begin{cases} x = 2 + t; \\ y = 1 + 3t; \\ z = 5 + 2t. \end{cases}$$

Задача 133. Представить каждую из следующих прямых как линию пересечения плоскостей, параллельных осям Ox и Oz :

$$1)\begin{cases} x = 1 + 2t; \\ y = 2 + 3t; \\ z = 3 + 6t. \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x = 8 + 3t; \\ y = -6t; \\ z = 1 + 2t. \end{cases}$$

Решение. 1). Из параметрических уравнений прямой находим, что ее направляющий вектор $\vec{a}(2, 3, 6)$. Если плоскость параллельна координатной оси Ox, то ее уравнение имеет вид:

$$B_1 y + C_1 z + D_1 = 0.$$

Прямая принадлежит этой плоскости, следовательно, ее направляющий вектор и нормальный вектор плоскости перпендикулярны. Поэтому, воспользовавшись критерием ортогональности, получим:

$$3B_1 + 6C_1 = 0,$$

откуда $B_1 = -2C_1$. Пусть $C_1 = -1$, тогда $B_1 = 2$ и уравнение плоскости принимает вид:

$$2y - z + D = 0.$$

Подставив в него координаты точки $A(1, 2, 3)$ (эта точка взята из параметрических уравнений прямой и поэтому принадлежит прямой) получим, что $D = -1$ и поэтому уравнение искомой плоскости принимает вид:

$$2y - z - 1 = 0.$$

Если плоскость параллельна координатной оси OZ, то ее уравнение имеет вид:

$$A_2 x + B_2 y + D_2 = 0.$$

Совершим аналогичные действия. По критерию ортогональности,

$$2A_2 + 3B_2 = 0,$$

откуда $2A_2 = -3B_2$. Пусть $B_2 = -2$. Тогда уравнение плоскости принимает вид:

$$3x - 2y + D = 0.$$

Подставив координаты точки A, получим, что $D = 1$. Следовательно, уравнение плоскости имеет вид

$$3x - 2y + 1 = 0.$$

Ответ:
$$\begin{cases} 2y - z - 1 = 0; \\ 3x - 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

Задача 134. Составить параметрические уравнения прямых:

1) $\begin{cases} x + y + 2z - 3 = 0; \\ x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y + 4z - 7 = 0; \\ 2x + y - z - 5 = 0. \end{cases}$

Решение. 1). Выпишем нормальные векторы данных плоскостей: $\vec{n}_1(1, 1, 2)$ и $\vec{n}_2(1, -1, 1)$. В качестве направляющего вектора искомой прямой можно взять векторное произведение этих векторов:

$$\vec{a} = (1, 1, 2) \times (1, -1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3, 1, -2).$$

Найдем какую-либо точку, принадлежащую искомой прямой (координаты этой точки будут решением системы, данной в условии). Сложив оба уравнения, получим
$$2x + 3z - 4 = 0,$$
откуда $x = 2 - \frac{3}{2}z$. Подставив полученное значение во второе уравнение системы, получим:
$$2 - \frac{3}{2}z - y + z - 1 = 0,$$
откуда $y = 1 - \frac{1}{2}z$. Следовательно, решением системы будет набор $(2 - \frac{3}{2}z,\ 1 - \frac{1}{2}z,\ z)$. Пусть $z = 2$. Тогда получим точку $A(-1, 0, 2)$. Теперь осталось координаты направляющего вектора $\vec{a}(3, 1, -2)$ и точки $A(-1, 0, 2)$ подставить в параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = -1 + 3t; \\ y = t; \\ z = 2 - 2t. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = -1 + 3t; \\ y = t; \\ z = 2 - 2t. \end{cases}$$

Задача 135. Составить канонические уравнения прямых:

1) $\begin{cases} 5x + y + z = 0; \\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 2y + z - 2 = 0; \\ 4x + y - 3z - 2 = 0. \end{cases}$

Задача 136. Доказать, что прямые параллельны и найти расстояние между ними:

1) $\begin{cases} x = 1 - 2t; \\ y = 3t; \\ z = -2 + t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 7 + 4t'; \\ y = 5 - 6t'; \\ z = 4 - 2t'. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 2t; \\ y = 0; \\ z = -2t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0; \\ x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0; \\ x - y + z + 3 = 0. \end{cases}$ и $\begin{cases} x + 2y - 5z - 1 = 0; \\ x - 2y + 3z - 9 = 0. \end{cases}$

Указание. Для решения этой задачи необходимо выполнить следующие действия. Вначале нужно установить, что направляющие векторы коллинеарны. Затем нужно взять некоторую точку принадлежащую одной прямой и показать, что она не принадлежит второй прямой. Таким образом мы покажем, что прямые не имеют общих точек, т.е. параллельны. Наконец, нужно найти между прямыми расстояние, воспользовавшись соответствующей формулой.

