Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
“Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины”

В. В. АНИСЬКОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ В 3 ЧАСТЯХ. ЧАСТЬ 2. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Гомель, 2007

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
“Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины”

В. В. АНИСЬКОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ В 3 ЧАСТЯХ. ЧАСТЬ 2. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

для студентов 1 курса
специальности 1–31 03 01–02 — “Математика
(научно-педагогическая деятельность)”

Гомель, 2007

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.174 я 173
А 674

Рецензент:

кафедра алгебры и геометрии учреждения образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины"

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины"

А 674 Аниськов В.В.
Аналитическая геометрия: практическое пособие для студентов 1 курса специальности 1 -31 03 01–02 — "Математика (научно-педагогическая деятельность)". В 3 частях. Ч2. Линии и поверхности второго порядка / В. В. Аниськов. Мин-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф.Скорины. — Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, — 2007. — 111 с.

Практическое пособие предназначено студентам 1 курса математического факультета специальности 1–31 03 01–02 — "Математика (научно-педагогическая деятельность)", изучающим дисциплину "Аналитическая геометрия". Может быть использовано для самостоятельного изучения.

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.174 я 173

Содержание

Введение

Данное пособие является второй частью пособия для проведения практических занятий по дисциплине “Аналитическая геометрия” для студентов дневного математического факультета специальности 1-31 03 01-02 — “математика (научно-педагогическая деятельность)”.

В пособии представлены следующие разделы: “Линии второго порядка”, “Общая теория линий второго порядка”, “Поверхности второго порядка”.

Для задач принята сквозная нумерация. В начале каждой темы даются краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач данной темы. Типовые задачи темы даны с решениями, что позволяет использовать пособие для самоподготовки. На остальные задачи в конце пособия даны ответы.

Пособие может использоваться прежде всего студентами математического факультета. Оно так же может быть использовано и студентами заочного факультета.

1 ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1.1 Окружность. Эллипс

Окружность радиуса r с центром в точке $M(a, b)$ может быть задана уравнением

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Эллипсом называется множество точек плоскости для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек, называемых *фокусами* есть величина постоянная, большая чем расстояние между фокусами.

Эллипс можно рассматривать как результат сжатия окружности к её диаметру.

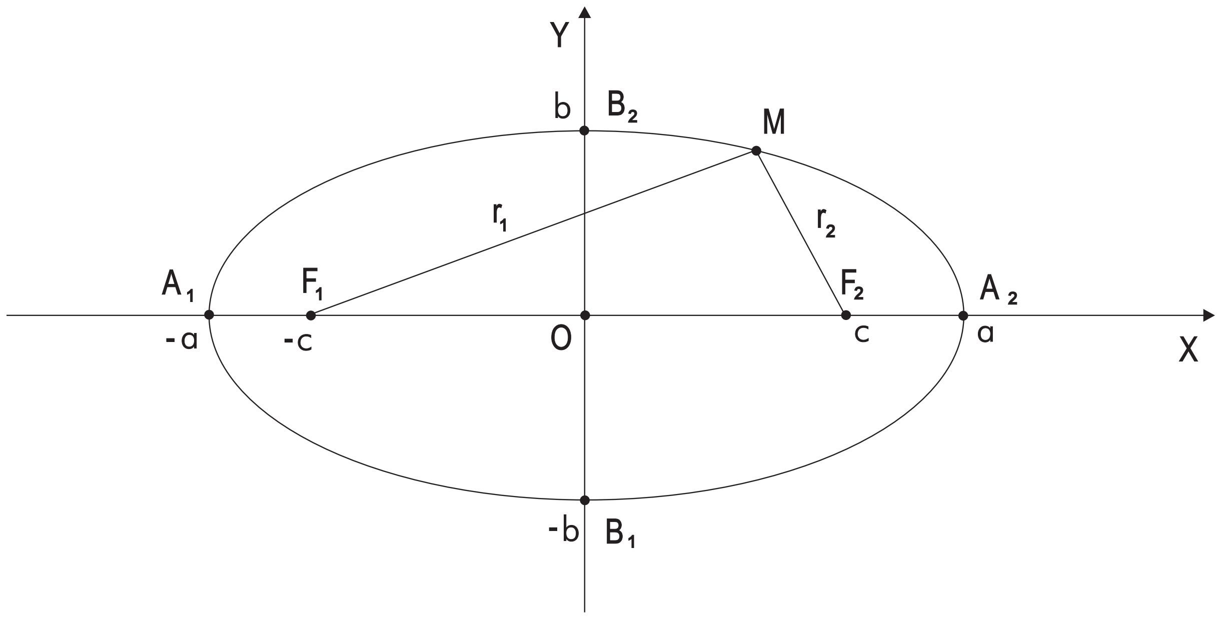


Рис. 1:

Постоянную величину, входящую в определение эллипса, обозначим через $2a$, расстояние между фокусами — через $2c$. Если систему координат выбрать таким образом, чтобы фокусы эллипса располагались на оси абсцисс, а начало координат находилось посередине между фокусами, то фокусы будут иметь координаты $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. В случае такого выбора системы координат, для эллипса справедливы следующие свойства.

Для того, чтобы точка $M(x, y)$ принадлежала эллипсу, необходимо и достаточно, чтобы её координаты удовлетворяли уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = a^2 - c^2$. Это уравнение называется *каноническим уравнением эллипса.*

Координатные оси являются осями симметрии эллипса. Начало координат является центром симметрии эллипса.

Эллипс пересекает координатные оси в точках $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$.

Для любой точки эллипса $M(x, y)$ выполняются соотношения:

$$-a \leqslant x \leqslant a, \quad -b \leqslant y \leqslant b.$$

Для любых точек эллипса, расположенных в первой координатной четверти, с возрастанием их абсциссы, их ордината убывает.

Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называются *большей осью,* а отрезок OA_2 и его длина a называются *большей полуосью.*

Отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ называются *меньшей осью,* а отрезок OB_2 и его длина b называются *меньшей полуосью.*

Отрезок F_1F_2 и его длина $2c$ называются *фокусным расстоянием.*

Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ называются *вершинами эллипса.*

Отношение фокусного расстояния эллипса к длине его большей оси называется *эксцентриситетом* эллипса и обозначается через ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Фокальными радиусами точки $M(x, y)$ эллипса называются величины $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$.

Фокальные радиусы для эллипса могут быть вычислены через эксцентриситет:

$$r_1 = a + \varepsilon x_1, \quad r_2 = a - \varepsilon x_1.$$

Эллипс может быть задан уравнениями

$$x = a\cos t; \quad y = b\sin t,$$

которые называются *параметрическими уравнениями эллипса.*

Прямые, параллельные оси ординат и имеющие уравнения

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad x = \frac{a}{\varepsilon},$$

называются *директрисами эллипса.*

Поскольку для эллипса $\varepsilon < 1$, то директрисы эллипса эллипс не пересекают

Отношение расстояния от любой точки эллипса до фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

Задача 1. Какие фигуры задаются уравнениями:

1) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$;

2) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$;

3) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$;

4) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 18y - 48 = 0$;

5) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 18y + 50 = 0$;

6) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 18y + 30 = 0$.

Решение. 5). Выделим полные квадраты относительно обеих переменных:

$$3x^2 + 3y^2 + 6x - 18y + 50 = 0;$$
$$3(x^2 + 2x + 1) + 3(y^2 - 6y + 9) - 3 - 27 + 50 = 0;$$
$$3(x+1)^2 + 3(y-3)^2 + 20 = 0.$$

Получаем, что ни одна точка не может удовлетворять этому уравнению.

Ответ: пустое множество.

Задача 2. Составить уравнение окружности, имеющей центр в точке $S(1, -3)$ и проходящей через точку $A(5, -3)$.

Задача 3. Составить уравнение окружности, которая проходит через точки:

1) $A(-1, 5)$; $B(7, 1)$; $C(2, 6)$;

2) $A(-1, 5)$; $B(-2, -2)$; $C(1, 19)$.

Задача 4. Написать уравнения окружностей, проходящих через точку $A(1,2)$ и касающихся прямой $x-y+3=0$ и прямой $x-y-1=0$.

Задача 5. Написать уравнения окружностей, касающихся прямых $x=1,\ y=1,\ x-y=1$.

Решение. Пусть $M(x_0,y_0)$ является центром окружностей, которые касаются указанных прямых. Запишем уравнения прямых в общем виде:

$$x-1=0;\quad y-1=0;\quad x-y-1=0.$$

Воспользовавшись формулой расстояния от точки до прямой на плоскости, найдем расстояния от точки M до этих прямых:

$$d_1=\frac{|x_0-1|}{1};\quad d_2=\frac{|y_0-1|}{1};\quad d_3=\frac{|x_0-y_0-1|}{\sqrt{2}}.$$

Поскольку точка M равноудалена от всех трех прямых, то можно получить систему

$$\begin{cases}\dfrac{|x_0-1|}{1}=\dfrac{|y_0-1|}{1};\\[2mm] \dfrac{|x_0-1|}{1}=\dfrac{|x_0-y_0-1|}{\sqrt{2}}.\end{cases}$$

Избавившись от знаменателя, получим систему

$$\begin{cases}|x_0-1|=|y_0-1|;\\ \sqrt{2}|x_0-1|=|x_0-y_0-1|.\end{cases}$$

Использя свойства модуля, получим, что каждое из уравнений равносильно совокупности двух уравнений и поэтому придем к системе

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_0-1=y_0-1;\\ x_0-1=-y_0+1;\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}(x_0-1)=x_0-y_0-1;\\ \sqrt{2}(x_0-1)=-x_0+y_0+1.\end{array}\right.\end{cases}$$

Эта система будет равносильна совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_0-1=y_0-1;\\ \sqrt{2}(x_0-1)=x_0-y_0-1;\end{cases}\\ \begin{cases}x_0-1=1-y_0;\\ \sqrt{2}(x_0-1)=x_0-y_0-1;\end{cases}\\ \begin{cases}x_0-1=y_0-1;\\ \sqrt{2}(x_0-1)=-x_0+y_0+1;\end{cases}\\ \begin{cases}x_0-1=1-y_0;\\ \sqrt{2}(x_0-1)=-x_0+y_0+1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим первую систему. Из ее первого уравнения, $x_0 = y_0$. Подставив это выражение во второе уравнение, получим:

$$\sqrt{2}(x_0-1)=x_0-x_0-1;$$

$$\sqrt{2}(x_0-1)=-1;$$

$$x_0=1-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда $y_0 = 1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Радиус окружности можно найти используя любое из полученных выше расстояний:

$$r=\frac{|x_0-1|}{1}=|1-\frac{1}{\sqrt{2}}|=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тогда уравнение окружности принимает вид:

$$(x-(1-\frac{1}{\sqrt{2}}))^2+(y-(1-\frac{1}{\sqrt{2}}))^2=(\frac{1}{\sqrt{2}})^2$$

или

$$(x-1+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(y-1+\frac{1}{\sqrt{2}})^2=\frac{1}{2}.$$

Решим теперь вторую систему. Из ее первого уравнения, $x_0 = 2 - y_0$. Подставив это выражение во второе уравнение, получим:

$$\sqrt{2}(1-y_0)=2-y_0-y_0-1;$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{2}y_0 = 1 - 2y_0;$$
$$(2 - \sqrt{2})y_0 = 1 - \sqrt{2};$$
$$y_0 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{(1 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда $x_0 = 2 - y_0 = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Найдем теперь радиус:

$$r = \frac{|x_0 - 1|}{1} = |x_0 - 1| = |2 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1| = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}.$$

Подставив полученные координаты центра и радиус в уравнение окружности и преобразовав, получим:

$$(x - 2 - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (y + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{2}.$$

Из третьей системы $x_0 = y_0$ и поэтому из ее второго уравнения получаем:

$$\sqrt{2}(x_0 - 1) = 1;$$

$$x_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \; y_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
$$r = |x_0 - 1| = |1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, получаем следующее уравнение окружности:

$$(x - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (y - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{2}.$$

Из четвертой системы $x_0 = 2 - y_0$. Подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$\sqrt{2}(1 - y_0) = 2 + y_0 + y_0 - 1.$$

После преобразований получаем:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad x = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Осталось найти радиус:

$$r = |x_0 - 1| = |2 - \frac{1}{\sqrt{2}} - 1| = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, получим такое уравнение окружности:

$$(x-2+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(y-\frac{1}{\sqrt{2}})^2=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}.$$

Ответ:
$(x-1+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(y-1+\frac{1}{\sqrt{2}})^2=\frac{1}{2}$,
$(x-2-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(y+\frac{1}{\sqrt{2}})^2=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2}$,
$(x-1-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(y-1-\frac{1}{\sqrt{2}})^2=\frac{1}{2}$,
$(x-2+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(y-\frac{1}{\sqrt{2}})^2=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}$.

Задача 6. Из точек $A(1,1)$, $B(1,4)$, $C(5,2)$ проведены касательные к окружности $x^2+y^2+2x-19=0$. Составить их уравнения.

Задача 7. Составить уравнения окружности, проходящей через точку $A(1,-2)$ и точки пересечения прямой $x-7y+10=0$ с окружностью $x^2+y^2-2x+4y-20=0$.

Указание. Рассмотреть уравнение пучка окружностей x^2+y^2-2x+ $+4y-20+\lambda(x-7y+10)=0$.

Задача 8. Составить уравнение эллипса, фокусы которого принадлежат оси ординат и симметричны относительно начала координат, если:

1) полуоси его соответственно равны трем и пяти;

2) расстояние между фокусами равно 6 и большая ось равна 10;

3) большая ось равна 26 и эксцентриситет $\epsilon=\frac{12}{13}$.

Задача 9. Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и уравнения директрис для эллипсов:

1) $25x^2+9y^2=225$;

2) $9x^2+25y^2=225$.

Задача 10. Эксцентриситет эллипса $\epsilon=\frac{2}{3}$, фокальный радиус точки M эллипса равен 15. Вычислить расстояние от указанной точки до соответствующей этому фокусу директрисы.

Задача 11. Составить уравнение эллипса, зная его фокус $F_1(2,0)$, соответствующую этому фокусу директрису $x = 8$ и эксцентриситет $\epsilon = \frac{1}{2}$.

Решение. Для любой точки эллипса

$$\frac{r}{d} = \varepsilon.$$

Пусть $M(x, y)$ — такая точка. По формуле расстояния между двумя точками:

$$r = MF_1 = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}.$$

Общее уравнение данной в условии директрисы имеет вид: $x - 8 = 0$. Воспользуемся формулой расстояния от точки до плоскости:

$$d = \frac{|x-8|}{\sqrt{1^2}} = |x-8|.$$

Тогда

$$\frac{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}}{|x-8|} = \frac{1}{2}.$$

Преобразуем полученное соотношение:

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \frac{1}{2}|8-x|;$$

$$(x-2)^2 + y^2 = \frac{1}{4}(64 - 16x + x^2);$$

$$4(x^2 - 4x + 4 + y^2) = 64 - 16x + x^2;$$

$$3x^2 + 4y^2 = 48;$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

Ответ: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$

Задача 12. Составить уравнение эллипса, вершина которого находится в начале координат, ближайший к ней фокус в точке $F(2,0)$, а одна из директрис эллипса пересекает ее фокальную ось в точке $N(12,0)$.

Решение. Поскольку одна из вершин и один из фокусов находятся на оси OX, то директриса параллельна оси OY и второй фокус так же находится на оси OX (рис. 2). Если бы центр эллипса находился в начале

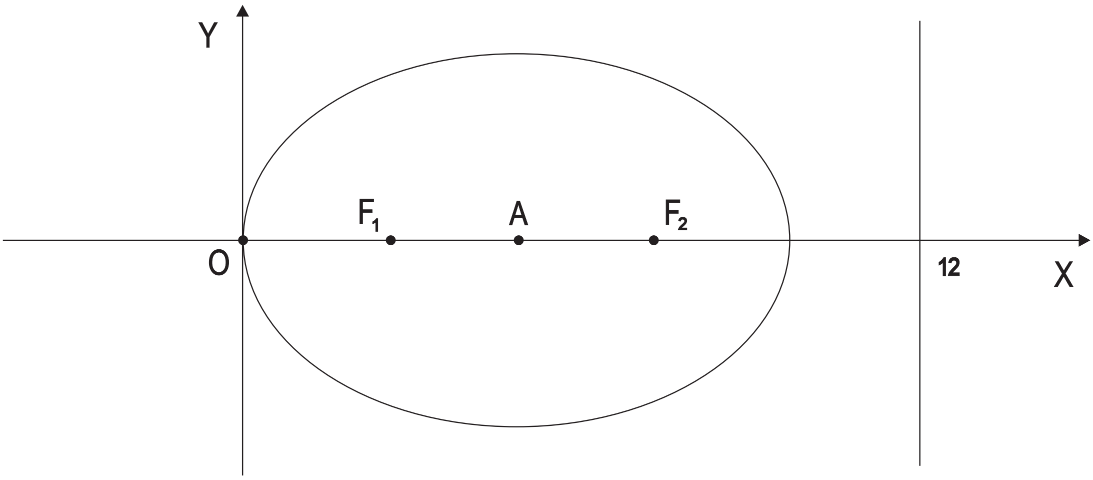


Рис. 2:

координат, а его фокусы на оси абсцисс, то уравнение данной в условии директрисы имело бы вид $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$. В нашем случае центр эллипса находится правее от начала координат на расстоянии a по оси абсцисс. Следовательно, директриса в нашем случае имеет уравнение

$$x = a + \frac{a}{\varepsilon}.$$

С другой стороны, ее уравнение $x = 12$. Поэтому

$$a + \frac{a}{\varepsilon} = 12.$$

Очевидно, что $a - c = OA - F_1A = 2$. Тогда $a = c + 2$. Подставим это выражение в полученное выше соотношение:

$$(c+2) + \frac{(c+2)}{\dfrac{c}{(c+2)}} = 12;$$

$$(c+2) + \frac{(c+2)^2}{c} = 12;$$

$$c(c+2) + (c+2)^2 = 12c;$$

$$c^2 + 2c + c^2 + 4c + 4 - 12c = 0;$$

$$2c^2 - 6c + 4 = 0;$$

$$c^2 - 3c + 2 = 0.$$

Корнями последнего уравнения являются $c_1 = 1$ и $c_2 = 2$. Поэтому получаем, что $a_1 = 3$ и $a_2 = 4$. Значит $F_2^1 = (2 + 2c_1, 0) = (4, 0)$ и $F_2^2 = (2 + 2c_2, 0) = (6, 0)$. Кроме того, $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}$ и $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$. Для составления уравнений эллипсов воспользуемся свойством

$$\frac{r}{d} = \varepsilon.$$

Фокальный радиус r найдем по формуле расстояния между двумя точками, расстояние от точки M до директрисы будет равно $|12 - x|$. Тогда для фокуса F_2^1 получим:

$$\frac{\sqrt{(x-4)^2 + y^2}}{|12 - x|} = \frac{1}{3};$$

$$3\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 12 - x;$$
$$9x^2 - 72x + 144 + 9y^2 = 144 - 24x + x^2;$$
$$8x^2 - 48x + 9y^2 = 0;$$
$$8(x^2 - 6x + 9) + 9y^2 - 72 = 0;$$
$$8(x-3)^2 + 9y^2 = 72;$$
$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

Для фокуса F_2^2:

$$\frac{\sqrt{(x-6)^2 + y^2}}{|12 - x|} = \frac{1}{2};$$
$$2\sqrt{(x-6)^2 + y^2} = 12 - x;$$
$$4x^2 - 48x + 144 + 4y^2 = 144 - 24x + x^2;$$
$$3x^2 - 24x + 4y^2 = 0;$$
$$3(x^2 - 8x + 16) + 4y^2 - 48 = 0;$$
$$3(x-4)^2 + 4y^2 = 48;$$
$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

При составлении обоих уравнений мы посчитали, что $|12 - x| = 12 - x$. В нашем случае это действительно так, поскольку все точки эллипса находятся левее от прямой $x = 12$ и поэтому абсцисса каждой из них меньше чем 12.

Ответ: $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1,\ \dfrac{(x-4)^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1.$

Задача 13. Составить уравнение эллипса, фокусы которого имеют координаты $(1,0)$ и $(0,1)$, а большая полуось равна двум.

Решение. Серединой отрезка F_1F_2 является точка $O'(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$ (рис. 3) Совершим преобразование параллельного переноса по формулам:

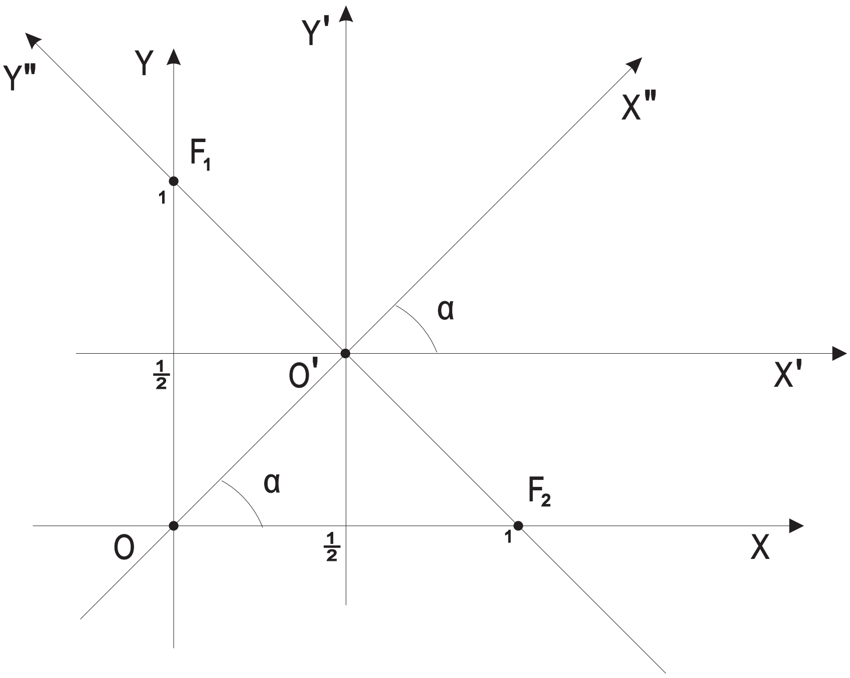


Рис. 3:

$$\begin{cases} x'=x-\dfrac{1}{2}; \\ y'=y-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Это преобразование переведет систему OXY в систему $O'X'Y'$. Совершим теперь преобразование поворота координатных осей системы $O'X'Y'$ на угол $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ по формулам преобразований поворота, которые в данном случае имеют вид:

$$\begin{cases} x''=x'\dfrac{1}{\sqrt{2}}-y'\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \\ y''=x'\dfrac{1}{\sqrt{2}}+y'\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Это преобразование переведет систему $O'X'Y'$ в систему $O'X''Y''$. Из геометрических соображений координатная ось $O'Y''$ пройдет через фокусы F_1 и F_2, а начало координат системы $O'X''Y''$ будет находиться на середине отрезка F_1F_2. Подставив выражения координат x' и y' через координаты x и y из полученных выше формул параллельного переноса в формулы преобразований поворота, получим формулы общего преобразования, т.е. преобразования системы OXY в систему $O'X''Y''$.

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y - 1); \\ y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y). \end{cases}$$

В системе $O'X''Y''$ искомый эллипс имеет уравнение

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1,$$

причем величина b является большей полуосью. Значит, $b = 2$. Фокусное расстояние, т.е. расстояние между точками F_1 и F_2 очевидно равно $\sqrt{2}$. Значит,

$$c = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Кроме того,

$$a = \sqrt{b^2 - c^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, в системе $O'X''Y''$ искомый эллипс имеет уравнение

$$\frac{x''^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y''^2}{1} = 1$$

или уравнение

$$2x''^2 + y''^2 - 1 = 0.$$

Для того, чтобы получить уравнение этого эллипса в системе OXY, воспользуемся полученными формулами общего преобразования.

$$2(\frac{1}{2}(x + y - 1)^2) + \frac{1}{2}(y - x)^2 - 1 = 0;$$

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1 + \frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2) - 1 = 0;$$

$$\frac{3}{2}x^2 + xy - \frac{3}{2}x^2 + xy - \frac{3}{2}y^2 - 2x - 2y = 0;$$

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 4y = 0.$$

Ответ: $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 4y = 0$.

Задача 14. Эллипс касается оси абсцисс в точке $A(5, 0)$ и оси ординат в точке $B(0, -2)$. Составить уравнение эллипса, если его оси симметрии параллельны координатным осям.

Задача 15. Как расположены на плоскости точки, координаты которых удовлетворяют условиям:

1) $5x^2 + 9y^2 + 30x - 18y + 9 = 0$;

2) $5x^2 + 9y^2 + 30x - 18y + 54 = 0$;

3) $5x^2 + 9y^2 + 30x - 18y + 60 = 0$;

4) $y = 1 - \dfrac{4}{3}\sqrt{-6x - x^2}$;

5) $x = -2 + \sqrt{-5 - 6y - y^2}$;

6) $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{9} < 1; \\ 0 < x < 2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} \leqslant 1; \\ |y| > 4. \end{cases}$

1.2 Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, меньшая чем расстояние между фокусами.

Постоянную величину, входящую в определение гиперболы, обозначим через $2a$, расстояние между фокусами — через $2c$. Если систему координат выбрать таким образом, чтобы фокусы гиперболы располагались на оси абсцисс, а начало координат находилось посередине между фокусами, то фокусы будут иметь координаты $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. В случае такого выбора системы координат, для гиперболы справедливы следующие свойства.

