А.В.Бузланов, В.С.Монахов

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ
по курсу "Алгебра и теория чисел"
для студентов 1 курса математического факультета

Первое издание было опубликовано в 1991 году. Настоящее издание расширено и дополнено.

Гомель, 2004

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА И СРАВНЕНИЯ.

Вопросы для самоконтроля:

1. Группы

Бинарная алгебраическая операция, её запись. Ассоциативность, коммутативность, нейтальный и симметричный элементы. Полугруппа. Аддитивная и мультипликативная записи. Определение группы в аддитивной и мультипликативной записи. Примеры групп.

2. Кольца и поля

Определение кольца, тела и поля. Примеры колец, не являющихся полями, примеры полей.

3. Делимость в кольце целых чисел

Кольца целых чисел. Делимость целых чисел и её свойства. Теорема о делении с остатком.

4. Алгоритм Евклида для целых чисел

Алгоритм Евклида для целых чисел. Наибольший общий делитель (НОД) целых чисел и его нахождение с помощью алгоритма Евклида. Линейное выражение НОД через исходные числа.

5. Взаимно простые числа

Определение взаимно простых чисел и связь с НОД. Теорема о делимости произведения двух чисел на число, взаимно простое с одним из сомножителей.

6. Простые числа

Определение простого числа. Делимость целого числа на простое. Теорема Евклида о бесконечности множества простых чисел. Основная теорема арифметики.

7. Каноническое разложение числа

Каноническое разложение числа. Наименьшее общее кратное (НОК) чисел. Связь между НОД и НОК. Нахождение НОД и НОК при канонической записи чисел.

8. Сравнения

Сравнение целых чисел и остаток от деления на модуль. Свойства сравнений, не зависящие от модуля. Свойства сравнений, связанные с модулем.

9. Построение кольца классов вычетов

Классы вычетов и их свойства. Операции на классах вычетов. Проверка аксиом кольца.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1.*Доказать, что целое число* $a = n^3 + 17n + 12$ *делится на 6 при любом натуральном n.*

Решение. Число а можно преобразовать следующим образом:
$a = n^3 + 17n + 12 = n^3 - n + 18n + 12 = n(n^2 - 1) + 6(3n + 2) =$
$= (n - 1)n(n + 1) + 6(3n + 2)$.

Из трёх последовательных натуральных чисел одно обязательно делится на 2, другое на 3. Следовательно, произведение $(n-1)n(n+1)$ делится на 6. Поэтому и сумма $(n - 1)n(n + 1) + 6(3n + 2) = a$ делится на 6.

Для решения задач такого типа можно использовать метод математической индукции.

Пример 2.*Доказать, что произведение четырёх последовательных натуральных чисел делится на 4! .*

Решение. Возьмём произведение четырёх последовательных натуральных чисел, начиная с n:

$p_n = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$.

1. При n=1 имеем $p_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$, которое делится на 4! .

2. Предположим, что утверждение выполнено для любого $n \leq k$.

3.Покажем, что утверждение верно при $n = k + 1$. Преобразуем произведение $p_{k+1} = (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$, полученное при подстановке $n = k+1$, следующим образом:

$p_{k+1} = (k + 1)(k + 2)(k + 3)k + 4(k + 1)(k + 2)(k + 3) = p_k + 4(k + 1)(k + +2)(k + 3)$.

По предположению индукции $p_k = k(k + 1)(k + +2)(k + 3)$ делится на 4! Произведение трёх последовательных натуральных чисел $(k+1)(k++2)(k+ + 3)$ делится на 6. Следовательно, $4(k + 1)(k + 2)(k + 3)$ делится на 24=4! . Значит, произведение p_{k+1} делится на 4! . Утверждение доказано.

Пример 3.*Вычислить НОД(96,165) и выразить его через исходные числа.*

Решение. Применим алгоритм Евклида, последовательно выполняя деление с остатком:

$165 = 96 \cdot 1 + 69$
$96 = 69 \cdot 1 + 27$
$69 = 27 \cdot 2 + 15$
$27 = 15 \cdot 1 + 12$
$15 = 12 \cdot 1 + 3$
$12 = 3 \cdot 4$

Последний, не равный нулю остаток в алгоритме Евклида, является НОД, т. е. НОД(96,165)=3. Чтобы выразить НОД(96,165) через исходные числа 96 и 165, двигаемся в алгоритме Евклида снизу вверх, выражая последовательно остатки:

$3 = 15 - 12 = 15 - (27 - 15) = 2 \cdot 15 - 27 =$
$= 2(69 - 27 \cdot 2) - 27 = 2 \cdot 69 - 5 \cdot 27 =$
$= 2 \cdot 69 - 5(96 - 69) = 7 \cdot 69 - 5 \cdot 96 =$
$= 7(165 - 96) - 5 \cdot 96 = 7 \cdot 165 - 12 \cdot 96.$

Итак, НОД(96,165)=$7 \cdot 165 - 12 \cdot 96$.

Пример 4.*Найти целые числа a и b, если изкестны НОД(a,b)=24 и НОК(a,b)=2496.*

Решение. Пусть a=24m, b=24n. Так как 24=НОД(a,b)=1, то НОД(m,n)=1. Пусть для определённости m<n. Используя связь НОД и НОК двух чисел, имеем

$\frac{24m \cdot 24n}{24} = 24mn.$

Тогда $mn = 104 = 2^3 \cdot 13$. Так как m и n взаимно просты и m<n, то возможны два случая:

1.$m = 1, n = 104$. Тогда$a = 24, b = 2496$.

2.$m = 2^3, n = 13$. Тогда $a = 192, b = 312$.

Итак, либо a=24, и=2496, либо a=192, b=312.

Пример 5.*Вычислить НОК(-275,126,60).*

Решение. Запишем канонические разложения исходных чисел

$-275 = -5^2 \cdot 11, 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7, 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$

Выберм наибольшие степени всех встречающихся в разложениях простых чисел и перемножим их. Это произведение даст НОК. Итак, НОК $= (- -275, 126, 60) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 69300$.

Пример 6.*Найти все целые решения уравнения:*

$18x - 42y = -18$

Решение. Выделим несколько этапов в решении этой задачи.

1.Уравнение имеет целые решения, когда число -18 делится на НОД(52,42). Так как НОД(54,42)=6, то данное уравнение имеет целые решения.

2. Разделив обе части уравнения на НОД(54,42), получим равносильное уравнение $9x - 7y = -3$. Заметим, что НОД(9,7)=1.

3. Подберём целые числа u и v таким образом, чтобы $9u - 7v = 1$. Нетрудно заметить, что $u = -3, v = -4$.

4.Запишем одно из решений, умножив u и v на правую часть уравнения $9x - 7y = -3$. Получим$x_0 = u \cdot (-3) = 9, y_0 = v \cdot (-3) = 12$.

5. Все целые числа решения исходного уравнения имеют вид: $x = x_0 - - -bt, y = y_0 + at$, где $t \in Z$, a - коэффициент при x, b - коэффициент при

y в уравнении $9x - 7y = -3$. Итак, x=9+7t , y=12+9t - все целые решения исходного уравнения.

Пример 7.*Найти остаток от деления на 31 числа* $29^{2929} + 6^{231}$.

Решение. Необходимо найти число γ, удовлетворяющее двум условиям: $0 \leq \gamma < 31$ и $29^{2929} + 6^{231} \equiv \gamma(31)$. Так как $29 \equiv -2(31)$ и $6^2 = 36 \equiv 5(31)$, то $29^{2929} + 6^{231} \equiv (-2)^{2929} + 6 \cdot 5^{115}(31)$.Поскольку $(-2)^5 = -32 \equiv (-1)(31)$ и $5^3 = 125 \equiv 1(31)$, то $(-2)^{2929} + 6 \cdot 5^{115} \equiv (-1)^{585} \cdot (-2)^4 + 1^{38} \cdot 6 \cdot 5(31)$. Так как $(-1)^{585} \cdot (-2)^4 + 1^{38} \cdot 5 \cdot 6 = -16 + 30 = 14$, то $29^{2929} + 6^{231} \equiv 14(31)$.

Итак, $\gamma = 14$.

Замечания.

1. Последняя цифра числа a равна остатку от деления $\mid a \mid$ на 10.

2. Две последние цифры числа a - это цифры остатка от деления $\mid a \mid$ на 100.

ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

1.*Показать, что целое число a делится на целое число b.*

1.1. $a = n^2 - 1$, $b = 8$, $n-$ нечётное натуральное число.
1.2. $a = n(n+1)(2n-1)$, $b = 6$, n-натуральное число.
1.3. $a = n(n^2 + 5)$, $b = 6$, n - натуральное число.
1.4. $a = n(n^3 + 2n^2 - n + 22)$, $b = 24$, n- натуральное число.
1.5. $a = (n+1)(n+3)$, $b = 8$, n - нечётное натуральное число.
1.6. $a = (n+2)(n^2 + 4n + 9), b = 6$, n - натуральное число.
1.7. $a = (n^2 - 1)(n^2 + 2n + 12), b = 12$, n - натуральное число.
1.8. $a = (n+2)(n^3 - n + 12), b = 24$, n - чётное натуральное число.
1.9. $a = (n1)(n2 + n + 12), b = 6$, n - натуральное число.
1.10. $a = (n+2)(n^3 - n + 12), b = 12$, n - нечётное натуральное число.
1.11. $a = (n^2 + 4n - 5), b = 8$, n - нечётное натуральное число.
1.12. $a = (n+2)(n^3 - n + 24), b = 24$, n - натуральное число.
1.13. $a = n^2 + 20n + 3, b = 8$, n - нечётное натуральное число.
1.14. $a = n^3 + 5n + 12, b = 6$,n - натуральное число.
1.15. $a = (n^2 - 1)(n+1)^2, b = 8$,n - нечётное натуральное число.

2.*Найти неполное частное и остаток от деления a на b.*

2.1. $a = \pm 761, b = \pm 13$.
2.2. $a = \pm 652, b = \pm 21$.
2.3. $a = \pm 529, b = \pm 15$.
2.4. $a = \pm 632, b = \pm 18$.
2.5.$a = \pm 437, b = \pm 24$.
2.6. $a = \pm 356, b = \pm 17$.

2.7. $a = \pm 543, b = \pm 19$.
2.8. $a = \pm 458, b = \pm 27$.
2.9. $a = \pm 591, b = \pm 12$.
2.10. $a = \pm 653, b = \pm 14$.
2.11. $a = \pm 729, b = \pm 11$.
2.12. $a = \pm 478, b = \pm 26$.
2.13 $a = \pm 825, b = \pm 13$.
2.14. $a = \pm 751, b = \pm 22$.
2.15. $a = \pm 562, b = \pm 16$.

3.*Известно делимое f и неполное частное q. Найти делитель и остаток.*

3.1. f=-43251 , q=243.
3.2. f=31564 , q= –263.
3.3. f=-40201 , q= –194.
3.4. f=53262 , q= –280.
3.5. f=-46707 , q=525.
3.6. f=61796 , q= –325.
3.7. f=27829 , q= –567.
3.8. f=-37654 , q=236.
3.9. f=-46524 , q=512.
3.10. f=43264 , q= –363.
3.11. f=-51067 , q=198.
3.12. f=-35266 , q= –203.
3.13. f=40053 , q= –426.
3.14. f=-36248 , q= –159.
3.15. f=-56728 , q=163.

4.*С помощью алгоритма Евклида найти НОД(a,b) и выразить его через исходные числа. Используя связь НОД и НОК двух чисел, вычислить НОК(a,b).*

4.1. a=5544 , b=7644.
4.2. a=2585 , b=7975.
4.3. a=1188 , b=5080.
4.4. a=4704 , b=9100.
4.5. a=1296 , b=6600.
4.6. a=6188 , b=4709.
4.7. a=6125 , b=1190.
4.8. a=3069 , b=1881.
4.9. a=4968 , b=6678.
4.10. a=3120 , b=2325.

4.11. a=6252 , b=777.
4.12. a=2975 , b=9996.
4.13. a=1368 , b=7056.
4.14. a=1716 , b=1540.
4.15. a=5796 , b=5187.

5.*Известны НОД(a,b) и НОК(a,b). Найти a и b.*

5.1. НОД(a,b)=16 , НОК(a,b)=1584.
5.2. НОД(a,b)=15 , НОК(a,b)=630.
5.3. НОД(a,b)=22 , НОК(a,b)=3630.
5.4. НОД(a,b)=19 , НОК(a,b)=5187.
5.5. НОД(a,b)=14 , НОК(a,b)=2856.
5.6. НОД(a,b)=15 , НОК(a,b)=6900.
5.7. НОД(a,b)=30 , НОК(a,b)=15660.
5.8. НОД(a,b)=27 , НОК(a,b)=5589.
5.9. НОД(a,b)=36 , НОК(a,b)=6480.
5.10. НОД(a,b)=12 , НОК(a,b)=1872.
5.11. НОД(a,b)=21 , НОК(a,b)=756.
5.12. НОД(a,b)=26 , НОК(a,b)=4914.
5.13. НОД(a,b)=35 , НОК(a,b)=8925.
5.14. НОД(a,b)=18 , НОК(a,b)=4896.
5.15. НОД(a,b)=14 , НОК(a,b)=4410.

6.*Решить в целых числах уравнения.*

6.1. 3x + 4y= –13 , 10x - 15y=25.
6.2. 2x – 7y= –8 , 14x + 21y= -49.
6.3. 5x + 6y=9 , 12x-8y= -24.
6.4. x – 7y= 5 , 15x-18y=21.
6.5. 13x + 4y= 20 , 22x + 4y= -16.
6.6. 14x + 3y= -10 , 12x - 20y= -24.
6.7. 15x – 11y= 9 , 6x + 42y= -12.
6.8. 10x – 3y= –8 , 26x + 28y= -4.
6.9. 16x + 9y= –6 , 27x - 12y= -15.
6.10. 29x – 19y= 3 , 30x + 55y= -10.
6.11. 17x + 3y= 20 , 8x - 20y= -16.
6.12. 13x + 8y= –4 , 21x - 36y= 9.
6.13. 4x – 9y= 30 , 24x + 14y= -18.
6.14. 6x + 13y= –22 , 15x - 21y= 42.
6.15. 7x – 16y= –12 , 32x + 44y= -16.

7.*Найти конические разложения целых чисел a, b, c, а затем НОД(a,b,c) и НОК(b,c).*

7.1. a= 6188 , b=88 , c= -320.
7.2. a= 4704 , b=96 , c= -154.
7.3. a= 1716 , b=56 , c= -204.
7.4. a= –3069, b=112, c= 84.
7.5. a= 9100 , b=–114 , c= 92.
7.6. a= 7056 , b=190 , c= -68.
7.7. a= –1368, b=99 , c= 150.
7.8. a= –1540, b=105 , c= 215.
7.9. a= 1296 , b=230 , c= -78.
7.10. a= 1188 , b= –132 , c= -64.
7.11. a= –3120 , b=85 , c= 100.
7.12. a= 4968 , b=104 , c= -56.
7.13. a= –7644, b=196 , c= -76.
7.14. a= 1716 , b=–72, c= 124.
7.15. a= 1288 , b= -144 , c= -66.

8.*Используя свойства сравнений, найти остаток от деления на* b.

8.1.$a = 178^{274}, b = 22.$
8.2.$a = 5^{50} + 13^{100}, b = 18.$
8.3. $a = 5^{70} + 7^{50}, b = 12.$
8.4.$a = 439^{291}, b = 60.$
8.5.$a = 383^{175}, b = 45.$
8.6. $a = 178^{52}, b = 11.$
8.7. $a = 34^{374}, b = 26.$
8.8.$a = 22^{234}, b = 14.$
8.9. $a = 5^{80} + 7^{100}, b = 13.$
8.10. $a = 293^{175}, b = 48.$
8.11. $a = 196^{198}, b = 11.$
8.12.$a = 12^{40} + 3^{100}, b = 5.$
8.13. $a = 123^{253}, b = 15.$
8.14.$a = 274^{100}, b = 21.$
8.15. $a = 264^{90}, b = 17.$

9.*Найти последнюю цифру числа а из задания 8.*

10.*Используя свойства сравнений, доказать, что число с делится на число* d.

10.1. $c = 27^{30} + 7, d = 16.$
10.2. $c = 26^{15} + 1, d = 21.$
10.3. $c = 60^{45} + 72^{45}, d = 11.$
10.4. $c = 16^{302} + 9^{302} + 1, d = 13.$

10.5. $c = 14^{100} + 5, d = 9.$
10.6. $c = 3^{803} - 16, d = 11.$
10.7. $c = 24^{21} \cdot 21^{12} - 3^{12} \cdot 17^{21}, d = 9.$
10.8. $c = 32^{143} + 136, d = 13.$
10.9. $c = 103^{51} + 162, d = 14.$
10.10. $c = 29^{47} + (-17)^{47} + 1, d = 13.$
10.11. $c = (-17)^{91} + 28^{91}, d = 11.$
10.12. $c = 3^{126} - 15, d = 14.$
10.13. $c = 48^{153} + 24, d = 22.$
10.14. $c = 4^{325} + 26, d = 15.$
10.15. $c = 519^{20} - 27, d = 13.$

11.*Найти две последние цифры числа c из задания 10.*

12.*Составить таблицу умножения и сложения в кольце классов вычетов Z_m, где*

$$m = \begin{cases} n + 2 \text{при} n \leq 5, \\ n - 3 \text{при} 6 \leq n \leq 10, \\ n - 8 \text{при} 11 \leq n \leq 15, \end{cases}$$

где n-номер варианта.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2 .

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Вопросы для самоконтроля

1. Построение поля комплексных чисел

Пары действительных чисел, их сложение и умножение. Свойства этих операций, нулевой, единичный, противоположный и обратный элементы. Поле комплексных чисел. Действительные числа как подполе поля комплексных чисел.

