Тема 1 Неопределенный интеграл

Практическое занятие 1 **Первообразная и неопределенный интеграл**

1.1 Определение первообразной функции

Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение производной $f'(x)$ или дифференциала $df = f'(x)dx$ функции $f(x)$. В интегральном исчислении решается обратная задача: по заданной функции $f(x)$ требуется найти такую функцию $F(x)$, что $F'(x)= f(x)$.

Таким образом, *основной задачей интегрального исчисления* является восстановление функции $F(x)$ по известной производной или дифференциалу этой функции. Интегральное исчисление имеет многочисленные приложения в геометрии, механике, физике и технике. Оно дает общий метод нахождения площадей, объемов, центров тяжести и т. д.

Функция $F(x)$, $x \in X \subset \mathbf{R}$, называется *первообразной* для функции $f(x)$ на множестве X, если она дифференцируема для любого $x \in X$ и имеет место соотношение:

$$F'(x)= f(x) \text{ или } dF(x)= f(x)dx .$$

Любая непрерывная на множестве X функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную $F(x)$.

Если $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$ на множестве X, то все первообразные этой функции определяются выражением

$$F(x)+C,$$

где C – произвольная постоянная.

1.2 Неопределенный интеграл и его геометрический смысл

Операция отыскания первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ называется *интегрированием*.

Совокупность $F(x)+C$ всех первообразных функции $f(x)$ на множестве X называется *неопределенным интегралом* и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Выражение $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*, $f(x)$ – *подынтегральной* функцией, x – *переменной интегрирования*, а C – *постоянной интегрирования*.

Неопределенный интеграл представляет собой любую функцию, дифференциал которой равен подынтегральному выражению, а производная – подынтегральной функции.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых $y = F(x)+C$ (C – параметр), обладающих следующим свойством: *все касательные к кривым в точках с абсциссой* $x = x_0$ *параллельны между собой*:

$$\left(F(x)+C\right)'\Big|_{x=x_0} = F'(x_0)= f(x_0).$$

На рисунке 1.1 изображен неопределенный интеграл $x^2 + C$ от функции $f(x)= 2x$:

$$\int 2xdx = x^2 + C,$$

который представляет собой семейство парабол $\{y = x^2 + C\}$.

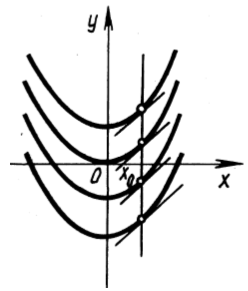

Рисунок 1.1 – Интегральные кривые $\{F(x)+C\}$

Кривые семейства $\{F(x)+C\}$ называются *интегральными кривыми*. Они не пересекаются между собой и не касаются друг друга. Через каждую точку плоскости проходит только одна интегральная кривая. Все интегральные кривые получаются одна из другой параллельным переносом вдоль оси Oy.

1.3 Основные свойства неопределенного интеграла

Неопределенный интеграл обладает *свойствами*:

– производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$$

– неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C;$$

– постоянный множитель $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$

– неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int \left(f_1(x) \pm \ldots \pm f_n(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx;$$

– *(инвариантность формул интегрирования)* любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ или } \int f(u)du = F(u) + C,$$

где u – дифференцируемая функция.

Так как интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, то большинство из приводимых формул может быть

получено обращением соответствующих формул дифференцирования.

1.4 Таблица неопределенных интегралов

Каждая из нижеследующих формул верна на каждом промежутке, принадлежащем области определения подынтегральной функции:

1 $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$

2 $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$

3 $\int e^u du = e^u + C.$

4 $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C.$

5 $\int \sin u du = -\cos u + C.$

6 $\int \cos u du = \sin u + C.$

7 $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C, \; x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}.$

8 $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C, \; x \neq \pi n, \; n \in \mathbf{Z}.$

9 $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C.$

10 $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C.$

11 $\int \dfrac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$

12 $\int \dfrac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$

13 $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + C, \; a \neq 0.$

14 $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a-u}{a+u}\right| + C, \; a \neq 0.$

15 $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$, $|u| > |a|$, $a \neq 0$.

16 $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$, $|u| < |a|$, $a \neq 0$.

17 $\int \sqrt{u^2 + a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$, $a \neq 0$

18 $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C$, $a \neq 0$

Некоторые из приведенных формул таблицы интегралов, не имеющие аналога в таблице производных, проверяются дифференцированием их правых частей.

Если первообразная $F(x)$ функция $f(x)$ является элементарной функцией, то говорят, что *интеграл* $\int f(x)dx$ *выражается в элементарных функциях или функция* $f(x)$ *интегрируема в конечном виде*. Однако не всякий интеграл от элементарной функции выражается в элементарных функциях. Используя основные правила интегрирования, можно находить интегралы от более сложных функций.

В отличие от дифференциального исчисления, где, пользуясь таблицей производных, можно найти производную или дифференциал любой заданной функции, в интегральном исчислении нет общих приемов вычисления неопределенных интегралов, а разработаны лишь частные методы, позволяющие свести данный интеграл к табличному.

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте определение первообразной функции и перечислите свойства первообразной.

2 Приведите примеры функций, имеющих и не имеющих первообразных.

3 Приведите примеры двух различных первообразных для одной и той же функции $f(x)$.

4 Имеет ли функция

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } & x > 0, \\ -2 \text{ при } & x \leq 0 \end{cases}$$

первообразную?

5 Найдите первообразную для функции $f(x) = \sin x$, которая в точке $x = \frac{\pi}{2}$ принимает значение, равное 10.

6 Известно, что две первообразные для функции $f(x) = e^x$ в точке $x = 1$ отличаются на 2. На сколько отличаются эти же первообразные в точке $x = 100$?

7 График какой первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ проходит через точку с координатами $(1; 2\pi)$?

8 Сформулируйте определение неопределенного интеграла.

9 В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?

10 Перечислите свойства неопределенного интеграла.

Решение типовых примеров

1 Используя основные свойства неопределенного интеграла, вычислить интегралы:

а) $\int 2^x \cdot 3^{2x}\,dx$;

б) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$;

в) $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$;

г) $\int \frac{3x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 7x + 8}{x^2}dx$

д) $\int (1 - \sqrt{x})^3\,dx$;

е) $\int \cos^2\frac{x}{2}dx$;

ж) $\int \frac{x^2}{1 - x^2}dx$;

и) $\int \sqrt{1 - \sin 2x}dx$.