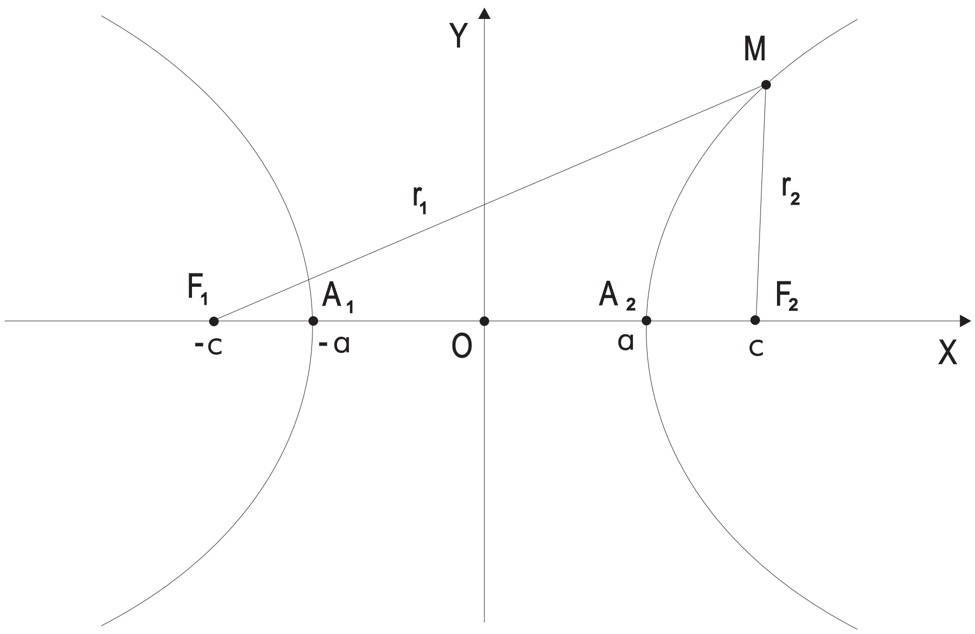


Рис. 4:

Для того, чтобы точка $M(x, y)$ принадлежала гиперболе, необходимо и достаточно, чтобы её координаты удовлетворяли уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = c^2 - a^2$. Это уравнение называется каноническим уравнением гиперболы.

Координатные оси являются осями симметрии гиперболы. Начало координат является центром симметрии гиперболы.

Гипербола пересекает координатную ось OX в точках $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ и не пересекает ось OY.

Для любой точки гиперболы $M(x, y)$ выполняется: $|x| \geqslant a$.

Для любых точек гиперболы, расположенных в первой координатной четверти, с возрастанием их абсциссы, их ордината возрастает.

Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называются *действительной осью,* а отрезок OA_2 и его длина a называются *действительной полуосью.*

Отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ называются *мнимой осью,* а отрезок OB_2 и его длина b называются *мнимой полуосью.*

Отрезок F_1F_2 и его длина $2c$ называются *фокусным расстоянием.*

Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ называются *вершинами гиперболы.*

Прямые, проходящие через начало координат и имеющие угловые коэффициенты $\dfrac{b}{a}$ и $-\dfrac{b}{a}$ называются *асимптотами гиперболы.*

Точки гиперболы неограниченно приближаются к асимптотам, но не пересекают их.

Отношение фокусного расстояния гиперболы к длине ее действительной оси называется *эксцентриситетом гиперболы* и обозначается через ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Фокальными радиусами точки $M(x, y)$ гиперболы называются величины $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$.

Прямые, параллельные оси ординат и имеющие уравнения

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad x = \frac{a}{\varepsilon},$$

называются *директрисами гиперболы.*

Поскольку для гиперболы $\varepsilon > 1$, то директрисы гиперболы гиперболу не пересекают

Отношение расстояния от любой точки гиперболы до фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

Гипербола называется *равносторонней (равнобочной),* если ее полуоси равны. Уравнение равносторонней гиперболы имеет вид:

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

У равносторонней гиперболы асимптоты перпендикулярны.

Задача 16. Для гиперболы $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{144} = 1$ найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот, уравнения директрис.

Задача 17. Для гиперболы $-\dfrac{x^2}{225} + \dfrac{y^2}{64} = 1$ найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот, уравнения директрис.

Задача 18. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой принадлежат оси ординат и симметричны относительно начала координат, если:

1) расстояние между фокусами равно 12 и эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{6}{5}$;

2) уравнения асимптот $y = \dfrac{3}{4}x$ и $y = -\dfrac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами равно $7\dfrac{1}{5}$;

3) точка $M(\dfrac{9}{2}, \sqrt{13})$ принадлежит гиперболе и асимптоты имеют уравнения $y = -\dfrac{2}{3}x$ и $y = \dfrac{2}{3}x$.

Задача 19. Найти фокальные радиусы точки $M(-5, \dfrac{9}{4})$ гиперболы $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Задача 20. Какие фигуры задаются следующими уравнениями и неравенствами:

1) $5x^2 - 9y^2 - 30x + 18y - 9 = 0$;

2) $16x^2 - 25y^2 + 32x - 100y + 84 = 0$;

3) $y = -1 + \dfrac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x + 5}$;

4) $x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}$;

5) $xy = 4$;

6) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1; \\ -2 \leqslant y \leqslant 2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} \leqslant 1; \\ -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leqslant 1. \end{cases}$

Задача 21. Составить уравнение гиперболы зная, что:

1) расстояние между вершинами равно 24 и фокусы $F_1(-10,2),\ F_2(16,2)$;

2) фокусы $F_1(2,3),\ F_2(-2,-3)$ и расстояние между директрисами равно четырем;

3) $\varepsilon = \dfrac{4}{3}$, фокус $F(4,0)$ и уравнение соответствующей директрисы $4x - 9 = 0$;

4) $\varepsilon = \dfrac{5}{4}$, фокус $F(0,5)$ и уравнение соответствующей директрисы $5y - 16 = 0$.

Решение. 1) Найдем середину отрезка F_1F_2. Это будет точка $O'(3,2)$. Поскольку фокусы имеют одинаковую ординату, то фокальная ось параллельна оси абсцисс. Следовательно, совершив параллельный перенос системы координат таким образом, чтобы начало координат оказалось в точке O', т.е. по формулам

$$\begin{cases} x' = x - 3; \\ y' = y - 2, \end{cases}$$

получим, что в системе координат $O'X'Y'$ фокусы будут иметь координаты $F_1(-13,0)$ и $F_2(13,0)$. Поэтому в указанной системе уравнение искомой гиперболы имеет вид

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Постоянная величина, входящая в определение гиперболы равна расстоянию между вершинами, т.е., $2a = 24$. Расстояние между фокусами в нашем случае равно 26. Следовательно,

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = 5.$$

Поэтому уравние гипреболы принимает вид:

$$\frac{x'^2}{144} - \frac{y'^2}{25} = 1.$$

Вернемся теперь к старым координатам:

$$\frac{(x-3)^2}{144} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1.$$

Ответ: $\dfrac{(x-3)^2}{144} - \dfrac{(y-2)^2}{25} = 1.$

2) В данном случае фокусы симметричны относительно начала координат. Поэтому начало координат и середина отрезка F_1F_2 совпадают. Следовательно, для того, чтобы можно было составить каноническое уравнение гиперболы, достаточно только совершить поворот координатных осей (рис. 5). Для составления формул угла поворота, нам необхо-

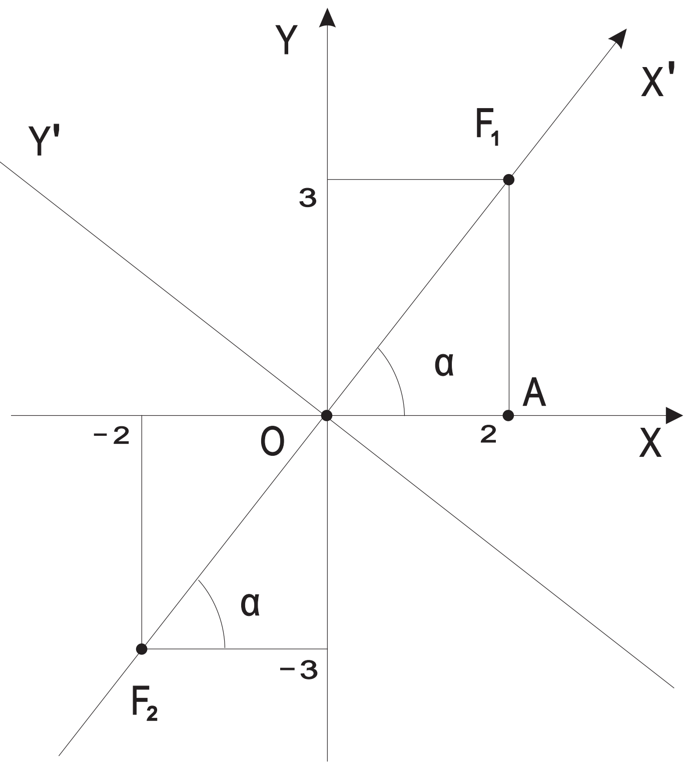


Рис. 5:

димо найти $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Это можно сделать, воспользовавшись прямоугольным треугольником OAF_1. Для этого найдем стороны треугольника: $OA = 2$, $AF_1 = 3$, $OF_1 = \sqrt{OA^2 + OF_1^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. Тогда получим:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}; \quad \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Каноническое уравнение гипербола будет иметь в системе $OX'Y'$. Поэтому нужно составить формулы обратного перехода, т.е. перехода от системы OXY к системе $OX'Y'$:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \dfrac{2}{\sqrt{13}} + y \cdot \dfrac{3}{\sqrt{13}}; \\ y' = -x \cdot \dfrac{3}{\sqrt{13}} + y \cdot \dfrac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2x + 3y); \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(-3x + 2y). \end{cases}$$

В системе $OX'Y'$ уравнение гиперболы имеет каноническое уравнение

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Для канонического уравнения гиперболы ее асимптоты имеют уравнения $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ и $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$. Следовательно, расстояние между асимптотами равно

$$2\frac{a}{\varepsilon} = 2\frac{a}{\frac{c}{a}} = \frac{a^2}{c} = 4.$$

Поскольку $c = OF_1 = \sqrt{13}$, то $2a^2 = 4\sqrt{13}$ и $a^2 = 2\sqrt{13}$. Следовательно,

$$b^2 = c^2 - a^2 = 13 - 2\sqrt{13}.$$

Поэтому в старой системе координат уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{\left(\dfrac{2x+3y}{\sqrt{13}}\right)^2}{2\sqrt{13}} - \frac{\left(\dfrac{-3x+2y}{\sqrt{13}}\right)^2}{13 - 2\sqrt{13}} = 1$$

или

$$\frac{(2x+3y)^2}{26\sqrt{13}} - \frac{(-3x+2y)^2}{13(13-2\sqrt{13})} = 1.$$

Совершим теперь преобразования, для того, чтобы привести уравнение гиперболы к более простому виду.

$$13(13 - 2\sqrt{13})(2x + 3y)^2 - 26\sqrt{13}(2y - 3x)^2 = 26\sqrt{13} \cdot 13(13 - 2\sqrt{13});$$

$$(169-26\sqrt{13})(4x^2+12xy+9y^2)-26\sqrt{13}(4y^2-12xy+9x^2)=$$
$$26\cdot 169\sqrt{13}-26\cdot 169\cdot 2;$$
$$(\sqrt{13}-2)(4x^2+12xy+9y^2)-2(4y^2-12xy+9x^2)=2\cdot 169-52\sqrt{13};$$
$$(4\sqrt{13}-26)x^2+(12\sqrt{13}-24+24)xy+(9\sqrt{13}-26)y^2=2\cdot 169-52\sqrt{13};$$
$$(2\sqrt{13}-4)x^2-12xy+(2\sqrt{13}-9)y^2+26\sqrt{13}-52=0.$$

Ответ: $(2\sqrt{13}-4)x^2-12xy+(2\sqrt{13}-9)y^2+26\sqrt{13}-52=0.$

Задача 22. Составить уравнение равносторонней гиперболы, если ее фокус $F(1,1)$ и асимптота имеет уравнение $x+y=0$.

Задача 23. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой $F_1(1,0)$ и $F_2(0,1)$ и асимптоты параллельны координатным осям.

Задача 24. Составить уравнение гиперболы, зная ее фокус $F_1(-2,2)$ и асимптоты $2x-y+1,\ x+2y-7=0$.

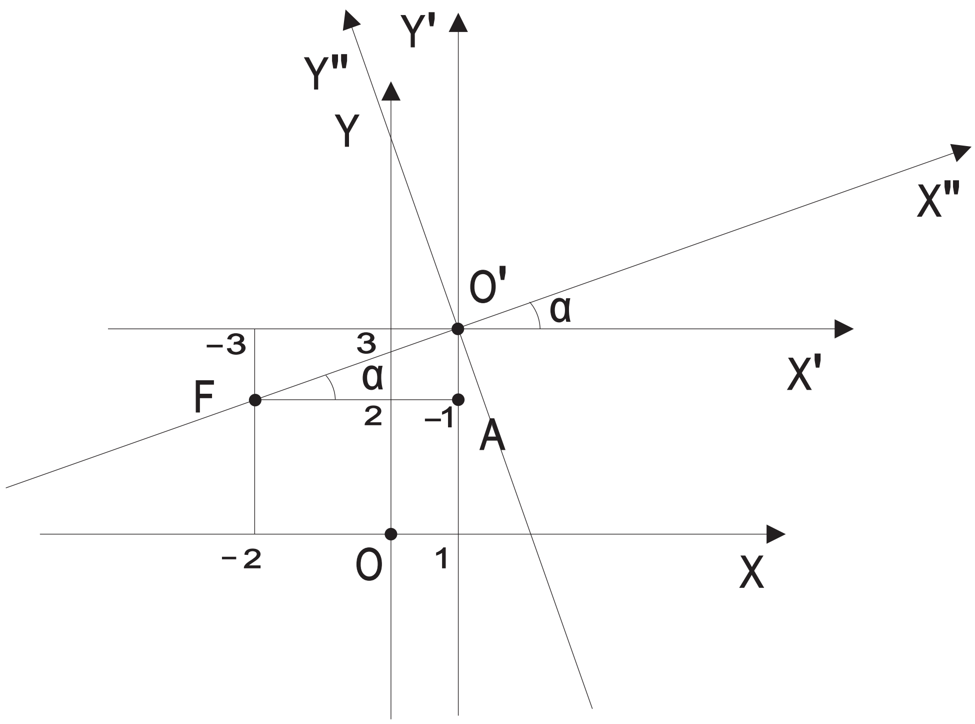


Рис. 6:

Решение. Вначале найдем точку пересечения асимптот. Для этого нужно решить систему

$$\begin{cases} 2x-y+1; \\ x+2y-7=0. \end{cases}$$

Из первого уравнения $y = 2x + 1$. Подставив во второе уравнение, получим $x + 2(2x + 1) - 7 = 0$, откуда $x = 1$. Подставив полученное значение в первое уравнение, находим $y = 3$. Найденная точка пересечения асимптот является для гиперболы серединой отрезка, соединяющего фокусы. Совершим преобразование параллельного переноса системы координат так, чтобы начало координат переместилось в эту точку, т.е. по формулам

$$\begin{cases} x' = x - 1; \\ y' = y - 3. \end{cases}$$

Тогда в системе координат $O'X'Y'$ фокус F будет иметь координаты $(-3, -1)$. (рис. 6). Теперь нужно совершить преобразование поворота системы координат $O'X'Y'$ на угол α. Этот угол поможет найти прямоугольный треугольник $FO'A$. Очевидно, что $FA = 3$, $O'A = 1$. Тогда получим $O'F = \sqrt{O'a^2 + FA^2} = \sqrt{10}$. Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}; \quad \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Поэтому формулы обратного перехода при этом преобразования поворота имеют вид

$$\begin{cases} x'' = x' \cdot \dfrac{3}{\sqrt{10}} + y' \cdot \dfrac{1}{\sqrt{10}}; \\ y'' = -x' \cdot \dfrac{1}{\sqrt{10}} + y' \cdot \dfrac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y'); \\ y'' = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-x' + 3y'). \end{cases}$$

В системе координат $O'X''Y''$ гипербола будет иметь уравнение

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1.$$

Из уравнений асимптот найдем их угловые коэффициенты. Ими будут $k_1 = 2$ и $k_2 = -\dfrac{1}{2}$. Эти коэффициенты удовлетворяют условию перпендикулярности. Значит данные асимптоты перпендикулярны. Совершенные нами преобразования координат эту перпендикулярность не нарушают. Поэтому и в системе $O'X''Y''$ асимпоты гиперболы перпендикулярны. Следовательно, в этой системе гипербола так же равносторонняя и поэтому имеет уравнение

$$x''^2 - y''^2 = a^2.$$

Очевидно, что $c = FO' = \sqrt{10}$. Поскольку $c^2 = a^2+b^2$, то в нашем случае $c^2 = 2a^2$. Следовательно, $a^2 = \dfrac{1}{2}c^2 = 5$. Значит уравнение гиперболы

$$x''^2 - y''^2 = a^2.$$

Теперь осталось вернуться к старым координатам и получить уравнение гиперболы в системе OXY :

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y')\Big)^2 - \Big(\frac{1}{\sqrt{10}}(-x' + 3y')\Big)^2 = 5;$$

$$\big(3x' + y'\big)^2 - \big(-x' + 3y'\big)^2 = 50;$$

$$\big((3(x-1) + (y-3)\big)^2 - \big(-(x-1) + 3(y-3)\big)^2 = 50;$$

$$\big(3x + y - 6\big)^2 - \big(-x + 3y - 8\big)^2 = 50;$$

$$9x^2 + y^2 + 36 + 6xy - 36x - 12y - (9y^2 + x^2 + 64 - 6xy - 48y + 16x) = 50;$$

$$9x^2 + y^2 + 36 + 6xy - 36x - 12y - 9y^2 - x^2 - 64 + 6xy + 48y - 16x = 50;$$

$$8x^2 - 8y^2 + 12xy - 52x + 36y - 78 = 0;$$

$$4x^2 + 6xy - 4y^2 - 26x + 18y - 39 = 0.$$

Ответ: $4x^2 + 6xy - 4y^2 - 26x + 18y - 39 = 0$.

Задача 25. Точка $M(1, -2)$ принадлежит гиперболе, фокус которой $F(-2, 2)$, а соответствующая директриса задана уравнением $2x - y - 1 = 0$. Составить уравнение этой гиперболы.

1.3 Парабола. Линии второго порядка в полярных координатах

Параболой называется множество точек плоскости для каждой из которых расстояние до данной точки, называемой *фокусом* равно расстоянию до данной прямой, называемой *директрисой*.

Постоянную величину, входящую в определение параболы обозначим через p. Если систему координат выбрать таким образом, чтобы директриса была параллельна оси ординат, фокус располагался на оси абсцисс и начало координат находилось посередине между фокусом и директрисой, то парабола будет обладать следующими свойствами.

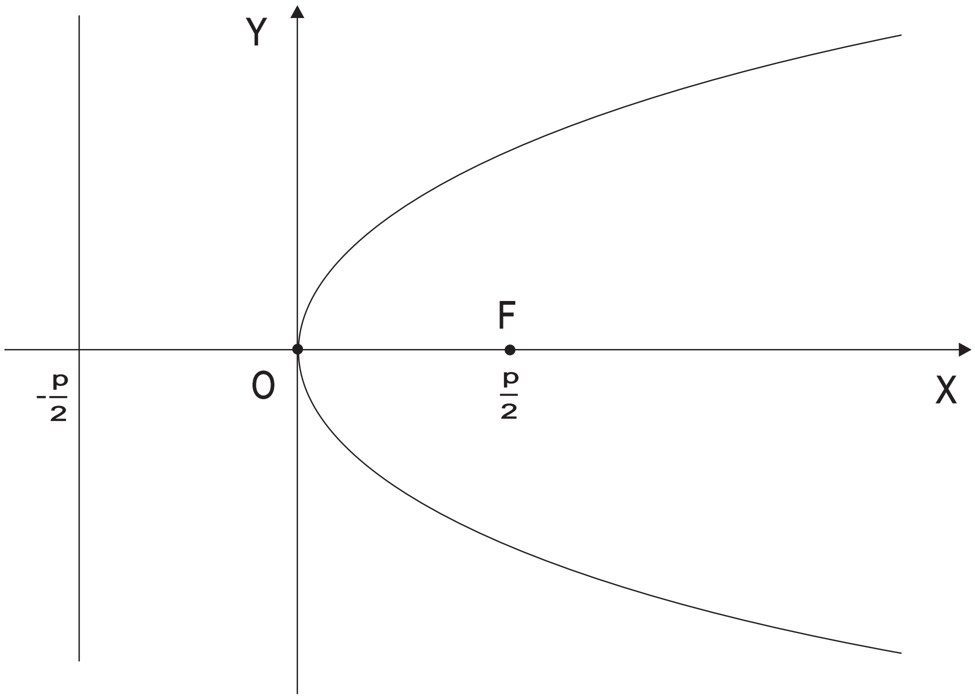


Рис. 7:

Фокус параболы $F(\frac{p}{2}, 0)$, а директриса имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$.

Для того, чтобы точка M принадлежала параболе, необходимо и достаточно, чтобы её координаты удовлетворяли уравнению

$$y^2 = 2px,$$

где p — некоторое действительное положительное число. Это уравнение называется *каноническим уравнением* параболы.

Абсцисса любой точки параболы неотрицательна.

Парабола проходит через начало координат.

Парабола симметрична относительно оси абсцисс.

При неограниченном возрастании абсциссы параболы, ее ордината возрастает по абсолютной величине.

Отрезок FM называется *фокальным радиусом,* а величина p — *параметром параболы.*

Ось абсцисс называется *осью симметрии параболы,* а точка пересечения параболы с осью абсцисс, которая совпадает с началом координат — *вершиной параболы.*

Эллипс, парабола и правая часть гиперболы могут быть заданы в полярных координатах уравнением

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Уравнение левой ветви гиперболы имеет вид:

$$\rho = \frac{-p}{1 - \varepsilon \cos \varphi.}$$

Параметр p для параболы равен параметру параболы, для эллипса и гиперболы он находится по формуле $p = \dfrac{b^2}{a}$.

Задача 26. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в точке $A(1, -2)$, если парабола расположена:

1) симметрично относительно прямой $x - 1 = 0$ и проходит через точку $B(2, 0)$;

2) симметрично относительно прямой $y + 2 = 0$ и проходит через точку $B(2, 0)$.

Решение. 2). Совершим преобразование параллельного переноса системы координат по формулам

$$\begin{cases} x' = x - 1; \\ y' = y + 2. \end{cases}$$

Тогда вершина — точка A в новой системе будет иметь координаты $(0, 0)$, а прямая $y + 2 = 0$ в новой системе окажется осью абсцисс (рис. 8). В

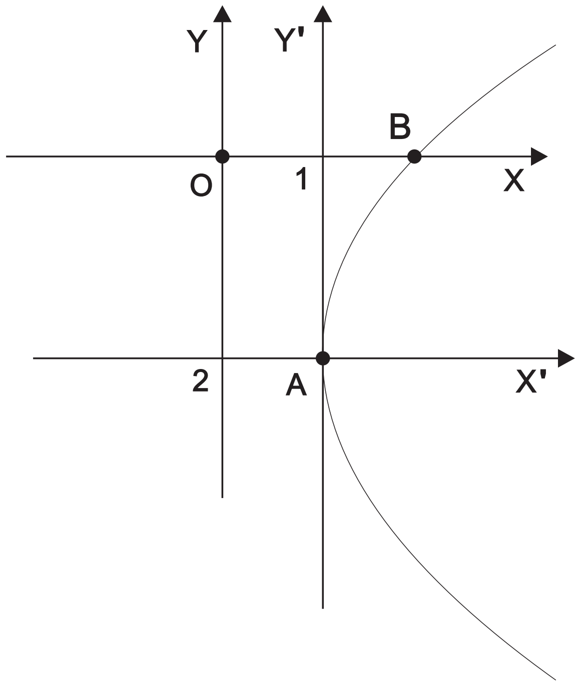


Рис. 8:

новой системе координат парабола имеет каноническое уравнение $y'^2 = 2px'$. Подставив в формулы перехода координаты точки B, получим координаты этой точки в новой системе координат — $B(-1, 2)$. Эти координаты удовлетворяют полученному каноническому уравнению. Подставив их в это уравнение, получим, что $p = 2$. Следовательно, в новой системе координат парабола имеет уравнение $y'^2 = 4x'$. Тогда в старой системе координат парабола имеет уравнение $(y + 2)^2 = 4(x - 1)$.

Ответ: $(y + 2)^2 = 4(x - 1)$.

Задача 27. Струя воды фонтана, имеющая форму параболы, достигает наибольшей высоты 4 м на расстоянии 0,5 м от вертикали, проходящей через точку O выхода струи. Найти высоту струи над горизонталью Ox на расстоянии 0,75 м от точки O.

Задача 28. Под острым углом к горизонту брошен камень. Двигаясь по параболе, он падает на расстояние 24 м от начального положения. Вычислите параметр параболы, если наибольшая высота, достигнутая камнем, равна 6 м.

Задача 29. На каком расстоянии от вершины находится фокус параболического рефлектора, если его диаметр 20 см, а глубина равна 10 см.