2. Действия над комплексными числами в алгебраичной форме

Число i. Алгебраическая форма комплексного чисела.Сложение, вычетание, умножение и деление. Извлечение квадратного корня из комплексного чисела в алгебраической форме.

3. Тригонометрическая форма комплексного чисела

Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент. Умножение и деление комплексных чисел. Формула Муавра.

4. Извлечение корня из комплексного чисела

Определение корня n-й степени. Формула корней n-й степени из комплексного чисела. Корень из единицы. Корень n-й степени из единицы для $n \leq 4$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1.*Изобразить на плоскости и записать в тригонометрической форме числа:* $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$.

Решение. Для каждого комплексного числа, откладывая действительную часть по оси OX, а мнимую по оси OY, получим четыре точки $P_1(1;1), P_2(-1;1), P_3(-1;-1), P_4(1;-1)$.

Все четыре числа имеют равные модули: $\mid OP_1 \mid=\mid OP_2 \mid=$
$=\mid OP_3 \mid=\mid OP_4 \mid= \sqrt{(\pm1)^2+(\pm1)^2} = \sqrt{2}$. Модуль комплексного числа a+bi вычисляется по формуле $\gamma = \sqrt{a^2+b^2}$,т.е. равен длине радиус-вектора, проведённого из начала координат в точку, изображающую комплексное число. Аргумент комплексного числа равен величине угла, отсчитанного то оси OX против часовой стрелки до радиус-вектора, изображающего данное число. Находим аргументы остальных комплексных чисел:

$arg(-1+i) = \widehat{XOP_2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$,
$arg(-1-i) = \widehat{XOP_3} = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$,
$arg(1-i) = \widehat{XOP_4} = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$,

Используя найденные значения модулей и аргументов комплексных чисел, получаем Ответ:

$1+i = \sqrt{2}(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4})$,
$-1+i = \sqrt{2}(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4})$,
$-1-i = \sqrt{2}(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4})$,
$1-i = \sqrt{2}(cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4})$.

Пример 2.*Вычислить* $(-1+i\sqrt{3})^6$, $\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$.

Решение. Представим число $-1+i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме
$\gamma =\mid \bar{OA} \mid= \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$,
$arg(-1+i\sqrt{3}) = \varphi$.
Но из чертежа видим, что $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$.
Тогда $\varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.
Таким образом, $-1+i\sqrt{=}2(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3})$.
Пл формуле Муавра имеем: $(-1+i\sqrt{3})^6 = (2(cos\frac{2\pi}{3}+$
$+isin\frac{2\pi}{3}))^6 = 2^6(cos\frac{6\cdot2\pi}{3} + isin\frac{6\cdot2\pi}{3}) =$
$= 2^6(cos4\pi + isin4\pi) = 64$.
Для вычисления корня из комплексного числа используем формулу
$\sqrt[n]{\gamma(cos\varphi + isin\varphi)} = \sqrt[n]{\gamma}(cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+$
$+isin\varphi + 2\pi kn), k = 0,1,...,n-1$. Имеем $z_k = \sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}} =$
$= \sqrt[4]{2(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3})} = \sqrt[4]{2}(cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4} + isin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}), k = 0,1,2,3.$

Полагая $k = 0, 1, 2, 3$,получаем
$z_0 = \sqrt[4]{2}(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$,
$z_1 = \sqrt[4]{2}(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt[4]{2}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{3}}{2}$,
$z_2 = \sqrt[4]{2}(cos\frac{7\pi}{6} + isin\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$,
$z_3 = \sqrt[4]{2}(cos\frac{5\pi}{3} + isin\frac{5\pi}{3}) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{3}}{2}$,

Пример 3.*Вычислить* $\sqrt{1-i}$ *в алгебраической форме.*

Решение. Пусть $\sqrt{1-i} = x + iy$, где x,y - действительные числа. Тогда, возводя обе части равенства в квадрат, получим
$1 - i = x^2 - y^2 + 2xyi$.

Из условия равенства комплексных чисел имеем систему уравнений относительно x и y:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ 2xy = -1, \end{cases}$$

Из этого уравнения выразим y и подставим в первое уравнение:
$y = -\frac{1}{2x}$, $(*)$
$x^2 - \frac{1}{4x^2} = 1$ или $\frac{4x^4 - 4x^2 - 1}{4x^2} = 0$.
Решая последнее уравнение, найдём два значения для x:
$x_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, x_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$.
Подставляя найденные значения в $(*)$, получим
$y_1 = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, y_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.
Итак, $\sqrt{1-i}$ имеет два значения:
$z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$,
$z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

Пример 4.*Найти действительные числа x и y из уравнения*
$\frac{x+iy}{x-iy} = \frac{-1+2i}{2i+x}$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:
$\frac{x+iy}{x-iy} - \frac{-1+2i}{2i+x} = 0$
$\frac{x^2+x-4y+i(xy-y)}{(x-yi)(2i+x)} = 0$.
Отсюда получаем систему:
$$\begin{cases} x^2 + x - 4y = 0, \\ xy - y = 0, \end{cases}$$
Из второго уравнения следует, что либо y=0, либо x=1. Если y=0, то из первого уравнения либо x=0, либо x=-1.Но из области определения уравнения

следует, что x и y не могут одновременно равняться нулю. Значит, остаётся решение x=-1, y=0. Если x=1, то из первого уравнения $y = \frac{1}{2}$. Ответ: x=-1, y=0 или x=1, $y = \frac{1}{2}$.

Пример 5.*Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} (1+i)x + (1-i)y = 1+i, \\ (1-i)x + (1+i)y = 1+3i, \end{cases}$$

Решение. *Выразим x из первого уравнения системы*
$x = \frac{(1+i)-(1-i)y}{1+i} = 1 - \frac{1-i}{1+i}y = 1 + iy.$
Подставим найденное значение во второе уравнение системы и найдём y:
$(1-i)(1+iy) + (1+i)y = 1+3i,$
$y(1+i) = 2i,$
$y = \frac{2i}{1+i} = 1+i.$
Тогда
$x = 1 + i(1+i) = 1 + i + i^2 = i$

Проверка. *Подставляя в исходную систему x=i, y=1+i, получим верные равенства*
$(1+i)i + (1-i)(1+i) = i + i^2 + 1 - i^2 = 1+i,$
$(1-i)i + (1+i)(1+i) = i - i^2 + 1 + 2i + i^2 = 1+3i.$

Ответ: *x=i, y=1+i.*

Задание к лабораторной работе

1.*Найти* $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2-\bar{z}_1}{z_1+\bar{z}_2}$.

	z_1	z_2
1.1.	$2+i,$	$-3+2i.$
1.2.	$-1+3i,$	$2-i.$
1.3.	$4-i,$	$1-3i.$
1.4.	$-1+4i,$	$2-3i.$
1.5.	$3-i,$	$-2+i.$
1.6.	$-4+i,$	$2-i.$
1.7.	$1+3i,$	$-3+i.$
1.8.	$4-i,$	$-3+5i.$
1.9.	$2-4i,$	$3+i.$
1.10.	$-3+2i,$	$5-i.$

1.11. $-2+5i, \qquad -1+i.$
1.12. $-4+3i, \qquad 3-i.$
1.13. $5-2i, \qquad 3+4i.$
1.14. $-1-2i, \qquad 4-3i.$
1.15. $3-4i, \qquad 2+i.$

2. *Изобразить на плоскости комплексные числа* $z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, z_1+\bar{z}_2, z_2-\bar{z}_1$, *где* z_1 *и* z_2 *- числа из задания 1.*

3. *Вычислить* $\sqrt{z}_1$ *и* $\sqrt{z}_2$ *в алгебраической форме для чисел* z_1 *и* z_2 *из задания 1.*

4. *Вычислить*

4.1. $5(cos10^\circ + isin10^\circ)\cdot 2(cos80^\circ - isin280^\circ)$
4.2. $3(cos50^\circ - isin670^\circ)\cdot 4(cos290^\circ + isin70^\circ)$
4.3. $\frac{(cos220^\circ+isin140^\circ)}{(cos50^\circ-isin310^\circ)}$
4.4. $\frac{(cos130^\circ-isin130^\circ)}{(cos40^\circ+isin40^\circ)}$
4.5. $\frac{2(cos\frac{\pi}{7}+isin\frac{\pi}{7})}{6(cos\frac{8\pi}{7}-isin\frac{6\pi}{7})}$
4.6. $(cos\frac{5\pi}{4} - isin\frac{5\pi}{4})\cdot 7(cos\frac{17\pi}{12} - isin\frac{17\pi}{12})$
4.7. $5(cos109^\circ + isin109^\circ)\cdot 3(cos319^\circ - isin319^\circ)$
4.8. $3(cos20^\circ + isin20^\circ)\cdot 2(cos200^\circ - isin200^\circ)$
4.9. $\frac{(cos80^\circ-isin80^\circ)}{(cos250^\circ+isin110^\circ)}$
4.10. $5(cos\frac{4\pi}{3} - isin\frac{4\pi}{3})\cdot 4(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3})$
4.11. $\frac{6(cos42^\circ-isin42^\circ)}{5(cos82^\circ+isin82^\circ)}$
4.12. $(cos\frac{\pi}{4} - isin\frac{\pi}{4})\cdot 3(cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4})$
4.13. $\frac{3(cos110^\circ-isin110^\circ)}{3(cos140^\circ-isin140^\circ)}$
4.14. $7(cos130^\circ - isin130^\circ)\cdot 3(cos320^\circ - isin320^\circ)$
4.15. $\frac{3(cos160^\circ-isin160^\circ)}{(cos230^\circ-isin230^\circ)}$

5. *Вычислить*

5.1. $(1+i)^{25}, \sqrt[3]{2-i\sqrt{12}}, \sqrt[4]{-4}, \sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$
5.2. $(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i})^{20}, \sqrt[4]{-\sqrt{3}+i}, \sqrt[5]{-32}, \sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$
5.3. $(\sqrt{3}-i)^{10}, \sqrt[3]{i}, \sqrt[4]{-1+i}, \sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$
5.4. $(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)^{100}, \sqrt[6]{2}, \sqrt[4]{1-i}, \sqrt[4]{\frac{-1+i}{1-i\sqrt{3}}}$
5.5. $(-1+i\sqrt{3})^{20}, \sqrt[3]{-27}, \sqrt[6]{\sqrt{12}-2i}, \sqrt[3]{\frac{8+24i}{3-i}}$
5.6. $(\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i})^{12}, \sqrt[5]{-1}, \sqrt[3]{2-2i}, \sqrt[4]{-\frac{18}{1+i\sqrt{3}}}$

5.7. $(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i})^{30}$, $\sqrt[6]{64}$, $\sqrt[4]{i-1}$, $\sqrt[3]{\frac{27-54i}{2+i}}$

5.8. $(2-i\sqrt{12})^{20}$, $\sqrt[4]{8i}$, $\sqrt[3]{3-3i}$, $\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}i-1}{1+i}}$

5.9. $(\frac{i-1}{2-i\sqrt{12}})^{45}$, $\sqrt[3]{-27i}$, $\sqrt[5]{i-1}$, $\sqrt[8]{\frac{i-\sqrt{3}}{1-i}}$

5.10. $(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i})^{4}$, $\sqrt[5]{-1}$, $\sqrt[4]{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$, $\sqrt[6]{\frac{1+i\sqrt{3}}{i-1}}$

5.11. $(\sqrt{2}i-\sqrt{2})^{24}$, $\sqrt[3]{-64}$, $\sqrt[5]{-3+3i}$, $\sqrt[4]{\frac{i\sqrt{3}-1}{i-1}}$

5.12. $(2i-\sqrt{12})^{16}$, $\sqrt[5]{-2}$, $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}$, $\sqrt[4]{\frac{3+i}{4-12i}}$

5.13. $(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})^{20}$, $\sqrt[3]{-6i}$, $\sqrt[4]{-\sqrt{12}-2i}$, $\sqrt[5]{\frac{16}{1-i\sqrt{3}}}$

5.14. $(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}i)^{10}$, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[5]{-5-5i}$, $\sqrt[3]{\frac{2-i}{1+2i}}$

5.15. $(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{12}}i)^{12}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{\sqrt{2}}i-\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\sqrt[5]{-\frac{20}{1+i}}$

6. *Решить уравнения:*

6.1. $x^2-(2+i)x+(-1+7i)=0, x^2-4x+5=0.$
6.2. $x^2-3x+4=0, x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0.$
6.3. $(2+i)x^2-(5-i)x+(2-2i)=0, 2x^2-3x+5=0.$
6.4. $x^2+(2i-7)x+(13-i)=0, x^2+3x+6=0.$
6.5. $x^2-(1+i)x+6+3i=0, 3x^2-2x+3=0.$
6.6. $x^2-5x+4+10i=0, -x^2+x-1=0.$
6.7. $-x^2+2x-2=0, (1-i)x^2+(5-i)x+4+2i=0.$
6.8. $(3+i)x^2+(1-i)x-6i)=0, x^2+x+2=0.$
6.9. $3x^2-2x+4=0, 4x^2+(4-3i)x-4-3i=0.$
6.10. $-2x^2+3x-2=0, x^2+2ix-1-i=0.$
6.11. $4x^2+12x+8-i=0, 3x^2+5x+3=0.$
6.12. $4x^2-4x+1+i=0, 2x^2-4x+5=0.$
6.13. $x^2-2x+5=0, 2x^2+(2+2i)x+2+i=0.$
6.14. $x^2+3x+5=0, x^2+(2-i)x+1-i=0.$
6.15. $x^2+(2+i)x+1+i)=0, x^2+5x+7=0.$

7. *Составить квадратные уравнения с действительными коэффициентами, корнями которых являются комплексные числа z_1 и $\bar{z}_1$, z_2 и $\bar{z}_2$, где z_1 и z_2 - числа из задания 1.*

8. *Найти действительные числа x и y из уравнения $\mid x+iy\mid +x+yi = 1+(n-7)i$, где n- номер варианта.*

9. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} (3-i)x+(4+i)y=n-6+6i, \\ (n+2i)x-(2+3i)y=5+4i, \end{cases}$$

где n - номер варианта.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

ГРУППЫ, КОЛЬЦА, ПОЛЯ

Вопросы теории

1. Бинарная алгебраическая операция.

2. Ассоциативность и коммутативность операции.

3. Нейтральный и симметричный элементы.

4. Полугруппа, моноид и их примеры.

5. Определение группы.

6. Абелева группа. Конечная группа, ее порядок. Бесконечная группа.

7. Мультипликативная группа.

8. Аддитивная группа, примеры.

9. Подгруппы и их примеры.

10. Определение кольца, примеры колец.

11. Аддитивная группа кольца, мультипликативная полугруппа кольца. Кольцо с единицей. Коммутативное кольцо.

12. Свойства колец.

13. Определение поля, примеры полей.

14. Делители нуля.

15. Характеристика поля.

16. Конечные и бесконечные поля и их примеры.

Примеры решения задач

Пример 1. *Будет ли группой множество ненулевых действительных чисел с операцией $a * b = 2ab$?*

Решение. *Для любых чисел $a, b \in R^{\#}$ элемент $a * b = 2ab$ также принадлежит $R^{\#}$ т.е. операция * во множестве $R^{\#}$ является алгебраической. Проверим выполнение условий в определении группы.*

1) Ассоциативность операции:

$$(a * b) * c = (2ab) * c = 2(2ab)c = 4abca * (b * c) = a * (2bc) = 2a(2bc) = 4abc,$$

т.е. $(a * b) * c = a * (b * c)$

*2) Пусть $\in R^{\#}$ и является нейтральным элементом в $R^{\#}$ относительно операции *. Тогда для любого элемента $a \in R^{\#}$ $a * n = n * a = a$, откуда*

$$\begin{cases} 2an = a, & \text{если } x < k; \\ 2na = a, & \text{если } x \geqslant k. \end{cases}$$

5

Нетрудно заметить, что решением системы будет число $n = \frac{1}{n}$.

3) Пусть $b \in R^{\#}$ и является симметричным элементом для элемента $a \in R^{\#}$. Тогда $a * b = b * a = \frac{1}{2}$, откуда

$$\begin{cases} 2ab = \frac{1}{2}, & \text{если } x < k; \\ 2ba = \frac{1}{2}, & \text{если } x \geqslant k. \end{cases}$$

Решением этой системы будет число $b = \frac{1}{4a}$, т.е. элементом симметричным элементу $a \in R^{\#}$ в алгебраической системе $(R^{\#}, *)$ будет элемент $\frac{1}{4a}$.

*Таким образом, множество $R^{\#}$ с данной операцией * является группой. Более того, так операция * коммутативна $a * b = 2ab = 2ba = b * a$, то группа абелева.*

Пример 2. *Будет ли множество $M = \{a = b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ с обычными операциями сложения и умножения действительных чисел кольцом, полем?*

Решение. *Покажем прежде всего, что в множестве M сложение и умножение являются бинарными алгебраическими операциями:*

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + b) + (b + d)\sqrt{2} \in M,$$

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in M$$

для любых чисел $(a + b\sqrt{2}), (c + d\sqrt{2}) \in M$.

Проверим выполнение условий в определениях кольца и поля.

1) Ассоциативность сложения во множестве $\mathbb{R}$ следует из ассоциативности сложения во множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

2) Нулевым элементом во множестве M будет число $0 + 0\sqrt{2} \in M$.

3) Элементом, противоположным элементу $(a + b\sqrt{2})$ во множестве M будет элемент $(-a - b\sqrt{2})$.

4) Коммутативность сложения во множестве M следует из коммутативности сложения во множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

5) Ассоциативность умножения во множестве M следует из ассоциативности умножения во множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

6) Коммутативность умножения и выполнение законов дистрибутивности также следуют из выполнения соответствующих свойств во множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Тем самым доказано, что множество M является кольцом.

7) Единичным элементом во множестве M является число $1 + 0\sqrt{2}$. так как

$(a+b\sqrt{2}),(1+0\sqrt{2})=(a+b\sqrt{2})$.