Решение. а) имеем:

$$\int 2^x \cdot 3^{2x}\,dx = \int \left(2 \cdot 3^2\right)^x dx = \int 18^x\,dx = \frac{18^x}{\ln 18} + C.$$

б) имеем:

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}x - x + C.$$

в) имеем $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx =$

$$= \int(1+\sin x)dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C.$$

г) имеем:

$$\int\frac{3x^4+2x^3+5x^2-7x+8}{x^2}dx = \int\left(3x^2-2x+5-\frac{7}{x}+\frac{8}{x^2}\right)dx =$$

$$= 3\int x^2 dx - 2\int x dx + 5\int dx - 7\int\frac{dx}{x} + 8\int\frac{dx}{x^2} =$$

$$= 3\cdot\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 5x - 7\cdot\ln x + 8\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C =$$

$$= x^3 - x^2 + 5x - 7\ln x - \frac{8}{x} + C.$$

д) имеем: $\int(1-\sqrt{x})^3 dx = \int\left(1-3\sqrt{x}+3x-\sqrt{x^3}\right)dx =$

$$= \int dx - 3\int\sqrt{x}dx + 3\int x dx - \int x^{\frac{3}{2}}dx = x - 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C =$$

$$= x - 2x\sqrt{x} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C.$$

е) имеем: $\int\cos^2\frac{x}{2}dx = \int\frac{1+\cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int\cos x dx =$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C.$$

ж) имеем: $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx = \int\frac{x^2-1+1}{1-x^2}dx = \int\left(-1+\frac{1}{1-x^2}\right)dx =$

$$= -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

и) имеем: $\int\sqrt{1-\sin 2x}dx = \int\sqrt{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x}dx =$

$$= \int\sqrt{(\sin x - \cos x)^2}dx = \int|\sin x - \cos x|dx =$$

$$= (\sin x - \cos x)\cdot\mathrm{sgn}(\cos x - \sin x) + C.$$

Задания для аудиторной работы

1 Используя основные правила интегрирования и таблицу интегралов, вычислить следующие неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^3}{x^2}dx$;

б) $\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{5}{x^4}-\frac{1}{x^7}\right)dx$;

в) $\int\frac{6x^4+5x^4-4x^3+7x^2-9x+11}{x^2}dx$;

г) $\int\frac{x^4}{x^2-1}dx$;

д) $\int\frac{3}{4+x^2}dx$;

е) $\int\frac{dx}{9-x^2}$;

ж) $\int\left(\sqrt[3]{x}+\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$;

и) $\int\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$;

к) $\int\sin^2\frac{x}{2}dx$;

л) $\int\frac{x^2}{x^2+1}dx$;

м) $\int\frac{2-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$;

н) $\int \mathrm{th}^2 x dx$.

2 Доказать, что функция $f(x) = \mathrm{sgn}\, x$ не имеет первообразной на любом промежутке, содержащем точку $x = 0$.

Задания для домашней работы

1 Используя основные правила интегрирования и таблицу интегралов, вычислить следующие неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$;

б) $\int (x^4+1)x^3dx$;

в) $\int (\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})^2 dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{16+x^2}}$;

д) $\int \frac{x^2-9}{x^2-8}dx$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$;

ж) $\int \left(\sqrt[5]{x^4}-\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$;

и) $\int 2^x\left(1+\frac{2^{-x}}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$;

к) $\int \frac{2x+3}{3x+2}dx$;

л) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{9}{1+x^2}\right)dx$;

м) $\int \mathrm{ctg}^2 x dx$;

н) $\int 5^x 7^{2x} 2^{4x} dx$;

о) $\int \sin(x+3)dx$;

п) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$

Практическое занятие 2 **Общие методы интегрирования**

2.1 Непосредственное интегрирование
2.2 Метод замены переменной (подстановка)
2.3 Метод интегрирования по частям

2.1 Непосредственное интегрирование

Вычисление интегралов, основанное на приведении подынтегрального выражения к табличной форме и использовании свойств неопределенного интеграла, называется *непосредственным интегрированием*.

2.2 Метод замены переменной (подстановка)

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным.

Теорема 1 Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором множестве T. И пусть X – множество значений функции $x=\varphi(t)$, на котором определена функция $f(x)$. Тогда если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула замены переменной:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,. \qquad (2.1)$$

Суть метода замены переменной состоит в том, что в интеграле $\int f(x)dx$ переменную x заменяют переменной t по формуле $x=\varphi(t)$, учитывая $dx=\varphi'(t)dt$.

Очень часто при вычислении интегралов пользуются приемом «подведения» подынтегральной функции под знак дифференциала. По определению дифференциала функции имеем $\varphi'(x)dx=d(\varphi(x))$. Переход от левой части этого равенства к правой называют *«подведением» множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала*. Пусть требуется найти интеграл вида

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx\,.$$

Внесем в этом интеграле множитель $\varphi'(x)$ под знак дифференциала, а затем выполним подстановку $\varphi(x)=u$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))d(\varphi(x))=\int f(u)du.$$

Если интеграл $\int f(u)du$ – табличный, его вычисляют непосредственным интегрированием.

2.3 Метод интегрирования по частям

Вычисление некоторых типов неопределенных интегралов основывается на теореме 2.

Т е о р е м а 2 *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ – две дифференцируемые функции переменной x на промежутке X. И пусть функция $u'(x)v(x)$ имеет первообразную на этом промежутке. Тогда функция $v'(x)u(x)$ также имеет производную и справедлива формула интегрирования по частям:*

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (2.2)$$

С помощью формулы интегрирования по частям отыскание интеграла $\int udv$ сводится к вычислению другого интеграла $\int vdu$. Применять ее целесообразно, когда интеграл $\int vdu$ более прост для вычисления, чем исходный.

Методом интегрирования по частям вычисляются интегралы:

– $\int P_n(x)e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\sin kxdx$, $\int P_n(x)\cos kxdx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, $n\in\mathbf{N}$, $k\in\mathbf{R}$. Чтобы найти эти интегралы, достаточно положить $u=P_n(x)$ и применить формулу интегрирования по частям n раз;

– $\int P_n(x)\ln xdx$, $\int P_n(x)\arcsin xdx$, $\int P_n(x)\arccos xdx$, $\int P_n(x)\mathrm{arctg}xdx$, $\int P_n(x)\mathrm{arcctg}xdx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, $n\in\mathbf{N}$. Данные интегралы вычисляются по частям, принимая за u функцию, являющуюся множителем при $P_n(x)$;

– $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, где a, $b\in\mathbf{R}$. Они вычисляются двукратным интегрированием по частям и решением уравнения относительно искомого интеграла.