Задача 137. Доказать, что прямые совпадают:

1) $\begin{cases} x = 8 + 3t; \\ y = 7 - 2t; \\ z = 11 + t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 5 - 6t'; \\ y = 9 + 4t'; \\ z = 10 - 2t'. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + y - 2z - 6 = 0; \\ 41x - 19y + 52z - 68 = 0. \end{cases}$ и $\begin{cases} x - 2y + 5z - 1 = 0; \\ 33x + 4y - 5z - 63 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = -t; \\ y = -4 - 5t; \\ z = 3 + 3t. \end{cases}$ и $\begin{cases} 4x + y + 3z - 5 = 0; \\ 7x - 2y - z - 5 = 0. \end{cases}$

Указание. Так же как и в предыдущей задаче нужно сначала показать, что направляющие векторы прямых коллинеарны. Но затем, взяв точку на одной из прямых, нужно показать, что она принадлежит второй прямой. Таким образом будет доказано совпадение прямых.

Задача 138. Доказать, что прямые пересекаются и найти координаты точек пересечения:

1) $\begin{cases} x = -3t; \\ y = 2 + 3t; \\ z = 1. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 + 5t'; \\ y = 1 + 13t'; \\ z = 1 + 10t'. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = -2 + 3t; \\ y = -1; \\ z = 4 - t. \end{cases}$ и $\begin{cases} 2y - z + 2 = 0; \\ x - 7y + 3z - 17 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + z - 1 = 0; \\ 3x + y - z + 13 = 0. \end{cases}$ и $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0; \\ y + 2z - 8 = 0. \end{cases}$

Указание. Для нахождения точки пересечения нужно объединить все уравнения в одну систему и найти для нее решения.

Решение. 2). Для нахождения точки пересечения достаточно подставить x, y, z из параметрических уравнений в уравнения плоскостей:

$$\begin{cases} 2 \cdot (-1) - (4 - t) + 2 = 0; \\ -2 + 3t - 7 \cdot (-1) + 3 \cdot (4 - t) - 17 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $t = 4$, а из второго $0 = 0$. Поскольку уравнения не противоречат друг другу, то существует значение параметра, которое определяет точку пересечения. Подставив полученное значение параметра в параметрические уравнения, получим координаты этой точки: $A(10, -1, 0)$.

Ответ: $A(10, -1, 0)$.

Задача 139. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми:

1) $\begin{cases} x = 3 + t; \\ y = 1 - t; \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -t'; \\ y = 2 + 3t'; \\ z = 3t'. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 3 - 6t; \\ y = -1 + 4t; \\ z = t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -2 + 3t'; \\ y = 4; \\ z = 3 - t'. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0; \\ 2x - 3y + z - 4 = 0. \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z - 9 = 0; \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$

Указание. Нужно воспользоваться формулой расстояния между скрещивающимися прямыми.

Задача 140. Установить, лежит ли данная прямая в данной плоскости, не имеет с плоскостью общих точек или пересекает плоскость в некоторой точке. В последнем случае найти точку пересечения:

1) $\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -1 + t, \\ z = 2 - t \end{cases}$ и $4x + y - z + 13 = 0;$

2) $\begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = -1 + t, \\ z = -2t \end{cases}$ и $x + y - z + 3 = 0;$

3) $\begin{cases} x = t, \\ y = -8 - 4t, \\ z = -3 - 3t \end{cases}$ и $x + y - z + 5 = 0;$

4) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z+2}{5}$ и $4x + 3y - z + 3 = 0;$

5) $\dfrac{x-7}{5} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{4}$ и $3x - y + 2z - 5 = 0;$

6) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{3}$ и $3x - 3y + 2z - 5 = 0;$

7) $\begin{cases} 2x - y + 3z + 4 = 0, \\ x - 2y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$ и $4x - 5y - z + 8 = 0;$

8) $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$ и $x - 2y + z - 1 = 0;$

9) $\begin{cases} 3x + 5y - 7z + 16 = 0, \\ 2x - y + z - 6 = 0 \end{cases}$ и $5x - z - 4 = 0.$

10) $\begin{cases} x = 2 - 3t; \\ y = 7 - 2t; \\ z = -1 + 4t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 + v; \\ y = 1 + 4u + 2v; \\ z = u - v. \end{cases}$

11) $\begin{cases} x - 2y + 3z - 2 = 0; \\ 3x + y - 5z + 1 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 4 + u + 3v; \\ y = 3 + 4u + 2v; \\ z = 8u - v. \end{cases}$

12) $\dfrac{x-1}{10} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+2}{3}$ и $\begin{cases} x = 3 + 10u - 2v; \\ y = 2 - 4u + 3v; \\ z = -2 + u + 2v. \end{cases}$

Указание. Для решения этой задачи, необходимо объединить все уравнения в систему и решить ее.