8) Пусть $(a+b\sqrt{2})\in M^{\#}$. *Это означает, что* $a^2+b^2\neq 0$, *т.е.* a *и* b *одновременно не равны нулю. Пусть* $x+y\sqrt{2}\in M$ *и является элементом, обратным для элемента* $a+b\sqrt{2}$. *Тогда*

$$(a+b\sqrt{2})(x+y\sqrt{2})=1+0\sqrt{2},(a+b\sqrt{2})(x+y\sqrt{2})=1,$$

откуда $(x+y\sqrt{2})=\frac{1}{(a+b\sqrt{2})}=\frac{a-b\sqrt{2}}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}=\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}=\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{b}{2b^2-a^2}\sqrt{2}\in M$, *так как* $\frac{a}{a^2-2b^2},\frac{b}{2b^2-a^2}\in Q$, *и* $a^2-2b^2\neq 0$.

Таким образом, каждый ненулевой элемент $(a+b\sqrt{2})$ *из множества* M *имеет в* M *обратный элемент* $\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{b}{2b^2-a^2}\sqrt{2}$.

Следовательно, множество M *является полем.*

ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

1. *Будет ли множество* A *с операцией* $*$ *полугруппой, моноидом?*

1.1. $A=\mathbb{N}$, $a*b=2(a+b)$ $\forall a,b\in\mathbb{N}$

1.2. $A=\mathbb{Z}$, $a*b=a-b+1$ $\forall a,b\in\mathbb{Z}$

1.3. $A=\mathbb{Q}$, $a*b=2a+b$ $\forall a,b\in\mathbb{Q}$

1.4. $A=\mathbb{R}$, $a*b=4ab$ $\forall a,b\in\mathbb{R}$

1.5. $A=\mathbb{N}$, $a*b=a^b$ $\forall a,b\in\mathbb{N}$

1.6. $A=\mathbb{Z}$, $a*b=a+b-2$ $\forall a,b\in\mathbb{Z}$

1.7. $A=\mathbb{Q}$, $a*b=3(a+b)$ $\forall a,b\in\mathbb{Q}$

1.8. $A=\mathbb{R}$, $a*b=\frac{a+b}{3}$ $\forall a,b\in\mathbb{R}$

1.9. $A=\mathbb{N}$, $a*b=\sqrt{a}b$ $\forall a,b\in\mathbb{N}$

1.10. $A=\mathbb{Z}$, $a*b=-(a+b)$ $\forall a,b\in\mathbb{Z}$

1.11. $A=\mathbb{Q}$, $a*b=(a+b)^2$ $\forall a,b\in\mathbb{Q}$

1.12. $A=\mathbb{R}$, $a*b=-2ab$ $\forall a,b\in\mathbb{R}$

1.13. $A=\mathbb{N}$, $a*b=a^2+b^2$ $\forall a,b\in\mathbb{N}$

1.14. $A=\mathbb{Z}$, $a*b=a+b^2$ $\forall a,b\in\mathbb{Z}$

1.15. $A=\mathbb{Q}$, $a*b=\frac{ab}{2}$ $\forall a,b\in\mathbb{Q}$

2. *Будет ли множество - с указанной операцией - группой, абелевой группой?*

2.1. $M = \mathbb{Q}^{\#}$, $a * b = 5ab \forall a, b \in M$

2.2. $M = \{-1; 1\}$, $a * b = ab \quad \forall a, b \in M$

2.3. $M = \{2k | k \in \mathbb{Z}\}$, $a * b = a + b \quad \forall a, b \in M$

2.4. $M = \{2k + 1 | k \in \mathbb{Z}\}$, $a * b = ab \quad \forall a, b \in M$

2.5. $M = \{\frac{m}{2^k+1} | m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, $a * b = a + b \quad \forall a, b \in M$

2.6. $M = \{\frac{m}{2^k+1} | m \in \mathbb{Z}^{\#}, k \in \mathbb{N}\}$, $a * b = ab \quad \forall a, b \in M$

2.7. $M = \{c + d\sqrt{3} | c, d \in \mathbb{Z}\}$, $a * b = a + b \quad \forall a, b \in M$

2.8. $M = \mathbb{Q}^{\#}$, $a * b = 3ab \quad \forall a, b \in M$

2.9. $M = \{c + d\sqrt{3} | c \in \mathbb{Q}^{\#} d \in \mathbb{Q}\}$, $a * b = ab \quad \forall a, b \in M$

2.10. $M = \mathbb{Z}^2 = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{Z}\}$, $(a * b) * (c * d) = (a + c, b + d) \quad \forall (a, b), (c, d) \in M$

2.11. $M = \{(a, b) | a \in \mathbb{R}^{\#}, b \in \mathbb{R}\}$, $(a * b) * (c * d) = (ac, bd) \quad \forall (a, b), (c, d) \in M$

2.12. $M = \mathbb{Q}^{\#}$, $a * b = -2ab \quad \forall a, b \in M$

2.13. $M = \{3k | k \in \mathbb{Z}\}$, $a * b = a + b \quad \forall a, b \in M$

2.14. $M = \{c - d\sqrt{2} | c, d \in \mathbb{Z}\}$ $a * b = a + b \quad \forall a, b \in M$

2.15. $M = \{c - d\sqrt{2} | c \in \mathbb{Q}^{\#}, d \in \mathbb{Q}\}$ $a * b = ab \quad \forall a, b \in M$

3. *Являются ли следующее множество аддитивной или мультипликативной группой?*

3.1. $M = \{\frac{a}{2^{k-1}} | a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$
3.2. $M = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$
3.3. $M = \{a + b\sqrt{3} | a \in \mathbb{Q}^{\#}, b \in \mathbb{Q}\}$
3.4. $M = \{\frac{a}{3^{k-1}} | a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$
3.5. $M = \{2k - 1 | k \in \mathbb{Z}\}$
3.6. $M = \{2k | k \in \mathbb{Z}\}$
3.7. $M = \{\frac{a}{2^{k-1}} | a \in \mathbb{Z}^{\#}, k \in \mathbb{N}\}$
3.8. $M = \{a - b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Z}\}$
3.9. $M = \{-\frac{a}{3^{k-1}} | a \in \mathbb{Z}^{\#}, k \in \mathbb{N}\}$
3.10. $M = \{-a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$
3.11. $M = \{2k - 1 | k \in \mathbb{Z}\}$
3.12. $M = \{3k | k \in \mathbb{Z}\}$
3.13. $M = \{-a + b\sqrt{3} | a \in \mathbb{Q}^{\#}, b \in \mathbb{Q}\}$
3.14. $M = \{2k + 1 | k \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}\}$
3.15. $M = \{2k - 1 | k \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}\}$

4. *Будет ли множество - с указанными операциями сложения и умножения кольцом?*

4.1. $K = \{a + b\sqrt{5} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

4.2. $K = \{(a+b) | a, b \in \mathbb{R}\}$*,* $(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d), (a, b)(c, d) = (ac, bd)$.

4.3. $K = \{\frac{a}{2^{k-1}} | a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$*, сложение и умножение действительных чисел.*

4.4. $K = \mathbb{R}$ *, сложение действительных чисел, умножение:* $a * b = 2ab$.

4.5. $K = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

4.6. $K = \{a - b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

4.7. $K = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{Q}\}$*,* $(a, b) + (c, d) = (ad), (a, b)(c, d) = (ac, bd)$.

4.8. $K = \{\frac{a}{3^{k-1}} | a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$*, сложение и умножение действительных чисел.*

4.9. $K = \{(a, 0) | a \in \mathbb{R}\}$*,* $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$.

4.10. $K = \{-\frac{a}{4^{k-1}} | a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

4.11. $K = \{a - b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

4.12. $K = \{a - b\sqrt{5} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

4.13. $K = \{(0, b) | b \in \mathbb{R}\}$*,* $(0, a) + (0, b) = (0, a + b), (0, a)(0, b) = (0, ab)$.

4.14. $K = \{\frac{a}{5^{k-1}} | a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

4.15. $K = \{-\frac{a}{2^{k-1}} | a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

5. *Является ли множество P с указанными операциями сложения и умножения полем?*

5.1. $P = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}, (a,b)+(c,d) = (a+c, b+d), (a,b)(c,d) = (ac, bd)$.

5.2. $P = \{\frac{a}{2^{k+1}} \mid \ a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

5.3. $P = \mathbb{R}$ *, сложение действительных чисел, умножение:* $a * b = 2ab$.

5.4. $P = \{a + b\sqrt{5} \mid \ a,b \in \mathbb{Q}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

5.5. $P = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\},\ (a,0)+(b,0) = (a+b,0),\ (a,0)(b,0) = (ab,0)$.

5.6. $P = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{R}\},\ (0,a)+(0,b) = (0,a+b),\ (0,a)(0,b) = (0,ab)$.

5.7. $P = \mathbb{Q}$ *, сложение рациональных чисел, умножение:* $a * b = -3ab$.

5.8. $P = \{a + b\sqrt{2} \mid \ a,b \in \mathbb{Q}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

5.9. $P = \{\frac{a}{4^{k-1}} \mid \ a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

5.10. $P = \{a + b\sqrt{3} \mid \ a,b \in \mathbb{Q}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

5.11. $P = \{\frac{a}{3^{k-1}} \mid \ a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

5.12. $P = \{\frac{a}{5^{k-1}} \mid \ a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

5.13. $P = \{-\frac{a}{2^{k-1}} \mid \ a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

5.14. $P = \{(a,b) \mid a,\ b \in \mathbb{R}\},\ (a,b)+(c,d) = (a,d),\ (a,b)(c,d) = (ac,bd)$.

5.15. $P = \{a - b\sqrt{3} \mid \ a,b \in \mathbb{Q}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. *Приведите пример полугруппы, которая не является моноидом.*

2. *Приведите пример кольца, которое не является полем.*

3. *Построить поле из трех элементов. Какова характеристика этого поля.*

4. *Докажите, что множество* $H = \{f_1(x) = x,\ f_2(x) = \frac{x-1}{x+1},\ f_3(x) = -\frac{1}{x},\ f_4(x) = -\frac{x+1}{x-1}\}$ *с операцией умножения* $*$ *,является группой, если* $(f_i * f_j)(x) = f_i(f_j(x))\ \forall i, j \in \{1, 2, 3, 4, \},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

5. *Докажите, что множество функций* $H = \{x,\ 1-x,\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{1-x},\ -\frac{x}{1-x},\ -\frac{1-x}{x}\}$, *определенных на* $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ *, является группой относительно композиции функций, (см. предыдущую задачу).*

6. *Пусть* $P(X)$ *- множество всех подмножеств заданного множества* X. *Определим операции сложения и умножения следующим образом:* $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B),\ A * B = A \cap B\ \ \forall A, B \in P(X)$. *Будет ли множество* $P(X)$ *кольцом, полем?*

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3.

Перестановки.

Вопросы для самоконтроля.

1.Симметрическая группа.

Взаимно однозначное отображение (биекция) множества. Перестановка. Умножение перестановок и его свойства. Обратная перестановка и её нахождение. Число перестановок из n символов.

2.Разложение перестановок в произведение независимых циклов и в произведение транспозиций.

Цикл длины k, его запись. Зависимые и независимые циклы. Умножение циклов. Разложение перестановки в произведение независимых циклов. Транспозиция. Разложение цикла в произведение транспозиций. Разложение перестановки в произведение транспозиций.

3.Знак перестановки.

Формула знака перестановки. Четные и нечетные перестановки. Знак транспозиции и тождественной перестановки. Мультипликативность знака. Знак обратной перестановки. Вычисление знака перестановки.

4. Знакопеременная группа.

Чётные перестановки и свойства их умножения. Число чётных перестановок степени n.

Примеры решения и оформления задач.

Пример 1.*Даны перестановки*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, *принадлежащие симметрической группе* S_6 *степени 6. а) Вычислить* α^{-1},β^{-2},$\alpha\beta$. *б) Разложить* $\alpha\beta$ *в произведение транспозиций. в) Вычислить знак перестановки* $(\alpha\beta)^{-1}$.

Решение. *а) Для нахождения* α^{-1} *необходимо в перестановке* α *поменять местами строки, а затем переставить столбцы так, чтобы первая строка была упорядочена по возрастанию*

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Чтобы вычислить β^{-2}, перейдём к табличной записи перестановки β. Так как $\beta \in S_6$, то

$$\beta = (1234) = (1234)(5)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим β^{-2} :

$$\beta^{-2} = (\beta^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 = \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\alpha\beta$:

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

б) Перестановка $\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ *переводит* $1 \to 1$, $2 \to 5 \to 4 \to 2$, $3 \to 3$, $6 \to 6$, *поэтому* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (1)(254)(3)(6)-$ *−разложение перестановки $\alpha\beta$ в произведение независимых циклов.*

Чтобы представить перестановку $\alpha\beta$ в виде произведения транспозиций, каждый цикл длины больше 2 разложим в произведение транспозиций: $(254) = (24)(25)$ *и* $\alpha\beta = (1)(24)(25)(3)(6)$.

Опуская циклы длины 1, получим разложение $\alpha\beta$ в произведение транспозиций, т.е.

$$\alpha\beta = (24)(25).$$

в) Знак перестановки вычислим по формуле

$$sgn\tau = (-1)^n - c,$$

где n - степень перестановки τ, а c - число её независимых циклов.

Так как $(\alpha\beta)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (1)(245)(3)(6)$, *то* c=*4. Поскольку перестановки* α *и* β *принадлежат* S_6, *то* $(\alpha\beta)^{-1} \in S_6$, *т.е.* n=*6.*

Таким образом, $sgn(\alpha\beta)^{-1} = (-1)^{6-4} = (-1)^2 = 1$, *т.е. перестановка* $(\alpha\beta)^{-1}$ *чётная.*

Пример 2.*Не прибегая к табличной записи, вычислить* β^{-1}, β^{-2}, $\beta^{-2}\tau$, *где* $\beta = (1234) \in S_6$ *и* $\tau = (2356) \in S_6$.

Решение. *Возьмём перестановку* $\alpha = (4321)$, *в которой цифры из перестановки* β *расположены в обратном порядке. Покажем, что* $\beta^{-1} = \alpha$.

Действительно, $\beta\alpha = [(1234)(5)(6)][(4321)(5)(6)] = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} =$ $= (1)(2)(3)(4)(5)(6) = \varepsilon$, $\alpha\beta = [(4321)(5)(6)][(1234)(5)(6)] = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} =$ $= (1)(2)(3)(4)(5)(6) = \varepsilon$, *т.е.* $\beta\alpha = \alpha\beta = \varepsilon$, *где* $\varepsilon-$*тождественная перестановка. Поэтому* $\alpha = \beta^{-1}$.

Вычислим β^{-2}. *Так как* $\beta^{-2} = (\beta^{-1})^2$, *то имеем*

$$\beta^{-2} = [(4321)(5)(6)][(4321)(5)(6)] = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} = (13)(24)(5)(6).$$

Найдём $\beta^{-2}\tau$

$$\beta^{-2}\tau = [(13)(24)(5)(6)][(2356)(1)(4)] = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 6 & 4 \end{array} = (135642).$$

Ответ: $\beta^{-1} = (4321)(5)(6)$, $\beta^{-2} = (13)(24)(5)(6)$, $\beta^{-2}\tau = (135642)$.

Пример 3.*Найти* α^{50}, *если* $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. *Найдём наименьшее натуральное число n такое, что* $\alpha^n = \varepsilon$, *где* ε*—тождественная перестановка.*

$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$,

$\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$\alpha^4 = \alpha \cdot \alpha^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \varepsilon$.

Значит, n=4 . Тогда

$$\alpha^{50} = \alpha^{4 \cdot 12 + 2} = (\alpha^4)^{12} \cdot \alpha^2 = \varepsilon^{12} \cdot \alpha^2 = \alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.*При каких i, j, k перестановка* $\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 5 & k & 3 & 6 & 1 \\ i & j & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *нечётная?*

Решение. *Заметим, что в каждой строке перестановки все цифры должны быть различными. Так как* α*—перестановка степени 6, то в первой строке k=4, а во второй строке для i и j возможны два случая.*

1-й случай: *i=2, j=6. Тогда перестановка* α *имеет вид*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\alpha = (14356)$ *цикл длины 5, то* α*—чётная перестановка.*

sc 2-й случай: i=6, j=2. Тогда

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (143526).$$

Следовательно, перестановка α *нечётная.*

Ответ: *i=6, j=2, k=4.*

Пример 5.*Найти перестановку* α *из равенства*

$$(135)(23)\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. *Перестановка* $(135)(23)$ *является произведением зависимых циклов. Представим эту перестановку в табличной записи. Для этого прежде перемножим циклы.*

$$(135)(23) = (1325) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание к лабораторной работе.

1. *Вычислить* α^{-1}, $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, β^{-2}, $(\alpha\beta)^2$, $(\beta\alpha)^{-1}$.

1.1. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 2 & 1 & 8 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1.2. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 7 & 3 & 5 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

1.3. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 1 & 6 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

1.4. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 1 & 4 & 6 & 8 & 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 9 & 2 & 1 & 6 & 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

1.5. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 1 & 6 & 3 & 7 & 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 & 8 & 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

1.6. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 3 & 2 & 7 & 5 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 1 & 8 & 4 & 2 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

1.7. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 5 & 2 & 3 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

1.8. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 7 & 3 & 6 & 1 & 9 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 2 & 5 & 1 & 7 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

1.9. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 8 & 1 & 3 & 7 & 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 1 & 2 & 4 & 8 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

1.10. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 1 & 5 & 7 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 6 & 3 & 5 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

1.11. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & 9 & 6 & 7 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

1.12. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 7 & 6 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

1.13. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 3 & 7 & 6 & 5 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 9 & 1 & 3 & 7 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

1.14. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 8 & 2 & 9 & 5 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 9 & 5 & 4 & 2 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

1.15. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 1 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

2.*Записать перестановки α, β, $\alpha\beta$, $\beta\alpha$ из задания 1 в виде произведения независимых циклов и в виде произведения транспозиций. Какова чётность этих перестановок?*

3.*Записать в виде таблицы перестановки σ и τ.*

3.1. $\sigma = (143)(25)(679)$, $\tau = (214)(345)(56)(13)$.