Вопросы для самоконтроля

1 Перечислите свойства неопределенного интеграла.

2 Как осуществляется интегрирование с помощью замены переменной?

3 Как осуществляется интегрирование с помощью интегрирования по частям?

4 Какие подынтегральные функции удобно интегрировать по частям?

5 Требуется найти $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$ для $x\in[-2,2]$. Допустима ли для этой цели замена переменной

а) $x=\sin t$, $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$;

б) $x=\cos t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$;

в) $x=2\sin t$, $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$;

г) $x=2\cos t$; $0\le t\le\frac{\pi}{2}$;

д) $x=2\cos t$, $\pi\le t\le 2\pi$?

Решение типовых примеров

1 С помощью метода замены переменной найти интегралы:

а) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; д) $\int \mathrm{tg}xdx$;

б) $\int\frac{x^3}{x^4-2}dx$; е) $\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$;

в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; ж) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$;

г) $\int \frac{dx}{x\ln x \ln\ln x}$; и) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;.

Решение. а) имеем:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\frac{1}{2}d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\frac{1}{2}d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = \left[1-x^2=t\right] = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}2t^{\frac{1}{2}} + C = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

б) имеем: $\int \frac{x^3}{x^4-2}dx = \int \frac{\frac{1}{4}d(x^4)}{(x^4)^2-2} = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}d\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)}{-2\left(1-\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} =$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x^4}{\sqrt{2}-x^4}\right| + C.$$

в) имеем: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \int \frac{-d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}} =$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right| + C.$$

г) имеем:

$$\int \frac{dx}{x\ln x \ln\ln x} = \int \frac{d(\ln\ln x)}{\ln\ln x} = \ln\left|\ln\ln x\right| + C.$$

д) имеем:

$$\int \mathrm{tg}x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \left[u = \cos x\right] = -\int \frac{du}{u} =$$

$$= -\ln\left|\cos x\right| + C.$$

е) имеем:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x(\mathrm{tg}^2 x + 2)} = \int \frac{\sqrt{2}d\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}}\right)}{2\left(1+\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

ж) по формуле (2.1) имеем:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{3x+1} = u, x = \frac{u^2-1}{3} \\ 3x+1 = u^2, dx = \frac{2}{3}udu \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{\frac{2}{3}udu}{\frac{u^2-1}{3}} = 2\int \frac{du}{u^2-1} = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + c = \ln\left|\frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt{3x+1}+1}\right| + C.$$

и) имеем: $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \left[\begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array}\right] = \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = \mathrm{tg}\, t + C =$

$$= \mathrm{tg}(\arcsin x) + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

2 Используя метод интегрирования по частям, вычислить следующие интегралы:

а) $\int \mathrm{arctg}\, x dx$; г) $\int (x-1)\ln x dx$;

б) $\int x^2 e^{-x}dx$; д) $\int \sin(\ln x)dx$;

в) $\int x^2 \sin 2x dx$; е) $\int e^{-x} \cos 2x dx$.

Решение. а) с учетом формулы (2.2) имеем:

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} x, dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, x = v \end{bmatrix} = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln\left|1+x^2\right| + C.$$

б) имеем:

$$\int x^2 e^{-x} dx = \begin{bmatrix} u = x^2, du = 2x dx \\ dv = e^{-x} dx, v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x, du = dx \\ dv = e^{-x} dx, v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -x^2 e^{-x} + 2\left(-x e^{-x} + \int e^{-x} dx\right) =$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C.$$

в) имеем:

$$\int x^2 \sin 2x dx = \begin{bmatrix} u = x^2, du = 2x dx \\ dv = \sin 2x dx, v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix} =$$

$$= x^2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + \int x \cos 2x dx = \begin{bmatrix} u = x, dv = \cos 2x dx \\ du = dx, v = -\dfrac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin x +$$

$$+ \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

г) имеем:

$$\int (x-1)\ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x;\ du = \dfrac{1}{x} dx; \\ dv = (x-1)dx;\ v = \dfrac{(x-1)^2}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(x-1)^2}{2}\ln x - \int \frac{(x-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{(x-1)^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 - 2x + 1}{x} dx =$$

$$= \frac{(x-1)^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{(x-1)^2}{2}\ln x -$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - 2x + \ln x\right).$$

д) имеем: $\int \sin(\ln x) dx = \begin{bmatrix} u = \sin \ln x, du = \dfrac{1}{x}\cos \ln x\, dx \\ dv = dx, v = x \end{bmatrix} =$

$$= x \sin \ln x - \int \cos \ln x\, dx = x \sin \ln x - \left(x \cos \ln x + \int \sin \ln x dx\right).$$

Пусть $I = \int \sin \ln x dx$. Тогда

$$I = x(\sin \ln x - \cos \ln x) - I.$$

Откуда $I = \dfrac{x}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x) + C$.

е) имеем: $\int e^{-x} \cos 2x dx = \begin{bmatrix} u = e^{-x};\ du = -e^{x} dx; \\ dv = \cos 2x;\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix} =$

$$= -e^{-x} \cdot \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\int e^{-x} \cdot \sin 2x dx = \begin{bmatrix} u = e^{-x};\ du = -e^{x} dx; \\ dv = \sin 2x;\ v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-x}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\int e^{-x} \cos 2x dx\right) =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2}\sin 2x + \frac{e^{-x}}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\int e^{-x} \cos 2x dx.$$

Отсюда

$$\int e^{-x} \cos 2x dx = -\frac{e^{-x}}{2}\sin 2x + \frac{e^{-x}}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\int e^{-x} \cos 2x dx.$$

Выразим искомый интеграл

$$\int e^{-x}\cos 2x dx\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{e^{-x}}{4}(-2\sin 2x+\cos 2x).$$

Тогда

$$\int e^{-x}\cos 2x dx=\frac{e^{-x}(-2\sin 2x+\cos 2x)}{5}.$$

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить методом замены переменной:

а) $\int\frac{dx}{\sin x}$; и) $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;

б) $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$; к) $\int\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$;

в) $\int\operatorname{ctg} x dx$; л) $\int\operatorname{ch}^2 x\operatorname{sh} x\,dx$;

г) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^6}}$; м) $\int e^{\cos 2x}\sin 2x dx$;

д) $\int x5^{-x^2}dx$; н) $\int\frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}dx$;

е) $\int\frac{x^2dx}{(1+x)^6}$; о) $\int x\sqrt{x-8}\,dx$;

ж) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-6x-3x^2}}$; п) $\int\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+1}}dx$.