Решение. Речь идет о зеркале телескопа, которое в поперечном разрезе имеет форму параболы. Выберем систему координат так, чтобы вер-

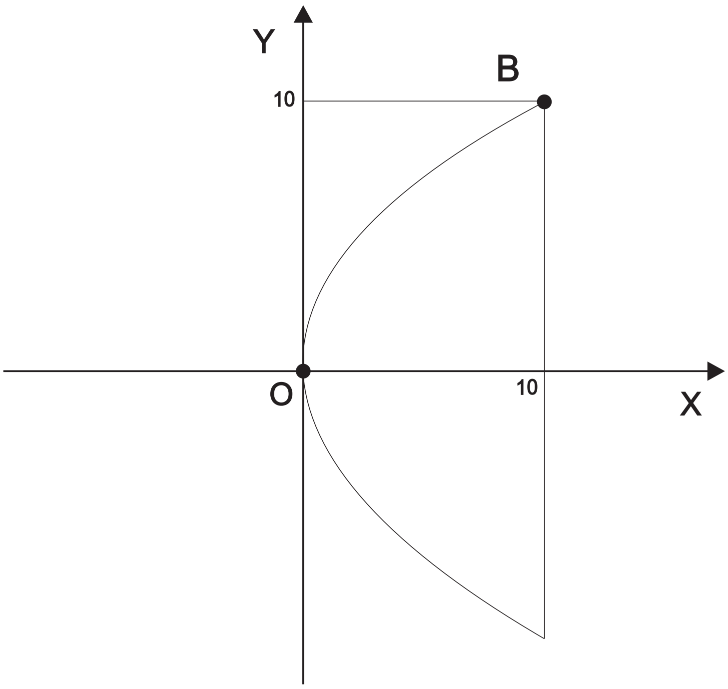


Рис. 9:

шина параболы находилась в начале координат, а фокус находился на положительной части оси абсцисс (рис. 9). Уравнение параболы в этой системе координат имеет вид $y^2 = 2px$. Точка B, находящаяся на краю рефлектора в этом случае будет иметь координаты $(10, 10)$. Подставив ее координаты в уравнение параболы, получим, что

$$p = \frac{y^2}{2x} = \frac{100}{20} = 5.$$

Поскольку фокус параболы в выбранной системе координат имеет координаты $(\frac{p}{2}, 0)$, то расстояние от фокуса до вершины будет равно $\frac{p}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$.

Ответ: $2,5$ см.

Задача 30. Найти координаты вершины параболы, величину параметра и направление оси параболы, если парабола задана уравнением:

1) $y^2 + 10x + 2y = 0$;

2) $y^2 + 6x + 14y + 43 = 0$;

3) $y^2 + 8x + 16 = 0$;

4) $y = x^2 - 6x$.

Задача 31. Составьте уравнение параболы, если даны ее фокус $F(-2, 1)$ и директриса $x + y - 1 = 0$.

Решение. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка параболы. По определению параболы, расстояние от этой точки до фокуса равно расстоянию до директрисы. Следовательно, достаточно применить формулу расстояния между точками и формулу расстояния от точки до прямой:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}};$$

$$2((x+2)^2 + (y-1)^2) = (x+y-1)^2;$$

$$2(x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1) = x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y;$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + 12x - 2y + 9 = 0.$$

Ответ: $x^2 - 2xy + y^2 + 12x - 2y + 9 = 0$.

Задача 32. Даны вершина параболы $A(2, 1)$ и уравнение директрисы $2x - y + 2 = 0$. Составить уравнение этой параболы.

Задача 33. Как расположены на плоскости точки, координаты которых удовлетворяют условиям:

$$1)\ \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1; \\ x^2 > 2(y-1); \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{9} > 1; \\ (y-1)^2 < 4(x-1); \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} y^2 - 10x < 0; \\ 5x - 3y - 15 < 0; \\ y - 2 < 2; \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} x^2 + 8y < 0; \\ 2x + 3y + 6 < 0; \\ x + 2 > 0. \end{cases}$$

Задача 34. Вычислить длину полуосей и расстояние между фокусами эллипса:

$$\rho = \frac{25}{13 - 12\cos\varphi}.$$

Задача 35. Дана гипербола $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1$. Составить полярное уравнение ее левой (правой) ветви, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится:

1) в левом фокусе;

2) в правом фокусе.

Задача 36. Составить уравнение параболы, приняв ее ось за полярную ось, а вершину — за полюс.

Решение. Выберем систему координат так как указано в условии (рис. 10).

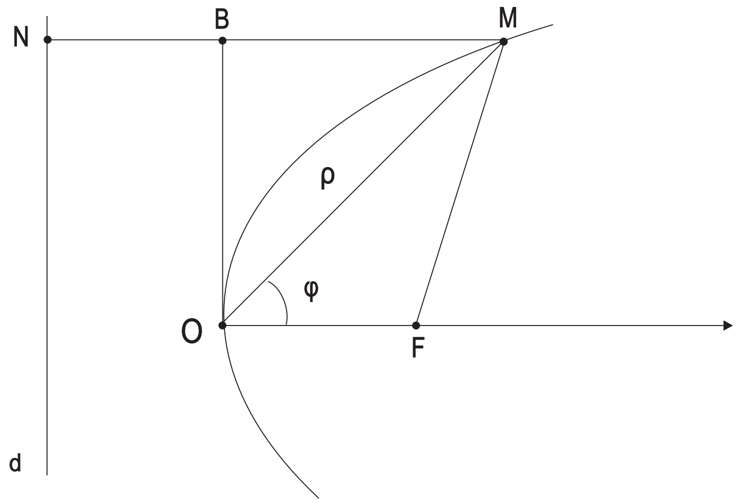


Рис. 10:

Пусть d — директриса параболы, O — ее вершина, а F — фокус. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка параболы. Если пара (ρ, φ) является координатами точки M, то расстояние от точки $M(x, y)$ до вершины параболы равно ρ. Пусть N — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на директрису d. Из точки O опустим перпендикуляр на прямую MN. Пусть B — основание этого перпендикуляра. Тогда $MN = MB + BN$ — расстояние от точки M до директрисы. Из геометрических соображений, BN равно расстоянию от директрисы до вершины, т.е., $BN = \dfrac{p}{2}$. Расстояние MB легко найти из прямоугольного треугольника OBM :

$MB = \rho\cos\varphi$. Расстояние MF найдем из треугольника OMF используя теорему косинусов:

$$FM^2 = OM^2 + OF^2 - 2 \cdot OM \cdot OF \cdot \cos\varphi$$

$$FM^2 = \rho^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - 2 \cdot \rho\frac{p}{2}\cos\varphi.$$

Осталось воспользоваться определением параболы:

$$MF = MN.$$

Отсюда получаем:

$$MF^2 = MN^2;$$

$$\rho^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - 2 \cdot \rho\frac{p}{2}\cos\varphi = \left(\frac{p}{2} + \rho\cos\varphi\right)^2;$$

$$\rho^2 + \frac{p^2}{4} - p\rho\cos\varphi = \frac{p^2}{4} + p\rho\cos\varphi + \rho^2\cos^2\varphi;$$

$$\rho^2(1 - cos^2\varphi) = 2p\rho\cos\varphi;$$

$$\rho\sin^2\varphi = 2p\cos\varphi;$$

$$\rho = \frac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Ответ: $\rho = \dfrac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$.

Задача 37. Составить уравнение параболы, фокус которой совпадает с полюсом, а ось служит полярной осью.

Задача 38. Установить, какие фигуры заданы уравнениями в полярных координатах:

1) $\rho = \dfrac{15}{3 - 7\cos\varphi}$; 2) $\rho = \dfrac{7}{5 - 2\cos\varphi}$; 3) $\rho = \dfrac{3}{4 - 4\cos\varphi}$;

4) $\rho = \dfrac{6}{2 - \cos\varphi}$; 5) $\rho = \dfrac{5}{3 - 4\cos\varphi}$; 6) $\rho = \dfrac{5}{4 - 3\cos\varphi}$.

2 ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

2.1 Упрощение общего уравнения линии второго порядка с помощью преобразований системы координат

Общим уравнением линии второго порядка называется уравнение вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}, (i, j \in \{1, 2\})$ и $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Для всякой линии второго порядка, заданной общим уравнением, существует такая прямоугольная декартова система координат, в которой эта линия будет задана уравнением одного из следующих типов:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — эллипс;
2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ — мнимый эллипс;
3. $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$ — мнимые пересекающиеся прямые;
4. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — гипербола;
5. $a^2x^2 - b^2y^2 = 0$ — пересекающиеся прямые;
6. $y^2 = 2px$ — парабола;
7. $y^2 = 0$ — пара совпавших прямых;
8. $y^2 - a^2 = 0$ — пара параллельных прямых;
9. $y^2 + a^2 = 0$ — пара мнимых параллельных прямых.

Поскольку линии второго порядка по каноническим уравнениям легко строятся, то целесообразно найти указанную систему координат. Искомая система получается из старой (первоначальной) системы координат с помощью общего преобразования, т.е. последовательного выполнения преобразования поворота координатных осей и преобразования параллельного переноса начала кординат.

Преобразование поворота координатных осей должно быть таким, чтобы в полученном после преобразовании уравнении отсутствовал бы коэффициент при произведении координат. Это условие записывается в виде

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$

Для того, чтобы воспользоваться формулами поворота координатных осей, нужно перейти к значениям $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Для этой цели подходят формулы

$$\cos 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha}};$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}; \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}.$$

Поскольку чаще всего угол поворота координатных осей — это угол из первой координатной четверти, то в этих формулах почти всегда выбирается знак $+$, но если необходимо воспользоваться другим углом, то возможен выбор знака $-$. В любом случае, для того, чтобы проверить правильность найденных значений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, нужно воспользоваться основным тригонометрическим тождеством $(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1)$ и выполнением условия

$$(a_{22} - a_{11}) \sin\alpha \cos\alpha + a_{12}(\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2) = 0.$$

Теперь для упрощения общего уравнения достаточно выполнить следующие действия.

Используя найденный угол поворота, составить формулы преобразования поворота координатных осей

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha; \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{cases}$$

и перейти к новой системе координат $Ox'y'$, в которой в общем уравнении линии будет отсутствовать произведение $x'y'$. Возможны следующие три случая.

Случай 1. В полученном уравнении можно выделить полные квадраты относительно обеих переменных x' и y', т.е. получить уравнение

$$a_1(x' + b_1)^2 + a_2(y' + b_2)^2 + b_3 = 0,$$

которое после применения формул параллельного переноса

$$\begin{cases} X = x' + b_1; \\ Y = y' + b_2 \end{cases}$$

принимает вид

$$a_1 X^2 + a_2 Y^2 + b_3 = 0.$$

Случай 2. В полученном уравнении можно выделить полный квадрат относительно только одной переменной, например, x', т.е. получить уравнение

$$a_1(x'+b_1)^2 + 2a_2(y'+b_2) = 0.$$

Тогда после преобразования параллельного переноса начала координат

$$\begin{cases} X = x' + b_1; \\ Y = y' + b_2, \end{cases}$$

получим уравнение

$$a_1X^2 + 2a_2Y = 0.$$

Следовательно, в любом из первых двух случаев очень просто оказывается определить вид линии. Кроме того, совершив последовательно преобразование поворота координатных осей и преобразование параллельного переноса начала координат, мы получим ту прямоугольную систему координат, в которой линия и будет иметь упрощенное уравнение. Тогда линию оказывается легко построить.

Случай 3. Одна из переменных после преобразования поворота координатных осей совсем исчезает из уравнения. В этом случае, после преобразования поворота осей, получается, например, уравнение

$$a_1{x'}^2 + a_2x' + a_3 = 0. \qquad (*)$$

После выделения полного квадрата относительно переменной x', получим уравнение вида

$$(x'+b_1)^2 - b_2 = 0,$$

которое после преобразования параллельного переноса

$$\begin{cases} X = x' + b_1; \\ \quad Y = y', \end{cases}$$

принимает вид

$$X^2 - b_2 = 0.$$

Теперь все зависит от знака b_2. Если $b_2 > 0$, то получаем пару действительных параллельных прямых. Если $b_2 = 0$, то получаем совпавшие прямые. Если же $b_2 < 0$, то прямые оказываются мнимыми.

Можно поступить и по-другому. Решить уравнение (*) в поле комплексных чисел и разложить трехчлен на линейные множители:

$$a_1(x'-x_1)(x'-x_2) = 0.$$

Последнее уравнение будет равносильно уравнению

$$(x'-x_1)(x'-x_2) = 0,$$

которое в свою очередь равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{aligned} &x' = x_1; \\ &x' = x_2. \end{aligned}\right.$$

Эти уравнения определяют параллельные прямые (действительные, если $x_1 \neq x_2$; совпавшие, если $x_1 = x_2$; мнимые, если x_1 и x_2 — мнимые числа). Преобразование параллельного переноса в этом случае не используется. Кстати, в этом случае можно так же не пользоваться преобразованием поворота при построении упрощенной линии, поскольку, воспользовавшись формулами обратного перехода при преобразовании поворота координатных осей, т.е. формулами

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha; \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{cases}$$

мы получим совокупность

$$\left[\begin{aligned} &x\cos\alpha + y\sin\alpha = x_1; \\ &x\cos\alpha + y\sin\alpha = x_2 \end{aligned}\right.$$

или совокупность

$$\left[\begin{aligned} &x\cos\alpha + y\sin\alpha - x_1 = 0; \\ &x\cos\alpha + y\sin\alpha - x_2 = 0, \end{aligned}\right.$$

которая и определяет наши параллельные прямые в первоначальной системе координат.

Если прямые из последней системы легко строятся в первоначальной системе координат, то нужно воспользоваться именно этим способом, в противном случае более подойдет предыдущий.

Задача 39. Пользуясь преобразованиями системы координат, установить, какая плоская линия второго порядка задана общим уравнением и построить эту линию в первоначальной системе координат.

1)$x^2 - 5x + 6 = 0;$

Решение. Поскольку в уравнении линии присутствует только одна переменная, то преобразование поворота координатных осей в данном случае делать не нужно. Выделим полный квадрат и разложим его как разность квадратов.

$$\left(x^2 - 2\frac{5}{2}x + \frac{25}{4}\right) - \frac{25}{4} + 6 = 0;$$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0;$$

$$(x-3)(x-2)=0.$$

Получаем пару действительных параллельных прямых. Следует отметить, что такого результата можно было добиться сразу, воспользовавшись теоремой Виета. Построим теперь линию. Поскольку мы не совершали никаких преобразований системы координат, то линия будет построена в первоначальной системе (рис. 11).

Ответ: параллельные прямые $x=2$ и $x=3$.

2)$9x^2+4y^2-18x+16y-11=0$;

Решение. Поскольку в уравнении линии отсутствует произведение координат, то и в данном случае преобразование поворота координатных осей делать не нужно. Выделим полные квадраты относительно обеих переменных.

$$9(x^2-2x+1)-9+4(y^2+2\cdot 2y+4)-16-11=0;$$

$$9(x-1)^2+4(y+2)^2=36;$$
$$\frac{9(x-1)^2}{36}+\frac{4(y+2)^2}{36}=1;$$
$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1.$$

Совершим теперь преобразование параллельного переноса по формулам:

$$\begin{cases} X=x-1; \\ Y=y+2. \end{cases}$$

Тогда мы получим уравнение

$$\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{9}=1.$$

Это каноническое уравнение эллипса. Такой вид уравнение имеет в системе координат, полученной из первоначальной системы с помощью преобразования параллельного переноса начала координат в точку $O'(1;-2)$ (рис. 12).

Ответ: эллипс $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1.$

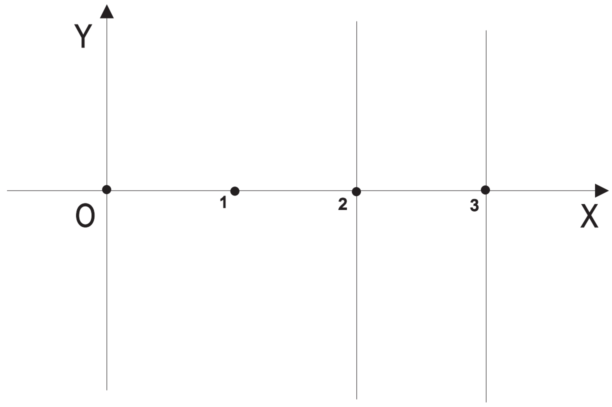


Рис. 11:

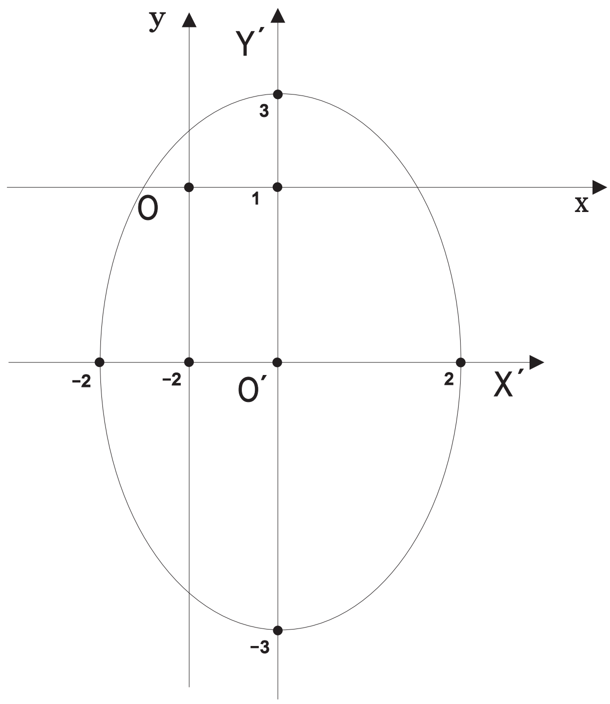


Рис. 12:

3)$9x^2+4y^2-18x+16y+25=0$;
4)$9x^2+4y^2-18x+16y+26=0$;
5)$x^2-4y^2+4x+24y-36=0$;
6)$x^2-4y^2+4x+24y-32=0$;
7)$x^2-4y^2+4x+24y-28=0$;
8)$x^2+4xy+4y^2-4x-8y+3=0$;

Решение. Поскольку в уравнении присутствует произведение координат, т.е. $a_{12}\neq 0$, то вначале нужно совершить преобразование поворота координатных осей. Для этого найдем угол α.

$$\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}=\frac{1-4}{4}=-\frac{3}{4};$$

$$\cos 2\alpha=\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 2\alpha}}=\frac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=-\frac{3}{5};$$

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Основное тригонометрическое тождество для найденных значений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ выполняется:

$$\Big(\frac{2}{\sqrt{5}}\Big)^2+\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}\Big)^2=1.$$

Выполняется так же и условие

$$(a_{22}-a_{11})\sin\alpha\cos\alpha+a_{12}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0;$$

$$(4-1)\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}+2\Big(\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}\Big)^2-\Big(\frac{2}{\sqrt{5}}\Big)^2\Big)=0.$$

Поэтому получаем следующие формулы преобразования поворота.

$$\begin{cases} x=x'\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}-y'\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}};\\ y=x'\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}+y'\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \end{cases}$$

которые, в целях удобства вычислений, представим в виде:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y'); \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y'). \end{cases}$$

Подставим теперь полученные выражения в наше общее уравнение линии второго порядка.

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y')\Big)^2 + 4\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y')\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y')\Big) + 4\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y')\Big)^2 -$$

$$4 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\big(x' - 2y'\big) - 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\big(2x' + y'\big) + 3 = 0;$$

$$\frac{1}{5}x'^2 - \frac{4}{5}x'y' + \frac{4}{5}y'^2 + \frac{8}{5}x'^2 - \frac{12}{5}x'y' - \frac{8}{5}y'^2 + \frac{16}{5}x'^2 + \frac{16}{5}x'y' + \frac{4}{5}y'^2 -$$

$$\frac{4}{\sqrt{5}}x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' - \frac{16}{\sqrt{5}}x' - \frac{8}{\sqrt{5}}y' + 3 = 0;$$

$$\frac{25}{5}x'^2 - \frac{20}{\sqrt{5}}x' + 3 = 0;$$

$$5x'^2 - 4\sqrt{5}x' + 3 = 0.$$

Выделим в полученном уравнении полный квадрат.

$$x'^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}x' + \frac{3}{5} = 0;$$

$$x'^2 - 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{4}{5} - \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = 0;$$

$$\Big(x' - \frac{2}{\sqrt{5}}\Big)^2 - \frac{1}{5} = 0. \qquad (*)$$

Совершим теперь преобразование параллельного переноса по формулам:

$$\begin{cases} X = x' - \dfrac{2}{\sqrt{5}}; \\ Y = y'. \end{cases}$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$\Big(X - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big)\Big(X + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big) = 0$$

и оказывается равносильным совокупности

$$\left[\begin{aligned} &X - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0;\\ &X + \frac{1}{\sqrt{5}} = 0. \end{aligned}\right.$$

Это две параллельные прямые, симметричные относительно оси OY. Построим их в системе координат $O'XY$. Для этого вначале совершим поворот координатных осей. Чтобы это сделать, отметим в старой системе по оси Ox значение $\cos\alpha$, а по оси Oy значение $\sin\alpha$ и достроим до прямоугольника. Тогда координатная ось Ox' пройдет через диагональ этого прямоугольника. В полученной системе координат $Ox'y'$ найдем точку $O'(\frac{2}{\sqrt{5}}; 0)$ и перенесем туда начало координат. Тогда в полученной системе $O'XY$ мы сможем построить полученные нами параллельные прямые по их каноническим уравнениям (рис. 13).

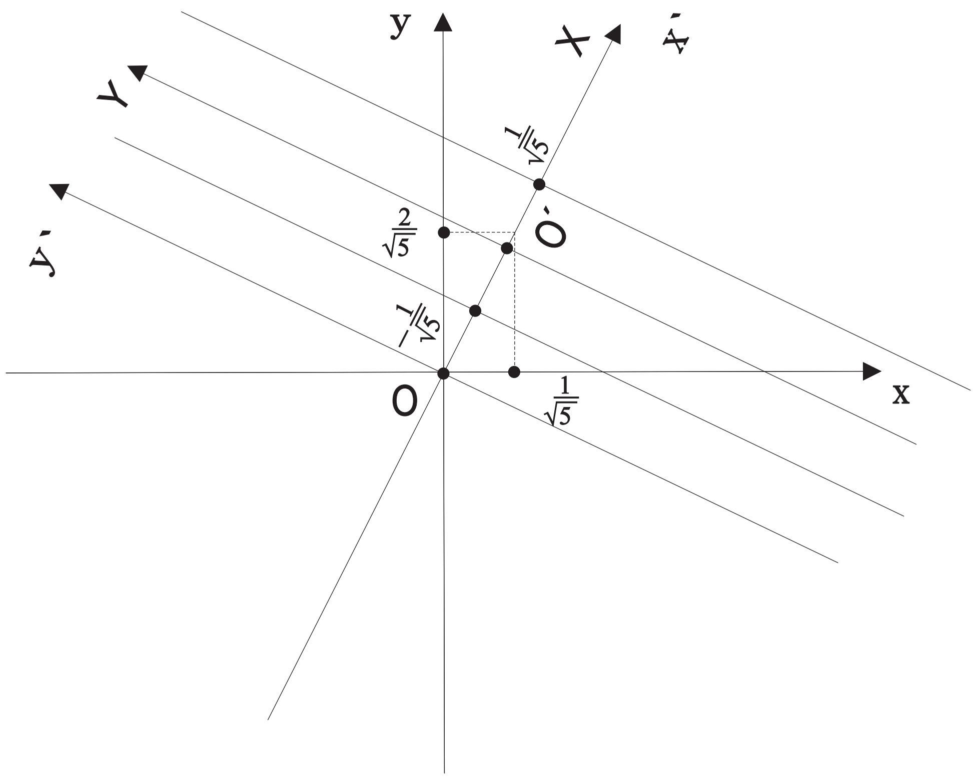


Рис. 13:

Если теперь вернуться к (*), то можно получить уравнения прямых и в первоначальной системе координат, для чего достаточно воспользоваться формулами обратного перехода при преобразовании поворота системы координат.

$$(x' - \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}})(x' - \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}) = 0;$$
$$(x' - \frac{3}{\sqrt{5}})(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}) = 0;$$
$$(\frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) - \frac{3}{\sqrt{5}})(\frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) - \frac{1}{\sqrt{5}}) = 0;$$
$$(x + 2y - 3)(x + 2y - 1) = 0.$$

Ответ: параллельные прямые $x + 2y - 3 = 0$ и $x + 2y - 1 = 0$.

9)$x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0;$

Решение. Поскольку, как выше,

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{1 - 4}{4} = -\frac{3}{4},$$

то можно сразу воспользоваться, полученными выше формулами преобразования поворота:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y'); \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y'). \end{cases}$$

Более того, поскольку коэффициенты в данном нам общем уравнении при неизвестных такие же как и в предыдущем задании, то после преобразований получатся такие же коэффициенты при новых неизвестных, как и в предыдущем задании, отличие будет только на свободном слагаемом, т.е. мы получим уравнение

$$5x'^2 - 4\sqrt{5}x' + 4 = 0$$

или уравнение

$$x'^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}x' + \frac{4}{5} = 0.$$

Это уравнение сворачивается в квадрат разности

$$\left(x' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0$$

и поэтому равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x' - \frac{2}{\sqrt{5}} = 0; \\ x' - \frac{2}{\sqrt{5}} = 0. \end{array}\right.$$

Поскольку $x' = \dfrac{x+2y}{\sqrt{5}}$, то получим совокупность

$$\left[\begin{array}{l}(\dfrac{x+2y-2}{\sqrt{5}})^2 = 0;\\ (\dfrac{x+2y-2}{\sqrt{5}})^2 = 0.\end{array}\right.$$

Следовательно, в результате получаем совпавшие параллельные прямые, которые в первоначальной системе координат определяются уравнением

$$x + 2y - 2 = 0$$

и поэтому легко строятся.

Ответ: прямая $x + 2y - 2 = 0$.

$10) x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 5 = 0$.

Решение. Снова можно воспользоваться полученными выше результатами и сразу получить уравнение

$$x'^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}x' + \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 0,$$

которое затем преобразуется к виду

$$\big(x' - \frac{2}{\sqrt{5}}\big)^2 + \frac{1}{5} = 0.$$

Если представить это уравнение в виде

$$(x' - \frac{2}{\sqrt{5}})^2 - (\frac{1}{\sqrt{5}}i)^2 = 0$$

и разложить потом как разность квадратов:

$$(x' - \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i)(x' - \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}i) = 0,$$

то получим в итоге совокупность

$$\left[\begin{array}{l}x' - \dfrac{2}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}i = 0;\\ x' - \dfrac{2}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}i = 0,\end{array}\right.$$

которая определяет мнимые параллельные прямые. Следовательно, в ответе получаем пустое множество.