Решение. 4). Из канонических уравнений прямой получим ее параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t; \\ y = -3 - t; \\ z = -2 + 5t. \end{cases}$$

Теперь подставим выражения для переменных в уравнение плоскости:

$$4 \cdot (1 + 2t) + 3 \cdot (-3 - t) - (-2 + 5t) + 3 = 0.$$

Отсюда получаем равенство $0 = 0$. Это означает, что для любого значения параметра точка прямой, определяемая этим значением, принадлежит данной плоскости. Следовательно, прямая лежит в плоскости.

Ответ: прямая лежит в плоскости.

Задача 141. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и прямую $x = 1 + 3t,\ y = -2 + 4t,\ z = 5 - 2t$.

Задача 142. Составить уравнение прямой, лежащей в плоскости $x - y + 2z - 2 = 0$ и пересекающей прямые

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 4 + 3t \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 1 + 7t', \\ y = -8t', \\ z = 1 + 5t'. \end{cases}$$

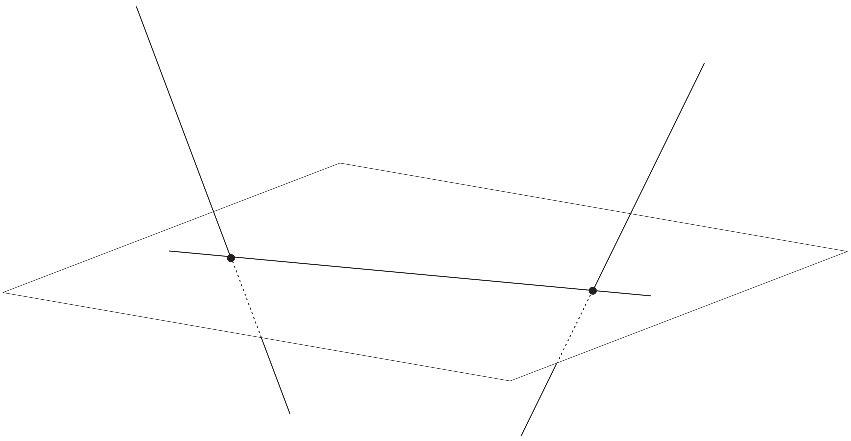

Рис. 12:

Решение. Поскольку искомая прямая лежит в данной плоскости, то точки пересечения этой плоскости с данными прямыми являются их точками пересечения с данной прямой (рис. 12). Найдем точку пересечения плоскости с первой данной прямой:

$$1 + t - (2 + 2t) + 2 \cdot (4 + 3t) - 2 = 0.$$

Отсюда получаем: $t = -1$ и, подставив в параметрические уравнения первой прямой, находим точку $A_1(0, 0, 1)$. Аналогично, найдем точку пересечения плоскости со второй данной прямой:

$$1 + 7t' - (-8t') + 2 \cdot (1 + 5t') - 2 = 0.$$

Отсюда $t' = -1$ и поэтому $A_2(2, 2, 1)$ — искомая точка. Следовательно, направляющим вектором искомой прямой можно выбрать вектор $\vec{a} = \overrightarrow{A_1 A_2}(2, 2, 0)$. В качестве же фиксированной точки больше подходит точка A_1. Теперь осталось составить параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = 2t; \\ y = 2t; \\ z = 1. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = 2t; \\ y = 2t; \\ z = 1. \end{cases}$$

Задача 143. Составить параметрические уравнения прямой, которая проходит через точку $A(3, -2, -4)$ параллельно плоскости $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ и пересекает прямую

$$\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -4 - 2t, \\ z = 1 + 2t. \end{cases}$$

Задача 144. Найти угол между прямой и плоскостью:

1) $\begin{cases} x = 1 + 11t; \\ y = 2 - 7t; \\ z = 5 - 8t \end{cases}$ и $7x - 8y + 2z - 10 = 0;$

2) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-6}{-1} = \dfrac{z+2}{-1}$ и $2x - 4y + 2z - 9 = 0;$

3) $\begin{cases} x + 4y - 2z + 7 = 0; \\ 3x + 7y - 2z = 0 \end{cases}$ и $3x + y - z + 1 = 0.$

Задача 145. Написать уравнение перпендикуляра, проведенного из точки $A(1, 2, 1)$ к плоскости $3x + 7y - 2z + 5 = 0$.