2 Вычислить методом интегрирования по частям:

а) $\int x\operatorname{arctg}^3 x\,dx$; г) $\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx$;

б) $\int\frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; д) $\int(x+4)\cos 3x\,dx$;

в) $\int x^2\operatorname{arctg} x dx$; е) $\int\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Задания для домашней работы

1 Вычислить методом замены переменной:

а) $\int\frac{dx}{x+5}$; к) $\int x^2e^{-x^3}dx$;

б) $\int x\sqrt{x^2-1}dx$; л) $\int\frac{\cos x}{\sin^5 x}dx$;

в) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; м) $\int\operatorname{cth} x dx$;

г) $\int\frac{xdx}{4+x^2}$; н) $\int e^{x^3}x^2dx$;

д) $\int\sqrt{1+3\cos x}\sin x dx$; о) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2x+13}}$;

е) $\int\frac{dx}{x\ln x}$; п) $\int\frac{xdx}{4x^2+5}$;

ж) $\int e^{3x+1}dx$; р) $\int\frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$;

и) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}}$; с) $\int\frac{dx}{\sqrt{6x+x^2}}$

2 Вычислить методом интегрирования по частям:

а) $\int\sqrt{x}\ln^2 x dx$; д) $\int\frac{\arcsin x}{x^2}dx$;

б) $\int\sin x\ln(\operatorname{tg} x)dx$; е) $\int e^x\sin^2 x dx$;

в) $\int x\operatorname{arcctg}\sqrt{x}dx$; ж) $\int x\cos^2 x dx$;

г) $\int xe^{x+1}dx$; и) $\int(x+1)\sin x dx$.

Практическое занятие 3 Интегрирование рациональных функций

3.1 Интегрирование простейших рациональных дробей
3.2 Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби
3.3 Интегрирование рациональных функций

3.1 Интегрирование простейших рациональных дробей

Рациональной дробью $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется дробь, числителем и знаменателем которой являются многочлены:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m},\ n,\ m\ \in \mathbf{N}.$$

Если степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе ($n \ge m$), то дробь называется *неправильной.* Если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе ($n < m$), то дробь называется *правильной.*

Простейшей дробью называется правильная рациональная дробь одного из следующих четырех типов:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ $(n \ge 2)$;

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; 4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ $(n \ge 2)$.

Здесь A, a, p, q, M, N – действительные числа, а квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т. е. $\dfrac{p^2}{4}-q<0$.

Интегрирование простейших дробей проводится следующим образом:

1) $$\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{dx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C;$$

2) $$\int\frac{A}{(x-a)^n}=A\int(x-a)^{-n}dx=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=$$
$$=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C;$$

3) $$\int\frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q}=\left[\begin{array}{l} d(x^2+px+q)=(2x+p)dx, \\ Mx+N=\dfrac{M}{2}(2x+p)+N-\dfrac{Mp}{2}\end{array}\right]=$$
$$=\frac{M}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\dfrac{p}{2}\right)}{\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+q-\dfrac{p^2}{4}}=$$
$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}+C;$$

4) $$\int\frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n}=\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{p}{2}=t, dx=dt, \\ x^2+px+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+q-\dfrac{p^2}{4}=t^2+a^2, \\ a=q-\dfrac{p^2}{4}\end{array}\right]=$$
$$=\int\frac{M(x+p/2)+N-Mp/2}{\left((x+p/2)^2+q-p^2/4\right)^n}dx=$$
$$=M\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^n}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}=M\,I_0+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)I_n.$$

Вычислим интеграл I_0:

$$I_0=\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{1}{2}\int(t^2+a^2)^{-n}d(t^2+a^2)=\frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}+C.$$

Для вычисления интеграла $I_n = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$, представим его в виде

$$I_n = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left(t^2+a^2\right)-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^n}dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} - \int \frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}\right).$$

Замечая, что $\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} = I_{n-1}$, получаем

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(I_{n-1} - \int \frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}\right).$$

Вычислим интеграл $\int \frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$:

$$\int \frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \left[\begin{array}{l} u = t, du = dt, \\ dv = \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n}, \frac{1}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}I_{n-1}$$

Подставляя найденное выражение, имеем

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} - \frac{t}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}\right).$$

Данная формула является *рекуррентной*. Зная табличный интеграл

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C,$$

находятся интегралы I_n, $n \ge 2$.

Действительно, при $n = 2$ имеем

$$I_2 = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+a^2} + \frac{t}{2\left(t^2+a^2\right)}\right) =$$

$$= \frac{t}{2a^2\left(t^2+a^2\right)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

3.2 Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби

Правильную рациональную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где

$$Q_m(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^l \left(x^2+px+q\right)^s,$$

можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \ldots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{B_1}{(x-\beta)} + \ldots + \frac{B_l}{(x-\beta)^l} +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \ldots + \frac{M_sx+N_s}{\left(x^2+px+q\right)^s},$$

где A_1, A_2, ..., A_k, B_1, B_2, ..., B_i, M_1, N_1, M_2, M_2, ..., M_s, N_s – некоторые действительные числа.

Согласно данному разложению, линейным множителям знаменателя $Q_m(x)$ соответствуют простейшие дроби первого и второго типов, а квадратным множителям – третьего и четвертого типов. При этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю (линейному или квадратному), равно степени, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби. Формула разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби остается справедливой для любого конечного числа линейных и квадратных множителей, входящих в разложение знаменателя $Q_m(x)$.

