4 Метрика на поверхности. Теория кривизны

13 Первая квадратичная форма

Пусть задана поверхность $\vec{r} = \vec{r}(u,v),\ \vec{r} = (x,y,z)$. Риманова метрика определялась следующим образом: пусть задана кривая $u = u(t)$, $v = v(t)$. Её длина $\ell = \int_a^b |\vec{v}_t| dt, \overrightarrow{|\vec{v}_t|} = \left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right)$ – есть вектор скорости в криволинейных координатах (u, v). $|v(t)|^2 = g_{ij}(x^i)'(x^j)'$, здесь $x^1 = u$, $x^2 = v$; $g_{ij} = g_{ij}(u,v)$. Набор этих функций мы определяли как риманову метрику в криволинейных координатах (u, v). Этот набор определяет длину кривой и углы между двумя кривыми в точке их пересечения. Чему равны $g_{ij} = g_{ij}(u,v)$, где $u = x^1$, $v = x^2$? Пусть кривая $u = u(t)$, $v = v(t)$ записана через координаты (u, v) и лежит на поверхности в пространстве R^3 с координатами (x, y, z). Длиной кривой $u(t)$, $v(t)$ на поверхности мы назовём длину этой кривой в трёхмерном евклидовом пространстве.

Пусть $x = x(u(t), v(t)) = x(t)$; $y = y(u(t), v(t)) = y(t)$; $z = z(u(t), v(t)) = z(t)$. Найдём длину $\ell = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$.

Так как $x' = x_u u' + x_v v'$; $y' = y_u u' + y_v v'$; $z' = z_u u' + z_v v'$, то

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (x_u u' + x_v v')^2 + (y_u u' + y_v v')^2 + (z_u u' + z_v v')^2 =$$

$$= \underbrace{(x_u x_u + y_u y_u + z_u z_u)}_{E} u'^2 + 2\underbrace{(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)}_{F} u'v' + \underbrace{(x_v x_v + y_v y_v + z_v z_v)}_{G} v'^2 =$$

$= Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2$, где $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$, здесь $u = x^1$, $v = x^2$. Если теперь векторы $\vec{r}_u = x_u\vec{e}_1 + y_u\vec{e}_2 + z_u\vec{e}_3$; $\vec{r}_v = x_v\vec{e}_1 + y_v\vec{e}_2 + z_v\vec{e}_3$, где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – базисные векторы, то мы можем записать $g_{ij} = \overrightarrow{r_{x^i}}\,\overrightarrow{r_{x^j}}$, $x^1 = u$, $x^2 = v$. Функции $g_{ij}(u,v) = (E,F,G)$ определены в координатах на поверхности.

Определение. Выражение $\varphi_1 = g_{ij}dx^i dx^j = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$ называется первой квадратичной формой или римановой метрикой на поверхности.

Пусть теперь поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$. Тогда риманова метрика на поверхности $dx^2 + dy^2 + dz^2$ имеет вид: $F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$ Предположим, что $F_z \neq 0$, тогда $dz = -\frac{F_x}{F_z}dx - \frac{F_y}{F_z}dy$. Итак, $dx^2 + dy^2 + dz^2 =$

$$= dx^2 + dy^2 + \left(\frac{F_x}{F_z}dx + \frac{F_y}{F_z}dy\right)^2 = \left(1 + \frac{F_x^2}{F_z^2}\right)dx^2 + 2\frac{F_xF_y}{F_z^2}dxdy + \left(1 + \frac{F_y^2}{F_z^2}\right)dy^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_{11} = E = 1 + \frac{F_x^2}{F_z^2},\ g_{22} = 1 + \frac{F_y^2}{F_z^2},\ g_{12} = F = \frac{F_x F_y}{F_z^2}\ ,\ u = x' = x, v = x^2 = y\ .$$

Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x,\ y)$. Тогда $g_{11} = 1 + f_x^2$; $g_{12} = g_{21} = f_x f_y$; $g_{22} = 1 + f_y^2$.

Имея риманову метрику, мы можем измерить на поверхности длину любой кривой $u = u(t)$ и $v = v(t)$, а также угол между двумя кривыми в точке пересечения (угол между двумя пересекающимися кривыми есть угол между их касательными в точке пересечения) (рис. 33).