Указание. Направляющим вектором этого перпендикуляра может служить нормальный вектор плоскости.

Задача 146. Найти проекцию точки $A(2, 11, -5)$ на плоскость $x +$ $+ 4y - 2z + 7 = 0$.

Указание. Проекцией точки на плоскость является точка пересечения этой плоскости и перпендикуляра, проведенного из точки к плоскости.

Задача 147. Найти точку, симметричную точке $Q(4, -5, 4)$ относительно плоскости, проходящей через прямые:

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0; \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + z = 0; \\ y = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем сначала уравнение указанной плоскости. Это уравнение будем искать как уравнение по трем точкам. Из второй системы сразу получаем две точки — $O(0, 0, 0)$ и $M_1(1, 0, -1)$. Для нахождения точки другой прямой (т.е. прямой, определяемой первой системой) совершим следующие действия. Сложим оба уравнения системы вместе:

$$2x + 2z - 4 = 0.$$

Отсюда получим: $x = 2 - z$. Подставив это выражение в первое уравнение, получим:

$$2 - z + y + z - 3 = 0.$$

Отсюда $y = 1$. Следовательно, точка, принадлежащая первой прямой имеет координаты $M_2(2 - z, 1, z)$. Пусть $z = 1$. Тогда $M_2(1, 1, 1)$. Теперь можно составить уравнение плоскости по трем точкам:

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 0 \\ 1 - 0 & 0 - 0 & -1 - 0 \\ 1 - 0 & 1 - 0 & 1 - 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$x - 2y + z = 0.$$

Найдем проекцию точки Q на найденную плоскость. Для этого составим сначала параметрические уравнения прямой, перпендикулярной указанной плоскости и проходящей через точку Q. Нормальный вектор плоскости, т.е. вектор $\vec{n}(1, -2, 1)$ можно взять в качестве направляющего вектора искомой прямой. Следовательно, ее параметрические уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} x = 4 + t; \\ y = -5 - 2t; \\ z = 4 + t. \end{cases}$$

Подставив выражения для координат в уравнение плоскости, получим:

$$4 + t - 2 \cdot (-5 - 2t) + 4 + t = 0.$$

Отсюда $t = -3$. Подставив это значение в параметрические уравнения, получим координаты проекции: $A(1, 1, 1)$. Пусть $B(x, y, z)$ — точка, симметричная точке Q относительно указанной плоскости. Поскольку A — середина отрезка QB, то можно воспользоваться формулами середины отрезка:

$$1 = \frac{x+4}{2}; \quad 1 = \frac{y-5}{2}; \quad 1 = \frac{z+4}{2}.$$

Отсюда получаем координаты точки $B(-2, 7, -2)$.

Ответ: $B(-2, 7, -2)$.

Задача 148. Найти проекцию прямой на плоскость $3x - 2y - z + 15 = 0$, если уравнение прямой имеет вид:

$$1)\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 3 + t, \\ z = 2 + t. \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 3 + t, \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x + y + z - 5 = 0, \\ 2x - 3y + z - 4 = 0; \end{cases} \qquad 4)\begin{cases} x - y + z - 5 = 0, \\ 2x + 3y + z - 4 = 0. \end{cases}$$

Задача 149. Написать общее уравнение плоскости, содержащей перпендикуляры, проведенные из точки $A(1, 2, -1)$ к плоскостям $x + y - z + 1 = 0$ и $2x + 3y = 0$.

Решение. В качестве направляющих векторов перпендикуляров можно взять нормальные векторы данных плоскостей, т.е. векторы $\vec{n}_1(1, 1, -1)$ и $\vec{n}_2(2, 3, 0)$. Поскольку же искомая плоскость проходит через эти перпендикуляры, то эти же векторы можно взять и в качестве ее направляющих векторов. Следовательно, в качестве нормального вектора искомой плоскости можно взять векторное произведение векторов $\vec{n}_1$ и

$\vec{n}_2$:

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (3, -2, 1).$$

Тогда общее уравнение искомой плоскости имеет вид:

$$3x - 2y + z + D = 0.$$

Подставив в него координаты точки A, получим, что $D = 2$.

Ответ: $3x - 2y + z + 2 = 0$.

Задача 150. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(4, -1, 3)$, параллельной прямым

$$\begin{cases} x = t; \\ y = 2t; \\ z = -3t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 1 + 5t'; \\ y = 3 + 4t'; \\ z = 4 + 2t'. \end{cases}$$

Задача 151. Возможно ли через прямую

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -3 + t, \\ z = 5 - 4t \end{cases}$$

провести плоскость, параллельную плоскости $2x + 3y - 4z + 2 = 0$.