Для определения коэффициентов разложения используется *метод неопределенных коэффициентов:*

– раскладывается правильная рациональная дробь на простейшие дроби;

– простейшие дроби приводятся к общему знаменателю $Q_m(x)$;

– многочлен, получившийся в числителе, приравнивается к многочлену $P_n(x)$;

– приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях полученного тождества. В результате получается система m линейных алгебраических уравнений для нахождения m неизвестных коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, A_k$, B_1, $B_2, \ldots, B_k$, M_1, $N_1, \ldots, M_s$, N_s.

Если корни знаменателя рациональной дроби $Q_m(x)$ просты и действительны, вместо того, чтобы сравнивать коэффициенты переменной x даются несколько частных значений (последовательно полагают x равным каждому из корней знаменателя).

3.3 Интегрирование рациональных функций

Всякая рациональная функция $R(x)$ представима в виде суммы многочлена $T_k(x)$ (целой части) и правильной рациональной дроби $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$:

$$R(x) = T_k(x) + \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},\ k,\ n,\ m \in \mathbf{N}$$

Поэтому интегрирование рациональных функций сводится к интегрированию правильных рациональных дробей.

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется рациональной дробью?

2 Какая рациональная дробь называется простейшей?

3 Как интегрируются простейшие рациональные дроби?

4 На какие простейшие множители можно разложить многочлен с действительными коэффициентами?

5 Какой вид имеет разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей?

6 В чем суть метода неопределенных коэффициентов?

Решение типовых примеров

1 Найти интегралы от рациональных функций:

а) $\displaystyle\int \frac{2x^5+6x^3+13}{x^4+3x^2}dx$;

б) $\displaystyle\int \frac{x^5-x+1}{x^3+x}dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)}dx$;

г) $\displaystyle\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx$;

д) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}dx$.

Р е ш е н и е. а) выделим из неправильной дроби целую часть, деля числитель на знаменатель

$$\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2} = 2x + \frac{1}{x^4+3x^2}.$$

Разложим полученную в результате дробь на элементарные слагаемые:

$$x^4+3x^2 = x^2\left(x^2+3\right).$$

Тогда

$$\frac{1}{x^2\left(x^2+3\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}.$$

Приведем к общему знаменателю в правой части

$$\frac{1}{x^2\left(x^2+3\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3} = \frac{Ax\left(x^2+3\right)+B\left(x^2+3\right)+(Cx+D)x^2}{x^2\left(x^2+3\right)}.$$

Отсюда

$$1 = Ax\left(x^2+3\right)+B\left(x^2+3\right)+(Cx+D)x^2$$

Раскроем скобки в правой части и сгруппируем:

$$1 = x^3(A+C)+x^2(B+D)+x\cdot 3A+3B.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$x^3: 0 = A+C$,

$x^2: 0 = B+D$,

$x^1: 0 = 3A$,

$x^0: 1 = 3B$.

Отсюда $A=0$, $B=\frac{1}{3}$, $C=0$, $D=-\frac{1}{3}$.

Следовательно,

$$\frac{2x^5+6x^3+13}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3\left(x^2+3\right)}.$$

Тогда

$$\int\frac{2x^5+6x^3+13}{x^4+3x^2}dx=\int\left(2x+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3\left(x^2+3\right)}\right)dx=$$

$$=2\int xdx+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+3}=$$

$$=2\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=x^2-\frac{1}{3x}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C;$$

б) подынтегральное выражение является неправильной рациональной дробью. Выделим целую часть подынтегральной функции:

$$\frac{x^5-x+1}{x^3+x}=x^2-1+\frac{1}{x^3+x}$$

Разложим на элементарные последнюю дробь:

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}.$$

Методом неопределенных коэффициентов, найдем неизвестные коэффициенты A, B, C. Имеем

$$1=(A+B)x^2+Cx+A.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$\begin{cases}A+B=0,\\ C=0,\\ A=1,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=1,\\ B=-1,\\ C=0.\end{cases}$$

Значит,

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}.$$

Подставляя полученное выражение в интеграл $\int\frac{dx}{x^3+x}$, получим

$$\int\frac{dx}{x^3+x}=\int\frac{dx}{x(x^2+1)}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{x^2+1}=$$

$$=\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

Тогда

$$\int\frac{x^5-x+1}{x^3+x}dx=\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^3+x}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}-x+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C;$$

в) подынтегральное выражение является правильной рациональной дробью. Разложим ее на элементарные дроби:

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-2}.$$

Используя метод частных значений, получим:

$$A=\frac{x+2}{(x-1)(x+1)(x-2)}\Big|_{x=0}=1,$$

$$B=\frac{x+2}{x(x+1)(x-2)}\Big|_{x=1}=-\frac{3}{2},$$

$$C=\frac{x+2}{x(x-1)(x-2)}\Big|_{x=-1}=-\frac{1}{6},$$

$$D=\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}\Big|_{x=2}=\frac{2}{3}.$$

Тогда

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\frac{1}{x+1}+\frac{2}{3}\frac{1}{x-2}.$$

Подставим в исходный интеграл

$$\int \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)}dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{6}\frac{1}{x+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{x-2}\right)dx =$$

$$= \ln|x| - \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x(x-2)^{\frac{2}{3}}}{(x-1)^{\frac{3}{2}}(x+1)^{\frac{1}{6}}}\right| + C;$$

г) запишем исходный интеграл в виде:

$$\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx = \int\left(x + \frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \int\frac{dx}{x-1} + \int\frac{4x+3}{2x^2+2x+1}dx.$$

Подынтегральное выражение в третьем слагаемом есть правильная рациональная дробь. Разложим ее на элементарные и найдем коэффициенты:

$$\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{2x^2+2x+1} = \frac{1}{x-1} + \frac{4x+3}{2x^2+2x+1}.$$

Подставим в интеграл и вычислим его

$$\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \int\frac{4x+2}{2x^2+2x+1}dx +$$

$$+\int\frac{dx}{2x^2+2x+`1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \int\frac{d\left(2x^2+2x+1\right)}{2x^2+2x+1} + \int\frac{dx}{\left(\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \operatorname{arctg}(2x+1) + C;$$

д) поскольку

$$x^5+x^4-x^3-x^2 = x^2(x+1)^2(x-1),$$

то

$$\frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Тогда

$$\int\frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}dx = \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.$$

Задания для аудиторной работы

Вычислить интегралы:

а) $\int\frac{dx}{x^2+4x-5}$;

б) $\int\frac{x^2+x+2}{x^3-x^2+x-1}dx$;

в) $\int\frac{x^4+5}{x^2+1}dx$;

г) $\int\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}dx$;

д) $\int\frac{dx}{x\left(x^2+1\right)^2}$;

е) $\int\frac{x^3+2x+1}{x^3+1}dx$;

ж) $\int\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$;

и) $\int\frac{x^2-6x+8}{x-5}dx$;

к) $\int\frac{dx}{\left(x^2-2x\right)^2}$;

л) $\int\frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}dx$;

м) $\int\frac{dx}{x^4+1}$;

н) $\int\frac{xdx}{x^3+1}$.