Ответ: $\varnothing$.

11)$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;

Решение. Поскольку, как и в предыдущих задачах,

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{1-4}{4} = -\frac{3}{4},$$

то сразу воспользуемся формулами преобразования поворота:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y'); \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y'). \end{cases}$$

Подставим полученные выражения в данное общее уравнение:

$$(x' - 2y')^2 + \frac{4}{5}(x' - 2y')(2x' + y') + \frac{8}{5}(2x' + y')^2 -$$

$$\frac{32}{\sqrt{5}}(x' - 2y') - \frac{56}{\sqrt{5}}(2x' + y') + 80 = 0;$$

$$x'^2 - 4x'y' + 4y'^2 + \frac{8}{5}x'^2 - \frac{12}{5}x'y' - \frac{8}{5}y'^2 +$$

$$\frac{32}{5}x'^2 + \frac{32}{5}x'y' + \frac{8}{5}y'^2 - \frac{32}{\sqrt{5}}x' +$$

$$\frac{64}{\sqrt{5}}y' - \frac{112}{\sqrt{5}}x' - \frac{56}{\sqrt{5}}y' + 80 = 0;$$

$$9(x'^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}x' + \frac{64}{5}) + 4(y'^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}y' + \frac{1}{5}) - 36 = 0;$$

$$9(x' - \frac{8}{\sqrt{5}})^2 + 4(y' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 - 36 = 0.$$

Совершим теперь преобразование поворота по формулам

$$\begin{cases} X = x' - \dfrac{8}{\sqrt{5}}; \\ Y = y' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Тогда получим в результате уравнение

$$\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{9}=1.$$

Это каноническое уравнение эллипса . Теперь остается построить в первоначальной системе координат систему, полученную после поворота и параллельного переноса и построить в ней эллипс по каноническому уравнению (рис. 14).

Ответ: эллипс $\dfrac{\left(x'-\dfrac{8}{\sqrt{5}}\right)^2}{4}+\dfrac{\left(y'+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{9}=1.$

12)$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+116=0;$
13)$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+152=0;$
14)$5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0;$
15)$25x^2-14xy+25y^2+64x-64y-224=0;$
16)$19x^2+6xy+11y^2+38x+6y+29=0;$
17)$6xy+8y^2-12x-26y+11=0;$
18)$6xy+8y^2-12x-26y+29=0;$
19)$6xy+8y^2-12x-26y+20=0;$
20)$7x^2+16xy-23y^2-14x-16y-218=0;$
21)$5x^2+12xy-22x-12y-19=0;$
22)$3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0;$
23)$x^2+2xy+y^2+3x+y=0;$
24)$x^2+4xy+4y^2-4x+2y-5=0;$
25)$9x^2+12xy+4y^2-24x+16y+3=0;$
26)$9x^2+24xy+16y^2-40x+30y=0;$
27)$9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0;$
28)$x^2-2xy+y^2+2x-2y+4=0.$

Задача 40. Составить уравнение параболы, фокус которой находится в точке $F(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3})$, а директриса определяется уравнением $3x-3y+$ $+8=0$.

Замечание. Если при упрощении общего уравнения брать угол поворота не из первой координатной четверти, а из какой-либо другой (тогда знаки $cos\alpha$ и $sin\alpha$ не обязательно положительные), то в упрощенном уравнении переменные X и Y могут поменяться местами. Например, вместо уравнения $X^2=-2Y$ будет уравнение $Y^2=-2X$.

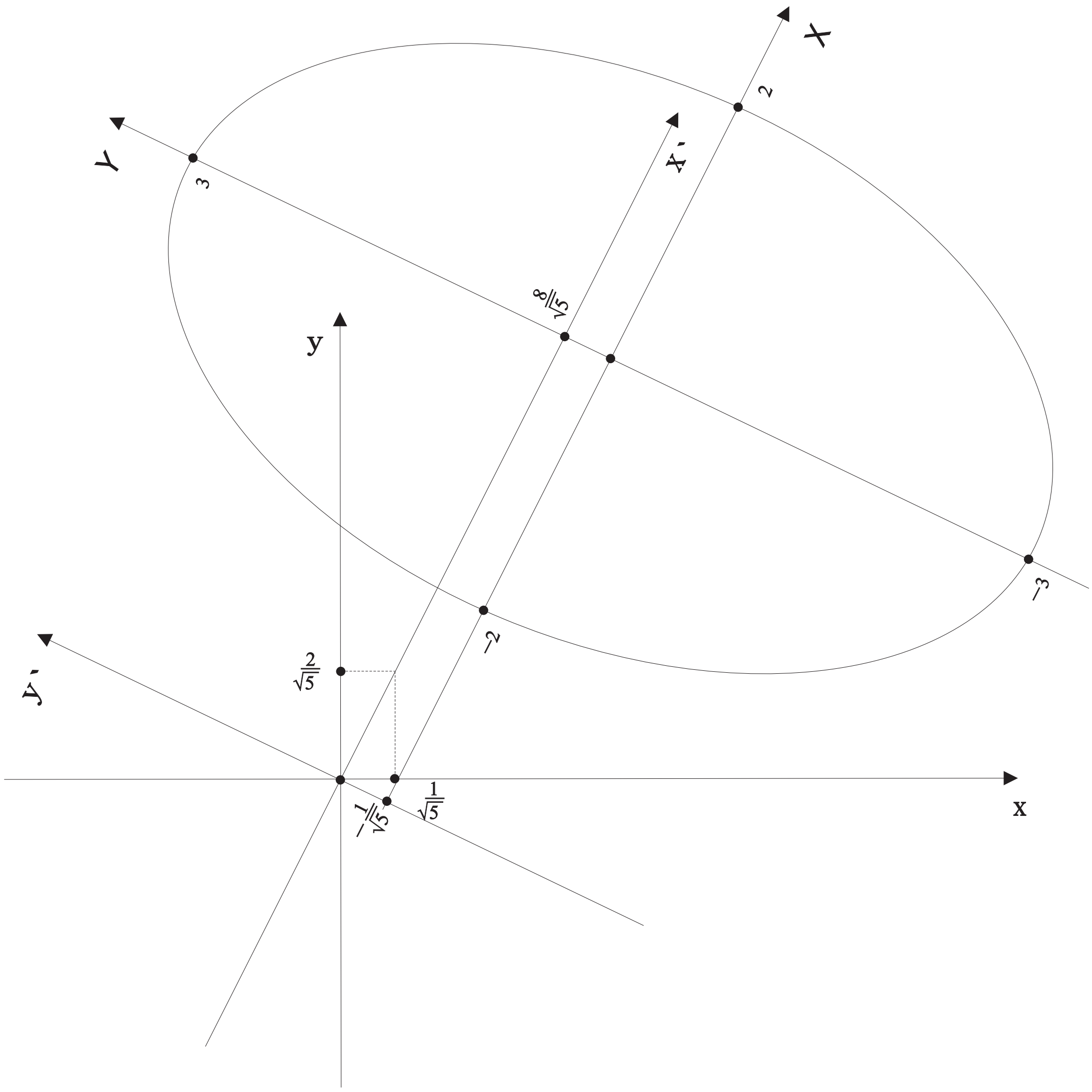


Рис. 14:

2.2 Упрощение общего уравнения линии второго порядка с помощью инвариантов

Точка $O(x_1; y_1)$, координаты которой являются решением системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13} = 0; \\ a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23} = 0 \end{cases}$$

называется *центром линии второго порядка*, заданной общим уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Линия второго порядка называется *центральной,* если указанная система имеет единственное решение.

Все линии второго порядка делятся на *линии, имеющие единственный центр* или *центральные* (эллипс, мнимый эллипс, гипербола, мнимые пересекающиеся прямые, действительные пересекающиеся прямые), *линии, не имеющие центра* (парабола) и *линии, имеющие бесконечное множество центров* (действительные параллельные прямые, совпавшие прямые, мнимые параллельные прямые).

Величины

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}; \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}; s = a_{11} + a_{22}$$

называются *инвариантами линии второго порядка.* Их так же называют соответственно *большим определителем, малым определителем* и *следом.* Для каждой конкретной линии второго порядка инварианты не изменяют своего значения при повороте координатных осей и при параллельном переносе. Это позволяет использовать инварианты для упрощения общего уравнения линии второго порядка.

Уравнение

$$\lambda^2 - s\lambda + \delta = 0$$

называется *характеристическим уравнением линии второго порядка.*

Для того, чтобы упростить общее уравнение линии второго порядка, необходимо сначала найти значения инвариантов и определить тип линии. Тип линии позволяет определить так называемая *классификационная таблица*

$\delta > 0$	$s\Delta < 0$	эллипс	центральные
	$s\Delta > 0$	мнимый эллипс	
	$\Delta = 0$	мнимые пересекающиеся прямые	
$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$	гипербола	
	$\Delta = 0$	пересекающиеся прямые	
$\delta = 0$	$\Delta \neq 0$	парабола	не имеющие центра
	$\Delta = 0$	параллельные прямые	имеющие бесконечное множество центров
		совпавшие прямые	
		мнимые параллельные прямые	

Для случая центральных линий, характеристическое уравнение имеет два ненулевых корня и поэтому упрощенное уравнение будет иметь вид

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{1}$$

Для построение центральной линии в первоначальной системе координат следует сначала найти центр линии и совершить преобразование параллельного переноса начала координат в этот центр, а затем совершить преобразование поворота на угол

$$k = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}.$$

В полученной после преобразований новой системе координат уравнение линии будет иметь канонический вид (1) и поэтому линия легко строится.

В случае параболы, один из корней характеристического уравнения равен нулю. Пусть, например, нулю равен тот корень характеристического уравнения, который соответствует переменной X. Тогда упрощенное уравнение будет иметь вид

$$Y^2 = \pm 2pX, \tag{2}$$

где параметр p находится по формуле

$$p = \sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}}.$$

Для построения параболы в первоначальной системе координат, необходимо найти уравнение оси параболы, которое можно записать двумя способами:

$$a_{11}x + a_{12}y + \frac{a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23}}{a_{11} + a_{22}} = 0;$$

$$a_{12}x + a_{22}y + \frac{a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23}}{a_{11} + a_{22}} = 0.$$

В случае, если $a_{12} \neq 0$ можно воспользоваться любым из этих уравнений. Если $a_{12} = 0$ и $a_{22} = 0$, то нужно воспользоваться первым уравнением, а если $a_{12} = 0$ и $a_{11} = 0$, то вторым.

Затем следует найти точку пересечения параболы с ее осью, используя полученное уравнение оси и исходное уравнение линии второго порядка. Эта точка будет являться вершиной параболы.

За начало координат новой системы следует выбрать вершину параболы. Ось параболы будет осью абсцисс, а осью ординат нужно выбрать прямую, перпендикулярную оси параболы и проходящую через вершину. Направление новой оси абсцисс выбирается так, чтобы ее угловой коэффициент в первоначальной системе координат был равен

$$k = \frac{\lambda_1 - a_{12}}{a_{22}}, \tag{3}$$

где λ_1 — тот корень характеристического уравнения, который соответствует переменной X. Направление новой оси ординат, конечно же, должно быть таким, чтобы полученные оси составляли правую тройку.

Остается определить знак в уравнении (2). Это можно сделать с помощью геометрического смысла знака трехчлена $Ax+By+C$. Например, взять какую-либо конкретную точку, расположение которой заведомо известно (лучше всего взять начало первоначальной системы координат, если, конечно, с ним не совпадает вершина параболы) и произвольную точку, принадлежащую параболе (любое решение исходного общего уравнения), найти для них знаки трехчлена для уравнения новой оси ординат. Если знаки одинаковы, то парабола лежит в той же полуплоскости, что и начало координат, в противном случае — в разных. Теперь можно построить параболу в новой системе по ее каноническому уравнению.

Если равен нулю тот корень характеристического уравнения, который соответствует переменной Y, то упрощенное уравнение параболы будет иметь вид

$$X^2 = \pm 2pY, \tag{4}$$

где параметр p вычисляется так же как и выше. По тем же формулам находится и ось параболы. Только в этом случае ось параболы выбирается в качестве новой оси ординат. Новая ось абсцисс так же проходит через вершину параболы перпендикулярно новой оси ординат, а направления новых осей нужно выбрать такими, чтобы они составляли правую тройку и новая ось абсцисс имела в первоначальной системе координат угловой коэффициент, который так же вычисляется по формуле (3). В остальном выполняются те же действия, что и выше.

Как для центральных линий, так и для параболы нет строгого правила, какой из корней характеристического уравнения соответствует переменной X, а какой переменной Y. Этот выбор делается либо произвольно, либо из практических соображений. Главное, чтобы корень, соответствующий переменной X в каноническом уравнении совпадал с корнем, соответствующем переменной X в формуле (3).

Для линии, которая имеет бесконечное множество центров, т.е. три вида параллельных прямых — действительные, совпавшие и мнимые, достаточно воспользоваться биномиальной теоремой

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

и получить разность квадратов. Тогда сразу становится ясно какие именно это прямые. В этом случае сразу получаем уравнения прямых в первоначальной системе координат и поэтому новую систему координат строить не нужно.

Задача 41. Какие плоские фигуры второй степени задаются при различных значениях λ уравнениями.

1)$x^2 - 2y + \lambda(y^2 - 2x) = 0;$
2)$x^2 + 2\lambda xy + y^2 = 1.$

Решение. В нашем случае $a_{11} = 1;$ $a_{12} = \lambda;$ $a_{22} = 1;$ $a_{13} = a_{23} = 0;$ $a_{33} = -1$. Следовательно, инварианты имеют следующие значения

$$s = 1 + 1 = 2;\ \delta = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2;\ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = \delta.$$

При $\lambda = -1$ и $\lambda = 1$, имеем $\delta = 0$ и $\Delta = 0$ и поэтому получаем параллельные прямые.

При $\lambda \in (-\infty;\ -1) \cap (1;\ \infty)$, имеем $\delta < 0$ и $\Delta \neq 0$. Следовательно, получаем гиперболу.

При $\lambda \in (-1;\ 1)$, имеем $\delta > 0$ и $\Delta s > 0$. Следовательно, получаем мнимый эллипс.

Задача 42. Выяснить, является ли линия второго порядка центральной и в случае утвердительного ответа найти ее центр.

1)$5x^2 - 3xy + y^2 + 4 = 0;$

Решение. Составляем систему для определения центра линии:

$$\begin{cases} 5x - \dfrac{3}{2}y = 0; \\ -\dfrac{3}{2}x + y = 0. \end{cases}$$

Поскольку уравнения системы определяют две пересекающиеся прямые, то система имеет единственное решение. Очевидно, что точкой пересечения является начало координат.

Ответ: линия является центральной, ее центр — точка $O(0;\ 0)$.

2)$3x^2 - 2xy + 4 = 0$;
3)$7xy - 3 = 0$;
4)$9x^2 - 12xy + 4y^2 - 1 = 0$;

Задача 43. Сколько центров имеет линия второго порядка

1)$x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;
2)$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$;
3)$2x^2 - 3xy - y^2 + 3x + 2y = 0$;
4)$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;
5)$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$;

Решение.

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0; \\ x + y + 1 = 0. \end{cases}$$

Уравнения системы определяют совпавшие параллельные прямые. Следовательно, система имеет бесконечное множество решений и поэтому линия второго порядка имеет бесконечное множество центров.

Ответ: бесконечное множество.

6)$2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$;
7)$x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;
8)$x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y - 5 = 0$.

Задача 44. Пользуясь инвариантами, установить, какая плоская линия второго порядка задана общим уравнением и построить эту линию в первоначальной системе координат.

1)$x^2 - 5x + 6 = 0$;

Решение.

$$s = 1;\ \delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{5}{2} & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, это пара параллельных прямых. Действительно, применив теорему Виета, получаем разложение

$$(x-2)(x-3) = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{aligned} & x = 2; \\ & x = 3. \end{aligned}\right.$$

Поскольку мы не делали никаких преобразований системы координат, то полученные уравнения определяют наши прямые в первоначальной системе координат. Поэтому получаем уже построенные в предыдущей теме прямые (рис. 15).

Ответ: параллельные прямые $x = 2$ и $x = 3$.

2)$9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$;

Решение.

$$s = 13;\ \delta = \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 36;\ \Delta = \begin{vmatrix} 9 & 0 & -9 \\ 0 & 4 & 8 \\ -9 & 8 & -11 \end{vmatrix} = -1296.$$

Поскольку $s\Delta < 0$, а $\delta > 0$, то данная линия является эллипсом. Характеристическим уравнением является в данном случае уравнение

$$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0.$$

Его корнями являются $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = 9$. Тогда каноническое уравнение имеет вид

$$4X^2 + 9Y^2 - \frac{1296}{36} = 0;$$

$$4X^2 + 9Y^2 = 36;$$

$$\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1.$$

Как известно, угловой коэффициент равен тангенсу угла наклона. Поэтому

$$tg\alpha=\frac{4-9}{0}=\frac{-5}{0}.$$

Следовательно, значение тригонометрической функции тангенс для этого угла не определено. Кроме того, $\sin\alpha<0$, следовательно, $\alpha=-\frac{\pi}{2}$. Теперь осталось найти координаты центра, для чего нужно решить систему

$$\begin{cases}9x-9=0;\\4y+8=0.\end{cases}$$

Очевидно, что $O'(1;\ -2)$. Теперь осталось построить линию (рис. 15).

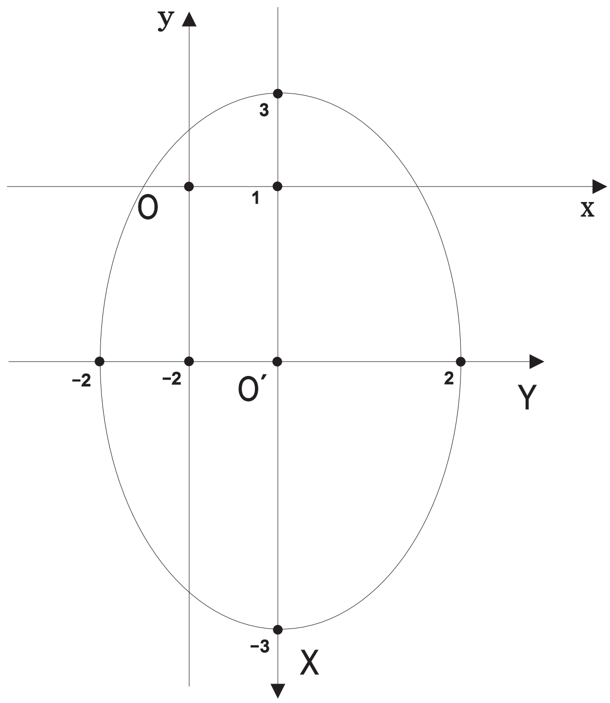


Рис. 15:

Заметим, что рис. 15 отличается от рис. 12 направлениями координатных осей новой системы, но тем не менее в первоначальной системе сама линия точно такая же. Если бы выше мы взяли наоборот $\lambda_1=9$ и $\lambda_2=4$, то тогда бы рис. 15 совсем не отличался от рис. 12.

Ответ: эллипс $\frac{x^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1$.

3)$9x^2+4y^2-18x+16y+25=0$;
4)$9x^2+4y^2-18x+16y+26=0$;
5)$x^2-4y^2+4x+24y-36=0$;
6)$x^2-4y^2+4x+24y-32=0$;

Решение.

$$s=-3;\ \delta=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -4\end{vmatrix}=-4;\ \Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -4 & 12\\ 2 & 12 & -32\end{vmatrix}=0.$$

Это пересекающиеся прямые. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2+3\lambda-4=0.$$

Следовательно, $\lambda_1=-4$, и $\lambda_2=1$. Значит получаем каноническое уравнение

$$-4X^2+Y^2=0,$$

которое равносильно совокупности

$$\left[\begin{aligned}&Y-2X=0;\\ &Y+2X=0.\end{aligned}\right.$$

Эта совокупность определяет в новой системе координат пересекающиеся прямые. Решив систему

$$\begin{cases}x+2=0;\\ -4y+12=0,\end{cases}$$

найдем центр $O'(-2;\ 3)$. Теперь осталось найти угловой коэффициент новой оси абсцисс в первоначальной системе координат:

$$k=\frac{-5}{0}.$$

Полученное означает, что углового коэффициента не существует, т.е. координаты повернуты не прямой угол. Остается построить линию (рис. 16).

Следует отметить, что для случая действительных пересекающихся прямых можно воспользоваться методом разложения. Например, в нашем случае достаточно выделить полные квадраты и разложить многочлен на множители как разность квадратов:

$$x^2+4x+4-4(y^2-6y+9)-4+36-32=0;$$

$$(x+2)^2-(2(y-3))^2=0;$$
$$(x-2y+8)(x+2y-4)=0.$$

Теперь мы получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x-2y+8=0; \\ x+2y-6=0, \end{array}\right.$$

которая и определяет указанные прямые в первоначальной системе координат.

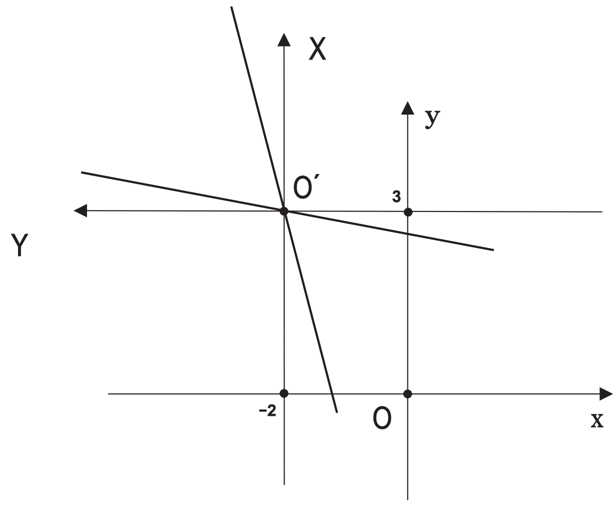


Рис. 16:

Ответ: пересекающиеся прямые $x-2y+8=0$ и $x+2y-6=0$.

7)$x^2-4y^2+4x+24y-28=0$;
8)$x^2+4xy+4y^2-4x-8y+3=0$;

Решение.

$$s=5;\ \delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0;\ \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, это пара параллельных прямых. По биномиальной теореме,

$$x^2+4xy+4y^2-4x-8y+3=(x+2y-2)^2-1=$$
$$(x+2y-2)^2-1^2=(x+2y-3)(x+2y-1).$$

Следовательно, получаем в итоге совокупность

$$\left[\begin{aligned} &x+2y-3=0; \\ &x+2y-1=0, \end{aligned}\right.$$

которая в первоначальной системе координат определяет пару параллельных прямых (рис. 17).

Ответ: параллельные прямые $x+2y-3=0$ и $x+2y-1=0$.