Задача 152. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, 2, -2)$ перпендикулярно к прямой $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-6}{-3} = \dfrac{z-3}{2}$.

Задача 153. На прямой $x = t,\ y = 2 + 2t,\ z = 2 - t$ найти точку, ближайшую к точке $A(2, 3, 0)$.

Решение. Задачу можно решить 2 способами.

Первый способ — использовать понятие производной. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка на прямой. Тогда ее координаты можно определить следующим образом: $M(t, 2 + 2t, 2 - t)$. Найдем расстояние от этой точки до точки A :

$$AM = \sqrt{(t-2)^2 + (2 + 2t - 3)^2 + (2-t)^2} = \sqrt{6t^2 - 12t + 9}.$$

Поскольку найденное расстояние является функцией от одной переменной, то ее можно исследовать на экстремум. Найдем производную этой функции:

$$d' = \frac{12t - 12}{2\sqrt{6t^2 - 12t + 9}}.$$

Приравняв к нулю, получим: $12t - 12 = 0$ и $t = 1$. Поскольку для рассматриваемой функции максимум невозможен (нельзя найти две точки, расстояние между которыми было бы максимальным), то найденное значение параметра определяет минимум этой функции , т.е. координаты точки на данной прямой, которая будет ближайшей к точке A. Подставив это значение в параметрические уравнения прямой, мы и найдем эти координаты: $M(1, 4, 1)$.

Для решения задачи вторым способом — без использования понятия производной, нужно найти уравнение плоскости, перпендикулярной данной прямой и проходящей через точку A. В качестве нормального вектора этой плоскости можно взять направляющий вектор прямой. Следовательно, уравнение плоскости будет иметь вид:

$$x + 2y - z + D = 0.$$

Подставив в это уравнение координаты точки A, получим, что $D = -8$. Тогда уравнение плоскости будет определено полностью:

$$x + 2y - z - 8 = 0.$$

Подставив в него выражения для переменных из параметрических уравнений данной прямой, получим:

$$t + 2 \cdot (2 + 2t) - (2 - t) - 8 = 0,$$

откуда $t = 1$. Подставив полученное значение параметра в параметрические уравнения прямой, получим искомую точку: $M(1, 4, 1)$.

Ответ: $M(1, 4, 1)$.

Задача 154. На прямой $x = 2t,\ y = 4t,\ z = 3 + 5t$ найти точку, равноудаленную от точек $A(3, 1, -2)$ и $B(5, 3, -2)$.

Задача 155. Найти точку, симметричную точке $B(4, 3, 10)$ относительно прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{5}$.

3 Ответы

2. $\overrightarrow{BC} = \vec{p} + \vec{q},\ \overrightarrow{CD} = \vec{q},\ \overrightarrow{FE} = \vec{p} + \vec{q},\ \overrightarrow{ED} = \vec{p}.$

3. 1) $\overrightarrow{AC}$, 2) $\overrightarrow{AB}$, 3) $\vec{0}$.

8. $\overrightarrow{AD} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$

10. $\overrightarrow{AD} = \dfrac{|\vec{b}|\vec{c}}{|\vec{b}| + |\vec{c}|} + \dfrac{|\vec{c}|\vec{b}}{|\vec{b}| + |\vec{c}|}.$

12. $\overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{2}\vec{m} + \dfrac{1}{2}\vec{p}.$

15. 1) $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$; 2) $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$; 3) $\vec{c} = -\dfrac{3}{2}\vec{a}$.

16.$\overrightarrow{AB}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}),\ \overrightarrow{BC}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),\ \overrightarrow{DA}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}),\ \overrightarrow{CD}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$

17. $l = -\dfrac{5}{3},\ m = \dfrac{6}{5}.$

19. $\vec{d}(2, 3, -5)$.

20. $\vec{a} = 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.

22. $Pr_{\vec{a}}\overrightarrow{AC} = 5$.

23. 1) $(3, 0)$; 2) $(0, 2)$; 3) $(-\frac{3}{2}, 0)$; 4) $(0, -\frac{1}{2})$; 5) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$; 6) $(1, \sqrt{3})$; 7) $(-\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2})$; 8) $(2\sqrt{3}, -2)$.

24. 1) $(2, 2\sqrt{2}, 2)$; 2) $(-4\sqrt{2}, 4, 4)$; 3) $(-1, \sqrt{2}, -1)$; 4) $(-3, 3, 3\sqrt{2})$.

25. 1) 20; 2) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 3) 3; 4) -3.

26. 1) 5; 2) 4; 3) 25; 4) 39; 5) -51.

27. 1) $2 + \sqrt{3}$; 2) 40.

