2 Сопровождающий трёхгранник кривой

Тема 4 Касательная и нормальная плоскости

Ранее мы показали, что при данном значении параметра t, произвольная функция $\vec{r}\,(t)$, если она существует и не равна нулю, параллельна касательной к годографу функции $\vec{r}=\vec{r}\,(t)$. Поэтому в дальнейшем мы определим <u>касательный вектор</u> или вектор скорости кривой $x^1 = x^1(t), \ \dots \ , x^n = x^n(t)$, как вектор $\vec{v}\,(t)$ с координатами $\vec{v}\,(t) = \left(\dfrac{dx^1}{dt},...,\dfrac{dx^n}{dt}\right)$.

Получим уравнение касательной (рис. 8):

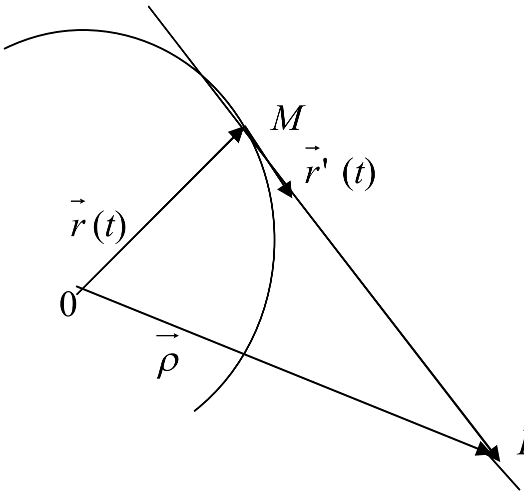


Рисунок 8

В дальнейшем, через $\vec{\rho}\,(X,\ Y,\ Z)$ будем обозначать произвольную точку искомого множества. Из рисунка 8 видно, что $\vec{\rho} \ = \ \vec{r} \ + \ \lambda\,\vec{r}\,'$ – уравнение касательной. Так как $\vec{r}=\vec{r}(x,y,z)$, то $\vec{r}\,'=\vec{r}\,'(x',y',z')$. Следовательно,

$X = x + \lambda\, x'$;

$Y = y + \lambda\, y'$;

$Z = z + \lambda\, z'$.

Исключим из последних равенств параметр λ, получим

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{z'}.$$

В этом случае исключаются из рассмотрения особые точки, т. е. такие точки, в которых $\vec{r}\,'\,(t) = 0$.

<u>Определение.</u> <u>Нормалью плоской кривой</u> будем называть прямую, расположенную в её плоскости, перпендикулярную касательной и проходящую через точку прикосновения (рис. 9).

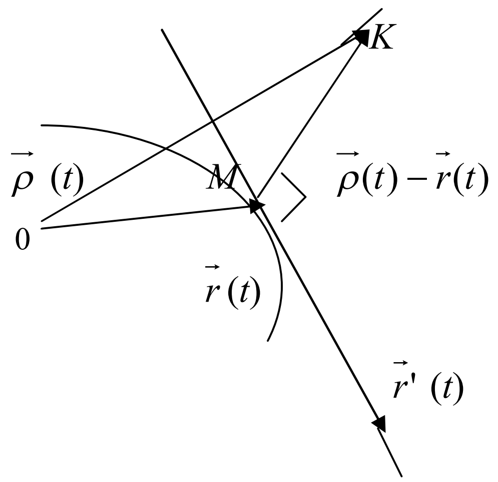


Рисунок 9

Из рисунка 9 следует $(\vec{\rho}(t)-\vec{r}(t))\vec{r}\,(t) = 0$ – векторное уравнение нормали для плоской кривой, $\vec{\rho}\,(X,\ Y,\ Z)$, $\vec{r}(x,y,z)$, z = const, $(X - x)x' + (Y - y)\,y' = 0$ – уравнение нормали в координатной форме.

Известно, что поверхность выражается в трехмерном пространстве уравнением $F(x, y, z) = 0$.

<u>Определение.</u> Прямая называется <u>касательной прямой поверхности,</u> если она касается какой-либо кривой, принадлежащей этой поверхности (рис. 10):

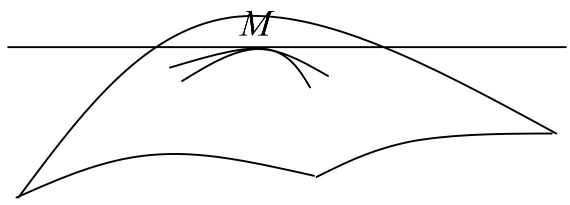


Рисунок 10

Пусть кривая на поверхности задана своими параметрическими уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. А поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$. Тогда $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$, $\dfrac{\partial F dx}{\partial x dt}+\dfrac{\partial F dy}{\partial y dt}+\dfrac{\partial F dz}{\partial z dt} = 0.$

Пусть $\vec{N} = (F_x,\ F_y,\ F_z)$, $\quad \dfrac{d\vec{r}}{dt}=\left(\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt},\dfrac{dz}{dt}\right).$

Из последнего равенства следует, что $\vec{N}\perp\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ в неособых точках поверхностей. Точки поверхности будем называть особыми, в которых $\vec{N} = 0$.

На поверхности через данную точку можно провести сколько угодно кривых, и для всех этих кривых будет выполняться $\vec{N}\,\dfrac{d\vec{r}}{dt} = 0$. Следовательно, векторы касательных этих кривых будут перпендикулярны одному и тому же направлению, а это значит, что будут расположены в одной и той плоскости. Итак, все прямые касающиеся поверхности в обыкновенной точке ($\vec{N} \neq 0$) лежат в одной плоскости.