Задания для домашней работы

Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+4}dx$;

б) $\int \frac{x^2+7}{x-3}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x(x^2+2)}$;

г) $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx$;

д) $\int \frac{x^4+1}{x^4-1}dx$;

е) $\int \frac{dx}{x^3+1}$;

ж) $\int \frac{x^3+2x+1}{x^2-1}dx$;

и) $\int \frac{x^3+2}{x^3-4x}dx$;

к) $\int \frac{x+1}{(x^2+9)(x^2+1)}dx$;

л) $\int \frac{x^5-x+1}{x^3+x}dx$.

Практическое занятие 4 **Интегрирование иррациональностей**

4.1 Интегралы вида $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2},...\right)dx$ (m_i, n_i $\in \mathbf{R}$, $i=1,2,...$)

4.2 Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

4.3 Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ (m, n, $p\in\mathbf{Q}$, a, $b\in\mathbf{R}$)

4.4 Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции

4.1 Интегралы вида $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2},...\right)dx$ (m_i, n_i $\in \mathbf{R}$, $i=1,2,...$)

Через $R(u,v,w,...)$ обозначается *рациональная функция* относительно переменных $u,v,w,...$, т. е. выражение, которое получено из величин $u,v,w,...$, а также действительных чисел с помощью четырех арифметических действий.

В интегралах $\int R\left(x,\sqrt[n_1]{x^{m_1}},\sqrt[n_2]{x^{m_2}},...\right)dx$ (m_i, n_i $\in \mathbf{R}$, $i=1,2,...$) подынтегральная функция рациональна относительно переменной интегрирования x и радикалов $\sqrt[n_i]{x^{m_i}}$, $i=1,2,...$. Для вычисления интегралов вводится замена

$$x=t^s,$$

где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, …. При такой замене переменной все отношения $\frac{m_1}{n_1}=r_1$, $\frac{m_2}{n_2}=r_2$, … являются целыми числами, и имеет место интеграл от рациональной функции переменной t:

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots\right) dx = \int R\left(t^s, t^{r_1}, t^{r_2}, \ldots\right) s\, t^{s-1} dt .$$

Интегралы $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2}, \ldots\right) dx$ вычисляются с помощью замены

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s ,$$

где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$.

В результате получается интеграл от рациональной функции переменной t.

4.2 Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$

В общем случае интегралы данного типа сводятся к интегралам от рациональных функций подстановками Эйлера:

– если дискриминант трехчлена ax^2+bx+c отрицательный, то используется первая подстановка Эйлера

$$t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a} ;$$

– если дискриминант трехчлена ax^2+bx+c положительный и $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, то используется вторая подстановка Эйлера

$$t = \pm \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1} .$$

Подстановки Эйлера часто приводят к громоздким выкладкам, поэтому в некоторых случаях удобнее применять другие методы интегрирования.

Для вычисления интеграла $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ выделяется полный квадрат под знаком радикала:

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{2a^2}\right)\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right)$$

и применяется замена $x + \frac{b}{2a} = u$, $dx = du$.

В результате этот интеграл сводится к табличному:

$$I_1 = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm k^2}} .$$

Для вычисления интеграла $I_2 = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ в числителе выделяется дифференциал выражения, стоящего под знаком радикала. Тогда интеграл I_2 представляется в виде суммы двух интегралов:

$$I_2 = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{A}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx =$$

$$= \frac{A}{2a} \int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(B - \frac{A}{2a}\right) I_1 =$$

$$= \frac{A}{2a} \int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) I_1 =$$

$$= \frac{A}{2a} \sqrt{\left(ax^2+bx+c\right)} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) I_1 ,$$

где I_1 – вычисленный выше интеграл.

Вычисление интеграла $I_3 = \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ сводится к вычислению интеграла I_1 заменой:

$$x = \frac{1}{u} ,\ dx = -x = \frac{1}{u^2} du .$$

При вычислении интеграла $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ также применяются тригонометрические подстановки. В этом случае квадратный трехчлен ax^2+bx+c путем выделения полного квадрата и замены переменной представляется в виде $u^2 \pm k^2$. В результате исходный интеграл приводится к одному из следующих интегралов:

$$I_4=\int R\left(u,\sqrt{k^2-u^2}\right)du\,,$$

$$I_5=\int R\left(u,\sqrt{k^2+u^2}\right)du\,,$$

$$I_6=\int R\left(u,\sqrt{u^2-k^2}\right)du\,.$$

Интеграл $I_4=\int R\left(u,\sqrt{k^2-u^2}\right)du$ заменой $u=k\sin t$ (или $u=k\cos t$) сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Интеграл $I_5=\int R\left(u,\sqrt{k^2+u^2}\right)du$ заменой $u=k\,\mathrm{tg}t$ (или $u=k\,\mathrm{ctg}t$) сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Интеграл $I_6=\int R\left(u,\sqrt{u^2-k^2}\right)du$ заменой $u=k\sec t$ (или $u=k\,\mathrm{cosec}\,t$) сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

4.3 Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ (m, n, $p\in\mathbf{Q}$, a, $b\in\mathbf{R}$)

Интегралы вида

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx \;\; (m,n,p\in\mathbf{Q},\ a,\ b\in\mathbf{R}).,\ a,\ b\in\mathbf{R})$$

называются *интегралами от дифференциального бинома* $x^m\left(a+bx^n\right)^p$. Эти интегралы выражаются через элементарные функции только в следующих трех случаях:

– если $p\in\mathbf{Z}$, то используется подстановка $x=t^s$, где s – общий знаменатель дробей m и n;

– если $\frac{m+1}{n}\in\mathbf{Z}$, то используется подстановка $a+bx^n=t^s$, где s – знаменатель дроби $p=\frac{k}{s}$;

– если $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbf{Z}$, то используется подстановка $ax^{-n}+b=t^s$, где s – знаменатель дроби $p=\frac{k}{s}$.