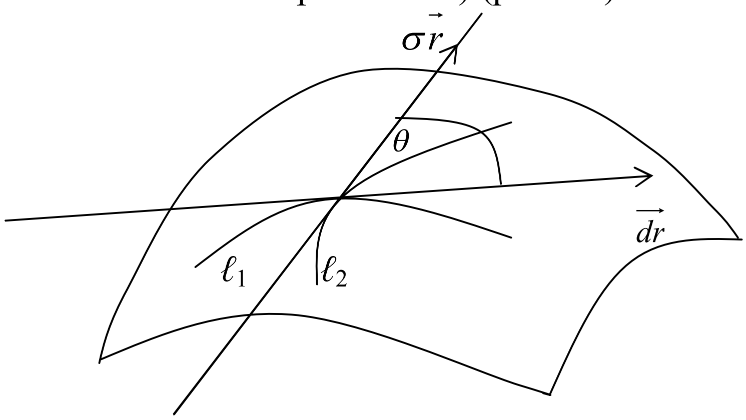

Рисунок 33

Пусть $d\vec{r}, \sigma\vec{r}$ есть касательные векторы данных кривых.

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv\ ;\ \sigma\vec{r} = \vec{r}_y \sigma u + \vec{r}_v \sigma v\ ;\ \cos\theta = \frac{d\vec{r}d\vec{\sigma}}{|d\vec{r}||d\vec{\sigma}|};\ \frac{dr}{d\ell} = \tau\ ;$$

$$d\vec{r}^{\,2} = d\ell^2 = \vec{r}_u^{\,2} du^2 + 2\vec{r}_u\vec{r}_v dudv + \vec{r}_v^{\,2} dv^2 = \varphi_1 .$$

Итак, $\left|d\vec{r}\right| = d\ell = \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$;

$$\left|\sigma\vec{r}\right| = \sigma\ell = \sqrt{E\sigma u^2 + 2F\sigma u\sigma v + G\sigma v^2}\ .$$

Найдём скалярное произведение:

$$d\vec{r}\sigma\vec{r} = \left(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv\right)\left(\vec{r}_u \sigma u + \vec{r}_v \sigma v\right) = \vec{r}_u^{\,2} du\sigma u + \vec{r}_u\vec{r}_v\left(du\sigma v + \sigma u dv\right) + \vec{r}_v^{\,2} dv\sigma v =$$
$$= Edu\sigma u + F\left(du\sigma v + dv\sigma u\right) + Gdv\sigma v\ ;$$

$$\cos\theta = \frac{Edu\sigma u + F\left(du\sigma v + dv\sigma u\right) + Gdv\sigma v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\sigma u^2 + 2F\sigma u\sigma v + G\sigma v^2}}\ .$$

Площадь поверхности находится по следующей формуле:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv\ .$$

Тема 14 Вторая квадратичная форма

<u>Определение.</u> Проекция вектора кривизны линии на нормаль поверхно-

сти в точке, через которую проходит эта кривая, называется нормальной кривизной этой кривой. Обозначается $k_n = \Pi\,\rho_n \dfrac{d^2\vec{r}}{d\ell^2}$, $R_n = \dfrac{1}{k_n}$ – радиус нормальной кривизны. Так как нормаль $\vec{n}$ заранее ориентирована, то проекция на неё может быть как положительной, так и отрицательной. Вычислим нормальную кривизну: $\dfrac{d\vec{r}}{d\ell} = \vec{r_u}u' + \vec{r_v}v'$; $\dfrac{\partial^2\vec{r}}{\partial u^2} = \overrightarrow{r_{uu}}$; $\dfrac{\partial^2\vec{r}}{\partial v^2} = \overrightarrow{r_{vv}}$; $\dfrac{\partial^2\vec{r}}{\partial u\partial v} = \overrightarrow{r_{uv}}$.

Найдём $\dfrac{d^2\vec{r}}{d\ell^2} = \vec{r_u}u'' + \vec{r_v}v'' + \overrightarrow{r_{uu}}u'^2 + 2\overrightarrow{r_{uv}}u'v' + \overrightarrow{r_{vv}}v'^2$. Вспомним, что $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\,\Pi\,\rho_{\vec{a}}\vec{b}$.