<u>Определение.</u> <u>Касательной плоскостью поверхности</u> в её обыкновенной точке называется множество прямых, касающихся поверхности в этой точке (рис. 11):

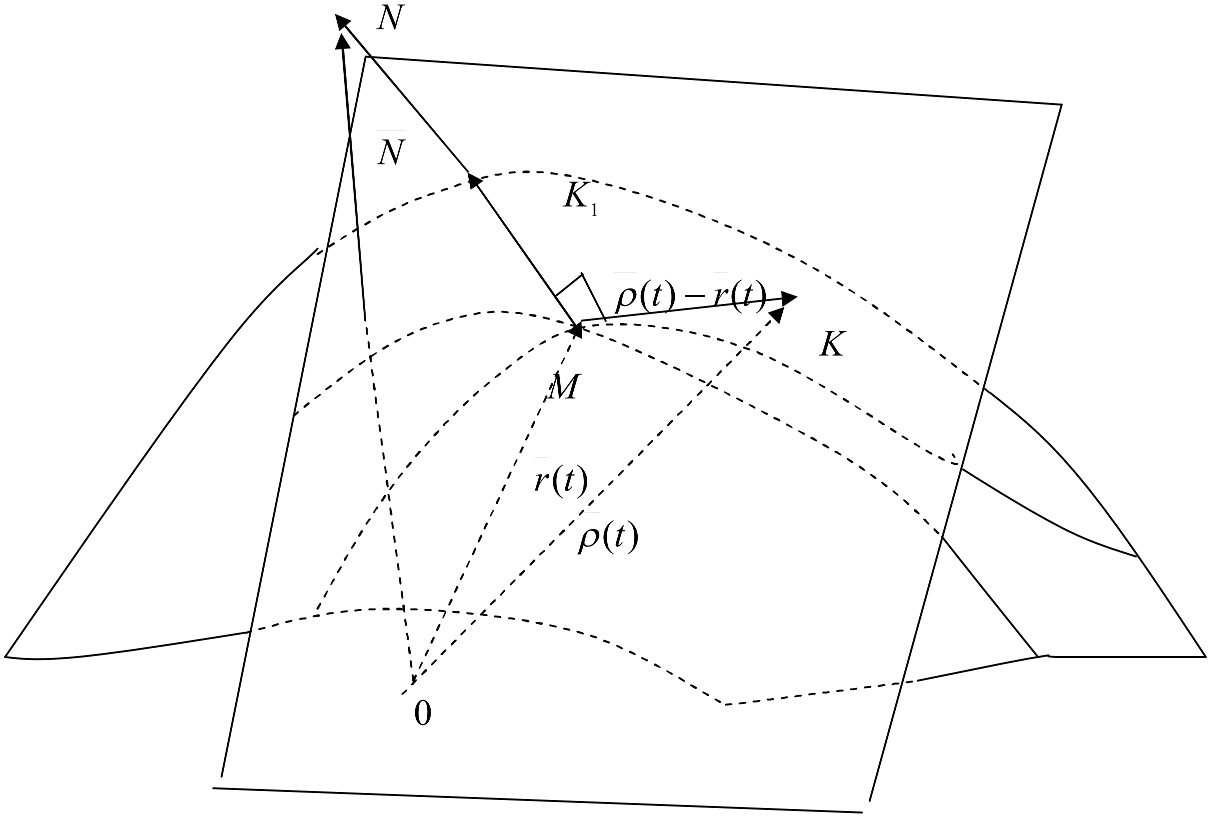


Рисунок 11

$\overrightarrow{MK_1} = \vec{N} = (F_x, F_y, F_z)$,

$\vec{N}(\vec{\rho} - \vec{r}) = 0$,

$F_x(X - x) + F_y(Y - y) + F_z(Z - z) = 0$ – уравнение касательной плоскости в координатной форме (см. рис. 11).

<u>Определение.</u> Прямая, проходящая через точку прикосновения перпендикулярно касательной плоскости, называется <u>нормалью поверхности.</u>

Из выше приведенного рисунка 11 видно, что

$\overrightarrow{MN} = \lambda \overrightarrow{MK_1}$; $\overrightarrow{ON} = \vec{\rho}$ – радиус-вектор произвольной точки нормали. Тогда $\vec{\rho}(t) = \vec{r}(t) + \lambda \vec{N}$, $X = x + \lambda F_x$, $Y = y + \lambda F_y$, $Z = z + \lambda F_z$, следовательно, $\dfrac{X - x}{F_x} = \dfrac{Y - y}{F_y} = \dfrac{Z - z}{F_z}$ в неособых точках поверхности.

<u>Определение.</u> Всякая прямая, проходящая через точку кривой перпен-

дикулярно касательной в этой точке, называется нормалью этой кривой.

Через всякую точку пространства кривой проходит бесконечное множество нормалей, которые все расположены в одной плоскости. Эта плоскость называется нормальной плоскостью кривой (рис. 12):

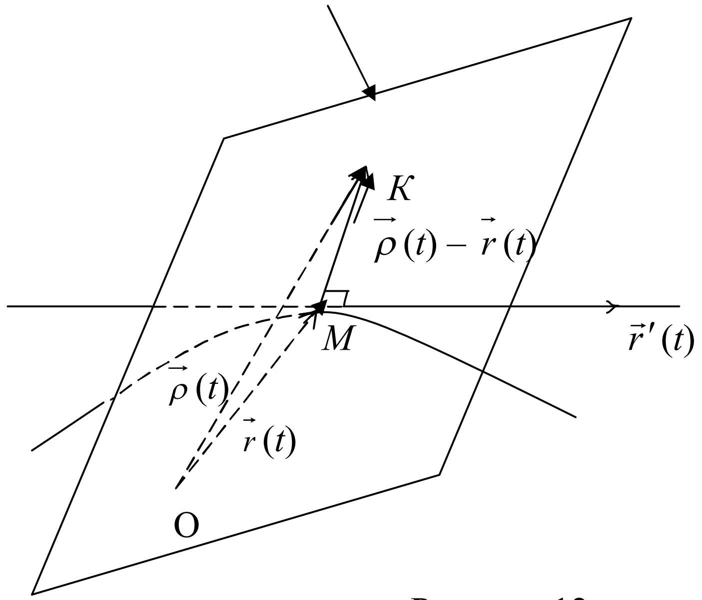


Рисунок 12

Из рисунка 12 видно, что $(\vec{\rho}(t) - \vec{r}(t))\,\vec{r}' = 0$, $(X - x)\,x' + (Y - y)\,y' +$
$+ (Z - z)\,z' = 0$ – уравнение нормальной плоскости в координатной форме.