28. $\sqrt{7}$ и $\sqrt{13}$.

29. 120°.

30. $cos\varphi = -\dfrac{49}{2\sqrt{949}}.$

32. c^2.

35. 0.

36. 1) -5; 2) 0; 3) $\frac{13}{60}$; 4) 2; 5) $-\frac{1}{2}$.

37. 1) 45°; 2) 90°; 3)$cos(\widehat{\vec{p},\ \vec{q}}) = \frac{2\sqrt{15}}{15}$; 4) 3°.

38. $\lambda = -\frac{1}{2}$.

39. 1) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$; 2) $15\sqrt{3}$; 3) $75\sqrt{3}$.

40. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

41. $72\sqrt{2}$.

42. 1) $(6, -3, 0)$; 2) $(20, -20, -10)$; 3) $(3, 4, -2)$; 4) $(-20, 20, 10)$.

44. $\vec{c}_1(1, 2, -1)$, $\vec{c}_2(-1, -2, 2)$.

45. $(-8, 7, 5)$.

46. Компланарны.

47. 1) 1; 2) -1; 3) -1; 4) 1.

48. 1) Левая; 2) правая; 3) левая; 4) правая.

49. 1) -20; 2) 18; 3) 0; 4) 6.

50. 1) Да; 2) нет; 3) да; 4) нет.

51. $\vec{d}\big(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\big)$.

52. $\vec{d}\big(-\frac{3}{\sqrt{38}}, \frac{5}{\sqrt{38}}, -\frac{2}{\sqrt{38}}\big)$.

53. $\vec{c}\big(\frac{6}{5\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{8}{5\sqrt{5}}\big)$.

56. $x^2 + y^2 = 4$.

57. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$.

58. $x^2 - 6x - 8y + 25 = 0$.

59. $|xy| = \dfrac{s}{2}$, где s – площадь треугольника.

60. $\begin{cases} (x-5)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9; \\ x = 4. \end{cases}$

61. $\begin{cases} 10x + 2z = 35; \\ y = 0. \end{cases}$

62. $C(0,8,8)$; $D(2,11,3)$; $E(4,14,-2)$.

63. $A(19,0,6)$; $B(-17,0,-3)$.

64. 3.

65. $C(1,-3,-3)$; $D(3,-2,1)$.

66. $\dfrac{2\sqrt{74}}{3}$.

67. $(\dfrac{19}{\sqrt{870}}, \dfrac{22}{\sqrt{870}}, \dfrac{5}{\sqrt{870}})$; $\dfrac{\sqrt{870}}{8}$.

68. $A(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{2})$; $B(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4})$; $C(2, \dfrac{\pi}{6})$; $D(3\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4})$; $E(2, \dfrac{5\pi}{3})$.

69. $A(1, \sqrt{3};$, $B(-1,1)$; $C(0,5)$; $D(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2})$; $E(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

70. $A_1(3, \dfrac{7\pi}{4})$; $B_1(2, \dfrac{\pi}{2})$; $C_1(3, \dfrac{\pi}{3})$; $D_1(1,-2)$; $L_1(1,0)$; $E_1(5,1)$.

71. $C(3, \dfrac{5\pi}{9})$; $D(5, \dfrac{17\pi}{14})$.

72. $(1, \dfrac{4\pi}{3})$.

73. $(6, \dfrac{\pi}{9})$.

74. 7.

75. 5.

76. $3(4\sqrt{3} - 1)$.

77. $(2 + 5\sqrt{3}, 8)$.

78. $B(6\sqrt{2}, \dfrac{5\pi}{4})$; $C(4, \dfrac{7\pi}{6})$.

79. $A(9, arccos(-\frac{2}{\sqrt{5}}), arcsin\frac{1}{9})$; $B(3, \frac{5\pi}{4}, arcsin(-\frac{1}{3}))$; $C(5, \frac{3\pi}{2}, arcsin\frac{3}{5})$; $D(\sqrt{3}, \frac{7\pi}{4}, arcsin(-\frac{1}{\sqrt{3}}))$; $E(1, \frac{\pi}{2}, 0)$.

80. $M(2, arccos\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\pi}{3})$.

81.2) $\begin{cases} x = 3t, \\ y = 4t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 1, \\ y = 7 + t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 2, \\ y = 4 + 9t. \end{cases}$

83. 1) $y = -5x + 3$; 2) $y = 8x + 2$, $y = 8x - 2$; 3) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2}$

84.2) $\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = 2 + t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = t, \\ y = 5t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = -7 + 11t, \\ y = 3 - 6t; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = 2 - 2t, \\ y = 3t; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = 3t, \\ y = -4 + 4t; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 3t; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ y = t; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x = t, \\ y = -\frac{5}{4}. \end{cases}$

85. 1) $3x + y - 4 = 0$; 2) $x - 2 = 0$; 3) $y - 1 = 0$; 4) $x - 3y - 3 = 0$; 5) $5x + y = 0$; 6) $11x + 9y - 99 = 0$; 7) $6x - y - 3 = 0$; 8) $2x + 5y + 11 = 0$.