3.2. $\sigma = (13245)(15)(246)$, $\tau = (137)(65)(49)$.

3.3. $\sigma = (235)(147)(68)$, $\tau = (3567)(15)(364)$.

3.4. $\sigma = (31)(14)(2561)$, $\tau = (357)(62)(18)$.

3.5. $\sigma = (12356)(479)$, $\tau = (4356)(627)(145)$.

3.6. $\sigma = (32)(257)(4316)$, $\tau = (431)(267)(89)$.

3.7. $\sigma = (146)(245)(36)$, $\tau = (3564)(127)$.

3.8. $\sigma = (125)(439)(68)$, $\tau = (143)(3526)(125)$.

3.9. $\sigma = (26)(6371)(145)$, $\tau = (25)(437)(69)$.

3.10. $\sigma = (139)(27)(64)$, $\tau = (2594)(142)(659)$.

3.11. $\sigma = (12)(25)(5437)(13)$, $\tau = (14)(357)(62)$.

3.12. $\sigma = (156)(4392)$, $\tau = (172)(289)(7814)$.

3.13. $\sigma = (4513)(279)$, $\tau = (1354)(324)(672)$.

3.14. $\sigma = (157)(645)(213)$, $\tau = (124)(387)(65)$.

3.15. $\sigma = (263)(17)(89)$, $\tau = (145)(3467)(562)$.

4.*Вычислить σ^{-1}, τ^{-1}, $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, $(\tau\sigma)^{-1}$, не прибегая к табличной записи.*

5.*Найти наименьшие натуральные числа n и m, при которых $\alpha^n = \beta^m = \varepsilon$, где α, β– перестановки из задания 1, ε– тождественная перестановка. Найти α^{100} и β^{150}.*

6.*Определить чётность перестановок σ, τ, σ^{-1}, $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, $\tau^2\sigma$, $\tau\sigma\tau$.*

7. *При каких значениях i, j, k перестановка γ чётная? При каких значениях i.j,k перестановка χ нечётная?*

7.1. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i & 3 & j & 12 & 6 & k \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 2 & i & 4 & 3 & k & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 & j & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

7.2. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & i & 1 & j & k & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} i & 3 & 4 & 5 & j & 6 & 5 \\ 7 & 1 & k & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7.3. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ j & k & 1 & 3 & i & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & i & k & 2 & 4 \\ j & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

7.4. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ i & 2 & 5 & 3 & j & k & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 2 & i & j & 6 & 4 & 1 \\ k & 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

7.5. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ k & i & 1 & 7 & j & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 3 & k & 4 & i & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 6 & 7 & j \end{pmatrix}$.

7.6. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & i & 4 & 8 & j & k & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 1 & k & j & 2 & 4 & 7 & 5 \\ i & 1 & 7 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

7.7. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & i & 2 & j & 1 & 4 & k \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 5 & i & 2 & k & 3 & 1 \\ 1 & j & 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

7.8. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ i & 3 & j & k & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 6 & 2 & k & 1 & i & 3 \\ j & 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

7.9. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ j & 3 & 1 & i & k & 2 & 9 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 5 & k & j & 1 & 4 & 3 \\ i & 1 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

7.10. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & i & j & 2 & k & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 6 & 2 & j & k & 1 & 3 & 7 \\ i & 5 & 4 & 3 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7.11. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ i & 2 & 1 & j & 4 & 5 & k \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 5 & k & 4 & i & 1 & 2 \\ 1 & j & 3 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

7.12. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i & 3 & j & k & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 4 & 2 & i & k & 1 & 7 & 6 \\ j & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

7.13. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ i & 1 & k & 7 & 6 & j & 4 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 5 & i & j & 1 & 3 & 2 \\ k & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

7.14. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & i & 1 & 3 & k & j & 8 & 6 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 6 & i & k & 1 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & j & 3 & 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

7.15. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & j & i & 1 & k & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 4 & 3 & i & k & 1 & 5 \\ j & 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

8. *Найти перестановки λ и μ из равенств $\alpha\lambda\beta = \sigma$, $\sigma\mu\alpha = tau$, где α и β– перестановки из задания 1, σ, τ– перестановки из задания 3.*

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4.

Матрицы и действия над ними.

Вопросы для самоконтроля.

1. Матрицы и действия над ними.

$k \times l$ - Матрица. Строки и столбцы, их запись. Равенство двух матриц. Квадратная матрица, диагонали. Единичная матрица. Сложение матриц и умножение матриц на число, основные свойства. Нулевая матрица. Противоположная матрица.

2. Умножение матриц.

Произведение строки на столбец. Умножение матриц и его свойства. Умножение на единичную матрицу. Дистрибутивность умножения матриц относительно сложения.

3.Транспонирование.

Транспонирование матриц и его свойства.

4. Элементарные преобразования матриц.

Элементарные преобразования матриц 1-го и 2-го рода. Перестановка строк матрицы. Ступенчатая матрица и приведение произвольной матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

5. Системы линейных уравнений и метод Гаусса.

Системы линейных уравнений, её неизвестные, коэффициенты и свободные члены. Матрица системы, расширенная матрица. Матричная запись системы, столбец неизвестных, столбец свободных членов. Решения системы линейных уравнений. Совместная и несовместная система. Элементарные преобразования системы линейных уравнений. Равносильные системы. Ступенчатая система. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

Примеры решения и оформления задач.

Пример 1.*Вычислить*

$$2A - BC,$$

если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. *Перемножим матрицы B и C*

$$BC = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 0\cdot 2 + 2\cdot(-1) & 3\cdot(-2) + 0\cdot(-1) + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) & 0\cdot(-2) + 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$2A = 2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix},$$

то

$$2A - BC = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $2A - BC = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$.

Пример 2.*Решить систему матричных уравнений*

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

Решение. *Умножим первое уравнение на 2 и сложим со вторым*

$$4X - 2Y + 3X + 2Y = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$7X = \begin{pmatrix} 1 & -0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Из первого уравнения системы

$$Y = 2X - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -1 \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -1 \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Пример 3.*Найти матрицы*

$$X = \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

удовлетворяющие уравнению $f(X) = 0$, *если* $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Решение. *Найдём значение трёхчлена* $f(x)$ *от* X

$f(X) = X^2 - 4X^1 + 3X^0 = \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix} +$
$+ \ 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2 & -xy \\ -xy & x^2+y^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4x & -4y \\ -4y & 4x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} x^2+y^2-4x+3 & -2xy+4y \\ -2xy+4y & x^2+y^2-4x+3 \end{pmatrix}$, *Тогда из равенства*

$$\begin{pmatrix} x^2+y^2-4x+3 & -2xy+4y \\ -2xy+4y & x^2+y^2-4x+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x+3=0, \\ -2xy+4y=0 \end{cases}$$

Из второго уравнения $y(-2x+4=0)$ *следует, что либо* $y=0$, *либо* $x=2$.

Если $y=0$, *то из первого уравнения системы получаем*

$$x^2-4x+3=0,$$

откуда $x_1=1$, $x_2=3$.

Если $x=2$, *то из первого уравнения*

$$y^2=1$$

или $y_1=1, y^2=-1$.

Ответ:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. *Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.*

$$\begin{cases} 2x_1 - 3ix_2 + x_3 = 3 \\ -3x_1 + (1-i)x_2 + ix_3 = i-3 \\ 4x_1 + x_2 - 2ix_3 = 4-2i \end{cases}$$

Решение. *Выпишем расширенную матрицу системы с помощью элементарных преобразований строк приведём её к ступенчатому виду*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3i & 1 & 3 \\ -3 & 1-i & i & i-3 \\ 4 & 1 & -2i & 4-2i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3i & 1 & 3 \\ 0 & 2-11i & 3+2i & 3+2i \\ 0 & 1+6i & -2-2i & -2-2i \end{array}\right).$$

Мы ко второй строке, умноженной на 2, прибавили первую, умноженную на 3; к третьей строке прибавили первую, умноженную на -2.

Теперь к третье строке, умноженной на -2+11i, прибавили вторую, умноженную на 1+6i. Получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3i & 1 & 3 \\ 0 & 2-11i & 3+2i & 3+2i \\ 0 & 0 & 17+2i & 17+2i \end{array}\right),$$

которая является матрицей ступенчатого вида. Запишем систему, соответствующую этой матрице.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3ix_2 + x_3 = 3, \\ (2-11i)x_2 + (3+2i)x_3 = 3+2i, \\ (17+2i)x_3 = 17+2i \end{cases}$$

Преобразованная система имеет три уравнения с тремя неизвестными и, значит, единственное решение.

Из третьего уравнения системы $x_3 = 1$. *Подставляя* $x_3 = 1$ *во второе уравнение, найдём* $x_2 = 0$. *Из первого уравнения* $x_1 = 1$.

Проверка.

$$2 \cdot 1 - 3i \cdot 0 + 1 = 3, (-3) \cdot 1 + (1-i) \cdot 0 + i \cdot 1 = i - 3, 4 \cdot 1 + 0 - 2i \cdot 1 = 4 - 2i.$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

Задание к лабораторной работе.

1. *Вычислить* AB, BA, CB, CAB *и значение многочлена* $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 4$ *от матрицы* B.

1.1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ -1 & 2 & 3 \\ 2i & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 10 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.2.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & i-1 \\ 1 & -i & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -6 & -3 & 6 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ i & -1 & 4 \\ 2 & -2 & i \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.4.

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2i & 1 \\ 1 & 2 & i \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.5.

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1-i \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & -i & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.6.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & i \\ 2 & i & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.7.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3i \\ -i & 1 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.8.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & i \\ 0 & 2 & -1 \\ i & -2 & -8 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.9.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1-i & 1 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.10.

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & i \\ 1 & 2 & 0 \\ -i & 1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.11.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ i & 0 & 5 \\ -1 & 1 & i-1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.12.

$$A=\begin{pmatrix} i & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2i \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.13.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ i & 3 & 2 \\ -2 & 4i & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.14.

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ i & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1-i \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.15.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3i \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & i & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *Решить матричное уравнение*

$$5X+3A-2^tB=(2A-3B)^t,$$

где $A, B-$матрицы из задания 1.

3. *Найти $2\times 2-$матрицы $X=\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix}$ над полем C, удовлетворяющие уравнению $f(X)=0$.*

3.1. $f(x)=x^2+x+1.$
3.2. $f(x)=2x^2-x+2.$
3.3. $f(x)=x^2+2x+5.$
3.4. $f(x)=3x^2+x+1.$
3.5. $f(x)=-2x^2+3x-2.$
3.6. $f(x)=-x^2+x-2.$
3.7. $f(x)=5x^2+3x+2.$
3.8. $f(x)=x^2+3x+4.$
3.9. $f(x)=2x^2-3x+5.$
3.10. $f(x)=3x^2-2x+1.$
3.11. $f(x)=4x^2+3x+2.$
3.12. $f(x)=-2x^2+3x-4.$
3.13. $f(x)=6x^2+2x+1.$
3.14. $f(x)=5x^2-2x+2.$
3.15. $f(x)=-3x^2+x-2.$

4. *Привести матрицы A, B, C из задания 1 к ступенчатому виду.*

5. *Решить системы линейных уравнений методом Гаусса.*

5.1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 6x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - 2ix_2 + x_3 = 1 - i \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + (1-2i)x_2 = 1 - i \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -2 \\ 5x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + (i-4)x_3 = 1 \\ x_1 + ix_2 + x_3 = i + 2 \\ 3x_1 + (i-1)x_2 + ix_3 = i + 3 \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ 4x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2ix_3 = 4 - 2i \\ 2x_1 - 2ix_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (4-2i)x_2 + (4-2i)x_3 = 4 - 2i \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 + ix_2 - (1+i)x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + 3ix_3 = i \\ x_1 + (1+i)x_2 + (2i-1)x_3 = 2 + i \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - ix_3 = 4 \\ -2x_1 + (i-2)x_2 + x_3 = 4i \\ x_1 + ix_2 + (1-i)x_3 = 1 + 4i \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2ix_3 = i + 4 \\ -3x_1 - ix_2 + 2x_3 = 4 - i \\ -2x_1 + (2-i)x_2 + (2-2i)x_3 = 5 \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 = -2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2ix_3 = 4 \\ 2x_1 + ix_2 - x_3 = -4 + 2i \\ x_1 - (1+i)x_2 + (1+2i)x_3 = 8 - 2i \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 = 2 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x_1 + ix_2 + (3-3i)x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = i - 2 \\ x_1 + (1+i)x_2 - 3ix_3 = i \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - (2-3i)x_3 = i \\ 2x_1 - ix_2 - 3ix_3 = 1 \\ x_1 + (2-i)x_2 - 2x_3 = 1 + i \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - (2+i)x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 - 2i \\ x_1 - x_2 - (1+i)x_3 = 5 - 2i \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 = 2 \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - 3ix_2 + 2x_3 = 2 - i \\ -2x_1 + 3x_2 - ix_3 = 1 \\ -x_1 + (3-3i)x_2 + (2-i)x_3 = 3 - i \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ 5x_1 - 5x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + (1-i)x_3 = 2 \\ -3x_1 + ix_2 + 2x_3 = 4 - i \\ -x_1 + (i-1)x_2 + (3-i)x_3 = 6 - i \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} -3x_1 + 2ix_2 + ix_3 = 1 + 2i \\ 2x_1 - ix_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + ix_2 + (1+i)x_3 = 2 + 2i \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 + (1+2i)x_3 = 3i \\ 4x_1 - 2ix_2 - 2ix_3 = 1 + i \\ 3x_1 + (1-2i)x_2 + x_3 = 1 + 4i \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + ix_3 = 2 - 3i \\ -4x_1 + ix_2 - (1+i)x_3 = -2 \\ -2x_1 + (i-3)x_2 - x_3 = -3i \end{cases}$

6. *Матрицы A и B называются перестановочными, если $AB = BA$. Найти все матрицы с действительными элементами, перестановочные с матрицей A.*

6.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6.4.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.5.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.6.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.7.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.8.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.9.
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.10.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6.11.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.12.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

6.13.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.14.
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

6.15.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ЛАБРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

Определители

Вопросы для самоконтроля

1.Формула определителя

Формула определителя: число слагаемых в правой части формулы, число сомножителей в каждом слагаемом, представители строк и столбцов, знак слагаемого. Определители второго и третьего порядка. Определитель треугольной матрицы. Определитель матрицы с нулевой строкой или столбцом.

2.Свойства определителей

Действия над матрицей, не меняющее её определитель (транспонирование, умножение строки на число и прибавление к другой строке). Свойства определителей, связанные с пропорциональными строками, перестановкой строк, умножение строки на число, разложение строки в сумму.

3.Определитель клеточных матриц

Вычисление определителей клеточных матриц $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}$, *где* A *и* B *— квадратные матрицы порядков* n *и* m.

4. Определитель произведения матриц

Доказательство мультипликативности определителя.

5. Миноры и алгебраические дополнения

Минор элемента матрицы и алгебраическое дополнение. Лемма об определителе матрицы, у которой все элементы – строки, кроме может быть одного, равны нулю. Вычисление определителя разложением по строке. Равенство нулю суммы произведений элементов строки на алгебраические дополнения к элементам другой строки.

6.Формула обратной матрицы

Определения обратной и обратимой матрицы. Единственность обратной матрицы. Матрица, обратная к произведению обратимых матриц. Присоединённая матрица. Произведение матрицы и присоединённой. Формула обратной матрицы. Невырожденная матрица. Критерий обратимости квадратной матрицы.

7.Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований

Элементарные матрицы. Связь элементарных преобразований с умножением на элементарные матрицы. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

8.Определитель Вандермонда

Определение определителя Вандермонда и способ его вычисления.

Примеры решения и оформления задач

Пример1 *Выбрать i, j, k таким образом, чтобы слогаемое* $a_{4i}, a_{2k}, a_{32}, a_{4j}$ *входило в развёрнутое выражение определителя четвёртого порядка со знаком "минус".*

Решение *Так как слагаемое развёрнутого выражения определителя представляет собой произведение элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, то в слагаемом* $a_{4i}, a_{2k}, a_{32}, a_{4j}$ *первые индексы исчерпываются четырьмя цифрами: 1,2,3,4. Поскольку цифры 1,2,3,4 присутствуют, то j=1.*

Знак слагаемого $a_{4i}, a_{2k}, a_{32}, a_{4j}$ *равен знаку перестановки*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 \\ i & k & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & k & 2 & i \end{pmatrix}$$

так как цифры нижней строки перестановки не превышает 4 и все различны, то имеет место два случая:

$1)k = 3; i = 1; 2)k = 1; i = 3.$

Рассмотрим эти случаи.

$$1)\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (14)(23)$$

$$sgn\alpha = (-1)^{4-2} = (-1)^2 = 1$$

т.е. перестановка α *имеет знак "плюс".*

$$2)\alpha = (\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1432)$$

$$sgn\alpha = (-1)^{4-1} = (-1)^3 = -1$$

т.е. перестановка α *имеет знак "минус".*

Таким образом, при $j = 1, i = 3, k = 1$ *слагаемое* $a_{4i}, a_{2k}, a_{32}, a_{j4}$ *входят в развёрнутое выражение определителя четвёртого порядка со знаком со знаком "минус".*

Ответ: $i = 3, j = 1, k = 1$

Пример 2.*Вычислить определители*

a) $\begin{vmatrix} 57823 & -23251 \\ 56823 & -22251 \end{vmatrix}$, *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

Решение. *a) Вычтем из первой строки определителя вторую. Тогда*
$\begin{vmatrix} 57823 & -23251 \\ 56823 & -22251 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1000 & -1000 \\ 56823 & -22251 \end{vmatrix} = 1000 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 56823 & -22251 \end{vmatrix} =$
$1000(-22251 + 56823) = 1000 \cdot 34572 = 34572000$

b) Данный определитель является определителем Вандермонда, так как

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \\ 1 & -1 & (-1)^2 \end{vmatrix}$$

Поэтому $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \\ 1 & -1 & (-1)^2 \end{vmatrix} = (5-2)(-1-2)(-1-5) = 54$

Пример 3*Вычислить определитель, приведя его к треугольному виду.*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Решение. *Поменяем местами первую и вторую строки определителя. От этого преобразования знак определителя изменится на противоположный, т.е.*
$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Известно, что если все элементы некоторой строки умножить на число и сложить с элементами другой строки, то значение определителя не изменится. Применяя только это преобразование, приведём определитель к треугольному виду.