Тема 5 Соприкасающаяся и спрямляющая плоскости. Сопровождающий трёхгранник

Пусть $\vec{r} = \vec{r}(\ell)$, $\vec{r}'(\ell) = \dfrac{d\vec{r}'}{d\ell}$, но $\vec{r}'(\ell) = 1$. По предыдущей теореме $\vec{r}'_l \perp \vec{r}''_l$. Значит, вектор $\vec{r}''_\ell$ направлен по некоторой нормали кривой. Эта нормаль называется главной нормалью кривой. Всякая плоскость, проходящая через касательную прямую кривой, называется касательной плоскостью. Касательная плоскость, проходящая через главную нормаль, называется соприкасающейся плоскостью.

Определим положение соприкасающейся плоскости:

$\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\vec{r}'_t = \vec{r}'_\ell \ell'_t$

$\vec{r}''_t = \vec{r}''_\ell (\ell'_t)^2 + \vec{r}'_\ell \ell''_t$

Из последнего равенства следует, что $\vec{r}''_t$ лежит в той же плоскости, что и векторы $\vec{r}'_\ell$ и $\vec{r}''_\ell$. Но первый направлен по касательной, а второй направлен по главной нормали, значит, оба вектора лежат в соприкасающейся плоскости.

Итак, при любой параметризации кривой вектор второй производной её радиус-вектора расположен в соприкасающейся плоскости (рис. 13):

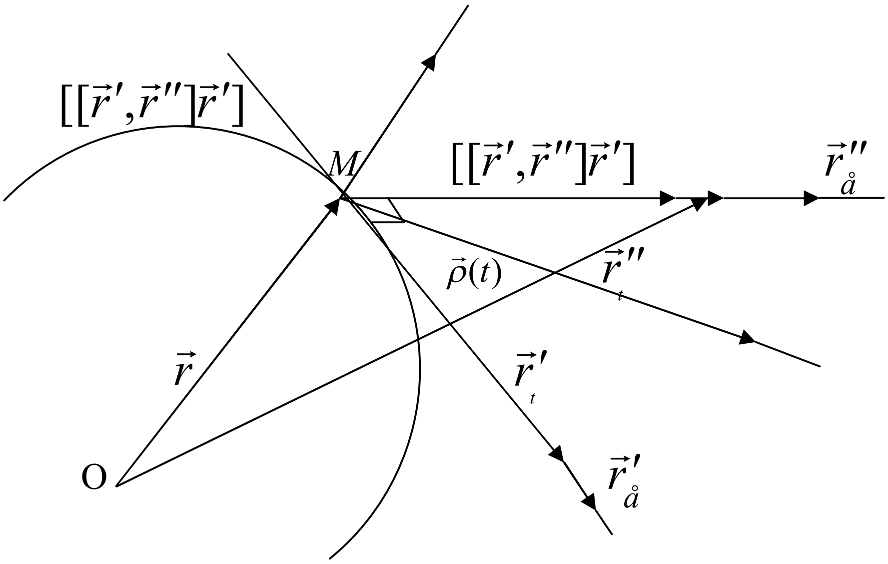


Рисунок 13

Итак, вектор $[[\vec r',\vec r'']\vec r']$ имеет направление вектора $\vec r''_{\text{å}}$. Значит, из рисунка 13 $\vec\rho = \vec r + \lambda[[\vec r',\vec r'']\vec r']$ или

$$\boxed{\begin{aligned} X &= x + \lambda\left(z'\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} - y'\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}\right) \\ Y &= y + \lambda\left(x'\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} - z'\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}\right) \\ Z &= z + \lambda\left(y'\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} - x'\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}\right) \end{aligned}}$$ – уравнение главной нормали.

Напишем уравнение соприкасающейся плоскости (рис. 14):

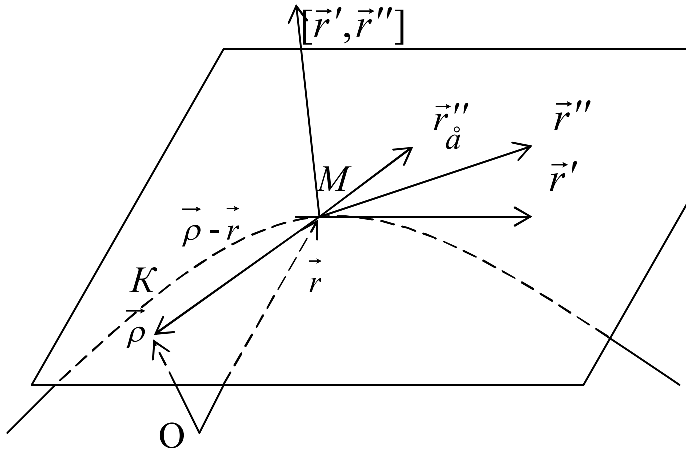


Рисунок 14

Пусть K – произвольная точка соприкасающейся плоскости, тогда все векторы $\vec\rho - \vec r, \vec r', \vec r''$ находятся в одной плоскости. Следовательно, $(\vec\rho - \vec r)\vec r'\vec r'' = 0$ – уравнение соприкасающейся плоскости в векторной форме;

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$ – уравнение соприкасающейся плоскости в координатной форме.

Последнее уравнение теряет смысл, когда $[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']=0$. Точки, в которых это выполняется, называются <u>точками спрямления</u>.