Во всех остальных случаях, как было показано П.Л. Чебышевым, интегралы от дифференциального бинома не выражаются через элементарные функции.

4.4 Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции

Известно, что любая непрерывная на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, т. е. существует такая функция $F(x)$, что $F'(x)=f(x)$. Однако не всякую первообразную $F(x)$ можно выразить через конечное число элементарных функций. Ниже приводятся примеры интегралов, которые не выражаются через элементарные функции:

$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-x^2}dx$ – *интеграл Пуассона,*

$Si(x)=\int\frac{\sin x}{x}dx$ – *интегральный синус,*

$\int\frac{\cos x}{x}dx$ – *интегральный косинус,*

$li(x)=\int\frac{dx}{\ln x}$ – *интегральный логарифм,*

$\int\cos\left(x^2\right)dx$, $\int\sin\left(x^2\right)dx$ – *интегралы Френеля,*

$\int\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$ – *эллиптический интеграл первого рода,*

$\int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx$ – *эллиптический интеграл второго рода.*

Каждый из приведенных интегралов представляет собой функцию, не являющуюся элементарной.

Вопросы для самоконтроля

1 Какая замена переменной используется при вычислении интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots\right)dx$?

2 Какая замена переменной используется при вычислении интегралов вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx$?

3 Какие подстановки называются подстановками Эйлера?

4 Для вычисления каких интегралов удобно применять тригонометрические подстановки?

5 В каких случаях можно вычислить интеграл от дифференциального бинома?

6 Приведите примеры интегралов, которые не выражаются через элементарные функции.

Решение типовых примеров

1 Вычислить следующие неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^3} - \sqrt{2x+1}}$;

в) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}$;

г) $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx$;

д) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$;

е) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$;

ж) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$;

и) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Р е ш е н и е . а) имеем:

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} x=t^4, \\ dx=4t^3dt \end{bmatrix} = \int \frac{1+t}{t^4+t^2}4t^3dt = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1}dt =$$

$$= 4\int\left(1+\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt = 4\int\left(1+\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\right) = 4t+2\ln\left(t^2+1\right)-$$

$$-4\,\text{arctg}\,t + C = \left[t=\sqrt[4]{x}\right] = 4\sqrt[4]{x} + 2\ln\left(\sqrt[2]{x}+1\right) - 4\,\text{arctg}\sqrt[4]{x} + C.$$

б) имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^3}-\sqrt{2x+1}} = \begin{bmatrix} 2x+1=t^6, \\ x=\frac{1}{2}\left(t^6-1\right), \\ dx=3t^5dt \end{bmatrix} = \int\frac{3t^5dt}{t^4-t^3} = 3\int\frac{t^2dt}{t-1} =$$

$$= 3\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt = 3\int\left(t+1-\frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= \frac{3}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t-1| + C = \left[t=\sqrt[6]{2x+1}\right] =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1} + 3\sqrt[6]{2x+1} + 3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right| + C.$$

в) $$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1} = \left[t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}, dx=\frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2}\right] =$$

$$= -3\int\frac{dt}{t^3-1} = -\frac{1}{2}\ln\frac{(1-t)^2}{1+t+t^2} + \sqrt{3}\,\text{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$

г) имеем:

$$\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx = \begin{bmatrix} t=\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} \\ x=\frac{2t-1}{1-t^2}, dx=2\frac{1-t+t^2}{(1-t^2)^2}dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int\frac{-2tdt}{1-t^2} = \ln\left|1-t^2\right| + C = \left[t=\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\right] =$$

$$=\ln\left|1-\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)^2\right|+C;$$

д) имеем:

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}=\begin{bmatrix}x-1=\frac{1}{t},\\ dx=-\frac{1}{t^2}dt\end{bmatrix}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{1-\left(\frac{1}{t}+1\right)^2}}=$$

$$=-\int\frac{\sqrt{t^2}\,dt}{t\sqrt{-1-2t}}=-\int\frac{|t|dt}{t\sqrt{-1-2t}}=\begin{bmatrix}|x|<1\Rightarrow x-1<0\\ \Rightarrow\ t<0\end{bmatrix}=$$

$$=-\int\frac{-t\,dt}{t\sqrt{-1-2t}}=\int\frac{dt}{\sqrt{-1-2t}}=\int(-1-2t)^{-\frac{1}{2}}dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int(-1-2t)^{-\frac{1}{2}}d(-1-2t)=-(-1-2t)^{\frac{1}{2}}+C=\left[t=\frac{1}{x-1}\right]=$$

$$=-\left(-1-2\frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}+C=C-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

е) имеем:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\begin{bmatrix}x=a\cos t;\\ dx=-a\sin t dt\end{bmatrix}=\int\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}\,(-a)\sin t dt=$$

$$=-a^2\int\sqrt{1-\cos^2 t}\sin t dt=-a^2\int\sin^2 t dt=\frac{-a^2}{2}\int(1-\cos 2t)\,dt=$$

$$=-\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\left[t=\arccos\frac{x}{a}\right]=$$

$$=-\frac{a^2}{2}\left(\arccos\frac{x}{a}-\frac{1}{4}\sin\left(\arccos\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arccos\frac{x}{a}\right)\right)+C=$$

$$=-\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a}+\frac{a^2x}{8a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}+C=$$

$$=-\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a}+\frac{x}{8}\sqrt{a^2-x^2}+C;$$

ж) имеем: $$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\begin{bmatrix}a=b=1, m=0, n=4, p=-\frac{1}{4}\\ 1+x^{-4}=t^4, dx=-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt\end{bmatrix}=$$

$$=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=-\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{t^2-1}+\int\frac{dt}{t^2+1}\right)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C;$$

и) имеем:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}=\begin{bmatrix}a=b=1;\ p=-\frac{3}{2}\notin\mathbf{Z};m=-2;n=2;\\ \frac{m+1}{n}=-\frac{1}{2}\notin\mathbf{Z};\frac{m+1}{n}+p=-2\in\mathbf{Z};\\ t^2=x^{-2}+1;x=(t^2-1)^{\frac{1}{2}};dx=-\frac{1}{2}(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}2tdt\end{bmatrix}=$$

$$=-\int(t^2-1)\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)^{-\frac{3}{2}}(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}tdt=-\int\frac{t^2-1}{t^2}dt=-\int dt+\int t^{-2}dt=$$

$$=-t-\frac{1}{t}+c=\left[t=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]=-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+C.$$

2 Выразить через функции *Si(x), li(x)* и элементарные функции интегралы:

а) $\int\frac{dx}{\ln^2 x}$, $x<1$; б) $\int Si(x)dx$.