$-\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Мы во второй строке прибавили первую, умноженную на 2, а к третьей прибавили первую, умноженную на (-1). Затем к третьей строке прибавили вторую, умноженную на $\frac{3}{5}$*, и получили определитель треугольного вида.*

Так как определитель треугольного вида равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, то
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)(-5)\cdot 1 = -5.$$
Ответ: -5.

Замечание. *Часто бывает полезно при вычислении определителя привести его к определителю клеточной матрицы с помощью преобразований из примера 3.*

Пример 4. *Найти матрицу, обратную к матрице A с помощью алгебраических дополнений.*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
.

Решение. *Для нахождения обратной матрицы воспользуемся формулой*
$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$$
Вычислим $detA$ и алгебраические дополнения A_{ij} и подставим их в формулу.
$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+3}\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$
$$1\cdot(-1)^{3+3}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2\cdot 2\cdot 1 + 0\cdot 2\cdot(-1) + (-1)(-1)(-1) - (-$$
$-1)\cdot 2\cdot(-1) - 0\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot 2(-1)) + (1\cdot(-1)\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot(-1)\cdot(-$
$-1) - 2\cdot(-1)\cdot(-1) - 2\cdot 1\cdot(-1) - -2\cdot 1\cdot 1) = -5+6 = 1.$

Здесь определитель четвёртого порядка мы разложим по элементам третьего столбца, так как в этом столбце наибольшее число нулей. Определители третьего порядка вычислены по правилу Саррюса.
$$A^{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2\cdot 1\cdot(-1)^{2+2}\cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A^{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$A_{13} = 5$, $A_{14} = 3$, $A_{21} = -1$, $A_{22} = 2$, $A_{23} = -9$, $A_{24} = -5$,$A_{31} = 1$, $A_{32} = -1$,$A_{33} = 6$, $A_{34} = 3$, $A_{41} = -2$, $A_{42} = 3$, $A_{43} = -13$, $A_{44} = -7$.

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -9 & 6 & -13 \\ 3 & -5 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

.

Нетрудно проверить, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, *т.е.* A^{-1}— *обратная матрица для матрицы* A.

Ответ: $A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -9 & 6 & -13 \\ 3 & -5 & 3 & -7 \end{vmatrix}$

Пример 5.*С помощью элементарных преобразований найти матрицу, обратную матрице* A. *Сделать проверку.*

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение. *Запишем матрицу* $A|E$, *где* E— *единичная матрица, и преобразовав её с помощью элементарных преобразований строк таким образом, чтобы получилась матрица вида* $E|B$. *матрица* B *будет обратной к матрице* A.

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Мы оставим первую строку без изменений, ко второй прибавили первую, умноженную на (-2), *к третьей прибавили первую. Теперь к третьей строке прибавим вторую. Получим матрицу*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

В этой матрице умножим третью строку на $\frac{1}{2}$. *Затем прибавим третью строку, умноженную на* (-2), *ко второй, а также сложим первую и третью строки.*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Остаётся к первой строке прибавить вторую, а вторую строку умножить на (-1). *Получим матрицу*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) = (E|B).$$

Следовательно,

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Проверка. *Покажем, что* $B = A^{-1}$, *т.е. B является матрицей, обратной к матрице A. для этого нужно проверить выполнение равенств* $AB = BA = E$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}+1+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+0-\frac{1}{2} & \frac{-1}{2}+1-\frac{1}{2} \\ -1+1+0 & 1+0+0 & -1+1+0 \\ \frac{-1}{2}+0-\frac{1}{2} & \frac{-1}{2}+0+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$BA = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}+1+\frac{1}{2} & \frac{-1}{2}+\frac{1}{2}+0 & \frac{1}{2}+0-\frac{1}{2} \\ 1+0-1 & 1+0+0 & -1+0+1 \\ \frac{-1}{2}+1-\frac{1}{2} & \frac{-1}{2}+\frac{1}{2}+0 & \frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Ответ:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Задание к лабораторной работе

1. *Выбрать значения i,j,k так, чтобы произведение m входило в развёрнутое выражение определителя шестого порядка со знаком "минус".*

1.1. $m = a_{2i}a_{41}a_{j3}a_{5k}a_{12}a_{64}$.

1.2. $m = a_{j3}a_{14}a_{5i}a_{k1}a_{26}a_{45}$.

1.3. $m = a_{32}a_{i1}a_{46}a_{1j}a_{2k}a_{63}$.

1.4. $m = a_{62}a_{i1}a_{4j}a_{25}a_{5k}a_{34}$.

1.5. $m = a_{4i}a_{j2}a_{36}a_{k5}a_{61}a_{53}$.

1.6. $m = a_{ij}a_{13}a_{4k}a_{62}a_{54}a_{31}$.

1.7. $m = a_{2i}a_{32}a_{j6}a_{k5}a_{51}a_{63}$.

1.8. $m = a_{16}a_{i3}a_{4j}a_{k1}a_{25}a_{32}$.

1.9. $m = a_{44}a_{2j}a_{k3}a_{65}a_{i6}a_{31}$.

1.10. $m = a_{26}a_{3j}a_{1k}a_{55}a_{64}a_{i1}$.

1.11. $m = a_{11}a_{2i}a_{63}a_{4k}a_{j6}a_{34}$.

1.12. $m = a_{i6}a_{2j}a_{3k}a_{13}a_{34}a_{62}$.

1.13. $m = a_{15}a_{i2}a_{j4}a_{51}a_{36}a_{2k}$.

1.14. $m = a_{23}a_{4k}a_{j6}a_{5i}a_{11}a_{34}$.

1.15. $m = a_{42}a_{i5}a_{66}a_{3j}a_{1k}a_{51}$.

2. *Вычислить определители матриц A,B,C.*

2.1. $A = \begin{pmatrix} 3i & -1 \\ 2 & 3i \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3i & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 3-i \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

2.2. $A = \begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 23528 & 43621 \\ 24528 & 44621 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} i-1 & 2 & 2 \\ -3 & 4i & 0 \\ 1 & -2 & -i \end{pmatrix}$

2.3. $A = \begin{pmatrix} 3-i & 2i \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 10159 & 6523 \\ 11259 & 7623 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} i & 2 & i-1 \\ 3 & 5 & 4i \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2.4. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2+i \\ 3i & i+1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 12253 & 17829 \\ 12363 & 17839 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4-i & 2 & 3+i \\ -3 & -2 & 1-i \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$

2.5. $A = \begin{pmatrix} 6-i & 8 \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 21351 & -22351 \\ 16273 & -17273 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4i & 3+i & 1 \\ -5 & 2-i & 1 \\ 7i & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2.6.

$A = \begin{pmatrix} 4i & 3+2i \\ 5 & -5+i \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -13297 & 26153 \\ -13397 & 26253 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 5 & 7i & -1+i \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & i & 1-i \end{pmatrix}$

2.7.

$$A = \begin{pmatrix} 8i & 9-i \\ -1 & 3i+2 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 17324 & -11526 \\ 27324 & -21526 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 4i & -3 & 5+2i \\ 1 & 2 & 6-i \\ -1 & i & -1 \end{pmatrix}$$

2.8.

$$A = \begin{pmatrix} -3-i & 2 \\ 1 & i+6 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 14326 & 15326 \\ -95623 & -96623 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 0 & -2-i & 1+i \\ -i & 1 & 2+i \\ -1 & i & 2+3i \end{pmatrix}$$

2.9.

$$A = \begin{pmatrix} 4+i & 6-i \\ 9i & 2 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} -35201 & 26731 \\ 35211 & -26741 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 3i & 2+i & 0 \\ 2-3i & 1 & 6-i \\ 1 & i & -1 \end{pmatrix}$$

2.10.

$$A = \begin{pmatrix} -7+i & 6i \\ 6-i & 7 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 27802 & 28802 \\ 11935 & 12935 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} -4 & 3+2i & 2i \\ -i & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2i \end{pmatrix}$$

2.11.

$$A = \begin{pmatrix} 5-2i & -2 \\ -i & 4+3i \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 17932 & 25113 \\ 13932 & 21113 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} -i & 2 & 3+2i \\ 2 & 0 & -i \\ 2i & 2 & 2-i \end{pmatrix}$$

2.12.

$$A = \begin{pmatrix} 6-i & 7+2i \\ 8i & 1 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 33253 & -16821 \\ 31253 & -14821 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} -1-2i & 2i & 0 \\ 0 & 1-3i & 3 \\ i & -1 & 1+i \end{pmatrix}$$

2.13.

$$A = \begin{pmatrix} -4i & 2+3i \\ -1 & 1+2i \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 71815 & -23526 \\ 71805 & -23516 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 0 & 2i & 1-3i \\ 1 & 2 & 2i \\ 1 & 3+i & 3-i \end{pmatrix}$$

2.14.

$$A = \begin{pmatrix} 3i-1 & 2 \\ i & 2i+3 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 84434 & -84534 \\ 12796 & -12896 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 1-i \\ 3 & 2 & -1+i \\ 2 & 6i & -i \end{pmatrix}$$

2.15.

$$A = \begin{pmatrix} -4+3i & 2i \\ 5-i & -3 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 66437 & 41432 \\ -66337 & -41332 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} i & i+1 & 2-3i \\ 1 & -2 & 0 \\ 4i & -3 & 5+i \end{pmatrix}$$

3. *Вычислить определители матриц F и H приведением их к треугольному виду.*

3.1. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \\ -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

3.2. $F = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & -4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

3.3. $F = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

3.4. $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

3.5. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & -3 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

3.6. $F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3.7. $F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.8. $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3.9. $F = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3.10. $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.11. $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 \\ -4 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3.12. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & -8 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

3.13. $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -5 & 5 & -4 \\ 3 & 6 & -4 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3.14. $F = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & -1 & -9 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3.15. $F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -6 & -4 \\ 2 & -2 & -9 & -7 \\ -1 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

4. *Вычислить:*

а) определитель матрицы C из задания 2 разложением по элементам второго столбца;

б) определитель матрицы F из задания 3 разложением по элементам третьей строки.

5.*Найти члены определителя, содержащие x^2 и x^3.*

5.1 $$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$$

5.2. $$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 3 & 2 \\ 3 & 1 & x & 2 \\ 5 & 3 & 1 & x \end{vmatrix}$$

5.3. $$\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

5.4. $$\begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 1 \\ x & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & x & 1 \\ 1 & 1 & -1 & x \end{vmatrix}$$

5.5. $$\begin{vmatrix} 3x & -1 & 1 & 1 \\ 2 & x & -2 & 1 \\ 1 & x & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & x \end{vmatrix}$$

5.6. $$\begin{vmatrix} -x & -1 & x & 2 \\ 1 & -x & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & x & 3 \end{vmatrix}$$

5.7. $$\begin{vmatrix} 1 & x & -x & 4 \\ x & 1 & -1 & 2 \\ 1 & x & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -x & 2 \end{vmatrix}$$

5.8. $$\begin{vmatrix} -2 & 1 & x & -1 \\ x & 1 & 2 & x \\ 0 & x & 3 & 0 \\ 1 & -1 & x & 1 \end{vmatrix}$$

5.9. $$\begin{vmatrix} 3x & -1 & 2 & 0 \\ 1 & x & -1 & 2 \\ 3 & x & -2 & x \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

5.10. $$\begin{vmatrix} -1 & x & 1 & 2 \\ 3 & 1 & x & -1 \\ 0 & 2 & 1 & x \\ 1 & -1 & x & 3 \end{vmatrix}$$

5.11. $$\begin{vmatrix} -1 & x & -2 & 0 \\ x & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x & 3 \end{vmatrix}$$

5.12. $$\begin{vmatrix} -2 & 1 & x & 4 \\ x & 3 & 1 & 0 \\ -1 & x & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & x \end{vmatrix}$$

5.13. $$\begin{vmatrix} 2x & -1 & x & 3 \\ 4 & -x & 2 & 3 \\ -112 & 4 & 1 & \\ x & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

5.14. $$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & x \\ 2 & x & -1 & 0 \\ x & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & x & 1 \end{vmatrix}$$

5.15. $$\begin{vmatrix} 4x & -2 & 3 & 1 \\ 0 & x & 2 & 1 \\ x & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & x & 3 \end{vmatrix}$$

6. *Вычислить определитель порядка n.*

6.1. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$$

6.2. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

6.3. $$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

6.4. $$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

6.5. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \cdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

6.6. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ \cdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

6.7. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$$

6.8. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

6.9. $$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n & 0 \end{vmatrix}$$

6.10. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

6.11. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 1 \end{vmatrix}$ *6.12.* $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & & 11 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$

6.13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ *6.14.* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$

6.15. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$

7. *Используя формулы определителей клеточных матриц, решить уравнение*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & j & j \\ -1 & 3-x^2 & 3 & 3 \\ i & i & 5 & 5 \\ -i & -i & 6 & x^2-3 \end{vmatrix} = 0$$

где i,j — числа, вычисленные в задании 1.

8. *Вычислить определитель Вандермонда*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ n-1 & n & n+1 \\ (n-1)^2 & n^2 & (n+1)^2 \end{vmatrix}$$

где n— номер варианта.

9. *Найти матрицы, обратные матрицам A, C из задания 2 и матрице F из задания 3, с помощью алгебраических дополнений.*

10. *Найти матрицы, обратные матрицам A из задания 2 и F из задания 3 с помощью элементарных преобразований.*

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

Системы линейных уравнений.

Вопросы для самоконтроля.

1. Правило Крамера

Определение крамеровской системы линейных уравнений, число её решений. Правило Крамера нахождения решения систем линейных уравнений. Матричный способ нахождения систем линейных уравнений.

2. Ранг матрицы

Минор r-го порядка. Лемма о минорах $(r+1)$-го порядка. Определение ранга матрицы. Элементарное преобразование матрицы и её ранг. Ранг ступенчатой матрицы. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.

3. Теорема Кронекера-Капелли.

Доказательство теоремы Кронекера-Капелли. Главные и свободные неизвестные. Алгоритмы нахождения решений систем линейных уравнений.

4. Однородные системы линейных уравнений.

Определение однородной системы линейных уравнений, её совместность. Теорема о существований ненулевых решений однородной системы и её следствия.

Примеры решений и оформления задач.

Пример 1 *Дана система линейных уравнений.*

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4 \\ 2x_1+x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2=-3 \end{cases}$$

Проверить, совместна ли эта система и в случае совместности решить её: а) матричным методом, б) методом Гаусса.

Решение. *Совместность данной системы проверим по теоремы Кронекера-Капелли. С помощью элементарных преобразований найдём ранг матрицы.*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

данной системы и ранг расширенной матрицы

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Будем преобразовывать расширенную матрицу

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Так как число ненулевых строк в ступенчатом виде матриц A и B равно 3, то ранги матриц A и B равны ($rangA = rangB = 3$). Значит, исходная система совместна. Так

как ранги матриц A и B равны числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

а) Для решения системы матричным методом выделим в системе число уравнений, равное рангу матрицы, таким образом, чтобы определитель из коэффициентов при неизвестных в выбранных уравнениях был отличен от нуля. Этим условиям удовлетворяют уравнения

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

так как определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

Эту систему можно записать в матричном виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение системы в матричной форме имеет вид $X = A^1 B$.

Так как

$$A^{-1} = \frac{-1}{12} \begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

то
$A^{-1} = \frac{-1}{12} \begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$
Значит $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 0.$

б) Для решения системы методом Гаусса воспользуемся полученной ступенчатой матрицей

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

.

Запишем систему, соответствующую этой матрице.
$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ -4x_3 = 0 \end{cases}$

Из третьего уравнения найдём $x_3 = 0$. *Подставляя его во второе уравнение, получим* $x_2 = 2$. *Из первого уравнения* $x_1 = -1$.

Проверка .
$\begin{cases} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 0 = 4 \\ 2 \cdot (-1) + 2 + 3 \cdot 0 = 0 \\ 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 0 = 1 \\ -1 - 2 = -3 \end{cases}$
Ответ: $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 0.$

Пример 2.*Дана система линейных уравнений*
$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 3 \\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -1 \end{cases}$
Исследовать систему на совместность и в случае совместности решить:

а) методом Гаусса б)по правилу Крамера.

Решение. *Вычислим ранг расширенной матрицы*
$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -7 \end{array}\right) \sim$
$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$

Следовательно, $rangA = rangB = 2$. *Система совместна. Так как число неизвестных больше ранга матриц* A *и* B, *то система имеет бесконечно* *много решений.*

а) Для решения системы методом Гаусса воспользуемся ступенчатой матрицей. Запишем систему, соответствующую этой матрице.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x4 = 2 \\ -x_2 + 3x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

В ступенчатой матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Выбираем ненулевой минор D порядка, равного рангу матрицы A. В качестве D можно взять минор

$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$

составленный из коэффициентов при x_2, x_1. Тогда x_1, x_2— главные неизвестные, которые мы выразим через остальные— свободные неизвестные. Для этого оставим главные неизвестные слева, а свободные перенесём вправо.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4 + 2 \\ -x_2 = -3x_3 + x_4 + 7 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} x_1 = -5 + x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -7 + 3x_3 + x_4 \end{cases}$$

x_3, x_4— *любые числа.*

б) В матрице системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

выберем ненулевой минор D порядка 2=rangA. Пусть минор

$$D = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

.