Итак, $k_n = \vec{r}''_{\ell}\vec{n} = \vec{n}\overrightarrow{r_{uu}}u'^2 + 2\vec{n}\overrightarrow{r_{uv}}u'v' + \vec{n}\overrightarrow{r_{vv}}v'^2 = b_{11}u'^2 + 2b_{12}u'v' + b_{22}v'^2$,

где $b_{11} = L = \vec{n}'\overrightarrow{r_{uu}}$; $b_{12} = b_{21} = M = \vec{n}\overrightarrow{r_{uv}}$; $b_{21} = N = \vec{n}'\overrightarrow{r_{vv}}$, $\vec{r_u} \perp \vec{n}$, $\vec{r_v} \perp \vec{n}$.

Выражение $\varphi_2 = \dfrac{d^2\vec{r}}{d\ell^2}\vec{n}dt^2 = b_{ij}dx^i dx^j = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$, $u = x^1$, $v = x^2$ называется <u>второй квадратичной формой.</u> Итак,

$k_n = \dfrac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}$ – нормальная кривизна. Так как

$|[\vec{r_u}, \vec{r_v}]| = \sqrt{EG - F^2}$, то $\vec{n} = \dfrac{\left[\vec{r_u}, \vec{r_v}\right]}{\left|\left[\vec{r_u}, \vec{r_v}\right]\right|} = \dfrac{\left[\vec{r_u}, \vec{r_v}\right]}{\sqrt{EG - F^2}}$. Тогда

$$L = \vec{n}\overrightarrow{r_{uu}} = \frac{\vec{r_u}, \vec{r_v}, \overrightarrow{r_{uu}}}{\sqrt{EG - F^2}};\ M = \vec{n}\overrightarrow{r_{uv}} = \frac{\vec{r_u}, \vec{r_v}, \overrightarrow{r_{uv}}}{\sqrt{EG - F^2}};\ N = \vec{n}\overrightarrow{r_{vv}} = \frac{\vec{r_u}, \vec{r_v}, \overrightarrow{r_{vv}}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Зависимость между кривизной и нормальной кривизной можно получить, если ввести угол между нормальным вектором поверхности и вектором главной нормали кривой. Угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{v}$ обозначим через θ. $\vec{v}$ – единичный вектор главной нормали.

$k_n = \dfrac{1}{R_n}$, $k = \dfrac{1}{R}$.

Тогда $k_n = \dfrac{1}{R_n} = \vec{n}\dfrac{d^2\vec{r}}{d\ell^2} = \vec{n}k\vec{v} = k\vec{n}\vec{v} = \dfrac{\cos\theta}{R}$. Следовательно, $R = R_n\cos\theta$.

Таким образом, кривизна зависит от нормальной кривизны и угла $\dfrac{\pi}{2} - \theta$, который совпадает с углом между касательной плоскостью поверхности и соприкасающейся плоскостью кривой. Если соприкасающаяся плоскость кривой на поверхности в данной её точке задана, то она определяет своим пересечением с касательной плоскостью поверхности и касательную прямую этой кривой. Теперь, зная направления касательной прямой, можно найти нормальную кривизну. И так как угол θ известен, то можно определить полную кривизну. Следовательно, все кривые поверхности, имеющие общую точку и общую соприкасающуюся плоскость в этой точке, имеют в ней одинаковые кривизны.

Тема 15 Индикатриса Дюпена

Изучение кривизны всех линий на поверхности сводится к рассмотрению плоских сечений. Кривизна произвольного сечения, как мы видели, связана с кривизной нормального сечения. Таким образом, вопрос о кривизне линий на поверхности сводится к изучению кривизны нормальных сечений. Через данную точку поверхности можно провести бесчисленное множество нормальных сечений. Как же изменяется нормальная кривизна при переходе от одного такого сечения к другому? Возьмём на поверхности некоторую точку M и будем откладывать от неё на касательной к каждому нормальному сечению отрезок равный $\sqrt{R}$, где R – кривизна нормального сечения (рис. 34).