86. $2x + 3y - 5 = 0$; $2x - y - 1 = 0$; $2x - 3y + 13 = 0$; $x - 1 = 0$.

88. 12.

89. $x+3y-30 = 0$; $3x+4y-60 = 0$; $3x-y-30 = 0$; $x-12y+60 = 0$.

90. 1) $(15, -10)$; 2) параллельны; 3) совпадают; 4) совпадают; 5) совпадают; 6) $(1, 2)$; 7) $(-4, -3)$; 8) совпадают; 9) параллельны.

91. 1) -1; 2) $-\frac{2}{3}$; 4) $-\frac{3}{4}$; 5) $\frac{2}{5}$; 6) 0; 8) $\frac{7}{3}$; 9) $-\frac{5}{2}$.

92. $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - 5t; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 + 4t, \\ y = 4 - 3t; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 + 2t, \\ y = -1 + 2t. \end{cases}$

94. $(-2, -6)$.

95. $(\frac{16}{3}, \frac{5}{3})$.

96. $5x + y - 16 = 0,\ x - 5y + 2 = 0.$

98. $x - 2y + 1 = 0,\ 2x + y - 3 = 0.$

99. $3x-4y+32 = 0,\ 3x-4y+7 = 0,\ 4x+3y-24 = 0,\ 4x+3y+1 = 0.$

100. 1) $4x - 5y + 22 = 0,\ 4x + y - 18 = 0,\ 2x - y + 1 = 0;$ 2) $x + 2y - 7 = 0,\ 5x + 4y + 7 = 0,\ x - 4y - 13 = 0.$

101. $3x - 19 = 0.$

102. $\sqrt{5}.$

103. $3x+4y+13 = 0,\ 4x-3y+9 = 0,\ 4x-3y-16 = 0,\ 3x+4y-12 = 0$ и $3x+4y-12 = 0,\ 4x-3y+9 = 0,\ 4x-3y-16 = 0,\ 3x+4y-37 = 0.$

104. $(-3, 7),\ (-6, 10),\ (9, -17);\ 9x + 5y + 4 = 0.$

106. $4x - 3y + 10 = 0,\ 7x + y - 20 = 0,\ 3x + 4y - 5 = 0.$

107. $4x + 7y - 1 = 0,\ y - 3 = 0,\ 4x + 3y - 5 = 0.$

108. $x + y - 7 = 0,\ x + 7y + 5 = 0,\ x - 8y + 20 = 0.$

109. 1) $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$; 2) $\dfrac{4}{5}$; 3) $\dfrac{11\sqrt{10}}{10}$; 4) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

110. $\dfrac{100}{3}$ и $\dfrac{75}{4}$.

111.2) $\begin{cases} x = 1 + u, \\ y = 2 + v, \\ z = 1. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 1 + u, \\ y = 7, \\ z = 1 + v; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 1 + 4u + v, \\ y = 3u + 3v, \\ z = 1 + u - 3v; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = u + v, \\ y = 5v, \\ z = 7v; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = v, \\ y = u + 2v, \\ z = v; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x = 1 + u + 2v, \\ y = 2 + 2u + v, \\ z = 3 + u - 2v. \end{cases}$

112. 2) $y = 0$; 3) $y - 2 = 0$; 4) $y = 0$; 5) $2x + y - 2 = 0.$

113. $2x - y + 3z + 6 = 0.$

114. 1) $x - 4y - z + 16 = 0$; 2) $x + 5y - z + 5 = 0.$

115.2) $\begin{cases} x = 1 + v, \\ y = -1 - u - v, \\ z = u + 3v. \end{cases}$

116. 1) $-9, -6, 2$; 2) $20, -10, 4$; 3) $0, 0, 0$; 4) $\frac{17}{5},\ \frac{17}{3},\ -\frac{17}{4}$.

117. 20.

118. $27x + 11y + z - 65 = 0$.

119. 2) совпадают, 3) параллельны,
4) пересекаются, 5) совпадают, 6) параллельны.

122. 1) $6x - 17y + 11z - 19 = 0$.

123. 2) $x + 2y - z + 2 = 0$; 3) $3y + z - 9 = 0$;
4) все плоскости, принадлежащие пучку плоскостей.