<u>Определение.</u> Нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости, называется <u>бинормалью</u>.

Нетрудно видеть из последнего рисунка 14, что уравнение бинормали можно записать в таком виде: $\vec{\rho}=\vec{r}+\lambda[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']$ и в координатной форме:

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}.$$

Итак, касательная, главная нормаль, бинормаль определяют в каждой точке кривой трёхгранник с тремя прямыми углами при вершине, совпадающей с данной точкой кривой. Он называется <u>сопровождающим трёхгранником</u>. Гранями этого трёхгранника будут:

1) <u>соприкасающаяся плоскость,</u> которая содержит касательную и главную нормаль;

2) <u>нормальная плоскость,</u> содержащая главную нормаль и бинормаль;

3) плоскость, содержащая касательную и бинормаль, которую называют <u>спрямляющей плоскостью</u>.

Направляющий вектор касательной обозначим через $\vec{T}=\vec{r}\,'(t)$, бинормаль через $\vec{B}=[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']$, главную нормаль обозначим через $\vec{N}=[\vec{r}\,',[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']]$.

Напишем уравнение спрямляющей плоскости (рис. 15):

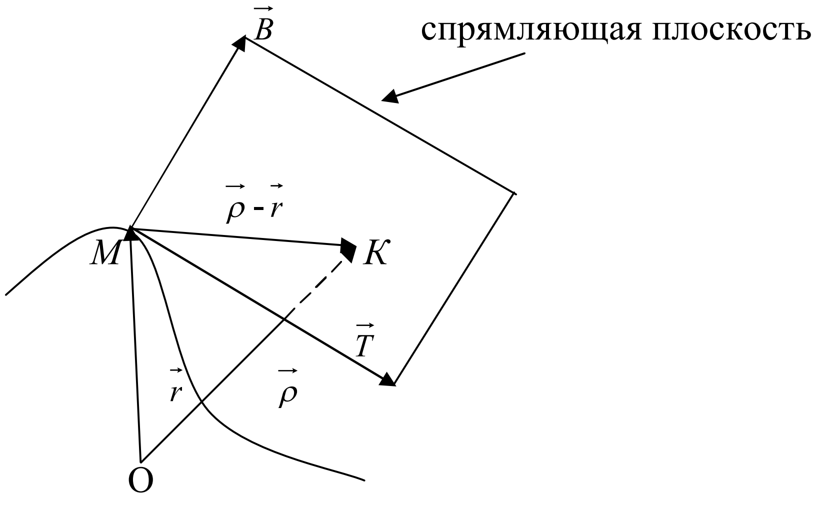


Рисунок 15

Итак, мы видим, что $\vec{T}$ и $\vec{B}$ принадлежат спрямляющей плоскости.

Получаем, $(\vec{\rho}-\vec{r})\vec{r}\,'[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']=0$ – уравнение спрямляющей плоскости в векторной форме.

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0$$ – уравнение спрямляющей плоскости в координатной форме.

Введём теперь единичные векторы, направленные по осям сопровождающего трёхгранника в положительном направлении. Пусть $\vec{r} = \vec{r}(t)$, тогда

$\vec{\tau} = \dfrac{\vec{r}\,'_t}{|\vec{r}\,'_t|}$ – единичный вектор касательной,

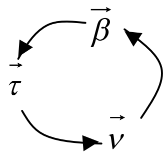
$\vec{V} = \dfrac{[\vec{r}\,',[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']]}{|[\vec{r}\,',[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']]|}$ – единичный вектор главной нормали,

$\vec{\beta} = \dfrac{[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']}{|[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']|}$ – единичный вектор бинормали.

Пусть теперь кривая $\vec{r} = \vec{r}\,(\ell)$ отнесена к натуральному параметру ℓ, т. е. $|\vec{r}\,'(\ell)| = 1$. Тогда $\vec{\tau} = \vec{r}\,', \vec{\nu} = \dfrac{\vec{r}\,''}{|\vec{r}\,''|}, \vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]$.

Для этих векторов выполнимо равенство:

$\vec{\tau}^{\,2} = \vec{\beta}^{\,2} = \vec{\nu}^{\,2} = 1$ и $\vec{\tau}\,\vec{\nu} = \vec{\nu}\,\vec{\beta} = \vec{\beta}\,\vec{\nu} = 0$.



$[\vec{\tau}, \vec{\nu}] = \vec{\beta}$,
$[\vec{\nu}, \vec{\beta}] = \vec{\tau}$,
$[\vec{\beta}, \vec{\tau}] = \vec{\nu}$.

Итак, имеем (рис. 16):