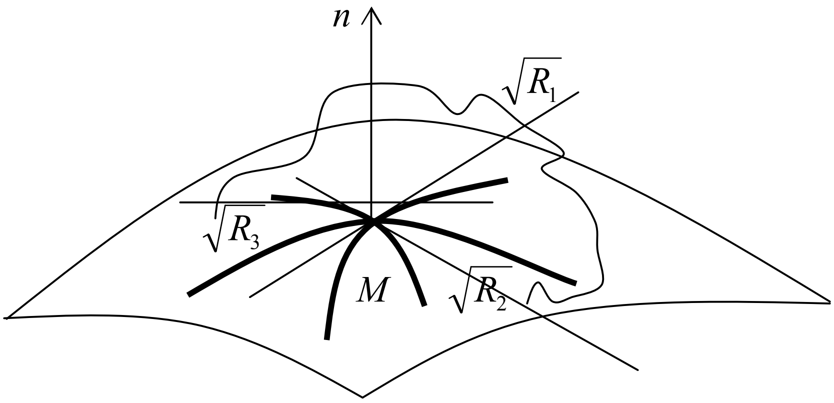

Рисунок 34

Определение. Множество концов этих отрезков есть некоторая плоская кривая, расположенная в касательной плоскости поверхности, которая называется индикатрисой Дюпена, соответствующей данной точке.

Найдём её уравнение. За начало координат, которое расположим в касательной плоскости, примем точку прикосновения M. Масштабные векторы пусть будут $\vec{r_u}$ и $\vec{r_v}$, $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$. Пусть $\vec{\xi}=\left(\xi^1,\xi^2\right)$ – есть радиус-вектор произвольной точки индикатрисы, то есть $\vec{\xi}=\xi^1\vec{r_u}+\xi^2\vec{r_v}$. С другой стороны, вектор $\vec{\xi}$ можно записать в таком виде: $\vec{\xi}=\sqrt{R}\vec{V}$, где $\vec{V}$ – единичный вектор касательной некоторого нормального сечения, а R – радиус его кривизны в точке M. Но $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{d\ell}=\vec{r}_u\dfrac{du}{d\ell}+\vec{r}_v\dfrac{dv}{d\ell}$, где $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ – радиус-вектор точки нормального сечения.

Мы можем приравнять эти выражения:

$\vec{\xi} = \xi^1\vec{r_u} + \xi^2\vec{r_v} = \sqrt{R}\vec{V} = \sqrt{R}\left(\vec{r_u}\dfrac{du}{d\ell} + \vec{r_v}\dfrac{dv}{d\ell}\right)$. Отсюда следует, что

$\xi^1 = \sqrt{R}\dfrac{du}{d\ell}$, $\quad \xi^2 = \sqrt{R}\dfrac{dv}{d\ell}$. $\qquad$ Но $\quad k_n = \dfrac{1}{R_n} = L\left(\dfrac{du}{d\ell}\right)^2 + 2M\dfrac{du}{d\ell}\dfrac{dv}{d\ell} + N\left(\dfrac{dv}{d\ell}\right)^2$.

Умножим обе части этого равенства на R.

Имеем $\dfrac{R}{R_n} = \left(\sqrt{R}\dfrac{du}{d\ell}\right)^2 L + 2M\left(\sqrt{R}\dfrac{du}{d\ell}\right)\left(\sqrt{R}\dfrac{dv}{d\ell}\right) + N\left(\sqrt{R}\dfrac{dv}{d\ell}\right)^2$.

Но $R = R_n\cos\theta$. Это значит, что кривизна нормального сечения и нормальная кривизна поверхности, соответствующая направлению этого сечения, могут отличаться только знаком, так как в этом случае векторы главной нормали и нормали поверхности равны и могут отличаться только направлением, то есть $\theta = 0^0$, либо $\theta = \pi$. Таким образом, $R = \pm R_n$.