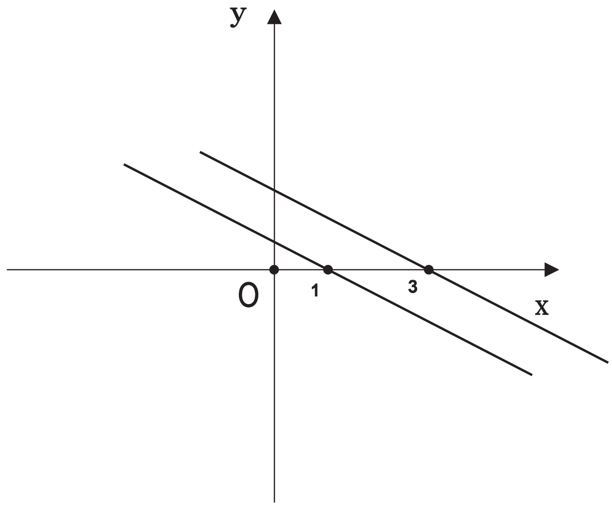


Рис. 17:

9)$x^2+4xy+4y^2-4x-8y+4=0$;
10)$x^2+4xy+4y^2-4x-8y+5=0$.
11)$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$;
12)$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+116=0$;
13)$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+152=0$;

Решение.

$$s=13;\ \delta=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}=36;\ \Delta=\begin{vmatrix} 5 & 2 & -16 \\ 2 & 8 & -28 \\ -16 & -28 & 152 \end{vmatrix}=1296.$$

Следовательно, получаем мнимый эллипс. Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2-13\lambda+36=0$$

имеет корни $\lambda_1 = 9$ и $\lambda_2 = 4$. Следовательно, каноническое уравнение эллипса имеет вид
$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = -1.$$

Ответ: мнимый эллипс $\dfrac{X^2}{4} + \dfrac{Y^2}{9} = -1.$

14)$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;
15)$25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;
16)$19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$;
17)$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$;
18)$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 29 = 0$;
19)$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 20 = 0$;
20)$7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$;
21)$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$;
22)$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;
23)$x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y = 0$;
24)$x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$;

Решение.

$$s = 5;\ \delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0;\ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -25.$$

Поскольку $\delta = 0$ и $\Delta \neq 0$, то получаем, что это парабола. Характеристическое уравнение
$$\lambda^2 - 5\lambda = 0$$
имеет корни $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 5$. Пусть, например, корень $\lambda_1 = 0$ соответствует переменной X. Тогда каноническое уравнение имеет вид

$$Y^2 = \pm 2pX.$$

Найдем значение параметра p:

$$p = \sqrt{-\frac{\Delta}{s^3}} = \sqrt{-\frac{-25}{125}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Тогда каноническое уравнение имеет вид

$$Y^2 = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}X.$$

Найдем уравнение оси параболы:

$$x + 2y + \frac{-2+2}{1+4} = 0;$$

$$x + 2y = 0.$$

Теперь найдем вершину параболы, как точку пересечения оси и самой параболы:

$$\begin{cases} x + 2y = 0; \\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x + 2y - 5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y; \\ (2y)^2 + 4(-2y)y + 4y^2 - 4(-2y) + 2y - 5 = 0. \end{cases}$$

$$4y^2 - 8y^2 + 4y^2 + 8y + 2y - 5 = 0;$$

$$10y = 5;$$

$$y = \frac{1}{2}.$$

$$x = -\frac{2}{2} = -1.$$

Следовательно, вершина параболы — точка $O'(-1;\ \frac{1}{3})$. Уравнение оси ординат найдем из того, что нормальный вектор оси абсцисс можно взять в качестве направляющего вектора оси ординат:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2};$$

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y - \frac{1}{2}}{2};$$

$$2x - y + \frac{5}{2} = 0;$$

$$4x - 2y + 5 = 0.$$

Если начало координат подставим в это уравнение, то получим знак $+$. Подбором легко устанавливаем, что решением исходного уравнения является пара $(-1;\ 0)$. Для этой пары тоже получается знак плюс. Следовательно, точки параболы лежат в той же полуплоскости относительно новой оси ординат, что и начало первоначальной системы координат. Осталось найти угловой коэффициент новой оси абсцисс:

$$k = \frac{0-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Полученные сведения позволяют уже построить нашу параболу (рис. 18). По рисунку видно, что ветви параболы вытянуты вдоль положительного направления новой оси абсцисс. Следовательно, каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$Y^2 = \frac{2}{\sqrt{5}}X.$$

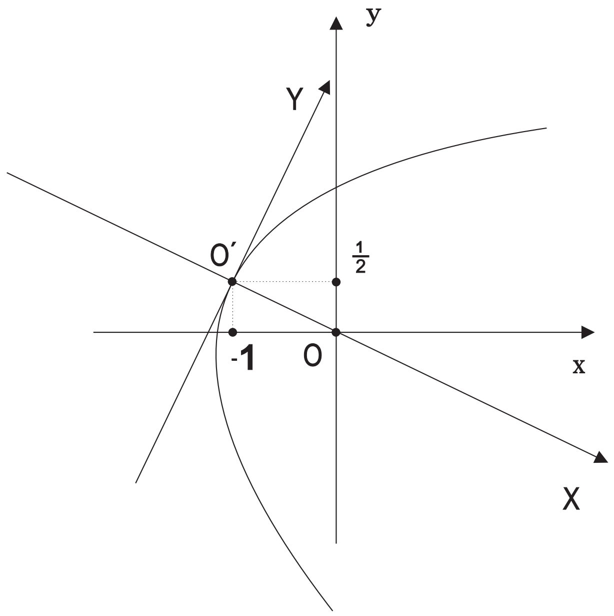


Рис. 18:

Если бы мы в качестве корня характеристического уравнения, который соответствует переменной X выбрали бы $\lambda_2 = 5$, то каноническое уравнение имело бы вид

$$X^2 = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}Y,$$

а угловой коэффициент был бы равен

$$k = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Новая система координат оказалась бы повернутой на другой угол, но парабола все равно получилась бы в первоначальной системе той же самой, только она оказалась бы по-другому расположеной в новой системе координат (рис. 19). Каноническое уравнение параболы в этом случае будет иметь вид

$$X^2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}Y.$$

Ответ: парабола $Y^2 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}X.$

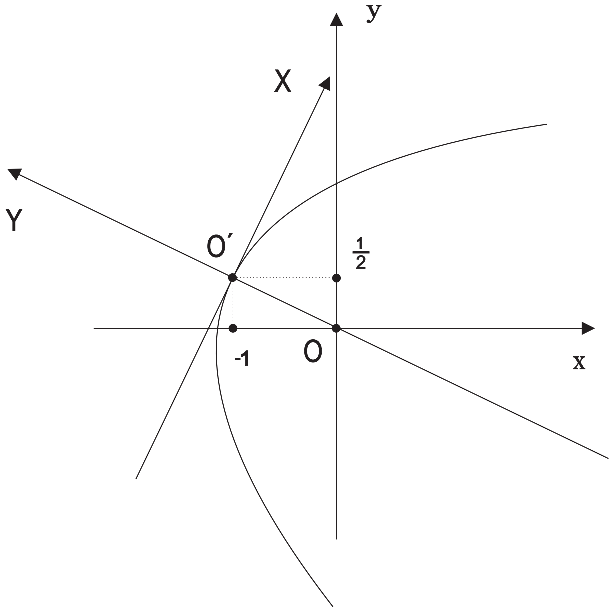


Рис. 19:

25)$9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x + 16y + 3 = 0$;
26)$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$;
27)$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$;
28)$x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 4 = 0$.

2.3 Пересечение линии второго порядка с прямой. Касательная

Для того, чтобы найти точки пересечения линии второго порядка, заданной уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

и прямой, заданной уравнением

$$Ax + By + C = 0,$$

нужно из этих двух уравнений составить систему и решить её. Уравнение прямой позволяет одну переменную выразить через другую. Подставив такое выражение в уравнение кривой, мы получим квадратное уравнение относительно одной переменной . Такое уравнение либо имеет два различных корня, либо не имеет корней вообще, либо имеет один корень, который на самом деле представляет собой два совпавших корня. Поскольку для второй переменной, по формуле замены, так же находятся значения, то в результате мы получим либо две различных точки пересечения, либо не получим точек вообще, либо получим точку касания (рис. 20). Однако, при исключении одной из переменных из уравне-

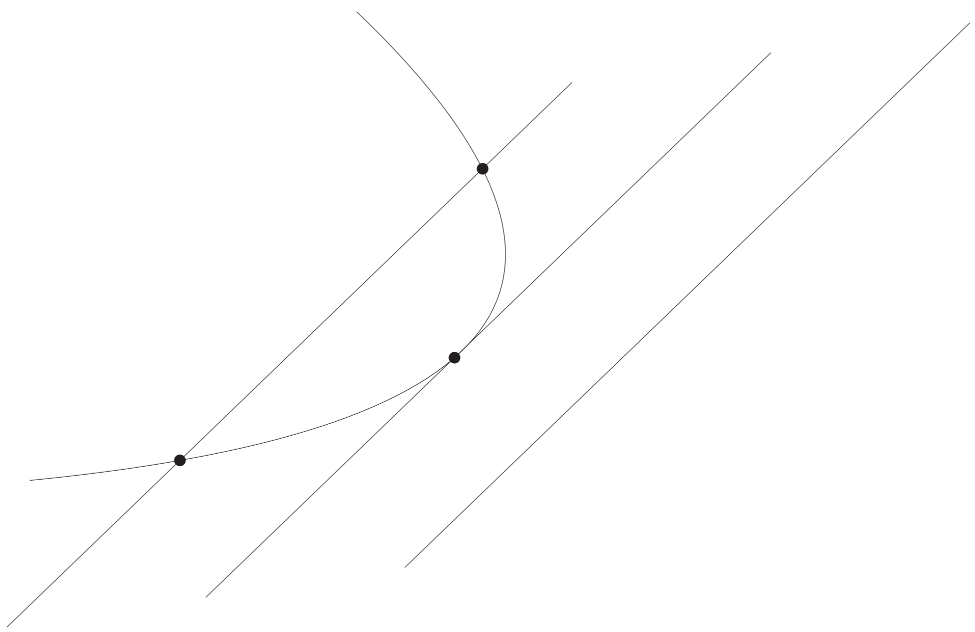


Рис. 20:

ния линии второго порядка посредством подстановки, может оказаться и так, что уравнение станет уравнением первого порядка. Тогда у него окажется единственный корень, который не может рассматриваться как два совпавших. В этом случае получим единственную точку пересечения, которая не является точкой касания (рис. 21).

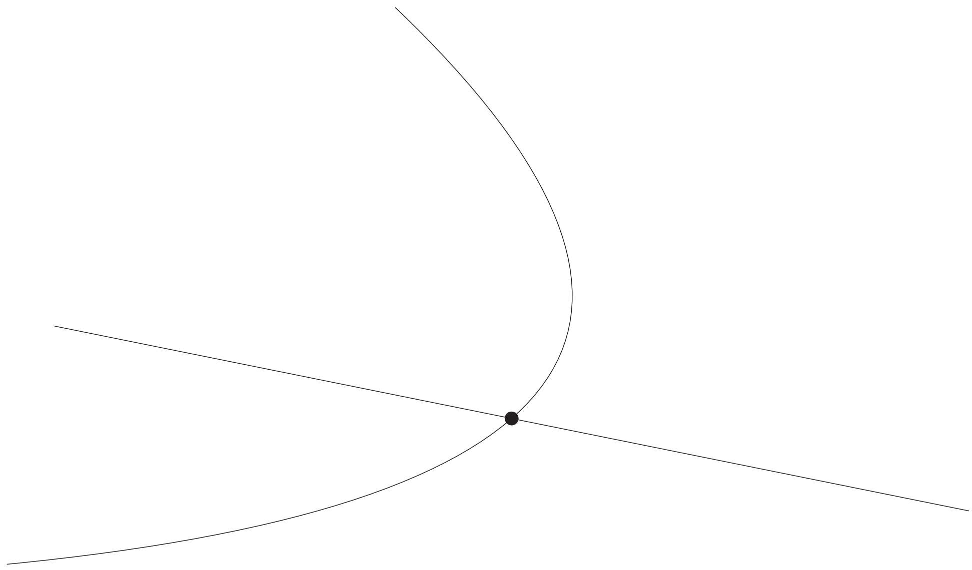


Рис. 21:

Касательная к кривой (заданной общим уравнением) в точке $A(x_0, y_0)$ определяется уравнением

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = 0.$$

Пусть требуется провести касательную через точку $M(x_1,\ y_1)$, которая не лежит на кривой, заданной общим уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Запишем уравнение касательной как уравнение прямой по угловому коэффициенту и точке:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Тогда можно выразить переменную y :

$$y = k(x - x_1) + y_1.$$

Подставив это выражение в уравнение кривой, мы получим квадратное уравнение относительно переменной x. Если бы мы искали хорду с некоторым условием, то это уравнение имело бы два различных действительных корня. Для касательной же точки пересечения сливаются в одну, поэтому корни уравнения будут совпавшими. Для этого необходимо, чтобы дискриминант был равен нулю. Приравняв дискриминант к нулю. получим квадратное уравнение относительно углового коэффициента k. Как правило, это уравнение имеет два различных корня, однако может быть и другое, все зависит от расположения точки (рис. 22).

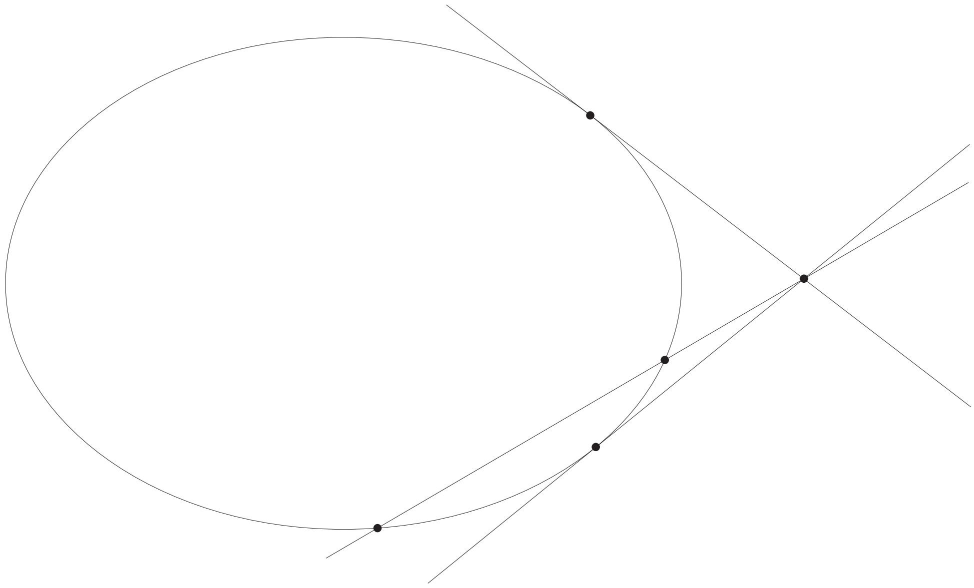


Рис. 22:

Задача 45. Найти точки пересечения кривой

$$x^2 + xy + 2y^2 - 7x - 12y + 10 = 0$$

с осями координат.

Задача 46. Вычислить длину хорды, отсекаемой кривой

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$$

на оси абсцисс.

Задача 47. При каком значении параметра λ кривая

$$2x^2 - 3xy + y^2 - 7x + \lambda y + 4 = 0$$

отсекает на оси ординат хорду длиной в 3 единицы и при каком значении λ соответствующая кривая касается оси ординат.

Задача 48. Найти точки пересечения кривой

$$x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

с прямыми:

1)$5x - y - 5 = 0$;

Решение. Из уравнения прямой получаем: $y = 5x - 5$. Подставив это выражение в уравнение кривой, получаем уравнение:

$$x^2 - 2x(5x - 5) - 3(5x - 5)^2 - 4x - 6(5x - 5) + 3 = 0.$$

После приведения подобных, получаем квадратное уравнение:

$$2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Его корнями будут $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{1}{2}$. Этим корням соответствуют значения $y_1 = 0$ и $y_2 = -\frac{5}{2}$. Следовательно, получаем точки пересечения $A(1;0)$ и $B(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2})$.

Ответ: $A(1;0)$ и $B(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2})$.

2)$x + 2y + 2 = 0$;

3)$x + 4y - 1 = 0$;

4)$x - 3y = 0$.

Задача 49. В точках пересечения кривой

$$x^2 - 2y^2 - 5x + 4y + 6 = 0$$

с осями координат провести касательные к этой кривой.

Задача 50. Написать уравнения касательных к кривой

$$3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$$

в ее точках, абсциссы которых равны -2.

Задача 51. Через начало координат провести касательные к кривой

$$3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0.$$

Задача 52. Через точку $A(3,4)$ провести касательные к кривой

$$2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0.$$

Задача 53. Через точку $A(-2,1)$ провести касательные к кривым

1)$3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$;

2)$2x^2 - xy - y^2 - 15x - 3y + 18 = 0$
и выяснить, почему в каждом из этих случаев мы можем провести только по одной касательной.

Задача 54. Среди прямых, касающихся кривой

$$x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$$

найти те, которые параллельны оси абсцисс.

Задача 55. К данной кривой

$$x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$$

провести касательные, параллельные прямой $3x+3y-5=0$ и определить точки прикосновения этих касательных.

Задача 56. Составить уравнение кривой второго порядка, проходящей через начало координат и касающейся прямой $4x + 3y + 2 = 0$ в точке $A(1, -2)$ и прямой $x - y - 1 = 0$ в точке $B(0, -1)$.

Решение. Пусть кривая задана общим уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Поскольку кривая проходит через начало координат, то $a_{33} = 0$. Составим уравнение касательной к этой кривой, которая проходит через точку A:

$$(a_{11} - 2a_{12} + a_{13})x + (a_{12} - 2a_{22} + a_{23})y + a_{13} - 2a_{23} = 0.$$

Поскольку по условию эта касательная является прямой $4x+3y+2=0$, то существует такое действительное число t, что

$$\begin{cases} a_{11} - 2a_{12} + a_{13} &= 4t; \\ a_{12} - 2a_{22} + a_{23} &= 3t; \\ a_{13} - 2a_{23} &= 2t. \end{cases}$$

Выразим из каждого уравнения параметр:

$$\begin{cases} \dfrac{a_{11} - 2a_{12} + a_{13}}{4} &= t; \\ \dfrac{a_{12} - 2a_{22} + a_{23}}{3} &= t; \\ \dfrac{a_{13} - 2a_{23}}{2} &= t. \end{cases}$$

Из равенства правых частей следует равенство левых, поэтому получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{a_{11} - 2a_{12} + a_{13}}{4} &= \dfrac{a_{12} - 2a_{22} + a_{23}}{3}; \\ \dfrac{a_{13} - 2a_{23}}{2} &= \dfrac{a_{12} - 2a_{22} + a_{23}}{3}. \end{cases}$$

Теперь, по свойству пропорций, получаем:

$$\begin{cases} 3a_{11} - 6a_{12} + 3a_{13} &= 4a_{12} - 8a_{22} + 4a_{23}; \\ 3a_{13} - 6a_{23} &= 2a_{12} - 4a_{22} + 2a_{23}. \end{cases} \tag{$*$}$$

Аналогично, для точки касания B, получим уравнение

$$(-a_{12} + a_{13})x + (-a_{22} + a_{23})y - a_{23} = 0.$$

Тогда, поскольку эта касательная является на самом деле прямой

$$x - y - 1 = 0$$

, то существует действительное число k такое, что:

$$\begin{cases} -a_{12} + a_{13} &= k; \\ -a_{22} + a_{23} &= -k; \\ -a_{23} &= -k. \end{cases}$$

Поменяем знак во втором и третьем уравнениях системы:

$$\begin{cases} -a_{12} + a_{13} &= k; \\ a_{22} - a_{23} &= k; \\ a_{23} &= k. \end{cases}$$

Тогда легко получается система:

$$\begin{cases} -a_{12} + a_{13} &= a_{23}; \\ a_{22} - a_{23} &= a_{23}. \end{cases} \tag{$**$}$$

Объединим теперь (*) и (**) в одну систему:

$$\begin{cases} 3a_{11} - 6a_{12} + 3a_{13} &= 4a_{12} - 8a_{22} + 4a_{23}; \\ 3a_{13} - 6a_{23} &= 2a_{12} - 4a_{22} + 2a_{23}; \\ -a_{12} + a_{13} &= a_{23}; \\ a_{22} - a_{23} &= a_{23}. \end{cases}$$

Выразим в этой системе все переменные через какую-либо одну, например, через a_{23} :

$$\begin{cases} 3a_{11} - 6a_{12} + 3a_{13} & = & 4a_{12} - 8 \cdot 2a_{23} + 4a_{23}; \\ 3a_{13} - 6a_{23} & = & 2a_{12} - 4 \cdot 2a_{23} + 2a_{23}; \\ -a_{12} + a_{13} & = & a_{23}; \\ a_{22} & = & 2a_{23}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_{11} - 10a_{12} + 3a_{13} & = & -12a_{23}; \\ 3a_{13} - 2a_{12} & = & 0; \\ -a_{12} + a_{13} & = & a_{23}; \\ a_{22} & = & 2a_{23}. \end{cases}$$

Теперь легко получаются следующие соотношения: $a_{22} = 2a_{23}$; $a_{12} = -3a_{23}$; $a_{13} = -2a_{23}$; $a_{11} = -12a_{23}$.

Пусть $a_{23} = 1$. Тогда $a_{22} = 2$; $a_{12} = -3$; $a_{13} = -2$; $a_{11} = -12$.

Следовательно, уравнение кривой имеет вид:

$$-12x^2 - 6xy + 2y^2 - 4x + 2y = 0$$

или

$$6x^2 + 3xy - y^2 + 2x - y = 0.$$

Ответ:

$$6x^2 + 3xy - y^2 + 2x - y = 0.$$

Задача 57. При каком значении параметра λ кривая

$$x^2 + 2\lambda xy - y^2 + 5x - 9 = 0$$

пересекает прямую $2x - y + 7 = 0$ только в одной точке.

Задача 58. Кривая второго порядка проходит через точки $O(0,0)$, $A(0,2)$, $B(2,4)$ и пересекает лишь в одной точке каждую из прямых: $3x - 2y + 1 = 0$ и $2x + y - 5 = 0$. Найти уравнение этой кривой.

Задача 59. Кривая пересекает каждую из осей координат только в начале координат. Кроме того, известны две ее точки: $A(2,-1)$ и $B(-2,2)$. Составьте уравнение этой кривой.

Задача 60. Найти множество центров всех кривых второго порядка, касающихся оси абсцисс в точке $A(2,0)$ и оси ординат в точке $B(0,1)$.

2.4 Диаметры линии второго порядка. Сопряженные направления. Главные оси

Пусть дана некоторая линия второго порядка. Проведем семейство хорд этой линии одного направления. Тогда середины всех хорд образуют отрезок прямой, который называется *диаметром, сопряженным данным хордам.* Уравнение диаметра имеет вид:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + k(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

Здесь k — угловой коэффициент сопряженных диаметру хорд. Направление хорд и направление диаметра, сопряженного этим хордам называются *сопряженными направлениями.* Если k и k' — два сопряженных направления, то между ними существует следующая зависимость:

$$a_{11} + a_{12}(k + k') + a_{22}kk' = 0.$$

Сопряженными называются диаметры каждый из которых делит пополам оси, параллельные другому. *Главными осями* называются сопряженные взаимноперпендикулярные диаметры. Направления главных осей называются главными направлениями. Если у линии находятся главные направления, то после отнесения ее к главным осям, получим каноническое уравнение линии. Это не только позволяет сразу определить тип линии, но и построить ее, если предварительно построить прамые, представляющие собой указанные главные оси.

Как отнести линию к главным осям:

1. Находятся два взаимноперпендикулярных сопряженных диаметра, для чего используется зависимость между двумя сопряженными направлениями и условие перпендикулярности через угловые коэффициенты.

2. Если $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ и $a_2x+b_2y+c_2 = 0$ — уравнения найденных диаметров, то приравняв их к уравнениям новых осей ($X = 0$ и $Y = 0$), получим:

$$a_1x + b_1y + c_1 = X;$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = Y.$$

Отсюда, выразив x и y через X и Y и подставив их в исходное уравнение, получим каноническое уравнение линии, т. е. приведение к главным осям.

Главные направления могут быть так же найдены и из соотношения:

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0.$$

Угловой коэффициент для всех диаметров параболы определяется по формуле:

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

Угловые коэффициенты асимптот гиперболы определяются из соотношения:

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0.$$

Задача 61. Через точку $A(1,2)$ проведен диаметр кривой

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0.$$

Найти уравнение этого диаметра и диаметра ему сопряженного.

Задача 62. Дана кривая

$$2x^2 + 5xy - 3y^2 + 3x + 16y = 0.$$

Найти диаметр, параллельный оси абсцисс и диаметр, ему сопряженный.

Задача 63. Найти два сопряженных диаметра кривой

$$xy - y^2 - 2x + 3y - 1 = 0$$

из которых один параллелен оси ординат.

Задача 64. Дана кривая

$$3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$$

и один из ее диаметров $x + 2y - 2 = 0$. Найти диаметр ему сопряженный.

Задача 65. Составить уравнение диаметра кривой

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0,$$

параллельного прямой $2x - y + 5 = 0$.

Задача 66. Дана кривая

$$3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0.$$

Найти ее диаметр, образованный серединами хорд:
1) параллельных оси абсцисс;
2) параллельных оси ординат;
3) параллельных прямой $x + y + 1 = 0$.

Задача 67. Найти диаметр кривой

$$5x^2 - 3xy + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0,$$

проходящий через середину хорды, отсекаемой этой кривой на прямой $x - 2y - 1 = 0$.

Задача 68. Найти середину хорды, отсекаемой кривой

$$2x^2 + 4xy + 3y^2 - 3x - 3y = 0$$

на прямой $x + 3y - 12 = 0$.

Задача 69. Через точку $A(1, -3)$ провести хорду эллипса

$$\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{12} = 1,$$

сопряженную диаметру $2x + 5y = 0$.

Задача 70. Найти ось симметрии и вершину каждой из следующих парабол:

1) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$;

Решение. Найдем сначала угловой коэффициент для диаметра параболы:

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{1}{2}.$$

Поскольку ось симметрии параболы — это диаметр, проходящий через вершину параболы, то этот диаметр будет перпендикулярным сопряженным с ним хордам. Следовательно, угловой коэффициент k_1 для этих хорд будет равен:

$$k_1 = -\frac{1}{k} = 2.$$

Теперь ось симметрии данной параболы может быть найдена как диаметр, сопряженный хордам с угловым коэффициентом k_1:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + k(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0;$$

$$(x + 2y - 3) + 2(2x + 4y - 1) = 0;$$
$$x + 2y - 1 = 0.$$

Выразив из последнего уравнения $x = 1 - 2y$ и подставив в уравнение параболы, получим: $(1 - 2y)^2 + 4(1 - 2y)y + 4y^2 - 6(1 - 2y) - 2y + 1 = 0$;

$$10y - 4 = 0.$$

Отсюда получаем значение ординаты для точки пересечения: $y = \dfrac{2}{5}$ и из полученного выше уравнения диаметра, значение абсциссы: $x = \dfrac{1}{5}$.

Ответ: $x + 2y - 1 = 0$; $A(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$.

2) $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 8x = 0$;
3) $3y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$.

Задача 71. Найти общий диаметр двух кривых:

$$x^2 - xy - y^2 - x - y = 0$$

и

$$x^2 + 2xy + y^2 - x + y = 0.$$

Задача 72. Отнести к главным осям кривые:

1) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0;$

Решение. Если k_1 и k_2 — два взаимноперпендикулярных направления, то

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

Подставив полученное выражение в соотношение для сопряженных направлений, получим:

$$a_{11} + a_{12}(k_2 - \frac{1}{k_2}) - a_{22}\frac{k_2}{k_2} = 0;$$

$$9 - 2k_2 + \frac{2}{k_2} - 6 = 0;$$

$$3k_2 - 2k_2^2 + 2 = 0;$$

$$2k_2^2 - 3k_2 - 2 = 0.$$

Отсюда получаем два значения для углового коэффициента k_2:

$$k_{21} = 2 \;\text{ и }\; k_{22} = -\frac{1}{2}.$$

Очевидно, что эти угловые коэффициенты определяют взаимноперпендикулярные направления.