составлен из коэффициентов при x_2, x_4 в первом и втором уравнениях. Тогда x_2, x_4 — главные неизвестные. Оставим в системе уравнения, соответствующие строкам минора D, и оставим в левой части уравнений главные неизвестные. Получим крамеровскую систему

$$\begin{cases} -x_2 - x_4 = 2 - x_1 - 2x_3 \\ x_2 + 3x_4 = 3 + 2x_1 + x_3 \end{cases}$$

По формулам Крамера
$x_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_4 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, *где* $\Delta = D = -2$,
$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 - x_1 - 2x_3 & -1 \\ 3 + 2x_1 + x_3 & 3 \end{vmatrix} = 9 - x_1 - 5x_3.$
$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 - x_1 - 2x_3 \\ 1 & 3 + 2x_1 + x_3 \end{vmatrix} = -5 - x_1 + x_3.$
находим
$x_2 = \frac{-9}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_3$, $x_4 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3$,
x_1, x_2 *—любые числа.*

Пример 3.*Исследовать систему на совместность и найти решения в зависимости от значений* λ*:*

$$\begin{cases} x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2 \\ -3x_1 + x_2 - \lambda \cdot x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение. *Преобразуем расширенную матрицу* B *системы.*
$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & -\lambda & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -3+2\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 1-3\lambda & 3-\lambda & 3 \end{array}\right)$
Если $-3 + 2\lambda = 0$ *(т.е.* $\lambda = \frac{3}{2}$*), то*
$B \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$
В этом случае ранг матрицы A *системы уравнений равен двум, а ранг расширенной матрицы* B *равен 3. По теореме Кронекера-Капелли система несовместна.*
Пусть $\lambda \neq \frac{3}{2}$*. Тогда*
$B \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -3+2\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 0 & (-3+2\lambda)\cdot(3-\lambda) & -6\lambda - 5 \end{array}\right)$
Если $\lambda = 3$*, то*

$$B \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -23 \end{array}\right)$$

Тогда $rangA = 2, rangB = 3$*. Система несовместна.*

Если $\lambda \neq 3$, то $rangA = rangB = 3$. Система совместна и имеет единственное решение , которое найдём из системы

$$\begin{cases} x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ (-3+2\lambda)x_2 = -4 \\ (-3+2\lambda)\cdot(3-\lambda)x_3 = -6\lambda - 5 \end{cases}$$

$x_3 = \frac{-6-\lambda-5}{(-3+2\lambda)\cdot(3-\lambda)}$, $x_2 = \frac{-4}{-3+2\lambda}$, $x_1 = \frac{2\lambda^2+3\lambda-4}{(-3+2\lambda)\cdot(3-\lambda)}$.

Ответ: *система не совместна при $\lambda = \frac{3}{2}$ или $\lambda = 3$, при $\lambda \neq \frac{3}{2}$ и $\lambda \neq 3$ система имеет единственное решение*
$x_3 = \frac{-6-\lambda-5}{(-3+2\lambda)\cdot(3-\lambda)}$, $x_2 = \frac{-4}{-3+2\lambda}$, $x_1 = \frac{2\lambda^2+3\lambda-4}{(-3+2\lambda)\cdot(3-\lambda)}$.

Задание к лабораторной работе.

1. *Исследовать системы на совместность и решить двумя способами:*
а) по правилу Крамера;
б)матричным методом.

1.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 i + x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - ix_2 + 2x_3 = i - 2 \\ -x_1 + 3x_2 - ix_3 = 3 \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - ix_3 = -2 - 2i \\ -x_1 + 2ix_2 + 3x_3 = -3 \\ 3x_1 - ix_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -6 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 16 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 11 \end{cases}$ $\begin{cases} (2-i)x_1 + x_2 - x_3 = -1 - i \\ x_1 - (2+i)x_3 = 1 - 2i \\ 3x_1 - x_2 + 2ix_3 = -1 \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -8 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -4 \end{cases}$ $\begin{cases} (1-i)x_1 - 2x_2 = -1 - i \\ x_1 - 2x_2 + ix_3 = 0 \\ 3x_1 - ix_2 + 2x_3 = 2 - 3i \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 12 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 i - x_2 + (1-i)x_3 = 1 - i \\ 2x_1 + ix_2 - 3x_3 = i - 3 \\ -3x_1 + x_2 - (2+i)x_3 = -3 - 4i \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-3x_4=4 \\ x_1+3x_2-x_4=6 \\ 2x_1-2x_2+3x_3=-6 \\ 3x_1+5x_2-3x_3+2x_4=5 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x_1+3ix_2-x_3=-1 \\ -ix_1+x_2-2x_3=-4-2i \\ 3x_1-ix_2+x_3=4 \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4=16 \\ x_1+3x_2+2x_3+3x_4=6 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4=9 \\ x_2+5x_3-4x_4=-13 \end{cases}$ $\begin{cases} -2ix_1+x_2-x_3=-3i \\ x_1+(1-2i)x_2+2x_3=-1-i \\ 2x_1-ix_2+2x_3=1 \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+4x_4=16 \\ x_1+3x_2+2x_3+3x_4=6 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4=9 \\ x_2+5x_3-4x_4=-13 \end{cases}$ $\begin{cases} (1-2i)x_1+x_2-x_3=-1-i \\ x_1-(1-i)x_2+2x_3=1+i \\ -3x_1+x_2-(2+i)x_3=2i \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=0 \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=-3 \\ 4x_1+x_2-x_3+x_4=-4 \\ 2x_1-3x_2+3x_3+2x_4=-7 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1i-x_2+(1-i)x_3=3 \\ x_1-(1+2i)x_2=2+2i \\ -2x_1+4x_2-ix_3=-6-2i \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4=-7 \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=-4 \\ 2x_1+x_2-x_3-3x_4=2 \\ -3x_1-x_2+4x_3-x_4=-6 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-4ix_2+x_3=-4 \\ ix_1-2x_2-3x_3=3+i \\ -2x_1+(1-2i)x_3=3-2i \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=3 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=3 \\ -x_1+5x_2-3x_3+4x_4=14 \\ 3x_1+2x_2-2x_3+2x_4=3 \end{cases}$ $\begin{cases} (2+i)x_1-x_2+2x_3=-2-3i \\ x_1-4ix_2+ix_3=i+2 \\ -2x_1+x_2-(1-i)x_3=3+2i \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=8 \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=2 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-1 \\ x_1+x_2+3x_3-2x_4=4 \end{cases}$ $\begin{cases} (-1+i)x_1+2x_2-x_3=3i-2 \\ x_1-(i+2)x_2+2x_3=2-2i \\ -3x_1+x_2-4ix_3=-10 \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3-4x_4=3 \\ x_1+3x_2-6x_3+2x_4=-13 \\ 3x_1-2x_2+2x_3-2x_4=4 \\ 2x_1-x_2+2x_3=5 \end{cases}$ $\begin{cases} (i+2)x_1-2x_2+3x_3=-2-3i \\ 2x_1-(2i+1)x_2=-1-2i \\ -3x_1+2x_2-(1-2i)x_3=4+i \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+3x_3-4x_4=11 \\ 4x_1+5x_2 3x_3+x_4=-6 \\ 2x_1+3x_2-4x_3+2x_4=-9 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=6 \end{cases}$ $\begin{cases} -ix_1+2x_2-3x_3=-2-4i \\ 2x_1-(1-i)x_2+ix_3=2-i \\ x_1-ix_2+4x_3=1+5i \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=4 \\ 3x_1-4x_2+x_3-3x_4=-8 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} (3-i)x_1-x_2+4x_3=-1-4i \\ x_1-ix_2+x_3=-2i \\ -2x_1+2x_2-(1-i)x_3=3+i \end{cases}$

2. *Исследовать систему на совместность и решить тремя способами :*
а)методом Гаусса
б) по правилу Крамера
в)матричным методом

2.1. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-4x_3=8 \\ 2x_1+4x_2-5x_3=7 \\ x_1-2x_2+x_3=1 \end{cases}$ *2.2.* $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2+2x_3=-5 \\ 2x_1+3x_3=-4 \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3=6 \\ 3x_1-x_2+x_3=-4 \\ 5x_1-2x_2+5x_3=2 \end{cases}$ *2.4.* $\begin{cases} 3x_1-3x_2+2x_3=2 \\ 4x_1-5x_2+2x_3=1 \\ x_1-2x_2=-1 \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-4x_3=8 \\ 2x_1+4x_2-5x_3=1 \\ 5x_1+6x_2-9x_3=9 \end{cases}$ *2.6.* $\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=-3 \\ 2x_1+2x_2+5x_3=5 \\ 5x_1+3x_2+7x_3=2 \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 4x_1-7x_2-2x_3=1 \\ 2x_1-3x_2-4x_3=6 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=-5 \end{cases}$ *2.8.* $\begin{cases} 5x_1-9x_2-4x_3=6 \\ x_1-7x_2-5x_3=1 \\ 4x_1-2x_2+x_3=5 \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} x_1-5x_2+x_3=3 \\ 3x_1+2x_2-x_3=7 \\ 4x_1-3x_2=10 \end{cases}$ *2.10.* $\begin{cases} 5x_1-5x_2-4x_3=-3 \\ x_1-x_2+5x_3=1 \\ 4x_1-4x_2-9x_3=-4 \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} 7x_1-2x_2-x_3=2 \\ 6x_1-4x_2-5x_3=3 \\ x_1+2x_2+4x_3=-1 \end{cases}$ *2.12.* $\begin{cases} 4x_1-3x_2+x_3=3 \\ x_1+x_2-x_3=4 \\ 3x_1-4x_2+3x_3=-1 \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=1 \\ 2x_1+2x_2-3x_3=9 \\ x_1-x_2+5x_3=-8 \end{cases}$ *2.14.* $\begin{cases} 6x_1+3x_2-5x_3=2 \\ 9x_1+4x_2-7x_3=3 \\ 3x_1+x_2-2x_3=1 \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=5 \\ x_1+x_2+5x_3=4 \\ 3x_1+4x_2+9x_3=9 \end{cases}$

3. *Исследовать системы на совместность. Совместную систему решить методом Гаусса.*

3.1. $\begin{cases} -3x_1+2x_2=-8 \\ 5x_1+4x_2+3x_3=15 \\ 2x_1+x_2+x_3=6 \end{cases}$ $\begin{cases} 2ix_1-x_2+(1-i)x_3=2 \\ -x_1+x_2+ix_3=-3+i \\ (-1+2i)x_1+x_3=4 \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -10 \\ 2x_1 + 5x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} ix_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + ix_3 = i \\ (2+i)x_1 - 5x_2 + (3+i)x_3 = -3 \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 = -2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - 2ix_2 + 3x_3 = 2 \\ -ix_1 + x_2 - (1-i)x_3 = -2i \\ (1-i)x_1 + (1-2i)x_2 + (2+i)x_3 = 5 \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -8 \\ 5x_2 + x_3 = -6 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = -7 \end{cases}$ $\begin{cases} -x_1 + (1-2i)x_3 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2i \\ -3x_1 + x_2 - 2ix_3 = 0 \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} -x_1 + 3x2 + 7x_3 = -5 \\ 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - 2ix_2 + x_3 = -3 \\ -ix_1 + 2x_2 = -3 + i \\ (1+i)x_1 - (2+2i)x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} 4x_1 + 5x_3 = -10 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ -5x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - (1+i)x_3 = 2i \\ -x_1 + ix_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + (1-i)x_2 - ix_3 = 2 \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ -2x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 - 2ix_2 + 3x_3 = 1 - i \\ -x_1 + 4ix_2 - 4x_3 = 2 + i \\ 2x_1 + 2ix_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} -3x_1 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 - ix_2 + (1-i)x_3 = 2 \\ ix_1 + x_2 = -i \\ (1+i)x_1 + (1-i)x_2 + (1-i)x_3 = 5 \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} ix_1 - (2+i)x_2 - x_3 = -1 \\ 2ix_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4i \\ ix_1 + ix_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -6 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - 4ix_2 + (1+i)x_3 = 2 + i \\ -3x_1 + x_2 - ix_3 = 2 + 2i \\ 4x_1 - (1+4i)x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 10 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + (3i-1)x_3 = 4 + i \\ -x_1 + 4x_2 - ix_3 = 2 \\ 3x_1 - 5x_2 + (4i-1)x_3 = 3 \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -x_1 + 2ix_2 - (1+i)x_3 = 2 - i \\ 3x_1 - 4x_2 + ix_3 = 4 \\ 2x_1 + (2i-4)x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ -3x_1 + 4x_3 = 13 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 - 2ix_2 + ix_3 = 1 - 2i \\ -x_1 + (4+2i)x_2 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 + ix_3 = 4 \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} -3x_1 + x_2 - (1-i)x_3 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + ix_3 = 3 - i \\ -x_1 - 3x_2 - (1-2i)x_3 = 4 \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} -3x_1+2x_2=8 \\ 2x_1+x_2-x_3=-4 \\ x_1+x_2-2x_3=-6 \end{cases}$ $\begin{cases} ix_1+2x_2-3x_3=1-i \\ (1-i)x_1+4x_3=2i \\ x_1+2x_2+x_3=5 \end{cases}$

4. *Решить однородную систему:*

4.1. $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+3x_2+3x_3=0 \end{cases}$ 4.2. $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+2x_2+5x_3=0 \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} 4x_1-x_2+10x_3=0 \\ x_1+2x_2-x_3=0 \\ 3x_1-3x_2+3x_3=0 \end{cases}$ 4.4. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3=0 \\ 4x_1+6x_2+3x_3=0 \\ x_1-x_2-2x_3=0 \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} 3x_1-x_2-3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+3x_3=0 \end{cases}$ 4.6. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+x_2-3x_3=0 \\ 3x_1-x_3=0 \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} 2x_1-x_2-5x_3=0 \\ x_1+2x_2-3x_3=0 \\ 5x_1+x_2+4x_3=0 \end{cases}$ 4.8. $\begin{cases} 5x_1-5x_2+4x_3=0 \\ 3x_1+x_2+3x_3=0 \\ 2x_1-6x_2+x_3=0 \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=0 \\ 2x_1+5x_2-2x_3=0 \\ x_1+x_2+5x_3=0 \end{cases}$ 4.10. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 3x_1+3x_2+5x_3=0 \\ 4x_1+x_2+6x_3=0 \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3=0 \\ x_1+2x_2-4x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$ 4.12. $\begin{cases} 6x_1+5x_2-4x_3=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ 3x_1+4x_2+3x_3=0 \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} 4x_1+x_2+4x_3=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3=0 \\ 7x_1-x_2+3x_3=0 \end{cases}$ 4.14. $\begin{cases} 8x_1+x_2-3x_3=0 \\ x_1+5x_2+x_3=0 \\ 4x_1-7x_2+2x_3=0 \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3=0 \\ x_1-3x_2+2x_3=0 \\ 3x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$

5 *Исследовать систему и найти решения в зависимости от значений параметра λ:*

$$\begin{cases} x_1+(n-7)x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-1 \\ (n-8)x_1+x_2+\lambda x_3=1 \end{cases}$$

где n— номер варианта.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7

МНОГОЧЛЕНЫ

Вопросы для самоконтроля

1. ПОСТРОЕНИЕ КОЛЬЦА МНОГОЧЛЕНОВ

Последовательности, их сложение, умножение. Проверка аксиом кольца. Введение переменного x. Запись многочлена по возрастающим и убывающим степеням x. Степень многочлена. Степень суммы и произведения многочленов.

2. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ В КОЛЬЦЕ МНОГОЧЛЕНОВ

Доказательство теоремы о делении с остатком. Неполное частное, остаток.

3. АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ

Делимость многочленов и ее свойства. Наибольший общий делитель и его нахождение с помощью алгоритма Евклида.

4. ВЫРАЖЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО ОБЩЕГО ДЕЛИТЕЛЯ ЧЕРЕЗ ИСХОДНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Доказательство теоремы о выражении НОД через исходные многочлены. Взаимно простые многочлены. Следствие теоремы для взаимно простых многочленов. Теорема о делимости произведения двух многочленов на многочлен, взаимно простой с одним из сомножителей.

5. НЕПРИВОДИМЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Определение неприводимого многочлена. Зависимость неприводимости от поля. Свойства неприводимых многочленов. Однозначность разложения на неприводимые множители в кольце многочленов. Каноническое разложение многочлена и нахождение НОД.

6. ПРОИЗВОДНАЯ МНОГОЧЛЕНА

Определение производной многочлена и ее вычисление. Кратность неприводимого множителя и ее понижение при дифференцировании. НОД многочлена и производной.

7. КОРНИ МНОГОЧЛЕНА

Определение корня многочлена. Теорема Безу. Кратность корня и ее понижение при дифференцировании. Число корней многочлена и его степень. Отсутствие кратных корней многочлена.

8. СХЕМА ГОРНЕРА

9. МНОГОЧЛЕНЫ НАД ПОЛЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Определение алгебраически замкнутого поля. Теорема Гаусса и ее следствия. Неприводимые многочлены над полем комплексных чисел. Формулы Виета.

10. МНОГОЧЛЕНЫ НАД ПОЛЕМ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Теорема о сопряженности комплексных корней многочлена с действительными коэффициентами и ее следствия. Разложение многочлена на множители.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1. *В кольце $\mathbb{Z}_5[x]$ найти частное $q(x)$ при делении $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ на $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$. Указать остаток $r(x)$.*

РЕШЕНИЕ. *Напомним, что кольцо $\mathbb{Z}_5$ состоит из элементов $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$. Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ можно записать следующим образом:*

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{2}x^2 + x + \overline{4}, \\ g(x) &= x^3 + x^2 + \overline{4}x + \overline{4}. \end{aligned}$$

Разделим $f(x)$ на $g(x)$:

$$\begin{array}{rl} -\; x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{2}x^2 + x + \overline{4} & \big| \; x^3 + x^2 + \overline{4}x + \overline{4} \\ x^4 + x^3 + \overline{4}x^2 + \overline{4}x \quad & \big| \; \overline{x + \overline{1}} \\ \hline -\; x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{4} & \\ x^3 + x^2 + \overline{4}x + \overline{4} & \\ \hline \overline{2}x^2 + \overline{3}x \quad & \end{array}$$

Следовательно, $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, где частное $q(x) = x + 1$, а остаток $r(x) = 2x^2 + 3x$.