Имеем $L(\xi^1)^2 + 2M\xi^1\xi^2 + N(\xi^2)^2 = \pm 1$ – уравнение индикатрисы Дюпена. Знак “ + ” соответствует случаю вогнутого, а знак “ – ” случаю выпуклого нормального сечения, так как вектор главной нормали всегда указывает в сторону вогнутости плоской кривой. Упростим это уравнение. Приведём некоторые сведения из алгебры. Рассмотрим на плоскости пару квадратичных форм, одна из которых положительна. И пусть их матрицы имеют вид: $G = (g_{ij})$, $\quad B = (g_{ij})$. Составим уравнение: $\det(B - \lambda G) = 0$, $(b_{11} - \lambda g_{11})(b_{22} - \lambda g_{22}) - (b_{12} - \lambda g_{12})^2 = 0$. Корни этого уравнения называются <u>собственными числами пары квадратичных форм.</u>

Составим систему: $\begin{cases}(b_{11} - \lambda_i g_{11})\xi_i^1 + (b_{12} - \lambda_i g_{12})\xi_i^2 = 0\\(b_{12} - \lambda_i g_{12})\xi_i^1 + (b_{22} - \lambda_i g_{22})\xi_i^2 = 0\end{cases}$, где ξ_i^1 и ξ_i^2 неизвестные. Если λ_1 и λ_2 – собственные числа, то система имеет нетривиальные решения $\vec{c_1} = (\xi_1^1, \xi_1^2)$, $\vec{c_2} = (\xi_2^1, \xi_2^2)$. Направления векторов $\vec{c_1}$ и $\vec{c_2}$ называются <u>главными направлениями пары квадратичных форм.</u> Вектор $\vec{c_1}$ соответствует λ_1, а $\vec{c_2}$ соответствует λ_2. Известно также, что если собственные числа пары квадратичных форм различны, то главные направления ортогональны.

<u>Определение.</u> Собственные числа этой пары квадратичных форм называются <u>главными кривизнами</u> в данной точке. Произведение главных кривизн называется <u>гауссовой кривизной</u>, а их сумма – <u>средней кривизной</u> поверхности.

Упростим теперь уравнение индикатрисы Дюпена за счёт выбора системы координат. В нашем случае система декартовых координат в касательной плоскости связана с системой криволинейных координат на поверхности. Выберем систему координат на поверхности так, чтобы сделать возможным упрощение. Поместим начало прямоугольных координат пространства в данную точку M поверхности и совместим плоскость XOY с её касательной плоскостью, не выбирая пока направления осей OX и OY.

Пусть задана поверхность $z = f(x, y)$. Параметризуем эту поверхность. Пусть $x = u$, $y = v$, тогда поверхность $z = f(u, v)$. Такая система криволинейных координат называется нормальной в точке M. Координатные векторы, соответствующие этой параметризации имеют вид:

$\overrightarrow{r_u} = \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial u}\vec{k}$, $\overrightarrow{r_v} = \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial v}\vec{k}$, так как $\vec{r}(x,y,z) = \vec{r}(u,v,f(u,v))$, $\overrightarrow{r_u} = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u})$,

$\overrightarrow{r_v} = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v})$, $\overrightarrow{r_u} = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} + z_u\vec{k} = 1\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial u}\vec{k}$;

$\overrightarrow{r_v} = x_v\vec{i} + y_v\vec{j} + z_v\vec{k} = 0\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial v}\vec{k}$.

В начале координат, которое совпадает с данной точкой M, эти векторы $\overrightarrow{r_u}$, $\overrightarrow{r_v}$ должны лежать в плоскости XOY, которая касательна поверхности. Таким образом, для точки O $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_0 = 0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_0 = 0$, а $\left(\overrightarrow{r_u}\right)_0 = i$, $\left(\overrightarrow{r_v}\right)_0 = j$. Т. е., декартова система координат здесь превращается в обычную прямоугольную, где $\xi^1 = x$, $\xi^2 = y$. Выберем теперь направление осей OX и OY. Совместим эти оси с главными направлениями индикатрисы Дюпена. Известно, что если координатные оси идут по главным направлениям кривой второго порядка, то в её уравнении отсутствует член с произведением координат, то есть $M_0 = 0$. И уравнение принимает вид: $L_0x^2 + N_0y^2 = \pm 1$ – уравнение индикатрисы Дюпена.

Тема 16 Формула Эйлера

Получим формулу Эйлера, которая устанавливает зависимость между нормальной кривизной любого направления и нормальными кривизнами главных направлений индикатрисы. Обозначим через φ угол между главным направлением и направлением произвольного сечения (рис. 35).