Составим теперь уравнения диаметров, сопряженных этим направлениям. Эти диаметры так же будут перпендикулярными:

$$(9x - 2y + 3) + 2(-2x + 6y - 4) = 0;$$

$$5x + 10y - 5 = 0$$

или

$$x + 2y - 1 = 0;$$

$$(9x - 2y + 3) - \frac{1}{2}(-2x + 6y - 4) = 0;$$

$$10x - 5y + 5 = 0$$

или
$$2x - y + 1 = 0.$$

Теперь нужно приравнять уравнения полученных диаметров к уравнениям новых осей: $X = 0$ и $Y = 0$:

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = X; \\ 2x - y + 1 = Y. \end{cases}$$

Прибавив к элементам первого уравнения элементы второго, умноженные на 2, получим:
$$5x = X + 2Y - 1$$

или
$$x = \frac{X + 2Y - 1}{5}.$$

Аналогично, прибавив к элементам второго уравнения элементы первого уравнения, умноженные на -2, получим выражение для y:

$$y = \frac{2X - Y + 3}{5}.$$

Подставим теперь полученные выражения в исходное общее уравнение линии второго порядка:

$$9\Big(\frac{X}{5} + \frac{2Y}{5} - \frac{1}{5}\Big)^2 - 4\Big(\frac{X}{5} + \frac{2Y}{5} - \frac{1}{5}\Big)\Big(\frac{2X}{5} - \frac{Y}{5} + \frac{3}{5}\Big) +$$

$$6\Big(\frac{2X}{5} - \frac{Y}{5} + \frac{3}{5}\Big)^2 + 6\Big(\frac{X}{5} + \frac{2Y}{5} - \frac{1}{5}\Big) - 8\Big(\frac{2X}{5} - \frac{Y}{5} + \frac{3}{5}\Big) + 2 = 0.$$

Возведя в квадрат и умножив обе части на 5, получим:

$$\frac{9}{5}\Big(X^2 + 4Y^2 + 1 - 2X - 4Y + 4XY\Big) -$$

$$\frac{4}{5}\Big(2X^2 - XY + 3X + 4XY - 2Y^2 + 6Y - 2X + Y - 3\Big) +$$

$$\frac{6}{5}\Big(4X^2 + Y^2 + 9 - 4XY + 12X - 6Y\Big) +$$

$$6\Big(X + 2Y - 1\Big) - 8\Big(2X - Y + 3\Big) + 10 = 0.$$

Теперь остается привести подобные:

$$\frac{25}{5}X^2 + \frac{50}{5}Y^2 - 5 = 0;$$

$$5X^2 + 10Y^2 - 5 = 0.$$

Ответ: $5X^2 + 10Y^2 - 5 = 0$.

2) $32x^2 + 60xy + 7y^2 - 16x - 2y + 1 = 0$;
3) $2xy + 3x - y - 2 = 0$;
4) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;
5) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$.

Задача 73. Найти асимптоты следующих гипербол:
1) $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0$;
2) $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$;
3) $10xy - 2y^2 + 6x + 4y - 21 = 0$;
4) $2x^2 - 3xy - x + 3y + 4 = 0$.

Задача 74. Как преобразуется уравнение гиперболы

$$2x^2 - 12xy - 7y^2 + 8x + 6y = 0,$$

если за оси координат принять ее асимптоты?

3 ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

3.1 Поверхности вращения. Конические и цилиндрические поверхности

Вращением плоской линии Ф вокруг данной прямой a называется такое движение линии Ф, при котором каждая точка А этой линии в плоскости, перпендикулярной некоторой прямой a описывает окружность с центром в точке A_1, где A_1 — проекция точки А на эту прямую. Прямая a называется *осью вращения.*

Поверхностью вращения называется фигура, образованная вращением некоторой линии вокруг некоторой оси в пространстве (рис. 23).

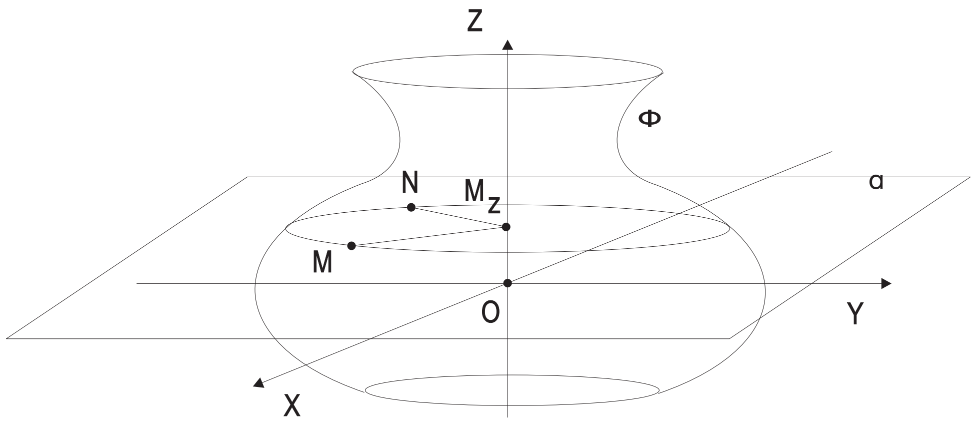


Рис. 23:

Ось вращения является осью симметрии поверхности вращения.

Для того чтобы получить уравнение поверхности вращения плоской линии

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0; \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

вокруг оси OZ, нужно привести уравнение этой линии к виду

$$\begin{cases} x = \varphi_1(z); \\ y = \varphi_2(z), \end{cases}$$

возвести обе части полученных уравнений в квадрат и сложить уравнения почленно.

Вывод уравнения поверхности вращения вокруг других координатных осей аналогичен.

Любая поверхность вращения может быть образована вращением некоторой плоской кривой. Поэтому каждому типу плоских линий второго порядка соответствует некоторый тип поверхностей вращения.

Вращая прямую

$$\begin{cases} x = a; \\ y = 0. \end{cases}$$

вокруг оси OZ, получим *круговой цилиндр* (рис. 24, A)):

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Вращая окружность

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2; \\ y = 0. \end{cases}$$

вокруг оси OZ, получим *сферу* (рис. 24, B)):

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

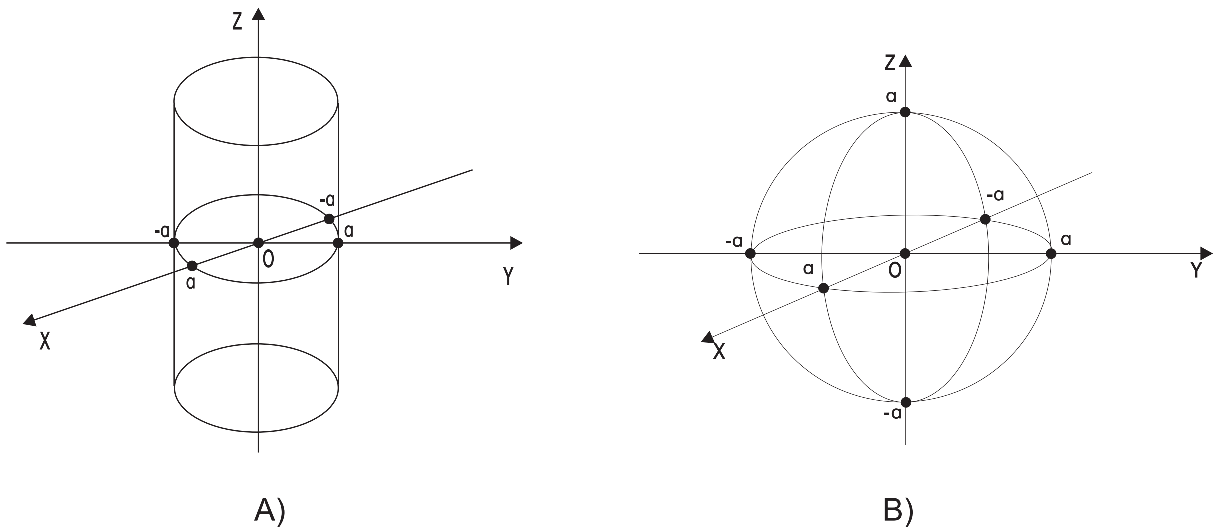


Рис. 24:

Вращая эллипс:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1; \\ y = 0. \end{cases}$$

вокруг оси OZ, получим *эллипсоид вращения* (рис. 25, A)):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Вращая гиперболу:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1; \\ y = 0. \end{cases}$$

вокруг оси OZ, получим *однополостный гиперболоид вращения* (рис. 25, B)):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

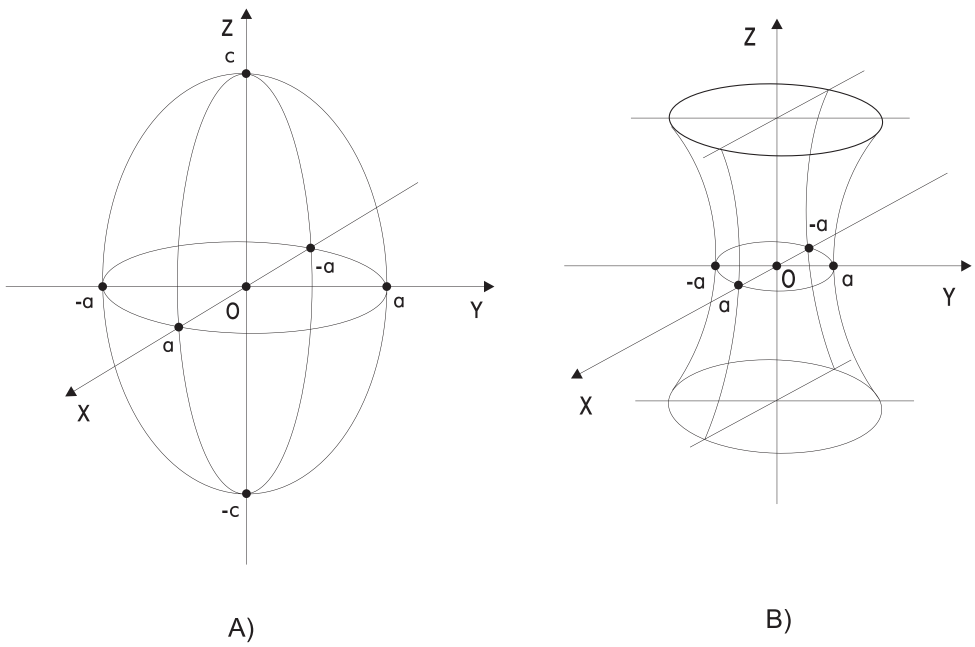


Рис. 25:

Вращая же эту гиперболу вокруг оси OX, получим *двуполостный гиперболоид вращения* (рис. 26):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Вращая параболу:

$$\begin{cases} x^2 = 2pz; \\ y = 0. \end{cases}$$

вокруг оси OZ, получим *параболоид вращения* (рис. 27, A)):

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 2z$$

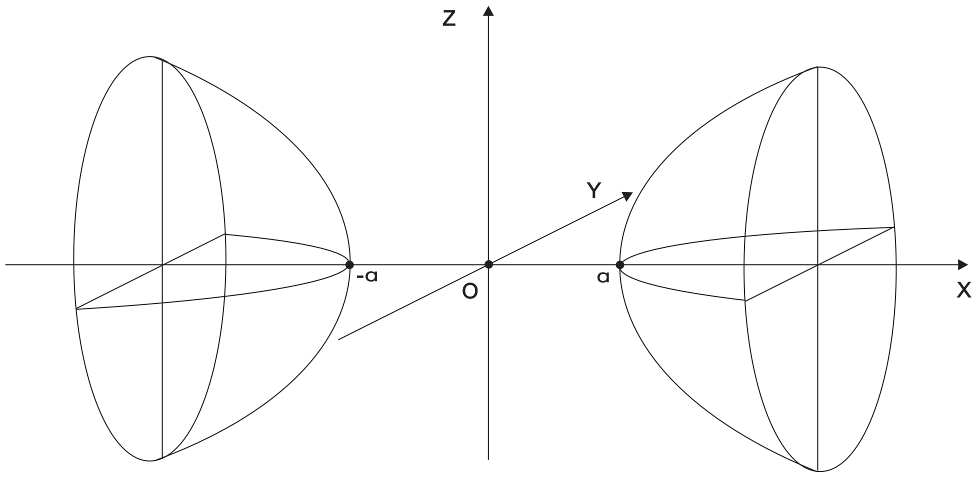


Рис. 26:

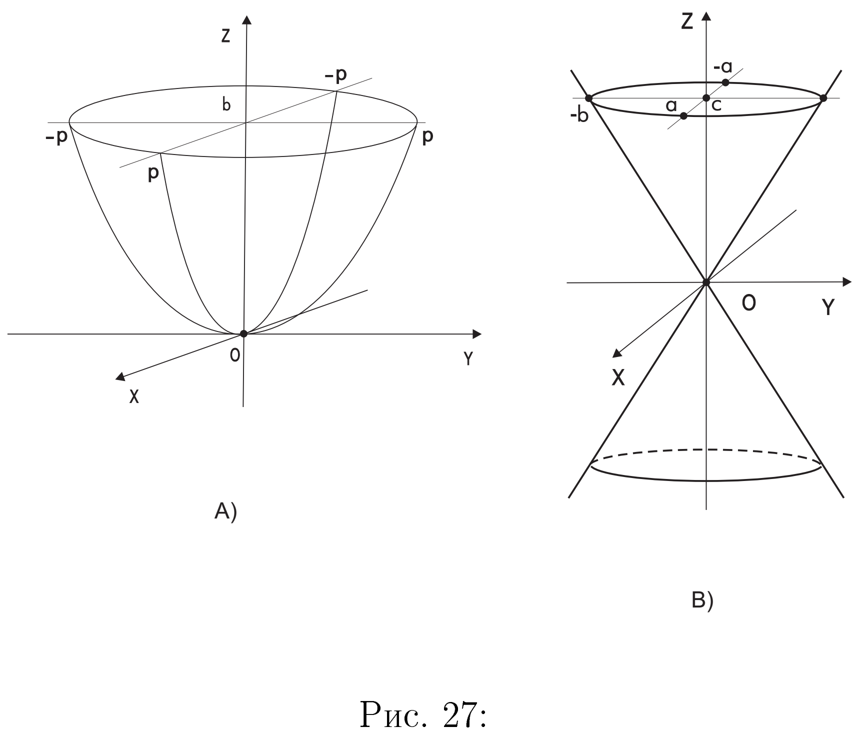


Рис. 27:

Конической поверхностью или просто *конусом* называется поверхность, которая образуется движением некоторой прямой (*образующей*), проходящей через неподвижную точку (*вершину*) и пересекающей неподвижную линию (*направляющую*) (рис. 27, В)).

Коническая поверхность определяется уравнением

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0.$$

Цилиндрической поверхностью или *цилиндром* называется поверхность, которая образуется движением некоторой прямой (*образующей*), сохраняющей своё направление и пересекающей некоторую неподвижную линию (*направляющую*).

Эллипс, заданный системой

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1; \\ z = 0, \end{cases}$$

выступая в качестве направляющей, образует *эллиптический цилиндр*, который имеет следующее уравнение (рис. 28, А)):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Парабола, заданная системой

$$\begin{cases} y^2 = 2px; \\ z = 0, \end{cases}$$

выступая в качестве направляющей, образует параболический цилиндр, который имеет следующее уравнение (рис. 28, В)):

$$y^2 = 2px.$$

Гипербола, заданная системой

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1; \\ z = 0, \end{cases}$$

выступая в качестве направляющей, образует *гиперболический цилиндр* (рис. 28), который имеет следующее уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

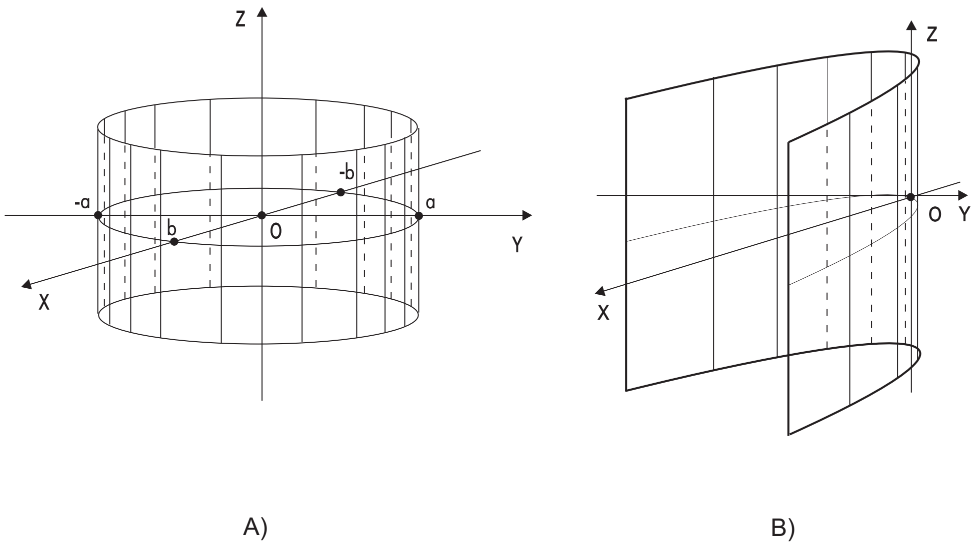


Рис. 28:

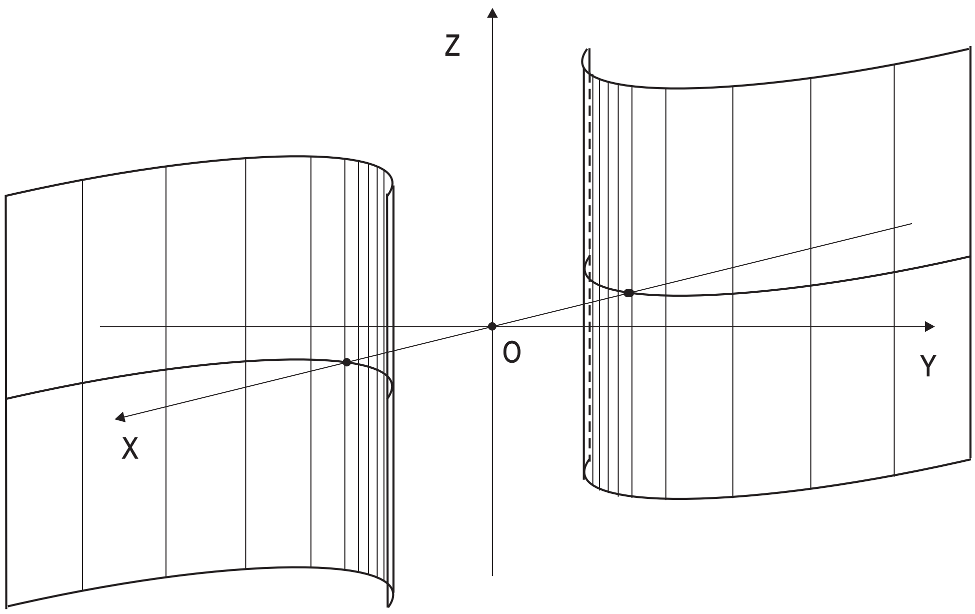


Рис. 29:

В общем же, любое уравнение второго порядка относительно двух переменных в пространстве определяет некоторую цилиндрическую поверхность. Действительно, пусть (x_1, x_2) — произвольное решение некоторого уравнения второго порядка относительно двух переменных. Тогда этому решению соответствует бесконечное множество троек (x_1, x_2, x_3), где x_3 — любое действительное число. В свою очередь эти тройки определяют в некоторой ПДСК-3 бесконечное множество точек, образующее прямую, параллельную той координатной оси, которая соответствует переменной x_3.

Задача 75. Какие фигуры заданы в ПДСК-3 уравнениями и неравенствами:

1.$x^2 + y^2 - a^2 = 0$;
2.$y^2 + z^2 > 25$;
3.$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$;
4.$y^2 = 8z$;
5.$(y - x)^2 - z^2 = 0$;
6.$x^2 + y^2 + 9 = 0$.

Задача 76. Составить уравнение кругового цилиндра, если известны уравния его оси:

$$\begin{cases} x = 5 + 2t; \\ y = 1 - t; \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

и координаты одной его точки $M_0(2, 0, 1)$.

Решение. Расстояние от любой точки кругового цилиндра до его оси есть величина постоянная. Чтобы найти эту величину для данного в условии кругового цилиндра, воспользуемся координатами точки M_0 и уравнением оси — найдем расстояние между ними. Это расстояние можно найти по формуле

$$d = \frac{|\vec{a} \times \overrightarrow{AM_0}|}{|\vec{a}|},$$

где $\vec{a}$ — направляющий вектор оси, а A — точка оси из ее параметрических уравнений, т.е., $\vec{a}(2, -1, 2)$ и $A(5, 1, 3)$. Тогда, если $M(x, y, z)$ — произвольная точка цилиндра, то получим:

$$d = \frac{|\vec{a} \times \overrightarrow{AM_0}|}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a} \times \overrightarrow{AM}|}{|\vec{a}|}.$$

Поэтому получим соотношение

$$|\vec{a} \times \overrightarrow{AM_0}| = |\vec{a} \times \overrightarrow{AM}|.$$

Это соотношение и является искомым уравнением кругового цилиндра. Осталось перейти к координатной записи. Прежде найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{AM_0}(-3, -1, -2); \quad \overrightarrow{AM}(x-5, y-1, z-3).$$

Затем найдем модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\overrightarrow{AM_0}$:

$$|\vec{a} \times \overrightarrow{AM_0}| = |(2, -1, 2) \times (-3, -1, -2)| = mod \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$\left|(2+2)\vec{i} + (4-6)\vec{j} + (-2-3)\vec{k}\right| = |4\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k}| =$$

$$\sqrt{4^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{45}.$$

Теперь найдем модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\overrightarrow{AM}$:

$$|\vec{a} \times \overrightarrow{AM}| = |(2, -1, 2) \times (x-5, y-1, z-3)| =$$

$$mod \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ x-5 & y-1 & z-3 \end{vmatrix} =$$

$$\left|(3 - z + 2 - 2y)\vec{i} + (6 - 2z + 2x - 10)\vec{j} + (2y - 2 + x - 5)\vec{k}\right| =$$

$$|(-2y - z + 5)\vec{i} + (2x - 2z - 4)\vec{j} + (x + 2y - 7)\vec{k}| =$$

$$\sqrt{(-2y - z + 5)^2 + (2x - 2z - 4)^2 + (x + 2y - 7)^2} =$$

$$\sqrt{5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy - 8xz + 4yz - 32x - 48y + 6z + 90}.$$

Осталось приравнять:

$$\sqrt{5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy - 8xz + 4yz - 30x - 48y + 6z + 90} = \sqrt{45};$$

$$5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy - 8xz + 4yz - 30x - 48y + 6z + 90 = 45;$$

$$5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy - 8xz + 4yz - 30x - 48y + 6z + 45 = 0.$$

Ответ: $5x^2+8y^2+5z^2+4xy-8xz+4yz-30x-48y+6z+45=0$.

Задача 77. Составьте уравнение цилиндра, если он состоит из прямых:

1) параллельных вектору $\vec{a}(1,0,1)$ и проходящих через точки эллипса

$$\begin{cases} 9x^2+4y^2-18x-16y-11=0; \\ z=0 \end{cases}$$

Решение. Прямая, параллельная вектору $\vec{a}$ имеет уравнение

$$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{0}=\frac{Z-z}{1}.$$

Пусть $M(x,y,0)$ – точка этой прямой, которая принадлежит данному в условии эллипсу. Тогда уравнение прямой примет вид:

$$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{0}=\frac{Z-0}{1}.$$

Отсюда получим два соотношения: $X-x=Z$ и $Y-y=0$. Если теперь определить координаты точки M как переменные и подставить их в уравнение эллипса, то мы получим бесконечное множество точек, каждая из которых принадлежит эллипсу, т.е. в результате мы получим бесконечное множество прямых, каждая из которых параллельна вектору $\vec{a}$ и проходит через некоторую точку эллипса. Это множество и будет являться искомым цилиндром. Для того, чтобы совершить указанное действие, выразим из полученных выше соотношений координаты точки M: $x = X-Z$; $y=Y$. Теперь осталось только подставить эти координаты в уравнение эллипса:

$$9(X-Z)^2+4Y^2-18(X-Z)-16Y-11=0;$$

$$9X^2+4Y^2+9Z^2-18XZ-18X+18Z-16Y-11=0.$$

Ответ: $9X^2+4Y^2+9Z^2-18XZ-18X+18Z-16Y-11=0$.

2) параллельных оси Ox и проходящих через точки параболы

$$\begin{cases} 2z-y^2+4y-6=0; \\ x=0, \end{cases}$$

3) параллельных биссектрисе координатного угла $(\widehat{j, k})$ и проходящих через точки гиперболы

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 25 = 0; \\ z = 0. \end{cases}$$

Задача 78. Составьте уравнение фигуры, полученной вращением вокруг оси Ox прямой

$$\begin{cases} z - 2 = 0; \\ y = 0. \end{cases}$$

Решение. Выразим из первого уравнения переменные z и y как функции от переменной x:

$$\begin{cases} z = 2; \\ y = 0. \end{cases}$$

Возведем теперь в квадрат обе части каждого из уравнений:

$$\begin{cases} z^2 = 4; \\ y^2 = 0. \end{cases}$$

Теперь осталось сложить почленно эти два уравнения:

$$y^2 + z^2 = 4$$

и представить затем в каноническом виде:

$$\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Ответ: $\dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{4} = 1.$

Задача 79. От скольких параметров зависит множество:

1) всех круговых цилиндров пространства?
2) всех круговых цилиндров, имеющих данный радиус?
3) всех круговых цилиндров, имеющих данную ось?
4) всех круговых цилиндров, проходящих через данную прямую?