124. 1)$\frac{1}{2}$; 2) $\frac{25}{6\sqrt{14}}$

125. 3.

126. $x + y + z - 1 = 0; x + y - z = 15; x - y - z = 5; -x + y - z = 9$.

127. $x - 3y - z + 2 = 0,\ x - 4y - z + 2 = 0,\ 2x - 8y - 3z + 6 = 0,\ 2x - 11y - 3z + 9 = 0$.

128. OXZ.

129. $2x - 2y - z - 27 = 0,\ 2x - 2y - z + 15 = 0$.

130. $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}),\ r = \frac{3}{2}$.

131.1) $\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -2t, \\ z = 3 - 2t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2, \\ z = 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 3 + 2t. \end{cases}$

132. $M_1,\ M_3$.

133. 2) $y + 3z - 3 = 0,\ 2x + y - 16 = 0$.

134.2) $\begin{cases} x = 5 - 2t, \\ y = -3 + 3t, \\ z = 2 - t. \end{cases}$

135. 1) $\dfrac{x}{-5} = \dfrac{y+1}{12} = \dfrac{z-1}{13}$; 2) $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-1}{13} = \dfrac{z-1}{11}$.

136. 1) $\sqrt{91\dfrac{3}{14}}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\dfrac{1}{3}\sqrt{347}$.

138. 1) $(1, 1, 1)$; 3) $(-3, 0, 4)$.

139. 1)$\dfrac{18}{\sqrt{110}}$; 2) $\dfrac{31}{13}$; 3) $\dfrac{16}{\sqrt{102}}$.

140. 1) $A(-2, -2, 3)$; 2) прямая параллельна плоскости;
3) прямая лежит в плоскости; 5) $A(2, 3, 1)$; 6) прямая параллельна плоскости;
7) прямая лежит в плоскости; 8) прямая параллельна плоскости;
9) $A(2, 4, 6)$; 10) прямая параллельна плоскости;
11) $A(1, 1, 1)$; 12) прямая лежит в плоскости.

141. $16x - 17y - 10z = 0$.

143. $\begin{cases} x = 3 + 5t, \\ y = -2 - 6t, \\ z = -4 + 9t. \end{cases}$

144. 1) $45°$; 2) $30°$; 3) $arcsin\dfrac{19}{11\sqrt{7}}$.

145. $\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 + 7t, \\ z = 1 - 2t. \end{cases}$

146. $B(-1, -1, 1)$.

148.1) $\begin{cases} 3x - 2y - z + 15 = 0, \\ x + 5y - 7z - 2 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 2y - z + 15 = 0, \\ x + 4y - 5z - 3 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 2y - z + 15 = 0, \\ x + y + z - 5 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x - 2y - z + 15 = 0, \\ 9x + 11y + 5z - 21 = 0. \end{cases}$

150. $16x - 17y - 6z - 63 = 0$.

151. Нет.

152. $4x - 3y + 2z + 6 = 0$.

154. $C(2, 4, 8)$.

155. $A(2, 9, 6)$.

Литература

1. Цубербиллер, О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии : учеб. пособие для втузов / О.Н. Цубербиллер. — М.: Наука, 1968. — 336 с.

2. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии : учеб. пособие для вузов / А.А.Бурдун [и др.]. — Мн.: "Университетское 1989. — 286 с.

3. Моденов, П.Р. Сборник задач по аналитической геометрии : учеб. пособие для вузов / П.Р. Моденов, А.С. Пархоменко — М.: Наука, 1976. — 384 с.

4. Александров, П.С. Лекции по аналитической геометрии : учеб. пособие для вузов / П.С.Александров — М.: Наука, 1968. — 911 с.

5. Милованов, М.В. Алгебра и аналитическая геометрия. Часть 1. : учеб. пособие для вузов / М.В. Милованов, Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко — Мн.: Вышэйшая школа, 1984. — 302 с.

6. Милованов М.В., Алгебра и аналитическая геометрия. Часть 2. : учеб. пособие для вузов / М.В. Милованов [и др.] — Мн.: Вышэйшая школа, 1987. — 269 с.

Учебное издание

Аниськов Валерий Валерьевич

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ В 3 ЧАСТЯХ. ЧАСТЬ 1. ВЕКТОРЫ. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

для студентов 1 курса
специальности 1–31 03 01–02 — “Математика (научно-педагогическая деятельность)”

В авторской редакции

Подписано в печать 26.04.07 г. (35) Формат 60 × 84 1/16. Бумага писчая № 1. Гарнитура “Таймс”. Усл. п. л. 5,0 Уч.-изд. л. 3,9. Тираж 25 экз.

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
“Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины”
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104