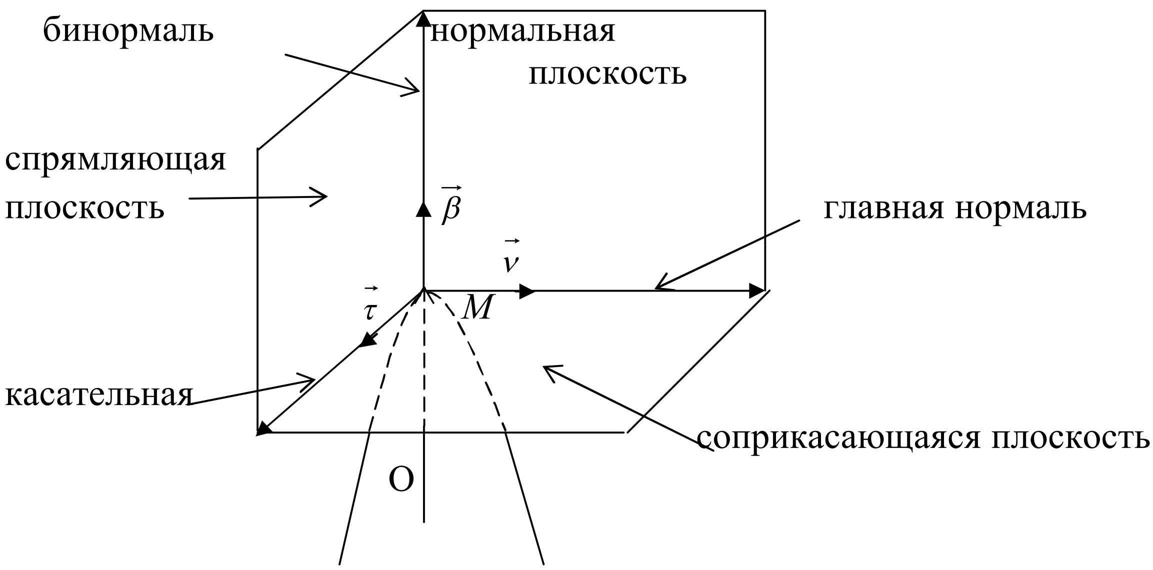


Рисунок 16

Тема 6 Формулы Френе. Кривизна, кручение

Векторы сопровождающего трёхгранника меняются при движении точки по кривой. Чтобы охарактеризовать это изменение, вычислим их производные по натуральному параметру: $\vec{r}\,'' = \dfrac{d}{d\ell}\left(\vec{r}\,'\right) = \dfrac{d\vec{\tau}}{d\ell}$. Итак, вектор второй производной направлен по главной нормали и ориентирован так же, как и единичный вектор главной нормали $\vec{\nu}$, т. е. $\dfrac{d\vec{\tau}}{d\ell} = \kappa\vec{\nu}$, где $\kappa = \kappa(\ell) > 0$. Отметим, что $\vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]$. Найдём производную этого вектора $\dfrac{d\vec{\beta}}{d\ell} = \left[\dfrac{d\vec{\tau}}{d\ell}, \vec{\nu}\right] + \left[\vec{\tau}, \dfrac{d\vec{\nu}}{d\ell}\right] = \kappa[\vec{\nu}, \vec{\nu}] + \left[\vec{\tau}, \dfrac{d\vec{\nu}}{d\ell}\right] = \left[\vec{\tau}, \dfrac{d\vec{\nu}}{d\ell}\right]$. Вектор $\left[\dfrac{d\vec{\beta}}{d\ell}\right] \perp \vec{\tau}$, а с другой стороны, $\dfrac{d\vec{\beta}}{d\ell} \perp \vec{\beta}$.

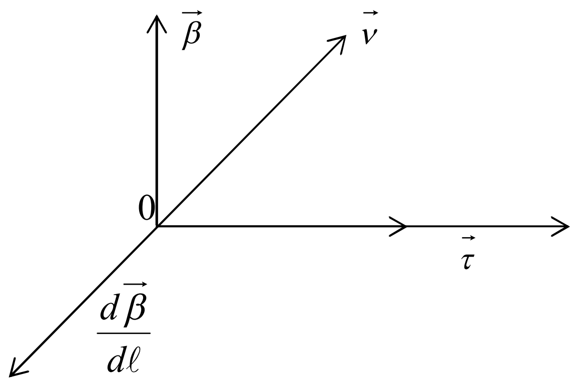


Рисунок 17

Таким образом, из рисунка 17 вектор $\dfrac{d\vec{\beta}}{d\ell}$ направлен по главной нормали. $\dfrac{d\vec{\beta}}{d\ell} = -æ\vec{\nu}$, где -æ есть коэффициент пропорциональности.

Далее. $\dfrac{d\vec{\nu}}{d\ell} = \left[\dfrac{d\vec{\beta}}{d\ell}, \vec{\tau}\right] + \left[\vec{\beta}, \dfrac{d\vec{\tau}}{d\ell}\right] = -æ[\vec{\nu}, \vec{\tau}] + \kappa[\vec{\beta}, \vec{\nu}] = -\kappa\vec{\tau} + æ\vec{\beta}$, $\vec{\nu} = [\vec{\beta}, \vec{\tau}]$,

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\vec{\tau}}{d\ell} &= \kappa\vec{\nu} \\ \frac{d\vec{\beta}}{d\ell} &= -æ\vec{\nu} \\ \frac{d\vec{\nu}}{d\ell} &= -\kappa\vec{\tau} + æ\vec{\beta} \end{aligned}}$$

– формулы Френе,

где коэффициенты κ, æ называются кривизной и кручением соответственно.

Вектор $\vec{r}''(\ell)$ будем называть <u>вектором кривизны</u> и $\kappa(\ell) = |\vec{r}''(\ell)|$ (рис. 18).

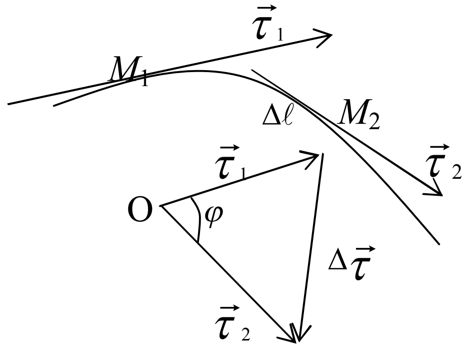


Рисунок 18

Направление касательной изменяется при движении точки по кривой (рис. 18). Найдём "быстроту" этого изменения: $\lim\limits_{\Delta\ell\to 0}\dfrac{\varphi}{\Delta\ell}$. Из формул Френе имеем: $\left|\dfrac{d\vec{\tau}}{d\ell}\right| = \kappa|\vec{v}|$, $\kappa = \left|\dfrac{d\vec{\tau}}{d\ell}\right| = \lim\limits_{\Delta\ell\to 0}\left|\dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\ell}\right| = \lim\limits_{\Delta\ell\to 0}\left|\dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\varphi}\right|\dfrac{\varphi}{\Delta\ell} = \underbrace{\lim\limits_{\varphi\to 0}\left|\dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\varphi}\right|}_{1}\lim\limits_{\Delta\ell\to 0}\dfrac{\varphi}{\Delta\ell} = \lim\limits_{\Delta\ell\to 0}\dfrac{\varphi}{\Delta\ell}$.