ОТВЕТ: $q(x) = x + 1$, $r(x) = 2x^2 + 3x$. ПРИМЕР 2. *Найти НОД многочленов $f(x) = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 3x - 2$ и $g(x) = 3x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x + 2$ и выразить его через эти многочлены.*

РЕШЕНИЕ. *Используем алгоритм Евклида. Делим $f(x)$ на $g(x)$ с остатком:*

$$\begin{array}{rl} -\; 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 3x + 2 & \big| \; 3x^2 - x^3 - 9x^2 - 3x + 2 \\ 3x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x + 2 & \big| \; 4 \\ \hline 9x^3 + 15x^2 + 6x - 4 & \end{array}$$

Далее делим $g(x)$ на первый остаток:

$$\begin{array}{rl} -\; 3x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x + 2 & \big| \; 9x^3 + 15x^2 + 6x - 4 \\ 3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - \frac{4}{3}x \quad & \big| \; \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \\ \hline -\; -6x^3 - 11x^2 - \frac{5}{3}x + 2 & \\ -6x^3 - 10x^2 - 4x + \frac{8}{3} & \\ \hline -x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{2}{3} & \end{array}$$

Теперь делим первый остаток на второй:

$$\begin{array}{r|l} -\;9x^3+15x^2+\;6x\;-\;4 & -x^2+\frac{7}{3}x-\frac{2}{3} \\ \cline{2-2} 9x^3-21x^2+\;6x & -9x-36 \\ \cline{1-1} -\;36x^2\;-\;4 & \\ 36x^2-84x+24 & \\ \cline{1-1} 84x-28 & \end{array}$$

Делим второй остаток на третий:

$$\begin{array}{r|l} -\;-x^2+\frac{7}{3}x-\frac{2}{3} & \;84x-28 \\ \cline{2-2} -x^2+\frac{1}{3}x\phantom{-\frac{2}{3}} & -\frac{1}{84}x+\frac{1}{42} \\ \cline{1-1} -\;2x-\frac{2}{3} & \\ 2x-\frac{2}{3} & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Итак, последний отличный от нуля остаток, т.е. НОД$(f(x), g(x))$ равен $84x-28$. Найдем теперь его представление через $f(x)$ и $g(x)$. Вначале запишем последовательность Евклида для данных многочленов $f(x)$ и $g(x)$:

$$f(x) = 1 \cdot g(x) + r_1(x),$$

$$g(x) = (\frac{1}{3}x - \frac{2}{3})r_1(x) + r_2(x),$$

$$r_1(x) = (-9x-36)r_2(x) + r_3(x).$$

Заметим, что $r_3(x) =$ НОД$(f(x), g(x))$. Теперь будем двигаться в алгоритме Евклида снизу вверх:

$$\begin{aligned} r_3(x) &= r_1 + (9x+36)r_2(x) = \\ &= r_1(x) + (9x+36)(g(x) - (\frac{1}{3}x - \frac{2}{3})r_1(x)) = \\ &= r_1(x) + (9x+36)g(x) - (9x+36)(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3})r_1(x) = \\ &= (9x+36)g(x) + (-3x^2-6x+25)r_1(x) = \\ &= (9x+36)g(x) + (-3x^2-6x+25)(f(x) - g(x)) = \\ &= (-3x^2-6x+25)f(x) + (3x^2+15x+11)g(x). \end{aligned}$$

ОТВЕТ: *НОД*$(f(x), g(x)) = 84x-28 = (-3x^2-6x+25)f(x) + (3x^2+15x+ + 11)g(x)$.

Пример 3. *Разложить многочлен* $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4$ *на неприводимые множители над полями* $\mathbb{R}$ *и* $\mathbb{C}$.

Решение. *Найдем все корни многочлена* $f(x)$. *Возможные целые корни многочлена* $f(x)$ *являются делителями свободного члена* (-4). *Легко проверить, что* $x_1 = -1$ *и* $x_2 = 2$ *— корни многочлена* $f(x)$. *Следовательно,* $f(x)$ *делится на* $(x-2)(x+1) = x^2 - x - 2$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4 & x^2 - x - 2 \\
\cline{2-2}
x^4 - x^3 - 2x^2 \phantom{{}+ 2x - 4} & x^2 - 2x + 2 \\
\cline{1-1}
-\,-2x^3 + 4x^2 + 2x - 4 & \\
-2x^3 + 2x^2 + 4x \phantom{{}-4} & \\
\cline{1-1}
-\,2x^2 - 2x - 4 & \\
2x^2 - 2x - 4 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Решая уравнение $x^2 - 2x + 2 = 0$, *находим остальные корни:* $x_3 = 1 + i$, $x_4 = 1 - i$.

а) Так как неприводимыми над полем $\mathbb{C}$ *являются только многочлены первой степени, то искомое разложение* $f(x)$ *над* $\mathbb{C}$ *имеет вид*

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x-1-i)(x-1+i).$$

б) Неприводимыми над полем $\mathbb{R}$ *являются многочлены первой степени и многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом. Поэтому разложение* $f(x)$ *на неприводимые множители над* $\mathbb{R}$ *имеет вид*

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x^2 - 2x + 2).$$

Пример 4. *Разложить многочлен* $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x + 1$ *по степеням* $(x-1)$.

Решение. *Чтобы найти коэффициенты разложения многочлена* $f(x)$ *по степеням* $x - 1$, *нужно по схеме Горнера поочередно разделить с остатком на* $x - 1$ *многочлен* $f(x)$, *затем первое неполное частное, второе неполное частное и т.д. Получаемые при этом остатки и являются искомыми коэффициентами.*

	1	2	3	5	1
1	1	3	6	11	12
1	1	4	10	21	
1	1	5	15		
1	1	6			
1	1				

Искомое разложение многочлена $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = 12 + 21(x-1) + 15(x-1)^2 + 6(x-1)^3 + (x-1)^4.$$

Замечание. *Остаток при делении многочлена $f(x)$ на $x - a$ является значением многочлена $f(x)$ при $x = a$. Например, в примере 4 значение $f(1) = 12$.*

Из примера 4 легко найти значение производных многочлена $f(x)$ при $x = 1$, не вычисляя самих производных. Остатки при делении $f(x)$ на $x - 1$ связаны с производными

$$\frac{f'(1)}{1!} = 21, \frac{f''(1)}{2!} = 15, \frac{f'''(1)}{3!} = 6, \frac{f^{IV}(1)}{4!} = 1.$$

Тогда $f'(1) = 21$, $f''(1) = 30$, $f'''(1) = 36$, $f^{IV}(1) = 24$.

Пример 5. *Определить коэффициенты a и b так, чтобы многочлен $g(x) = ax^4 + bx^3 + 1$ делился на $(x+1)^2$.*

Решение. *Необходимо найти a и b так, чтобы (-1) являлась двукратным корнем многочлена $g(x)$. Следовательно, должны выполняться условия*

$$\begin{cases} g(-1) = 0, \\ g'(-1) = 0. \end{cases}$$

Найдем производную $g'(x)$: $g'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$. Условия

$$\begin{cases} g(-1) = 0, \\ g'(-1) = 0. \end{cases}$$

принимают вид

$$\begin{cases} a - b + 1 = 0, \\ -4a + 3b = 0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем $a = 3$, $b = 4$.

Ответ: $a = 3$, $b = 4$.

Пример 6. *Известен корень $1 + i$ многочлена $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2$. Найти все корни этого многочлена.*

Решение. *Так как коэффициенты многочлена $f(x)$ действительные числа, то число $1 - i$, сопряженное корню $1 + i$, также будет корнем $f(x)$. Поэтому $f(x)$ делится на многочлен*

$$(x - (1-i))(x - (1+i)) = (x - 1 + i)(x - 1 - i) = (x-1)^2 - i^2 = x^2 - 2x + 2.$$

$$
\begin{array}{r|l}
-\,3x^4-5x^3+3x^2+4x-2 & x^2-2x+2 \\
\cline{2-2}
3x^4-6x^3+6x^2 \qquad\qquad & 3x^2+x-1 \\
\cline{1-1}
-\,x^3-3x^2+4x-2 & \\
x^3-2x^2+2x \quad & \\
\cline{1-1}
-\,-x^2+2x-2 & \\
-x^2+2x-2 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Решая уравнение $3x^2+x-1=0$, *найдем остальные корни* $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{6}$, $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{6}$.

Ответ: $1+i$, $1-i$, $\dfrac{-1-\sqrt{13}}{6}$, $\dfrac{-1+\sqrt{13}}{6}$.

ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

1. *В кольцах* $\mathbb{R}[x]$ *и* $\mathbb{Z}[x]$ *выполнить деление с остатком:*

1.1. $2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$ *на* x^2-3x+1.
1.2. x^4-3x^2-x-1 *на* x^2-2x+1.
1.3. $x^4-4x^3+6x^2+x-1$ *на* x^2-2x-3.
1.4. $5x^4-x^2+6$ *на* x^2+3x+2.
1.5. x^5+x^2-x-1 *на* x^3-2x+1.
1.6. $2x^4+x^2+2x$ *на* x^2-2.
1.7. x^4+2x-3 *на* x^3+1.
1.8. $2x^5+x^2+x+1$ *на* x^3+x+1.
1.9. $x^5+2x^3-x^2+4$ *на* x^3+2x^2-1.
1.10. $2x^5+3x^3+2x^2-x+5$ *на* x^3-2x+1.
1.11. $3x^4-x^2+2x+4$ *на* x^3-2x^2+x.
1.12. $4x^5-2x+3$ *на* x^2+3x-1.
1.13. $6x^4-4x^3-2x+1$ *на* x^3-x+3.
1.14. $5x^5-4x^4+3x+2$ *на* x^3-3x+4.
1.15. $x^5-6x^4+5x^3+2$ *на* x^3-1.

2. *Пользуясь алгоритмом Евклида, найти НОД*$(f(x),g(x))$ *и выразить его через исходные многочлены:*

2.1. $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2,$
$g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2.$

2.2. $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1,$
$g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2.$

2.3. $f(x) = x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35,$
$g(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 10x - 25.$

2.4. $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6,$
$g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2.$

2.5. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2,$
$g(x) = x^2 - x + 1.$

2.6. $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1,$
$g(x) = x^2 - x - 1.$

2.7. $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9,$
$g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4.$

2.8. $f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12,$
$g(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17.$

2.9. $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x + 1,$
$g(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1.$

2.10. $f(x) = x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 7x^2 + 5x + 3,$
$g(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1.$

2.11. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 7x + 12,$
$g(x) = x^3 + 3x^2 - 4.$

2.12. $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 2,$
$g(x) = x^5 - 1.$

2.13. $f(x) = 3x^5 + 6x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x - 1,$
$g(x) = x^4 - 2x^2 + 1.$

2.14. $f(x) = x^6 - x^4 + 3x^3 - 2x + 2,$
$g(x) = x^3 + 2.$

2.15. $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2,$
$g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1.$

3. *Разложить многочлены $f(x)$ и $g(x)$ на неприводимые множители над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$:*

3.1. $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2,$
$g(x) = x^6 + 27.$

3.2. $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12,$
$g(x) = x^4 + 16.$

3.3. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2,$
$g(x) = x^4 + 81.$

3.4. $f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1,$
$g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$

3.5. $f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1,$
$g(x) = x^4 - 16.$

3.6. $f(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x - 4,$
$g(x) = x^6 - 27.$

3.7. $f(x) = x^5 - 6x^4 + 9x^3 - x^2 + 6x - 9,$
$g(x) = x^4 - 2x^2 + 2.$

3.8. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 45x + 54,$
$g(x) = x^6 - 1.$

3.9. $f(x) = x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 27x^2,$
$g(x) = x^8 - 6x^4 + 9.$

3.10. $f(x) = x^5 + 5x^4 - 6x^3 - x^2 - 5x + 6,$
$g(x) = x^4 + 4x^3 + 4x - 1.$

3.11. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5,$
$g(x) = x^4 - 10x^2 + 1.$

3.12. $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x + 16,$
$g(x) = x^6 + 4x^3 + 4.$

3.13. $f(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1,$
$g(x) = x^3 + 5x^2 + 9x + 6.$

3.14. $f(x) = x^5 + x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x - 6,$
$g(x) = x^4 - 81.$

3.15. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9,$
$g(x) = x^8 - 1.$

4. *Пользуясь схемой Горнера, вычислить* $f(x_0)$*:*

4.1. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8,\ x_0 = 1 + i.$
4.2. $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x,\ x_0 = -3 + i.$
4.3. $f(x) = 4x^3 + x^2,\ x_0 = -1 - i.$
4.4. $f(x) = x^3 - x^2 - x,\ x_0 = 1 - 2i.$
4.5. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16,\ x_0 = i.$
4.6. $f(x) = 5x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 3x + 7,\ x_0 = 3i.$
4.7. $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7,\ x_0 = -2 - i.$
4.8. $f(x) = x^5 + (1 - 2i)x^4 - (3 + i)x^2 + 7,\ x_0 = -1 + 2i.$
4.9. $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1 + i)x^2 - 3x + 7 + i,\ x_0 = -i.$
4.10. $f(x) = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1,\ x_0 = 1 + 2i.$
4.11. $f(x) = 2x^5 + 4x^3 - 5x + 2,\ x_0 = 2i.$
4.12. $f(x) = 4x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 5x,\ x_0 = 2 + i.$
4.13. $f(x) = 3x^4 - ix^3 + (1 - 2i)x^2 = 2x - 1,\ x_0 = 3i.$
4.14. $f(x) = 5x^4 + 2ix^3 + 5x - i,\ x_0 = 1 + i.$
4.15. $f(x) = x^4 + (3 - 8i)x^3 - (21 + 18i)x^2 - (33 - 20i)x + 7 + 18i,\ x_0 = -1 +$

5. *Пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен $f(x)$ из задания 3 по степеням $x + 2$.*

6. *Определить коэффициенты a, b, c так, чтобы многочлен $f(x)$ имел 1 корнем не ниже третьей кратности:*
6.1. $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - 2x + 1.$
6.2. $f(x) = ax^3 + bx^2 - 2cx + 2.$
6.3. $f(x) = 2ax^3 - bx^2 + cx - 1.$
6.4. $f(x) = x^4 - ax^3 + 2bx + c.$
6.5. $f(x) = -ax^4 + 2bx^3 - cx^2 + 2x.$
6.6. $f(x) = ax^4 + 2bx^3 + 3cx - 3.$
6.7. $f(x) = 2ax^3 - bx^2 + cx - 4.$
6.8. $f(x) = -2ax^4 + 3bx^2 - 2cx + 3.$
6.9. $f(x) = ax^4 - 2bx^2 + cx - 2.$
6.10. $f(x) = ax^3 - 3bx^2 + 2cx - 4.$
6.11. $f(x) = 3ax^3 + 2bx^2 - 4cx - 1.$
6.12. $f(x) = -2ax^4 + bx^3 - 2cx - 6.$
6.13. $f(x) = ax^4 - 4bx^2 + cx - 2.$
6.14. $f(x) = 4ax^3 - 2bx^2 + 3cx - 4.$
6.15. $f(x) = -2ax^3 + 2bx^2 - 6cx + 1.$

7. *Найти все корни многочлена $f(x)$:*

7.1. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 9x + 9.$
7.2. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 15x - 50.$
7.3. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12.$
7.4. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 3x - 12.$
7.5. $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 16x - 24.$
7.6. $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 5x - 6.$
7.7. $f(x) = 3x^4 - 17x^3 + 19x^2 + 2x + 8.$
7.8. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 14x + 5.$
7.9. $f(x) = -2x^4 + x^3 - x + 2.$
7.10. $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 19x^2 + 22x - 10.$
7.11. $f(x) = -3x^4 + 5x^3 + 33x^2 - 23x + 12.$
7.12. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 3x - 18.$
7.13. $f(x) = 2x^4 - 13x^3 + 28x^2 - 37x + 20.$
7.14. $f(x) = -3x^4 + 5x^3 + 8x^2 - 20x + 16.$
7.15. $f(x) = -x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 15x + 25.$

8. *Найти все корни многочлена $g(x)$, если c — один из корней:*
8.1. $g(x) = x^3 - 7x^2 + 19x - 13,\ c = 3 - 2i.$
8.2. $g(x) = x^4 + 2x^3 + 8x + 16,\ c = 1 + \sqrt{3}i.$
8.3. $g(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 20x + 13,\ c = 3 - 2i.$
8.4. $g(x) = x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 9,\ c = i.$
8.5. $g(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 24x + 36,\ c = 2i.$
8.6. $g(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1,\ c = -i.$
8.7. $g(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 36x - 45,\ c = 2 - i.$
8.8. $g(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2,\ c = 1 + i.$
8.9. $g(x) = x^3 - 4x^2 + 14x - 20,\ c = 1 + 3i.$
8.10. $g(x) = x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 28x + 10,\ c = 2 - i.$
8.11. $g(x) = x^4 - x^2 + 2x + 2,\ c = 1 + i.$
8.12. $g(x) = x^4 + 4x^3 + 17x^2 + 16x + 52,\ c = -2 + 3i.$
8.13. $g(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 8x - 20,\ c = -1 + 2i.$
8.14. $g(x) = x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 41x - 78,\ c = -2 - 3i.$
8.15. $g(x) = x^4 + 6x^3 + 10x^2 - 2x - 15,\ c = -2 + i.$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

Вопросы для самоконтроля

1. ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА ЛАГРАНЖА

Формально-алгебраический и функциональный взгляд на многочлен. Многочлены над конечными и бесконечными полями как функции. Интерполяционная формула Лагранжа.

2. ПОЛЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Рациональные дроби и действия над ними. Поле рациональных дробей. Правильные дроби. Разложение рациональной дроби в сумму многочлена и правильной дроби. Сумма, разность и произведение правильных дробей. Кольцо правильных дробей.

3. РАЗЛОЖЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Разложение правильной рациональной дроби в сумму правильных дробей с неприводимыми знаменателями. Простейшие рациональные дроби. Разложение правильной рациональной дроби, знаменатель которой есть степень неприводимого многочлена, в сумму простейших. Разложение рациональной дроби в сумму многочлена и простейших дробей.

4. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ НАД $\mathbb{C}$ И $\mathbb{R}$ И ИХ РАЗЛОЖЕНИЯ

Простейшие рациональные дроби над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел и над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Разложение рациональной дроби над полем $\mathbb{C}$ и над полем $\mathbb{R}$ в сумму многочлена и простейших дробей.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. *В кольце $\mathbb{C}[x]$ найти многочлен $f(x)$ степени ≤ 3, для которого $f(-1) = 1 + 2i$, $f(0) = 1$, $f(i) = 2 - 3i$, $f(1) = 1$.*

Решение. *Запишем таблицу значений искомой функции $f(x)$*

j	1	2	3	4
a_j	-1	0	i	1
$b_j = f(a_j)$	$1+2i$	1	$2-3i$	1

Воспользуемся интерполяционной формулой Лагранжа

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n+1} b_j \varphi_j(x),$$

где

$$\varphi_j(x) = \frac{(x-a_1)\dots(x-a_{j-1})(x-a_{j+1})\dots(x-a_{n+1})}{(a_j-a_1)\dots(a_j-a_{j-1})(a_j-a_{j+1})\dots(a_j-a_{n+1})}.$$

В нашем случае $n = 3$. Найдем $\varphi_j(x)$ для каждого $j = 1, 2, 3, 4$.

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)} = \frac{x(x-i)(x-1)}{(-1)(-1-i)(-2)} = \frac{x(x^2-(1+i)x+i)}{2(-1-i)} = \frac{x^3 \dots}{}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)} = \frac{(x+1)(x-i)(x-1)}{1\cdot(-i)(-1)} = \frac{(x^2-1)(x-i)}{i} = \frac{x^3 - \dots}{}$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)} = \frac{(x+1)x(x-1)}{(i+1)i(i-1)} = \frac{x(x^2-1)}{-2i} = \frac{x^3-x}{-2i}.$$

$$\varphi_4(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)} = \frac{(x+1)x(x-i)}{2\cdot1\cdot(1-i)} = \frac{x(x^2+(1-i)x-i)}{2(1-i)} = \frac{x^3 + \dots}{}$$

Тогда

$$f(x) = b_1\varphi_1(x) + b_2\varphi_2(x) + b_3\varphi_3(x) + b_4\varphi_4(x) =$$

$$= (1+2i)\frac{x^3-(1+i)x^2+ix}{2(-1-i)} + 1\cdot\frac{x^3+(1-i)x^2-ix}{2(1-i)} + (2-3i)\frac{x^3-x}{-2i} + 1\cdot\frac{x^3-ix^2-x+i \dots}{i}$$

$$= \frac{(-3-i)}{4}(x^3-(1+i)x^2+ix) - i(x^3-ix^2-x+i) + \frac{(2i+3)}{2}(x^3-x) + \frac{(1+i)}{4}(x^3+(1-i)x^2 - \dots$$

$$= x^3\left(\frac{-3-i}{4} - i + \frac{2i+3}{2} + \frac{1+i}{4}\right) + x^2\left(\frac{2+4i}{4} - 1 + \frac{1}{2}\right) + x\left(\frac{1-3i}{4} + i - \frac{2i+3}{2} + \frac{1-i}{4}\right) + x^0(-i \dots$$

$$= x^3 + ix^2 - (1+i)x + 1.$$

Итак, $f(x) = x^3 + ix^2 - (1+i)x + 1$.

Проверка.

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1 + i + 1 + i + 1 = 1 + 2i, \\ f(0) &= 1, \\ f(i) &= -i - i - i + 1 + 1 = 2 - 3i, \\ f(1) &= 1 + i - 1 - i + 1 = 1. \end{aligned}$$

Ответ: $f(x) = x^3 + ix^2 - (1+i)x + 1$.

Пример 2. *Разложить рациональную дробь*

$$F(x) = \frac{x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x}{x^3 - 3x - 2}$$

в сумму многочлена и простейших дробей над полем $\mathbb{R}$.

Решение. *Представим дробь* $F(x)$ *в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Для этого разделим числитель на знаменатель*

$$\begin{array}{r|l} -\,x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x & x^3 - 3x - 2 \\ \cline{2-2} x^4 \qquad\;\; - 3x^2 - 2x & x \; + \; 1 \\ \cline{1-1} -\,x^3 \qquad\qquad\quad & \\ x^3 - \; 3x \; - 2 & \\ \cline{1-1} 3x \; + 2 & \end{array}$$

Следовательно,

$$F(x) = x + 1 + \frac{3x+2}{x^3 - 3x - 2}.$$

Разложение многочлена $x^3 - 3x - 2$ *на неприводимые над* $\mathbb{R}$ *множители имеет вид* $(x+1)^2(x-2)$. *Теперь*

$$\frac{3x+2}{x^3-3x-2} = \frac{3x+2}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x+1)(x-}{(x+1)^2(x-}$$

Тогда

$$3x + 2 = A(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x+1)^2.$$

При $x = -1$*:* $-1 = -3A$, $A = \dfrac{1}{3}$.

При $x = 2$*:* $B = 9C$, $C = \dfrac{8}{9}$.

При $x = 0$*:* $2 = -\dfrac{2}{3} - 2B + \dfrac{8}{9}$, $B = -\dfrac{8}{9}$.

Ответ: $F(x) = x + 1 + \dfrac{\frac{1}{3}}{(x+1)^2} + \dfrac{-\frac{8}{9}}{(x+1)} + \dfrac{\frac{8}{9}}{(x-2)}$.

Пример 3. *Разложить рациональную дробь*

$$G(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x^2+1)^2(x-1)}$$

в сумму простейших дробей над полем $\mathbb{R}$.

Решение.

$$\frac{x^2 - 2x}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{E}{x-1} =$$

$$= \frac{(Ax+B)(x-1) + (Cx+D)(x^2+1)(x-1) + E(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2(x-1)}.$$

Тогда

$$x^2 - 2x = Ax^2 + (B-A)x - B + (Cx+D)(x^3 - x^2 + x - 1) + E(x^4 + 2x^2 + 1) =$$

$$= (C+E)x^4 + (D-C)x^3 + (A-D+C+2E)x^2 + (B-A-C+D)x + (E-D-B).$$

Сравнивая кэффициенты при степенях x, *получим систему*

$$\left.\begin{array}{lcl} x^4 & : & C+E=0 \\ x^3 & : & -C+D=0 \\ x^2 & : & A+C-D+2E=1 \\ x^1 & : & -A+B-C+D=-2 \\ x^0 & : & -B-D+E=0 \end{array}\right\}$$

Решая систему, получим $A = \dfrac{3}{2}$, $B = -\dfrac{1}{2}$, $C = \dfrac{1}{4}$, $D = \dfrac{1}{4}$, $E = -\dfrac{1}{4}$.

Ответ:

$$G(x) = \frac{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}{(x^2+1)^2} + \frac{\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}}{x^2+1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x-1}.$$

Пример 4. *Разложить рациональную дробь*

$$G(x) = \frac{3x-1}{(x^2+1)^2}$$

в сумму простейших дробей над полем $\mathbb{C}$.

Решение.

$$\frac{3x-1}{(x^2+1)^2} = \frac{3x-1}{(x+i)^2(x-i)^2} = \frac{A}{(x+i)^2} + \frac{B}{(x+i)} + \frac{C}{(x-i)^2} + \frac{D}{x-i} =$$

$$= \frac{A(x-i)^2 + B(x+i)(x-i)^2 + C(x+i)^2 + D(x-i)(x+i)^2}{(x^2+1)^2}.$$

Тогда

$$3x - 1 = A(x-i)^2 + B(x+i)(x-i)^2 + C(x+i)^2 + D(x-i)(x+i)^2.$$

При $x = i$*:* $3i - 1 = -4C$, $C = \dfrac{1-3i}{4}$.

При $x = -i$*:* $-3i - 1 = -4A$, $A = \dfrac{1+3i}{4}$.

При $x = 0$*:* $D - B = \dfrac{1}{2}i$.

При $x = 1$*:* $D(1+i) + B(1-i) = -\dfrac{1}{2}$.

Решая систему

$$\begin{cases} D - B &= \dfrac{1}{2}i, \\ (1+i)D + (1-i)B &= -\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

получим $B = -\dfrac{1}{4}i$, $D = \dfrac{1}{4}i$.

Ответ:

$$G(x) = \frac{\dfrac{1+3i}{4}}{(x+i)^2} + \frac{-\dfrac{1}{4}i}{x+i} + \frac{\dfrac{1-3i}{4}}{(x-i)^2} + \frac{\dfrac{1}{4}i}{x-i}.$$

ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

1. *В кольце* $\mathbb{R}[x]$ *найти многочлен* $f(x)$ *наименьшей степени по данной* *таблице его значений.*

1.1

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	5	7	15

1.2

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	5	25	79

1.3

x	-2	1	2	4
$f(x)$	-6	3	8	48

1.4

x	-1	1	2	4
$f(x)$	10	6	4	-30

1.5

x	-3	-1	1	2
$f(x)$	-30	0	2	-5

1.6

x	-4	-3	-1	1
$f(x)$	-3	7	3	7

1.7

x	-2	0	1	2
$f(x)$	4	1	1	6

1.8

x	-1	1	2	4
$f(x)$	2	0	$\frac{1}{2}$	27

1.9

x	-1	0	1	4
$f(x)$	3	4	5	13

1.10

x	-1	0	1	5
$f(x)$	1	2	3	31

1.11

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	-8	9	14	13

1.12

x	-3	-1	0	1
$f(x)$	34	0	-4	-2

1.13

x	-2	0	1	2
$f(x)$	-18	3	0	-8

1.14

x	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	2	8

1.15

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	-7	2	2	5

2. *В кольце $\mathbb{C}[x]$ найти многочлен $g(x)$ наименьшей степени по данной таблице его значений:*

2.1

x	1	i	-1
$g(x)$	$3i$	$-2+i$	$2+i$

2.2

x	-2	-1	i
$g(x)$	$-6-i$	$-2-i$	1

2.3

x	-1	$-i$
$g(x)$	$3+i$	$1+$

2.4

x	$-i$	i	0
$g(x)$	2	0	-1

2.5

x	-2	-1	i
$g(x)$	$-8-2i$	$-i$	$4-i$

2.6

x	-1	$2i$
$g(x)$	$3-3i$	$-6-$

2.7

x	0	1	i
$g(x)$	$-1+i$	-2	$1+i$

2.8

x	$-i$	0	i
$g(x)$	3	2	$1+2i$

2.9

x	-1	i
$g(x)$	$-1+i$	i

2.10

x	-2	0	i
$g(x)$	$-1-2i$	1	$1-i$

2.11

x	0	1	2
$g(x)$	$-2i$	$-2-i$	-8

2.12

x	1	i
$g(x)$	$-1+i$	$3+$

2.13

x	-1	0	i
$g(x)$	$-2i$	$-1-2i$	$-2-2i$

2.14

x	$-i$	0	1
$g(x)$	$4+2i$	2	$-1+i$

2.15

x	-1	1
$g(x)$	$1+2i$	1

3. *Представить рациональные дроби $F(x)$ и $G(x)$ в виде суммы много-*

члена и правильной рациональной дроби.

	$F(x)$	$G(x)$
3.1	$\dfrac{2x^4-3x^3-4x^2+3x+2}{x^3-2x^2-x+2}$,	$\dfrac{2x^4+11x^2-x+1}{x^4+4x^2}$.
3.2	$\dfrac{3x^4+3x^3-2x^2-34x+4}{x^3+x^2-x-10}$,	$\dfrac{x^4+3x^3-2x^2-2x+3}{x^4-2x^2+1}$.
3.3	$\dfrac{-x^4-2x^3+2x^2+7x+6}{x^3+2x^2-x-2}$,	$\dfrac{-2x^4+x^3-x^2+2x+3}{x^4+x^3-x-1}$.
3.4	$\dfrac{-2x^4-x^3+6x^2-2x-1}{x^3+x^2-x-1}$,	$\dfrac{x^4+x^3+x^2-2x-10}{x^4+3x^3-x^2-13x-10}$.
3.5	$\dfrac{-3x^4-x^2-25x+2}{x^3+x+10}$,	$\dfrac{-3x^4-x^3+9x^2+3x+2}{x^4+x^3-3x^2-5x-2}$.
3.6	$\dfrac{-x^4+8x^3-24x^2+42x-31}{x^3-2x^2+2x-1}$,	$\dfrac{2x^4-x^3+2x^2+x}{x^4-2x^3+2x-1}$.
3.7	$\dfrac{-2x^4+8x^3-7x^2+1}{x^3-4x^2+6x-3}$,	$\dfrac{x^4-x^3+x^2-4}{x^4-4x^3+3x^2+4x-4}$.
3.8	$\dfrac{3x^4+13x^3+2x^2-11x-12}{x^3+4x^2-x-4}$,	$\dfrac{x^4-5x^3+2x^2-x-1}{x^4-5x^3+10x^2-9x+3}$.
3.9	$\dfrac{3x^4-11x^3+16x^2-9x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$,	$\dfrac{-2x^4+2x^3-x+5}{x^4-x^3-x^2-x-2}$.
3.10	$\dfrac{-x^4+2x^3+2x-4}{x^3-2x^2+x-2}$,	$\dfrac{x^4-x^3+x^2-2x+2}{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}$.
3.11	$\dfrac{-x^4+2x^3+x^2+5x+1}{x^3-1}$,	$\dfrac{2x^4+x^3-x^2-x-2}{x^4+2x^3-2x-1}$.
3.12	$\dfrac{x^4+4x^3+8x^2+9x+2}{x^3+3x^2+4x+4}$,	$\dfrac{-2x^4-x^3-6x^2-4x-8}{x^4+6x^3+13x^2+12x+4}$.
3.13	$\dfrac{2x^4-9x^3+14x^2-x-3}{x^3-5x^2+8x-4}$,	$\dfrac{x^4-x^2+x-4}{x^4+2x^3+x^2-4}$.
3.14	$\dfrac{x^4+5x^3+11x^2+4x+1}{x^3+5x^2+9x+5}$,	$\dfrac{x^4+x^2-4x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}$.
3.15	$\dfrac{2x^4-3x^3+10x^2-12x+3}{x^3-x^2+4x-4}$,	$\dfrac{2x^4+3x^3-3x^2-2x}{x^4+x^3-3x^2-x+2}$.

4. *Разложить рациональную дробь $R(x)$ в сумму простейших дробей:*

4.1 $\dfrac{2x-3}{(x-1)^2(x+2)^2}$. 4.2 $\dfrac{3x-1}{(x+2)^2(x-3)^2}$.

4.3 $\dfrac{x-1}{(x-2)^3(x+2)}$. 4.4 $\dfrac{3x-2}{(x+3)^3(x-1)}$.

4.5 $\dfrac{x-5}{(x-3)^2(x+2)^2}$. 4.6 $\dfrac{-3x+2}{(x-5)^2(x+1)^2}$.

4.7 $\dfrac{5x-4}{(x-4)^3(x-1)}$. 4.8 $\dfrac{-4x+3}{(x+4)(x+1)^3}$.

4.9 $\dfrac{x-1}{(x-3)^2(x+4)^2}$. 4.10 $\dfrac{3x-5}{(x-2)^2(x+1)^2}$.

4.11 $\dfrac{2x-4}{(x+5)(x-1)^3}$. 4.12 $\dfrac{-3x+5}{(x-5)^2x^2}$.

4.13 $\dfrac{2x-4}{(x+2)^3x}$. 4.14 $\dfrac{-x+3}{(x-1)^2(x+2)^2}$.

4.15 $\dfrac{x+1}{x^3(x-2)}$.

5. *Разложить рациональную дробь $K(x)$ в сумму простейших дробей над полем $\mathbb{R}$:*

5.1 $\dfrac{2x^2-x}{(x^2-x+2)^2}$. 5.2 $\dfrac{2x^2-1}{(x^2+x+2)^2}$.

5.3 $\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+2)^2}$. 5.4 $\dfrac{x^2-1}{(x^2+3x+4)^2}$.

5.5 $\dfrac{4x^2-5x+2}{(x^2+1)^2}$. 5.6 $\dfrac{3x^2-x}{(x^2+4)^2}$.

5.7 $\dfrac{2x^2-2}{(x^2+3)^2}$. 5.8 $\dfrac{x^2-2x+1}{(x^2-x+3)^2}$.

5.9 $\dfrac{5x^2-6x+1}{(x^2+3)^2}$. 5.10 $\dfrac{x^2-2x}{(x^2+5)^2}$.

5.11 $\dfrac{5x^2-4x}{(x^2+3x+5)^2}$. 5.12 $\dfrac{6x^2-1}{(x^2+2x+2)^2}$.

5.13 $\dfrac{x-2}{(x^2+2)^2}$. 5.14 $\dfrac{2x+1}{(x^2-x+2)^2}$.

5.15 $\dfrac{-x+3}{(x^2+1)^2}$.

6. *Разложите рациональные дроби $F(x)$ и $G(x)$ из задания 3 в сумму многочлена и простеших дробей над полем $\mathbb{R}$, над полем $\mathbb{C}$.*