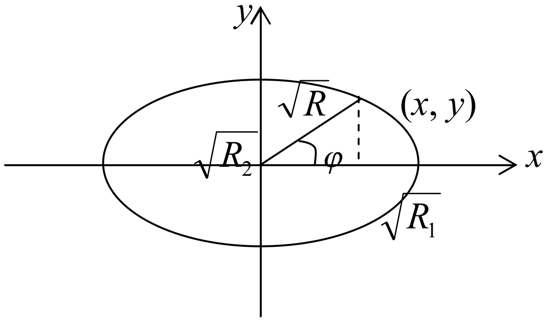

Рисунок 35

Тогда для координат точки индикатрисы имеем, что $x = \sqrt{R}\cos\varphi$, $y = \sqrt{R}\sin\varphi$, где $\sqrt{R}$ – радиус кривизны соответствующей этой точке нормального сечения. Подставив эти значения в уравнение $L_0x^2 + N_0y^2 = \pm 1$, получаем $L_0\cos^2\varphi + N_0\sin^2\varphi = \pm 1 = \pm\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_n}$. Главными кривизнами $k_1 = \dfrac{1}{R_1}$ и $k_2 = \dfrac{1}{R_2}$ поверхности в данной точке называются нормальные кривизны, соответствующие главным направлениям индикатрисы Дюпена. В нашем случае эти направления определятся значениями 0 и $\dfrac{\pi}{2}$ угла φ. Таким образом, $k_1 = L_0$, $k_2 = N_0$ и уравнение перепишем в виде:

$k_n = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi$ – формула Эйлера.

Вычислим главные кривизны. Пусть на поверхности заданы две системы криволинейных координат. Первая из этих систем является нормальной в данной точке, а вторая произвольная, но такова, что по отношению к этой системе данная точка является неособой. Если координатные векторы нормальной системы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ идут по главным направлениям поверхности в этой точке, то первая квадратичная форма имеет вид: $\varphi_1 = dx^2 + dy^2$, а вторая квадратичная форма – $\varphi_2 = k_1dx^2 + k_2dy^2$, где $\varphi_2 = k_1, k_2$ – главные кривизны поверхности. Запишем теперь выражения этих квадратичных форм в произвольной системе криволинейных координат и приравняем к данной.

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = k_1dx^2 + k_1dy^2 \qquad (1)$$

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = dx^2 + dy^2 \qquad (2)$$

Умножим обе части уравнения (2) на k_1 и почленно вычтем из (1):

$$(L - k_1E)du^2 + 2(M - k_1F)dudv + (N - k_1G)dv^2 = (k_2 - k_1)dy^2$$

При переходе от произвольных координат к нормальным имеем:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv = adu + bdv\,.$$

Итак:

$$(L - k_1E)du^2 + 2(M - k_1F)dudv + (N - k_1G)dv^2 = (k_2 - k_1)dy^2 =$$

$= (k_2 - k_1)(a^2du^2 + 2abdudv + b^2dv^2)$, то есть

$$\begin{cases} L - k_1E = a^2(k_2 - k_1) \\ M - k_1F = ab(k_2 - k_1) \\ N - k_1G = b^2(k_2 - k_1) \end{cases}$$

Из этой системы, выражая $k_2 = f(k_1)$, можно получить

$$(L - k_1E)(N - k_1G) - (M - k_1F)^2 = 0\,.$$

К аналогичному выражению, содержащему k_2, мы придём, если исключить подобным образом dy^2. Таким образом, главные кривизны поверхности в каждой точке являются корнями характеристического уравнения $(L - sE)(N - sG) - (M - sF)^2 = 0$. Раскрыв скобки и произведя соответствующие преобразования, получаем:

$$LN - ENs - LGs + EGs^2 - M^2 + 2MFs - F^2 s^2 = 0;$$
$$\left(EG - F^2\right)s^2 + \left(- EN + 2MF - LG\right)s + LN - M^2 = 0;$$
$$s^2 - \underbrace{\frac{EN - 2MF + LG}{EG - F^2}}_{2H}s + \underbrace{\frac{LN - M^2}{EG - F^2}}_{K} = 0;$$
$$s^2 - 2Hs + K = 0;$$

$K = k_1 k_2$ – полная (гауссова) кривизна;

$k_1 + k_2 = 2H$ – средняя кривизна.