Итак, кривизна кривой в данной её точке есть предел отношения угла поворота касательной на дуге, стягивающейся в данной точке, к длине этой дуги. Если кривизна равна нулю во всех её точках, то линия прямая: $\vec{\tau} = \vec{\tau}_0 = const$, $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{r}}{d\ell} = \vec{\tau}_0$. Значит, $d\vec{r} = \vec{\tau}_0 d\ell$, $\vec{r} = \vec{\tau}_0\ell + \vec{r}_0$ – уравнение прямой.

Из формулы $\dfrac{d\vec{\beta}}{d\ell} = -æ\vec{v}$ следует, что $|\,æ\,| = \left|\dfrac{d\vec{\beta}}{d\ell}\right| = \lim\limits_{\Delta\ell\to 0}\dfrac{|\Delta\vec{\beta}|}{\Delta\ell}$ (рис. 19).

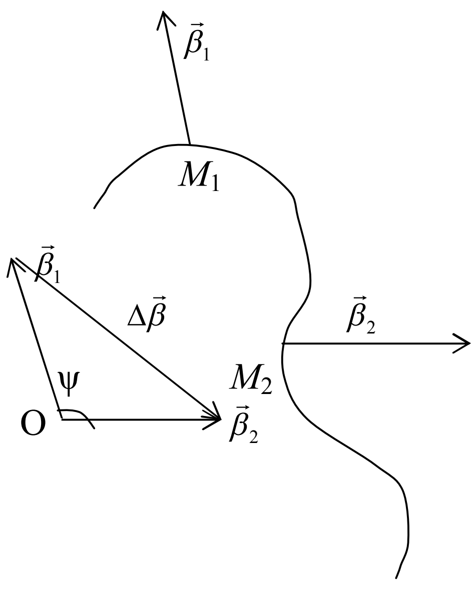


Рисунок 19

Но модуль приращения $\Delta\vec{\beta}$ в пределе может быть заменён углом ψ –

поворота вектора $\vec{\beta}$ на дуге $\Delta\ell$. Следовательно, модуль кручения в данной точке кривой равен пределу отношения угла поворота бинормали на дуге, стягивающейся к данной точке, к длине этой дуги.

Кручение плоской кривой равно нулю, так как вектор бинормали совпадает с нормальным вектором этой плоскости, а последний остаётся неизменным вдоль всей кривой. И обратно, если кручение равно нулю во всех точках кривой, то эта кривая плоская: $\frac{d\vec{\beta}}{d\ell} = -æ\vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{\beta}}{d\ell} = 0$, $\vec{\beta} = \vec{\beta}_0 = const$. Так как касательный вектор перпендикулярен $\vec{\beta}$, то $0 = \vec{\beta}_0 \frac{d\vec{r}}{d\ell} = \frac{d}{d\ell}\left(\vec{\beta}_0\vec{r}\right) \Rightarrow \vec{\beta}_0\vec{r} = \tilde{N}$. Т. о., радиус-вектор точки кривой удовлетворяет уравнению постоянной плоскости, в котором расположена кривая.

Выведем формулы для вычисления кривизны кручения:

$\vec{r}\,'_\ell = \vec{\tau}, \vec{r}\,''_\ell = \kappa\vec{v}, \vec{r}\,'''_\ell = \kappa_\ell\vec{v} + \kappa\vec{v}\,'_\ell = \kappa'_\ell\vec{v} - \kappa^2\tau' + \kappa\, æ\vec{\beta}$,

$[\vec{r}\,'_\ell, \vec{r}\,''_\ell] = [\vec{\tau}, \kappa\vec{v}] = \kappa[\vec{\tau}, \vec{v}] = \kappa\vec{\beta}$,

$\vec{r}\,'_\ell\ \vec{r}\,''_\ell\ \vec{r}\,'''_\ell = [\vec{r}\,'_\ell, \vec{r}\,''_\ell]\ \vec{r}\,'''_\ell = \kappa\vec{\beta}(\kappa'\vec{v} - \kappa^2\tau + \kappa\, æ\vec{\beta}) = \kappa^2 æ$.

Эти соотношения позволяют выразить кривизну и кручение через произвольный радиус-вектор по натуральному параметру $\vec{r} = \vec{r}\ (\ell)$.

Пусть $\vec{r} = \vec{r}\ (t)$, $\vec{r}\,'_\ell = \vec{r}\,'_t \cdot t'_\ell$, $\vec{r}\,''_\ell = \vec{r}\,''_t\,(t'_\ell)^2 + \vec{r}\,'_t\,t''_\ell$,

$\vec{r}\,'''_\ell = \vec{r}\,'''_t\,(t'_\ell)^3 + 3\vec{r}\,''_t t'_\ell t''_\ell + \vec{r}\,'_t t'''_\ell$.