Задача 80. Какие фигуры заданы в ПДСК-3 уравнениями и неравенствами:

1) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$;
2) $x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0$;
3) $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y + 2z + 4 = 0$;
4) $(x-2)^2 + (y+1)^2 - (z-1)^2 \leqslant 0$;
5) $9x^2 - 36y^2 + 4z^2 - 18x + 144y - 8z - 131 > 0$.

Задача 81. Напишите уравнение фигуры, полученной вращением прямой

$$\begin{cases} x - 2y = 0; \\ z = 0. \end{cases}$$

вокруг оси: 1) Ox; 2) Oy.

Задача 82. Напишите уравнение конуса, если он состоит из прямых, проходящих через точку S:

1) $S(1,1,0)$ и точки окружности

$$\begin{cases} x^2 + z^2 - z = 0; \\ y = 0; \end{cases}$$

Решение. Пусть $M(x,0,z)$ — некоторая произвольная точка окружности и $N(X,Y,Z)$ — некоторая произвольная точка конуса. Так как образующая (прямая) проходит через точку S, то координаты точки N должны удовлетворять уравнению прямой, проходящей через точки M и S. Тогда, подставив в уравнение прямой координаты этих точек, получим:

$$\frac{X-x}{1-x} = \frac{Y-0}{1-0} = \frac{Z-z}{0-z}$$

или

$$\frac{X-x}{1-x} = \frac{Y}{1} = \frac{Z-z}{-z}.$$

Тогда, по свойству пропорций, получим:

$$X - x = Y(1-x); \quad Yx - x = Y - X; \quad x = \frac{Y-X}{Y-1}.$$

$$Z - z = -zY; \quad Yz - z = -Z; \quad z = \frac{-Z}{Y-1}.$$

Подставим полученные выражения для переменных в уравнение эллипса:

$$\left(\frac{Y-X}{Y-1}\right)^2 + \left(\frac{-Z}{Y-1}\right)^2 - \frac{-Z}{Y-1} = 0;$$

$$\frac{(Y-X)^2+Z^2+Z(Y-1)}{(Y-1)^2}=0;$$

$$Y^2-2XY+X^2+Z^2+ZY-Z=0.$$

Ответ: $x^2+y^2+z^2-2xy+zy-z=0.$

2) $S(1,0,0)$ и точки окружности

$$\begin{cases} y^2+z^2=16; \\ x=0. \end{cases}$$

3) $S(4,0,-3)$ и точки эллипса

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{9}=1; \\ x=0; \end{cases}$$

4) $S(0,0,0)$ и точки окружности

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2; \\ z=c. \end{cases}$$

Задача 83. Напишите уравнение кругового конуса, если:

1) ось Oz является его осью, вершина находится в начале координат, а точка $M_0(3,-4,7)$ — одна из точек этого конуса;

2) ось Oy является его осью, вершина находится в начале координат, а образующие наклонены под углом 60° к оси Oy;

3) осью конуса является прямая $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$, вершина принадлежит плоскости Oyz, а точка $M_0(1,1,-\dfrac{5}{2})$ — конусу.

Указание. Вначале нужно найти вершину конуса — это точка пересечения координатной плоскости Oyz с осью конуса (для всех точек этой плоскости $x=0$). Затем нужно совершить преобразование системы координат, состоящее в последовательном выполнении параллельного переноса начала системы координат в вершину конуса, поворота вокруг координатной оси Oz и поворота вокруг координатной оси Oy таким образом, чтобы ось конуса оказалась осью абсцисс в новой системе координат. После выполнения этих преобразований нужно получить формулы общего преобразования системы координат. Теперь можно написать каноническое уравнение кругового конуса в общем виде. Для того, чтобы найти значения полуосей, нужно найти новые координаты точки M и подставить их в полученное уравнение.

Задача 84. Докажите, что уравнение $x^2 = yz$ задает конус с вершиной в начале координат.

Задача 85. От скольких параметров зависит множество всех круговых конусов пространства?

Задача 86. Составить уравнение круглого конуса, проходящего через все координатные оси.

Указание. За направляющую конуса нужно взять окружность. которая пересекает все три оси и расположена в любой плоскости, образующей с осями координат равные углы. Такая окружность может быть задана системой

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = 6a^2; \\ x + y + z = 3a. \end{cases}$$

Задача 87. Направляющая цилиндра задана системой

$$\begin{cases} x = y^2 + z^2; \\ x = 2z, \end{cases}$$

а образующая перпендикулярна к плоскости направляющей. Составить уравнение цилиндра.

Задача 88. Составить уравнение цилиндра, описанного около сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

зная, что ось его составляет равные углы с тремя осями координат.

Задача 89. Даны три параллельные прямые

$$x = y = z;$$

$$x + 1 = y = z - 1;$$
$$x - 1 = y + 1 = z - 2.$$

Найти проходящий через них круговой цилиндр.

Указание. Направляющей цилиндра служит окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной к данным прямым и проходящей через точки пересечения этой плоскости с данными прямыми.

3.2 Сфера и эллипсоид

Эллипсоидом называется фигура (рис. 30, А)), которая в некоторой ПДСК-3 задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Если $a=b=c$, то эллипсоид становится сферой:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1,$$

для которой можно получить известное уравнение:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2,$$

где $S(a,b,c)$ — центр сферы, а r — ее радиус (рис. 30, В)).

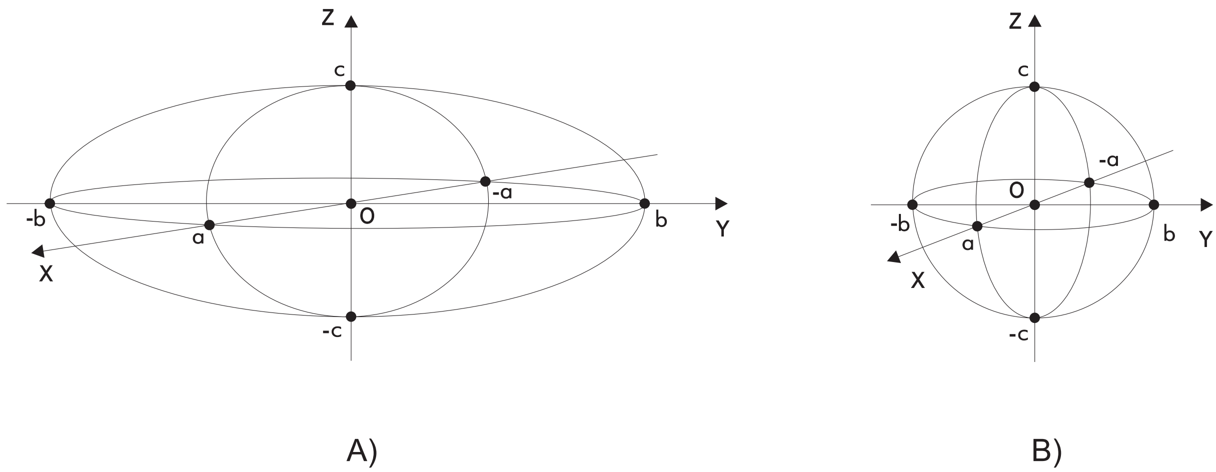


Рис. 30:

Задача 90. Найдите координаты центра и радиус каждой из сфер:
1) $x^2+y^2+z^2+2x-6y+8z+10=0$;
2) $x^2+y^2+z^2-12x-6y+37=0$;
3) $x^2+y^2+z^2-2x+6y-8z+26=0$;
4) $x^2+y^2+z^2+4y-10z+10=0$.

Задача 91. Написать уравнение шаровой поверхности, имеющей центр в точке

1) $(2,-1,3)$и радиус$R=6$;

2) $(0,0,0)$и проходящей через точку$M(6,-2,3)$.

Задача 92. Составить уравнение сферы, описанной около тетраэдра, одна из вершин которого совпадает с началом координат, а три другие находятся в точках $A(2,0,0)$, $B(0,5,0)$, $C(0,0,3)$.

Задача 93. Напишите уравнение сферы, проходящей через точку $A(1,5,1)$ и окружность

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-5)^2=16; \\ z=0. \end{cases}$$

Задача 94. Найдите координаты центра и радиус окружности

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-12x+4y+24=0; \\ 2x+2y+z+1=0. \end{cases}$$

Решение: Данная в условии задачи окружность представляет собой линию пересечения плоскости и сферы. Найдем каноническое уравнение сферы. Выделив для этой цели полные квадраты, получим:

$$(x^2+12x+36)+(y^2+4y+4)+(z^2)-36-4+24=0;$$

$$(x-6)^2+(y+2)^2+z^2=16.$$

Следовательно, центром сферы является точка $O(6,-2,0)$, а ее радиус равен 4. Центр искомой окружности — точка O_1 — является точкой пересечения плоскости $2x+2y+z+1=0$ и прямой, перпендикулярной ей и проходящей через центр данной сферы, т.е. точку $O(6,-2,0)$ (рис. 31).

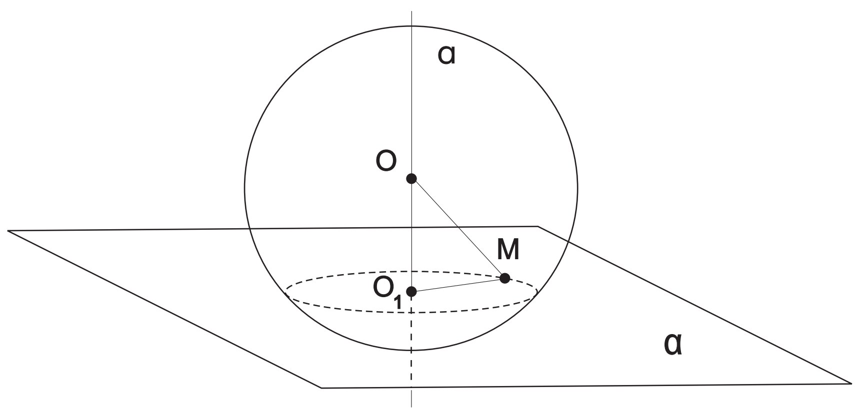


Рис. 31:

В качестве направляющего вектора указанной прямой возьмем нормальный вектор плоскости, т.е. вектор $\vec{n}(2, 2, 1)$. Тогда каноническое уравнение прямой примет вид:

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}.$$

Перейдем к параметрическим уравнениям:

$$\begin{cases} x = 6 + 2t; \\ y = -2 + 2t; \\ z = t. \end{cases}$$

Подставив эти выражения для переменных в уравнение плоскости, мы получим:

$$2(6 + 2t) + 2(-2 + 2t) + t + 1 = 0;$$
$$12 + 4t - 4 + 4t + t + 1 = 0;$$
$$t = -1.$$

Подставив полученное значение параметра t в параметрические уравнения прямой, мы получим координаты точки пересечения прямой и плоскости, т.е. координаты точки $O_1(4, -4, -1)$. Найдем расстояние OO_1 :

$$OO_1 = \sqrt{(6-4)^2 + (-2-(-4))^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{4+4+1} = 3.$$

Теперь радиус окружности можно найти используя теорему Пифагора:

$$r = \sqrt{OM^2 - OO_1^2} = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}.$$

Ответ: $O(4, -4, -1)$; $r = \sqrt{7}$.

Задача 95. Составьте уравнение сферы, проходящей через:

1) начало координат и окружность

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 49; \\ 2x + 2y - z + 4 = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Решение. Уравнение искомой сферы имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2,$$

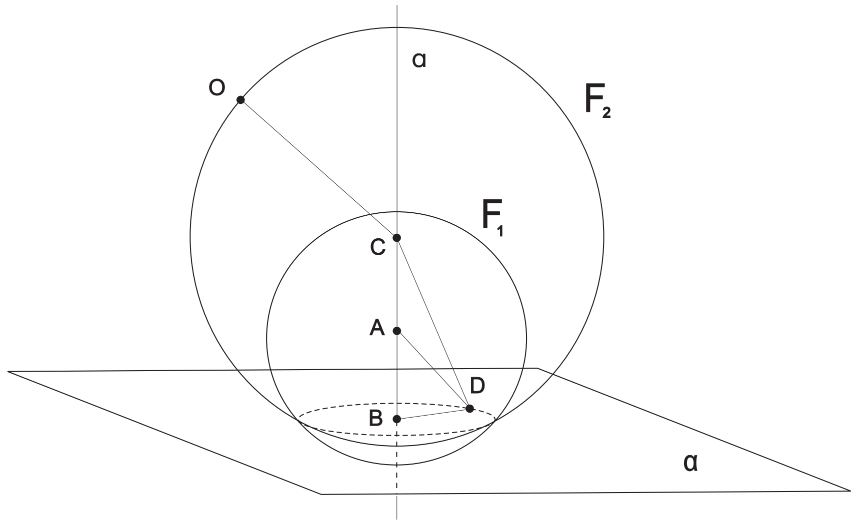


Рис. 32:

где $C(x_0, y_0, z_0)$ — ее центр, а r — радиус. Окружность, данная в условии задачи, представляет собой линию пересечения сферы

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 49$$

и плоскости $2x - 2y - z + 4 = 0$. Обозначим данную в условии сферу через F_1, сферу, уравнение которой мы ищем через F_2 и данную в условии плоскость через α (рис. 32). Тогда центр окружности (точка B), центр сферы F_1 (точка A) и центр сферы F_2 (точка C) будут лежать на некоторой прямой a, которая перпендикулярна плоскости α. В качестве напрявляющего вектора этой прямой, можно выбрать нормальный вектор плоскости a — вектор $\vec{n}(2, 2, -1)$, а в качестве фиксированной точки, через которую проходит прямая a можно выбрать центр сферы F_1 — точку $A(-1, 2, -2)$. Тогда уравнение прямой a будет иметь вид:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}.$$

Перейдем к параметрическим уравнениям прямой:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t; \\ y = 2 + 2t; \\ z = -2 - t. \end{cases}$$

Если D — некоторая произвольная точка окружности, то ее координаты удовлетворяют системе (*). Выразим из уравнения плоскости переменную z: $z = 2x + 2y + 4$ и подставим полученное выражение в уравнение сферы F_1 :

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (2x + 2y + 4 + 2)^2 = 49;$$

$$x^2+2x+1+y^2-4y+4+4x^2+4y^2+36+24x+24y=49;$$
$$5x^2+5y^2+26x+20y+8xy-8=0.$$

Возьмем теперь некоторое произвольное значение для одной из переменных последнего уравнения. Тогда получится квадратное уравнение относительно другой переменной. Для того, чтобы квадратное уравнение оказалось с достаточно удобными в вычислениях значениями действительных корней, можно воспользоваться простым подбором. В данном случае при $x=1$, получаем:

$$5y^2+28y+23=0.$$

Одним из корней этого уравнения является $y=-1$. Подставив полученные значения для x и y в уравнение плоскости, получим, что $z=4$. Следовательно, $D(1,-1,4)$.

Поскольку точка $C(x_1,y_1,z_1)$ лежит на прямой a, то существует некоторое действительное значение параметра $t=t_1$ такое, что

$$\begin{cases} x_1=-1+2t_1; \\ y_1=2+2t_1; \\ z_1=-2-t_1. \end{cases}$$

Следовательно, $C(-1+2t_1,2+2t_1,-2-t_1)$. Сфере F_2 принадлежат как точка $D(1,-1,4)$, так и точка $O(0,0,0)$. Следовательно, $DC=OC$. Перейдя к координатам, получим:

$$\sqrt{(-1+2t_1-1)^2+(2+2t_1+1)^2+(-2-t_1-4)^2}=$$
$$\sqrt{(-1+2t_1-0)^2+(2+2t_1-0)^2+(-2-t_1-0)^2}$$

или

$$\sqrt{(2t_1-2)^2+(2t_1+3)^2+(-t_1-6)^2}=$$
$$\sqrt{(-1+2t_1)^2+(2+2t_1)^2+(-2-t_1)^2}.$$

Поскольку в обеих частях этого равенства стоят положительные числа, то можно возвести обе части в квадрат:

$$(2t_1-2)^2+(2t_1+3)^2+(-t_1-6)^2=(-1+2t_1)^2+(2+2t_1)^2+(-2-t_1)^2.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных, получаем линейное уравнение из которого $t_1=-5$. Отсюда получаем координаты точки $C(-11,-8,3)$. Теперь можно найти радиус сферы F_2 — т.е. расстояние OC:

$$OC=\sqrt{(-11-0)^2+(-8-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{121+64+9}=\sqrt{194}.$$

Осталось подставить полученные данные в уравнение сферы:

$$(x+11)^2 + (y+8)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{194}.$$

Раскроем скобки и приведем подобные:

$$x^2 + 22x + 121 + y^2 + 16y + 64 + z^2 - 6z + 9 = 194;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 22x + 16y - 6z = 0.$$

Ответ: $x^2 + y^2 + z^2 + 22x + 16y - 6z = 0$.

2) Через точку $A(1, -2, 0)$ и окружность

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 49; \\ 2x + 2y - z + 4 = 0. \end{cases}$$

3) окружности

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9; \\ z = 0. \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25; \\ z = 2. \end{cases}$$

Задача 96. Написать уравнение сферы, которая касается прямой

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-6}{4}$$

в точке $A(1, -4, 6)$ и прямой

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-6}$$

в точке $B(4, -3, 2)$.

Указание. Сначала нужно найти координаты центра сферы. Это будет точка пересечения трех плоскостей. Первая из них перпендикулярна первой из данных прямых и проходит через точку A, вторая плоскость перпендикулярна второй из данных прямых и проходит через точку B, третья плоскость перпендикулярна отрезку AB и проходит через его середину.

Задача 97. Найдите центр и длины полуосей эллипсоидов:
1) $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$;
2) $16(x-1)^2 + 9(y+2)^2 + 36(z-2)^2 = 144$;

3) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 + 8x + 36y - 72z + 40 = 0$;
4) $3x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 6x + 16y - 36z + 49 = 0$.

Задача 98. Составьте уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат и который проходит через:
1) эллипсы

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1; \\ x = 0, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1; \\ z = 0; \end{cases}$$

2) эллипс

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{1} = 1 \\ z = 0, \end{cases}$$

и точку $M_0(2, 0, 1)$;

3)

$$\text{эллипс} \begin{cases} \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{2} = 1 \\ x = 0, \end{cases} \text{ и окружность} \begin{cases} x^2 + y^2 = 25; \\ z = 0. \end{cases}$$

4) три точки $A(2, 2, 4)$, $B(2, -4, -2)$, $C(0, 6, 0)$.

Задача 99. Составьте уравнение фигуры, полученной вращением эллипса

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1; \\ y = 0 \end{cases}$$

вокруг оси: 1)Ox; 2)Oz.

Задача 100. Найдите точки пересечения эллипсоида

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$$

и прямой

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z+2}{4}.$$

3.3 Гиперболоиды и параболоиды

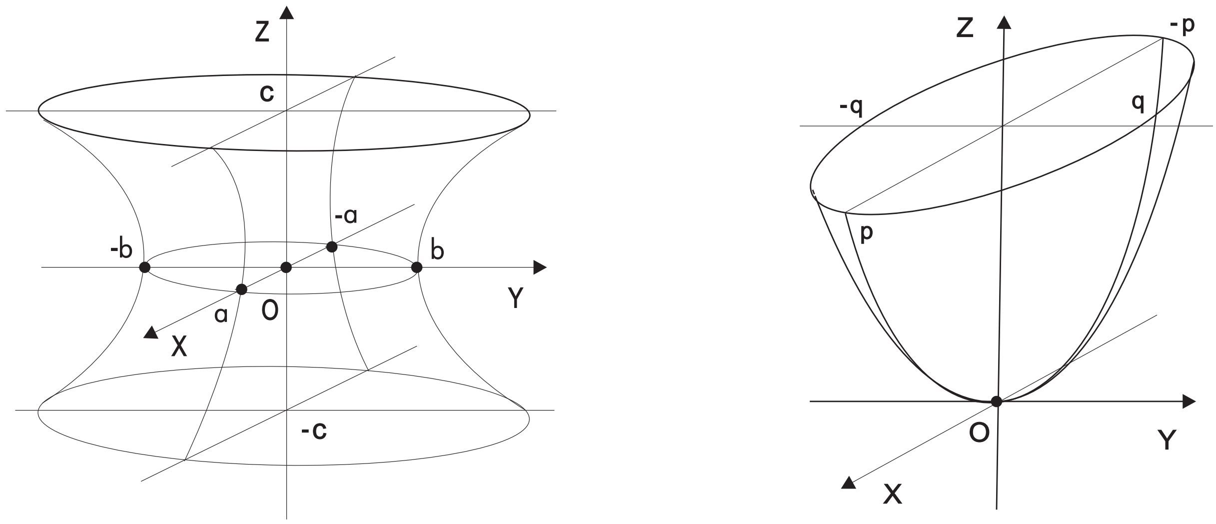
Однополостным гиперболоидом (рис. 33, A)) называется фигура, которая в некоторой ПДСК-3 задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Эллиптическим параболоидом (рис. 33, B)) называется фигура, которая в некоторой ПДСК-3 задается уравнением

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,$$

где $p > 0$ и $q > 0$.



A) B)

Рис. 33:

Двуполостным гиперболоидом (рис. 34) называется фигура, которая в некоторой ПДСК-3 задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Гиперболическим параболоидом (рис. 35) называется фигура, которая в некоторой ПДСК-3 задается уравнением

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,$$

где $p > 0$ и $q > 0$.

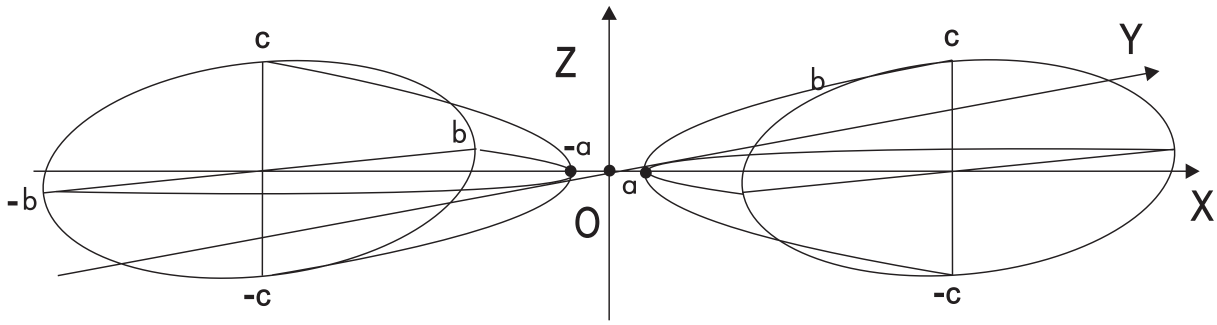


Рис. 34:

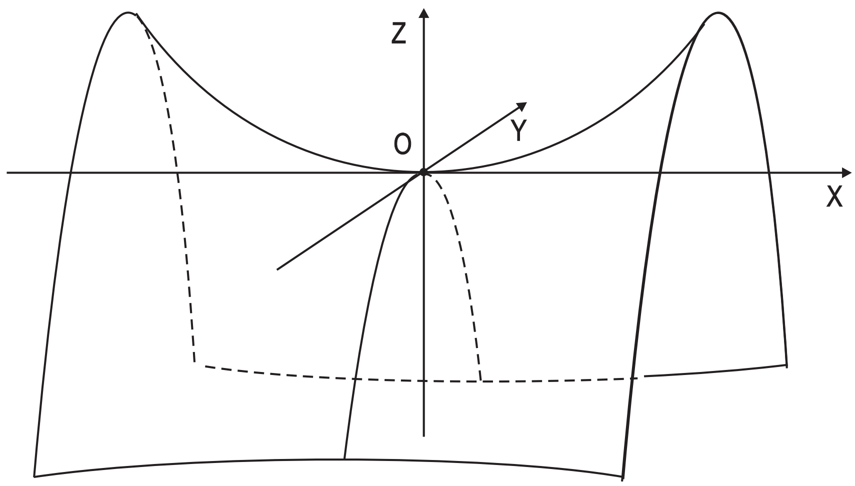


Рис. 35:

Следует отметить, что, допустив для p и q как положительные, так и отрицательные значения, мы получим все возможные параболоиды — эллиптические с направлением ветвей вверх и вниз, гиперболические с направлением вверх и вниз.

Однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид являются так называемыми *линейчатыми поверхностями* (рис. 36).

Линейчатые поверхности состоят из бесконечного множества прямых, которые разбиваются на два семейства. Любые две прямые, принадлежащие одному семейству не пересекаются. а разным — пересекаются.