Итак, имеем, что $\vec{\tau} = \vec{r}\,'_t\ t'_\ell$,

$$\kappa\vec{\beta} = [\vec{r}\,'_\ell, \vec{r}\,''_\ell] = [\vec{r}\,'_t \cdot t'_\ell, \vec{r}\,''_t (t'_\ell)^2 + \vec{r}\,'_t t''_\ell] = (t'_\ell)^3[\vec{r}\,'_t, \vec{r}\,''_t] + \underbrace{[\vec{r}\,'_t, \vec{r}\,'_t]}_{0} \cdot t'_\ell t''_\ell =$$
$$= (t'_\ell)^3[\vec{r}\,'_t, \vec{r}\,''_t],$$

$$\kappa^2 æ = [\vec{r}\,'_\ell, \vec{r}\,''_\ell] \cdot \vec{r}\,'''_\ell = (t'_\ell)^3[\vec{r}\,'_t, \vec{r}\,''_t](\vec{r}\,'''_t(t'_\ell)^3 + \vec{r}\,''_t 3t'_\ell t''_\ell + \vec{r}\,'_t t'''_\ell) =$$
$$= (t'_\ell)^6[\vec{r}\,'_t, \vec{r}\,''_t]\vec{r}\,'''_t + 0 + 0 = (t'_\ell)^6\vec{r}\,'_t\vec{r}\,''_t\vec{r}\,'''_\ell.$$

Из равенства $\vec{r}\,'_\ell = \vec{r}\,'_t t'_\ell \Rightarrow 1 = |\vec{r}\,'_t|\, t'_\ell$, итак, $t'_\ell = \frac{1}{|\vec{r}\,'_t|}$.

Из $\kappa\vec{\beta} = (t'_\ell)^3[\vec{r}\,'_t, \vec{r}\,''_t] \Rightarrow$, что $\kappa = \frac{\left|[\vec{r}\,'_t, \vec{r}\,''_t]\right|}{\left|\vec{r}\,'_t\right|^3}$ – формула вычисления кривизны. Из $\kappa^2 æ = (t'_\ell)^6\ \vec{r}\,'_t\ \vec{r}\,''_t\ \vec{r}\,'''_\ell \Rightarrow$, что $æ = \frac{\vec{r}\,'_t\vec{r}\,''_t\vec{r}\,'''_t(t'_\ell)^6}{\kappa^2} = \frac{\vec{r}\,'_t\vec{r}\,''_t\vec{r}\,'''_t}{\left|[\vec{r}\,'_t, \vec{r}\,''_t]\right|^2}$.

Итак, для любой кривой $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ мы имеем формулы:

$$\kappa = \frac{\left|[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']\right|}{\left|\vec{r}\,'\right|^3}, \quad æ = \frac{\vec{r}\,'\vec{r}\,''\vec{r}\,'''}{\left|[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']\right|^2}.$$

Запишем эти формулы с помощью их координат: $\vec{r} = (x, y, z)$,

$$\kappa = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}, \quad æ = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}$$

Основной целью геометрии является изучение формы фигур, взаимного расположения частей этих фигур. В аналитической геометрии изучаемая фигура определённым образом располагается относительно системы координат и составляются уравнения, которые определяют расположение фигуры по отношению к этой системе. Это всё позволяет потом прийти к определённым выводам относительно формы данной фигуры. Чтобы освободиться от необходимости рассматривать фигуру в связи с её расположением относительно координатных осей, аналитическая геометрия прибегает к методу инвариантов. Например, инвариантом образа второго порядка называется выражение, составленное из коэффициентов его уравнения и не меняющееся при преобразовании координат. Знание полной системы инвариантов кривой вполне характеризует форму кривой. С другой стороны, две кривые, одинаковые по форме, не могут иметь различных инвариантов, если бы они и различались по своему положению, то есть определялись различными уравнениями. То же самое можно определить и в дифференциальной геометрии. Две кривые, заданные различными параметрическими уравнениями, могут отличаться или своей формой или только положением в пространстве. Для решения этого вопроса дифференциальная геометрия прибегает к методу, который похож на метод инвариантов в теории кривых второго порядка. Инвариантами произвольной кривой здесь являются длина дуги, кривизна, кручение. При любом преобразовании кривой или при перемещении кривой относительно системы координат они не могут измениться. По определению длина дуги определяется как предел длины периметра вписанной, а кривизна и кручение, как пределы отношения углов поворота касательной или бинормали к длине дуги, но длина и углы не меняются при передвижении кривой или при преобразовании координат, а вследствие этого дуга, кривизна и кручение остаются неизменными.

Определение. Система соотношений $k = k(s)$, $æ = æ(s)$, где s – натуральный параметр, называется натуральными уравнениями кривой.

Так как натуральные уравнения связывают инварианты кривой, то они не меняется при преобразовании координат или при перемещении кривой относительно этой системы. Итак, две кривые с натуральными одинаковыми уравнениями совпадают по своей форме и могут отличаться только положением в пространстве.

Тема 7 Параметрические уравнения поверхности

Определение. Простым куском поверхности называется такое множество точек, которое может быть отображено топологически, (то есть взаимнооднозначно и непрерывно) на множество внутренних точек круга и точек окружности.

Те точки куска, которые отображаются в точки окружности, называются его граничными точками. Граничные точки образуют замкнутую кривую – границу простого куска. Простой кусок называется также односвязной поверхностной областью. Будем говорить, что два простых куска склеены, если после некоторой непрерывной деформации они приведены в такое взаимное расположение, в котором части их границ или обе границы целиком совпадают между собой. Мы будем называть поверхностями не только простые куски, но и такие множества точек, которые могут быть склеены из конечного или счётного множества простых кусков.

Рассмотрим поверхность или такую часть поверхности, которая может быть топологически отображена на плоскую область, и пусть в точке M этой поверхности соответствует точка M_0 плоскости, координаты которой (u, v) (рис. 20):