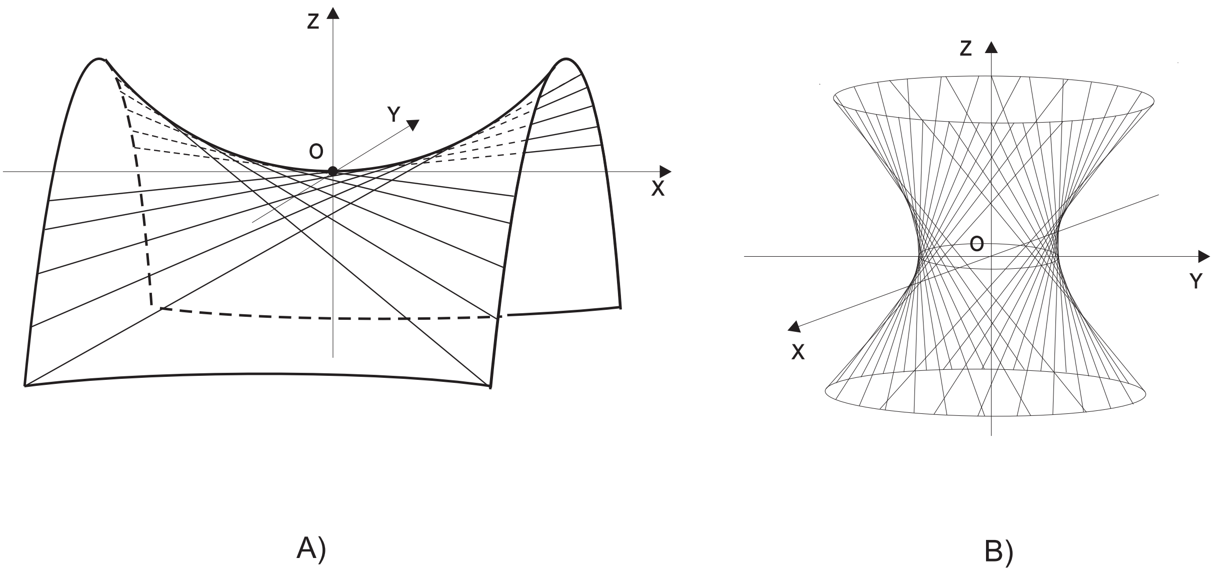


Рис. 36:

Для однополостного гиперболоида двумя семействами прямолинейных образующих являются

$$\begin{cases} (\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = u(1 - \frac{y}{b}); \\ (\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = \frac{1}{u}(1 + \frac{y}{b}); \end{cases} \qquad \begin{cases} (\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = v(1 + \frac{y}{b}); \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = \frac{1}{v}(1 - \frac{y}{b}). \end{cases}$$

Для гиперболического параболоида двумя семействами прямолинейных образующих являются

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{z}{v}; \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 2v; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 2u; \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{z}{u}. \end{cases}$$

Здесь u и v — некоторые числовые параметры. Для каждого конкретного значения параметра получается конкретная прямая, принадлежащая поверхности.

Через каждую точку линейчатой поверхности проходят две прмые, целиком принадлежащие этой поверхности, которые принадлежат разным семействам прямолинейных образующих.

Задача 101. Выясните, какие фигуры заданы уравнениями:

1) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1;$

2) $x^2-\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}=1;$

3) $3x^2-9y^2+4z^2+36=0;$

4) $3(x-1)^2+9(y-2)^2-4(z+1)^2-36=0;$

5) $2x^2+y^2-z^2+16x-2y+4z+17=0;$

6) $x^2+2y^2-4z^2-6x+4y+32z-49=0;$

7) $\dfrac{x^2}{4}+y^2+z=0;$

8) $\dfrac{z^2}{9}-\dfrac{x^2}{4}=2y;$

9) $x^2-\dfrac{y^2}{16}+2z=0;$

10) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}+2z=0;$

11) $x^2+2y^2+6x-18y+8z+49=0;$

12) $x^2-2y^2+6x+4y-8z+47=0;$

13) $2x^2+3y^2+6x-18y-12z+47=0;$

14) $2x^2-3y^2+12x+12y-12z-42=0.$

Задача 102. Установите, какие фигуры заданы системами уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{36}=1; \\ 9x-18=0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{18}+\dfrac{z^2}{2}=1; \\ z+1=0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{4}=1; \\ -10z-20=0. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{4}=1; \\ x=2z. \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=2z; \\ z-4=0. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2+z^2=2y; \\ z+1=0. \end{cases}$

Задача 103. Напишите уравнение фигуры, отношение расстояний каждой точки которой от точки $F(0,0,2)$ и плоскости $z=1$ равно $\sqrt{2}$.

Задача 104. Напишите уравнение фигуры. каждая точка которой одинаково удалена от точки $F(-a,0,0)$ и плоскости $x=a$.

Задача 105. Напишите уравнение фигуры, для каждой точки которой модуль разности расстояний до двух данных точек $F_1(0,0,3)$ и $F_2(0,0,-3)$ есть величина постоянная, равная четырем.

Задача 106. Напишите уравнение фигуры, полученной вращением

1) гиперболы $\begin{cases} x^2-\dfrac{y^2}{4}=1; \\ z=0. \end{cases}$ вокруг осиOx;

2) гиперболы $\begin{cases} x^2-\dfrac{y^2}{4}=1; \\ z=0. \end{cases}$ вокруг осиOy;

3) параболы $\begin{cases} x^2=-2z; \\ y=0. \end{cases}$ вокруг осиOz.

Задача 107. Напишите каноническое уравнение однополостного гиперболоида, оси которого проходят через начало координат параллельно координатным осям и который содержит:

1) точку$A(\sqrt{5},3,2)$и фигуру $\begin{cases} \dfrac{x^2}{5}-\dfrac{z^2}{4}=1; \\ y=0; \end{cases}$

2) фигуры $\begin{cases} x^2+y^2=9; \\ z=0. \end{cases}$ и $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{z^2}{10}=1; \\ y=0. \end{cases}$

Задача 108. Напишите уравнение параболоида :

1) вершина которого находится в начале координат, ось совпадает с осью Oy и который содержит точки $A_1(1,-2,1)$ и $A_2(-3,-3,2)$;

2) вершина которого находится в начале координат, ось совпадает с осью Ox и который содержит точки $M_1(1,2,1)$, $M_2(2,4,0)$.

Задача 109. Найдите точки пересечения фигуры второй степени и прямой:

1) $\dfrac{x^2}{4}+y^2-\dfrac{z^2}{9}=-1$ и $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-6}{3}$;

2) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-z^2=1$ и $\begin{cases} x=4+4t; \\ y=-3; \\ z=1+t;. \end{cases}$

3) $x^2-4y^2=4z$ и $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-5}{-2}$;

4) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=z$ и $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{-2}$.

Задача 110. Докажите, что через точку $A(4,3,0)$, принадлежащую гиперболическому параболоиду

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=2z$$

можно провести две прямые, целиком лежащие на параболоиде. Напишите их уравнения.

Решение. Составим два семейства прямолинейных образующих, соответствующих гиперболическому параболоиду, данному в условии задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{v}; \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{3}=2v; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=2u; \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{u}. \end{cases}$$

Поскольку нам нужно найти прямые, проходящие через данную точку, то нужно кординаты этой точки подставить в уравнения образующих:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{4}+\dfrac{3}{3}=\dfrac{0}{v}; \\ \dfrac{4}{4}-\dfrac{3}{3}=2v; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{4}{4}+\dfrac{3}{3}=2u; \\ \dfrac{4}{4}-\dfrac{3}{3}=\dfrac{0}{u}. \end{cases}$$

Тогда мы получим следующие соотношения:

$$\begin{cases} 2=\dfrac{0}{v}; \\ 0=2v; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2=2u; \\ 0=\dfrac{0}{u}. \end{cases}$$

Из второй системы сразу получим, что $u = 1$. Это позволяет определить следующую прямую:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} = 2; \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{3} = z. \end{cases}$$

или прямую

$$\begin{cases} 3x + 4y - 24 = 0; \\ 3x - 4y - 12z = 0. \end{cases}$$

Поскольку эта прямая принадлежит семейству прямолинейных образующих, то она принадлежит и всей поверхности. Кроме того, она проходит через точку A. Следовательно, эта прямая является искомой.

Для семейства прямолинейных образующих, определяемых первой системой, т.е. с помощью параметра u, ситуация оказывается нетривиальной. Из второго уравнения получаем, что $u = 0$. Тогда второе уравнение системы принимает вид:

$$3x - 4y = 0.$$

С первым уравнением поступим следующим образом: умножим обе части уравнения на параметр u и получим в результате:

$$u(\frac{x}{4} + \frac{y}{3}) = z.$$

Теперь, подставив значение параметра, мы прходим к уравнению $z = 0$. Таким образом, из первого семейства прямолинейных образующих мы получаем прямую

$$\begin{cases} z = 1; \\ 3x - 4y = 0. \end{cases}$$

Задача 111. Докажите, что через точку $A(2, 3, -4)$, однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

можно провести две прямые, целиком лежащие на гиперболоиде. Напишите их уравнения.

4 Ответы

1. 1) окружность; 2) точка; 3) $\varnothing$; 4) окружность; 5) $\varnothing$; 6) точка.

2. $(x-1)^2+(y+3)^2=16$.

3. 1) $(x-2)^2+(y-1)^2=25$; 2) $\varnothing$.

4. $x^2+(y-1)^2=2$; $(x-2)^2+(y-3)^2=2$.

6. Из точки A нельзя провести касательную к окружности;

касательная, проведенная из точки B имеет уравнение $x+2y-9=0$;

касательные, проведенные из точки C имеют уравнения $x+2y-9= =0$; $2x-y-8=0$.

7. $x^2+y^2-x-3y-10=0$.

8. 1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$; 3) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{169}=1$.

9. 1) $3,\ 5,\ F_1(0,-4),\ F_2(0,4),\ \varepsilon=\dfrac{4}{5}$,
$y=\dfrac{25}{4},\ y=-\dfrac{25}{4}$;
2) $5,\ 3,\ F_1(-4,0),\ F_2(4,0),\ \varepsilon=\dfrac{4}{5}$,
$x=\dfrac{25}{4},\ x=-\dfrac{25}{4}$.

10. $\dfrac{45}{2}$.

14. $\dfrac{(x-5)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$.

15. 1) точки эллипса $5(x+3)^2+9(y-1)^2=45$;
2)точка$M(-3,1)$; 3)$\varnothing$;
4)полуэллипс $\begin{cases}16(x+3)^2+9(y-1)^2=144,\\ y\leqslant 1;\end{cases}$
5)полуокружность $\begin{cases}(x+2)^2+(y+3)^2=4,\\ x\geqslant -2;\end{cases}$
7)$\varnothing$.

16. $a=5,\ b=12,\ F_1(13,0),\ F_2(-13,0),\ \varepsilon=\dfrac{13}{5},\ y=\dfrac{12}{5}x,\ y=-$ $-\dfrac{12}{5}x,\ x=\dfrac{25}{13},\ x=-\dfrac{25}{13}$.

17. $a=15,\ b=8,\ F_1(0,17),\ F_2(0,-17),\ \varepsilon=\dfrac{17}{8},\ y=\dfrac{8}{15}x,\ y=-$ $-\dfrac{8}{15}x,\ y=\dfrac{64}{17},\ y=-\dfrac{64}{17}$.

18. 1) $-\dfrac{x^2}{11}+\dfrac{y^2}{25}=1$; 2) $-\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{36}=1$; 3) $-\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

19. $r_1=2\dfrac{1}{4},\ r_2=10\dfrac{1}{4}$.

20. 1)гипербола; 2)гипербола; 3) ветвь гиперболы;
4) ветвь гиперболы; 5)гипербола.

21. 3)$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$; 4) $-\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

22. $(x+1)^2-(y-1)^2=2;\ -(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

23. $8xy-4x-4y+3=0$.

25. $91x^2-100xy+16y^2-136x+86y-47=0$.

26. 1) $(x-1)^2=\dfrac{1}{2}(y+2)$.

27. 3м.

28. 12м.

30. 1) $M(\dfrac{1}{10},-1),\ p=-5,$ ось параллельна оси OX;

2) $M(1,-7),\ p=-3,$ ось параллельна оси OX;

3) $M(-2,0),\ p=-4,$ направление оси совпадает с отрицательным направлением оси OX;

4) $M(3,-9),\ p=\dfrac{1}{2},$ ось параллельна оси OY.

32. $x^2+76+4y^2+4xy-48x+4y=0$.

34. $a=13,\ b=5,\ 2c=24$.

35. 1) $\rho=\dfrac{16}{5+\sqrt{41}\cos\varphi}$; 2) $\rho=\dfrac{16}{5-\sqrt{41}\cos\varphi}$.

37. $\rho = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$.

38. 1) гипербола; 2) эллипс; 3)парабола; 4) эллипс 5) гипербола; 6) эллипс.

39. 3) $9(x-1)^2+4(y+2)^2=0$ — мнимые прямые, пересекающиеся в точке $A(1,\ -2)$;

4) мнимый эллипс $\dfrac{(x-1)^2}{\dfrac{1}{9}} + \dfrac{(y+2)^2}{\dfrac{1}{4}} = -1$;

5) гипербола $\dfrac{(x+2)^2}{4} - \dfrac{(y-3)^2}{1} = 1$;

6) параллельные прямые $x-2y+8=0$ и $x+2y-4=0$;

7) гипербола $-\dfrac{(x+2)^2}{4} + (y-3)^2 = 1$;

12) $\Big(3\big(x' - \dfrac{8}{\sqrt{5}}\big)\Big)^2 + \Big(2\big(y' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\big)\Big)^2 = 0$ — мнимые прямые, пересекающиеся в точке $A(\dfrac{8}{\sqrt{5}};\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}})$;

13) мнимый эллипс $\dfrac{(x' - \dfrac{8}{\sqrt{5}})^2}{4} + \dfrac{(y' + \dfrac{1}{\sqrt{5}})^2}{9} = -1$;

14) эллипс $(x' - \sqrt{2})^2 + \dfrac{{y'}^2}{9} = 1$;

15) эллипс $\dfrac{{x'}^2}{16} + \dfrac{(y' - \sqrt{2})^2}{9} = 1$;

16) мнимый эллипс $\dfrac{(x' + \dfrac{3}{\sqrt{5}})^2}{\dfrac{1}{2}} + \big(y' - \dfrac{1}{\sqrt{10}}\big)^2 = -1$;

17) гипербола $\big(x' - \dfrac{5}{\sqrt{10}}\big)^2 - \dfrac{(y' - \dfrac{5}{\sqrt{10}})^2}{9} = 1$;

18) гипербола $-\big(x' - \dfrac{5}{\sqrt{10}}\big)^2 + \dfrac{\big(y' - \dfrac{5}{\sqrt{10}}\big)^2}{9} = 1;$

19) пересекающиеся прямые $9\big(x' - \dfrac{5}{\sqrt{5}}\big)^2 - \big(y' - \dfrac{5}{\sqrt{5}}\big)^2 = 0;$

20) эллипс $\dfrac{\big(x' - \dfrac{4}{\sqrt{17}}\big)^2}{25} - \dfrac{\big(y' + \dfrac{1}{\sqrt{17}}\big)^2}{9} = 1;$

21) гипербола $\dfrac{\big(x' - \dfrac{5}{\sqrt{13}}\big)^2}{4} - \dfrac{\big(y' - \dfrac{4}{\sqrt{13}}\big)^2}{9} = 1;$

22) гипербола $\big(x' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\big)^2 - \dfrac{\big(y' - \dfrac{9}{\sqrt{2}}\big)^2}{4} = 1;$

23) парабола $\big(x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\big)^2 = 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\big(y' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\big);$

24) парабола $x'^2 = -2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}}\big(y' - \dfrac{\sqrt{5}}{2}\big);$

25) парабола $\big(x' + \dfrac{20}{13\sqrt{13}}\big)^2 = -2 \cdot \dfrac{48}{13\sqrt{13}}\big(y' - \dfrac{107}{13\sqrt{13}}\big);$

26) парабола $x'^2 = -2y';$

27) парабола $(y' + 2)^2 = -2(x' - 3);$

28) мнимые параллельные прямые $\big(y' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\big)^2 = -\dfrac{3}{2}.$

40. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 8y - 6 = 0.$

41. При $\lambda \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0)$ — гипербола; при $\lambda = -1$ — пересекающиеся прямые; при $\lambda = 0$ — парабола; при $\lambda \in (0;\ \infty)$ — эллипс.

42. 2) центральна, $O(0;\ 0)$ — центр; 3) центральна, $O(0;\ 0)$ — центр; 4) нецентральна.

43. 1) единственный центр; 2) единственный центр; 3) единственный центр; 4) центра нет; 6) единственный центр; 7) единственный центр; 8) бесконечное множество центров.

44. 3) $9(x-1)^2+4(y+2)^2=0$ — мнимые прямые, пересекающиеся в точке $A(1,\ -2)$;

4) мнимый эллипс $\dfrac{X^2}{\frac{1}{9}}+\dfrac{Y^2}{\frac{1}{4}}=-1$;

5) гипербола $\dfrac{X^2}{4}-\dfrac{Y^2}{1}=1$;

7) гипербола $-\dfrac{X^2}{4}+Y^2=1$;

9) совпавшие параллельные прямые $(x+2y-2)^2=0$;

10) мнимые параллельные прямые $(x+2y-2)^2=-1$;

11) эллипс $\dfrac{X^2}{9}+\dfrac{Y^2}{4}=1$;

12) $9X^2+4Y^2=0$ — мнимые прямые, пересекающиеся в точке $A(\dfrac{8}{\sqrt{5}};\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}})$;

14) эллипс $X^2+\dfrac{Y^2}{9}=1$;

15) эллипс $\dfrac{X^2}{16}+\dfrac{Y^2}{9}=1$;

16) мнимый эллипс $2X^2+Y^2=-1$;

17) гипербола $X^2-\dfrac{Y^2}{9}=1$;

18) гипербола $-X^2+\dfrac{Y^2}{9}=1$

19) пересекающиеся прямые $(3X-Y)(3X+Y)=0$;

20) гипербола $\dfrac{X^2}{25}-\dfrac{Y^2}{9}=1$;

21) гипербола $\dfrac{X^2}{4}-\dfrac{Y^2}{9}=1$;

22) гипербола $X^2-\dfrac{Y^2}{4}=1$;

23) парабола $X^2=2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}Y$;

25) парабола $X^2=-2\cdot\dfrac{48}{13\sqrt{13}}Y$;

26) парабола $X^2=-2Y$;

27) парабола $Y^2=-2X$;

28) мнимые параллельные прямые $Y^2=-\dfrac{3}{2}$.

45. $A_1(5,0)$; $B_1(2,0)$ и $A_2(0,5)$; $B_2(0,1)$.

46. $l=2$.

47. $\lambda_1=\pm5$; $\lambda_2=\pm4$.

48. 2) точки пересечения мнимые;
3) прямая касается кривой в точке $A(1,0)$;
4) прямая пересекает линию только в одной точке $A(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{6})$.

49. $5x+8y-24=0$; $5x-8y-8=0$; $x-4y-2=0$; $x+4y-3=0$.

50. $7x+4y+10=0$ вточке $A(-2,1)$ и $3x-4y+18=0$в точке$B(-2,3)$.

51. $2x+5y=0$; $2x+y=0$.

52. $7x-2y-13=0$; $x-3=0$.

53. 1)точка $A(-2,1)$лежит на данной линии, поэтому через нее можно провести только одну касательную $7x+4y+10=0$;
2) это пара действительных прямых, которые пересекаются в точке $B(3,-3)$.Все касательные этих прямых проходят через точку B.

Следовательно, искомая касательная это прямая, проходящая через точки A и B: $4x + 5y + 3 = 0$.

54. $y + 4 = 0$; $3y - 4 = 0$.

56. $9x + 9y - 1 = 0$; $A(\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$; $9x + 9y + 31 = 0$; $A(-\frac{7}{3})$;

57. $\lambda = \frac{3}{4}$.

58. $6x^2 - xy - 2y^2 + 4y = 0$.

59. $xy + 4x + 6y = 0$; $x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$.

60. $x^2 - 4y^2 - 2x + 4y = 0$.

61. $3x - 2y + 1 = 0$; $3x + 7y + 10 = 0$.

62. $y - 1 = 0$; $4x + 5y + 3 = 0$.

63. $x - 1 = 0$; $x - 2y + 3 = 0$.

64. $x + 1 = 0$.

65. $2x - y - 8 = 0$.

66. 1) $6x + 7y + 4 = 0$; 2) $7x + 10y + 5 = 0$; 3) $x + 3y + 1 = 0$.

67. $17x - 4y - 4 = 0$.

68. $A(-3, 5)$.

69. $2x - y - 5 = 0$.

70. 2) $39x - 26y - 12 = 0$; $(\frac{18}{169}, \frac{-51}{169})$; 3) $y - 1 = 0$; $(-1, 1)$.

71. $5x + 5y + 2 = 0$.

72. 2) $x^2 - y^2 = 1$; 3) $13y^2 - 52x^2 = 1$; 4) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; 5) $\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$.

73. 1) $6x - 2y + 19 = 0$; $2x + 2y - 1 = 0$; 2) $6x + 14y + 11 = 0$; $2x + 2y - 1 = 0$; 3) $5y + 3 = 0$; $25x - 5y + 13 = 0$; 4) $2x - 3y + 1 = 0$; $x - 1 = 0$.

74. $xy = \frac{3}{40}$.

75. 1) Круговой цилиндр; 2) внешние точки кругового цилиндра; 3) внутренние точки кругового цилиндра; 4) параболический цилиндр; 5) пара пересекающихся плоскостей; 6) пустое множество;

77. 2) $2z - y^2 + 4y - 6 = 0$; 3) $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz - 25 = 0$.

79. 1) 5; 2) 4; 3) 1; 4) 2.

80. 1) Конус; 2) конус; 3) конус;
4) граничные и внутренние точки конуса; 5) внешние точки конуса;

81. 1) $x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 0$; 2) $x^2 - 4y^2 + z^2 = 0$.

82. 2) $16(x-1)^2 - y^2 - z^2 = 0$; 3) $18y^2 + 50z^2 + 75xz + 225x - 450 = 0$; 4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$.

83. 1) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{25} - \dfrac{z^2}{49} = 0$; 2) $x^2 - 3y^2 + z^2 = 0$; 3) $35x^2 + 35y^2 - 52z^2 - 232xy - 116xz + 116yz + 232x - 70y - 116z + 35 = 0$.

85. 6.

86. $xy + xz + yz = 0$.

87. $(2x + z)^2 - 10(2x + z) + 25y^2 = 0$.

88. $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 3$;

89. $(10x - 5y - 5z + 2)^2 + (-5x + 10y - 5z + 11)^2 + (5x + 5y - 10z + 13)^2 = 294$.

90. 1) $C(-1, 3, -4)$, $r = 4$; 2) $C(6, 3, 0)$, $r = 2\sqrt{2}$; 3) $C(1, -3, 4)$, $r = 0$; 4) $C(0, -2, 5), r = \sqrt{19}$.

91. 1) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 36$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$.

92. $(x - 1)^2 + (y - \dfrac{5}{2})^2 + (z - \dfrac{3}{2})^2 = \dfrac{19}{2}$.

93. $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 + \left(z + \dfrac{15}{2}\right)^2 = \dfrac{289}{4}$.

95. 2)$x^2 + y^2 + z^2 + 27x + 21y - \dfrac{33}{2}z + 10 = 0$; 3) $x^2 + y^2 + z^2 - 10z - 9 = 0$.

96. $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 121$.

97. 1) $C(0, 0, 0)$, $a = 4$, $b = c = 2$; 2) $C(1, -2, 2)$, $a = 3$, $b = 4$, $c = 2$; 3) $C(-1, -2, 1)$, $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$; 4) $C(1, -2, 3)$, $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{6}$, $c = 2$.

98. 1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{9}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{1}+\dfrac{z^2}{2}=1$;
3) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{2}=1$; 4) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{36}=1$.

99. 1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{9}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{4}=\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$.

100. $A(3,4,-2)$; $B(6,-2,2)$.

101. 1) Однополостный гиперболоид; 2) двуполостный гиперболоид; 3) двуполостный гиперболоид; 4) однополостный гиперболоид; 5) однополостный гиперболоид; 6) двуполостный гиперболоид; 7) эллиптический параболоид; 8) гиперболический параболоид; 9) гиперболический параболоид; 10) эллиптический параболоид; 11) эллиптический параболоид; 12) гиперболический параболоид; 13) эллиптический параболоид; 14) гиперболический параболоидю

102. 1) две пересекающиеся прямые; 2) гипербола; 3) две прямые; 4) две параллельные прямые; 5) эллипс; 6) парабола.

103. $x^2+y^2-z^2=-2$.

104. $y^2+z^2=-4ax$.

105. $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{5}-\dfrac{z^2}{4}=-1$.

106. 1) $x^2-\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{4}=1$; 2) $x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$; 3) $x^2+y^2=-2z$.

107. 1) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{10}=1$.

108. 1) $x^2-3z^2=y$; 2) $\dfrac{y^2}{4}+z^2=2x$

109. 1) $A(4,2,9)$; 2) прямая принадлежит поверхности;
3) $M(4,1,3)$; 4) прямая и поверхность не пересекаются.

Литература

1. Цубербиллер, О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии [Текст]: учеб. пособие для втузов / О.Н. Цубербиллер. — М.: Наука, 1968. — 336 с.

2. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии [Текст]: учеб. пособие для вузов / А.А.Бурдун [и др.]. — Мн.: "Университетское", 1989. — 286 с.

3. Моденов, П.Р. Сборник задач по аналитической геометрии [Текст]: учеб. пособие для вузов / П.Р. Моденов, А.С. Пархоменко — М.: Наука, 1976. — 384 с.

4. Александров, П.С. Лекции по аналитической геометрии [Текст]: учеб. пособие для вузов / П.С.Александров — М.: Наука, 1968. — 911 с.

5. Милованов, М.В. Алгебра и аналитическая геометрия. Часть 1. [Текст]: учеб. пособие для вузов / М.В. Милованов, Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко — Мн.: Вышэйшая школа, 1984. — 302 с.

6. Милованов М.В., Алгебра и аналитическая геометрия. Часть 2. [Текст]: учеб. пособие для вузов / М.В. Милованов [и др.] — Мн.: Вышэйшая школа, 1987. — 269 с.

Учебное издание

Аниськов Валерий Валерьевич

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ В 3 ЧАСТЯХ. ЧАСТЬ 2. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

для студентов 1 курса специальности 1–31 03 01–02 — "Математика (научно-педагогическая деятельность)"

В авторской редакции

Подписано в печать 25.10.2007 г. (93) Формат 60×84 1/16. Бумага писчая № 1. Гарнитура "Таймс". Усл. п. л. 6,5 Уч.-изд. л. 5,04 Тираж 25 экз.

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
"Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины"
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104