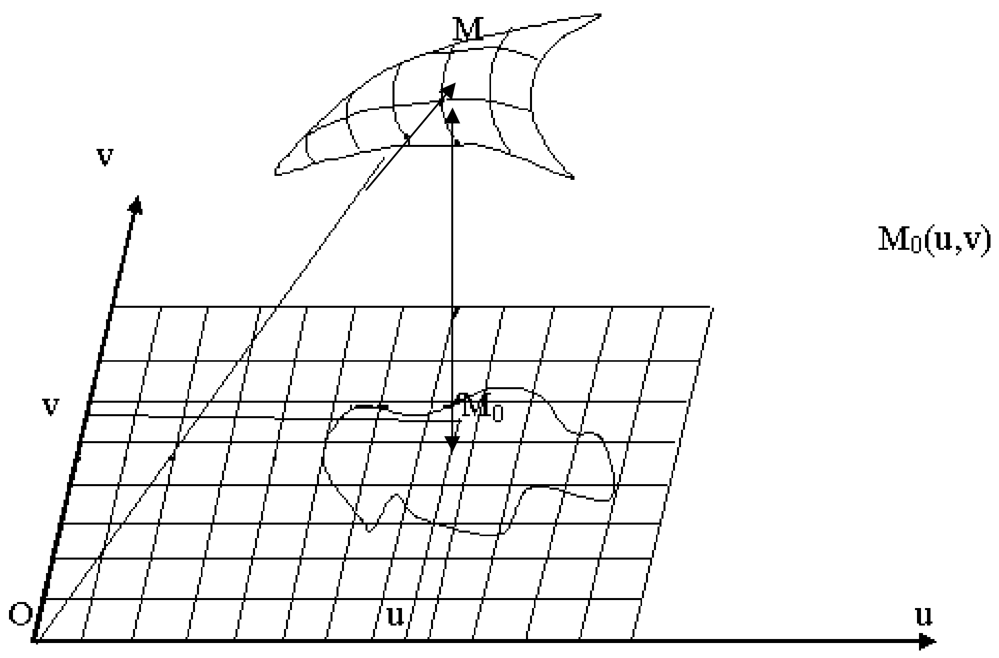


Рисунок 20

Если такое отображение задано, то будем говорить, что поверхность параметризованна, а величины u и v называются криволинейными координатами точки M данной поверхности. В силу непрерывности отображения всякой линии на плоскости соответствует некоторая линия на поверхности. В частности прямым $u = \mathrm{const}$ и $v = \mathrm{const}$ соответствуют такие линии поверхности, которые называются параметрическими или координатными линиями данной параметризации. В силу однозначности соответствия через каждую точку параметризованной поверхности проходит единственная линия семейства $u = \mathrm{const}$ и единственная линия семейства $v = \mathrm{const}$. Оба эти семейства образуют правильную сеть, которая называется координатной сетью. Задание криволинейных координат (u, v) точки M параметризованной поверхности определяет положение этой точки. Так как $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, то радиус-вектор точки параметризованной поверхности является функцией криволинейных координат этой точки. Соотношение $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, определяющее эту функциональную зависимость называется параметрическим уравнением поверхности. Это уравнение равносильно заданию трёх уравнений: если $\vec{r} = (x, y, z)$, то $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$.

Пусть $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ – есть параметрическое уравнение поверхности. А принадлежащая ей кривая, в свою очередь, параметризована при помощи параметра t. В этом случае, каждому значению этого параметра t соответствует некоторая точка кривой, а её положению на поверхности, соответствует определённое значение криволинейных координат (u, v). Таким образом, криволинейные координаты точки кривой, расположенной на поверхности, являются функциями параметра t. Система $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$ называется внутренними уравнениями кривой на поверхности, то есть $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$. Найдем

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\frac{dv}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt}.$$

Векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ называются координатными векторами, соответствующими той точке, криволинейные координаты которой подставляются при их вычислении. Эти координатные векторы касательны к координатным линиям:

1) $u = \mathrm{const}$, $v = t \Rightarrow \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_v$;

2) $u = t$, $v = \mathrm{const} \Rightarrow \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u$.

Таким образом, направляющий вектор всякой прямой, касающейся поверхности в данной точке, является линейной комбинацией координатных векторов, соответствующих этой точке. Так как все касательные векторы, соответствующие данной точке поверхности, выражаются линейно через координатные, то все они компланарны и, следовательно, расположены в одной плоскости поверхности, которая называется касательной плоскостью поверхности.

Из рис. 21 следует уравнение: $\vec{r}_u \vec{r}_v(\rho - \vec{r}) = 0$,

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$ – уравнение касательной плоскости.

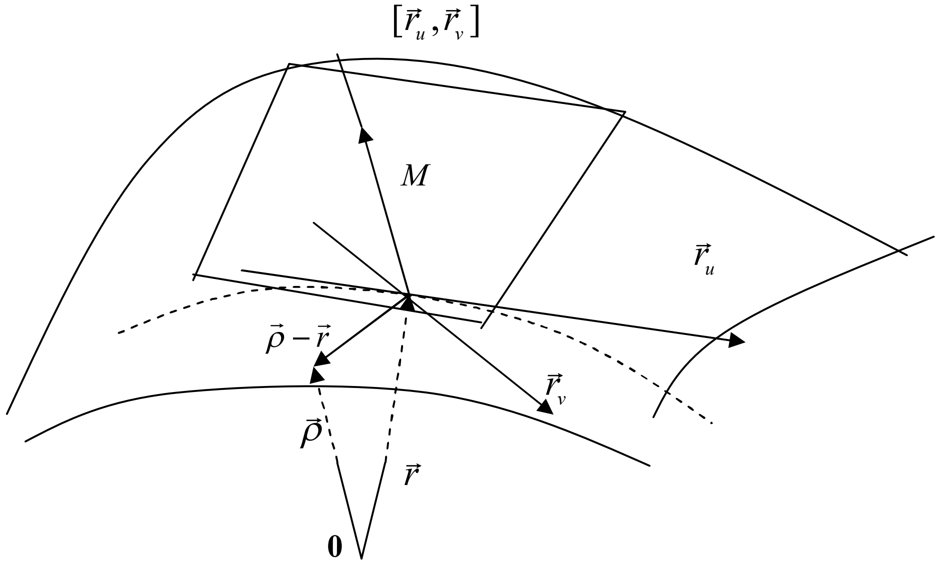


Рисунок 21

Уравнение нормали имеет следующий вид: $\vec{\rho} = \vec{r} + \lambda[\vec{r}_u, \vec{r}_v] \Rightarrow$

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}}.$$