Решение. а) имеем:

$$\int\frac{dx}{\ln^2 x}=\int\frac{xdx}{x\ln^2 x}=\begin{bmatrix}u=x, dv=\frac{dx}{x\ln^2 x},\\ du=dx,\ v=\int\frac{dx}{x\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{x}{\ln x}+\int\frac{dx}{\ln x}=-\frac{x}{\ln x}+li(x)+C;$$

б) имеем: $\int Si(x)dx = \left[\begin{array}{l} u = Si(x),\ dv = dx, \\ du = d\left(Si(x)\right) = d\left(\int \frac{\sin x}{x}dx\right) = \frac{\sin x}{x}dx, \\ v = x \end{array}\right] =$

$= xSi(x) - \int \sin x dx = xSi(x) + \cos x + C$.

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить следующие интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}dx$;

б) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$;

в) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$;

г) $\int \frac{\left(1-\sqrt[6]{x^3}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}dx$;

д) $\int \sqrt{1-2x-x^2}dx$;

е) $\int \sqrt{x^2-2x+10}\,dx$;

ж $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

и) $\int \frac{x^{10}dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

к) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}$;

л) $\int \frac{dx}{\left(x^2-3\right)\sqrt{4-x^2}}$;

м) $\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}dx$;

н) $\int x^2\sqrt{x^2-4}dx$.

2 Выразить через функции *Si(x), li(x),* $\Phi_0(x)$ и элементарные функции интегралы:

а) $\int \frac{e^x}{x}dx,\ x<0$;

б) $\int \frac{x\sin x-\cos x}{x^2}dx$;

в) $\int e^{-(2x^2+4x-5)}dx$;

г) $\int \Phi_0(x)dx$.

Задания для домашней работы

1 Вычислить следующие интегралы:

а) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}dx$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}+5}$;

в) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}$;

д) $\int \sqrt{4x-x^2}\,dx$;

е) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$;

ж) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+4}}$;

з) $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$;

и) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^6}dx$;

к) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

л) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-16}}dx$;

м) $\int x\sqrt{x^2-9}dx$

2 Выразить через функции *Si(x), li(x),* $\Phi_0(x)$ и элементарные функции интегралы:

а) $\int \frac{1-x}{x}e^{-x}dx,\ x>0$;

б) $\int \frac{\sin 3x}{x^3}dx$ 4;

в) $\int x^2 e^{-x^2}dx$;

г) $\int li(x)dx$.

Практическое занятие 5 Интегрирование трансцендентных функций

5.1 Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

5.2 Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$, $\int \mathrm{tg}^n\, x dx$, $\int \mathrm{ctg}^n\, x dx$

5.3 Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$

5.4 Интегралы вида $\int R(e^x)dx$, $\int R(\mathrm{sh}\, x, \mathrm{ch}\, x)dx$

5.1 Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Вычислить интегралы $\int R(\sin x, \cos x)dx$ можно различными методами: преобразованием подынтегрального выражения с помощью тригонометрических формул, применением методов замены переменной или интегрирования по частям.

Существует общая универсальная схема вычисления таких интегралов, основанная на универсальной тригонометрической подстановке

$$t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Этой подстановкой интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции переменной t, который всегда выражается в элементарных функциях. Функции $\sin x$, $\cos x$ и дифференциал dx выражаются через t по формулам:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\,\mathrm{arctg}\, t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

С помощью универсальной подстановки удобно вычислять интегралы вида:

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + C}.$$

Хотя универсальная подстановка всегда позволяет вычислить интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, однако ее используют сравнительно редко, так как она часто приводит к интегрированию громоздких рациональных дробей. Поэтому в ряде случаев более удобно использовать частные подстановки.

Если подынтегральная функция *нечетна* относительно $\sin x$:

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то применяется подстановка $\cos x = t$.

Если подынтегральная функция *нечетна* относительно $\cos x$:

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то используют подстановку $\sin x = t$.

Если подынтегральная функция *четна* относительно $\sin x$ и $\cos x$:

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то применяется подстановка $\mathrm{tg}\, x = t$.

5.2 Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$, $\int \mathrm{tg}^n\, x dx$, $\int \mathrm{ctg}^n\, x dx$

Если в интеграле $\int \sin^n x \cos^m x dx$, m, $n \in \mathbf{Z}$, $m \geq 0$, $n \geq 0$, хотя бы одно из чисел m или n – *нечетное*, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ оставшуюся четную степень через кофункцию, приходим к табличному интегралу. Если же m и n – *четные* числа, то степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью тригонометрических формул:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Если m, $n \in \mathbf{Q}$, то подстановками $t=\sin x$ или $t=\cos x$ интеграл $\int \sin^n x \cos^m x dx$ сводится к интегралу от дифференциального бинома.

Интегралы вида $\int \mathrm{tg}^n\, x dx$, $\int \mathrm{ctg}^n\, x dx$, $n \in \mathbf{N}$, $n>1$, вычисляются подстановками $\mathrm{tg}\, x=t$ и $\mathrm{ctg}\, x=t$ соответственно.

Если $t=\mathrm{tg}\, x$, то $x=\mathrm{arctg}\, t$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$. Тогда

$$\int \mathrm{tg}^n\, x dx=\int \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$

Последний интеграл при $n \geq 2$ является интегралом от неправильной рациональной дроби, которая вычисляется по правилу интегрирования рациональных дробей.

Аналогично если

$$t=\mathrm{ctg}\, x, \text{ то } x=\mathrm{arcctg}\, t,\ dx=-\frac{dx}{1+t^2},$$

поэтому

$$\int \mathrm{ctg}^n\, x dx=-\int \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$

5.3 Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$

Данные интегралы вычисляются путем разложения подынтегральной функции на слагаемые по формулам:

$$\sin mx \cos nx=\frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right),$$

$$\cos mx \cos nx=\frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right),$$

$$\sin mx \sin nx=\frac{1}{2}\left(-\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right),\ m,n \in \mathbf{R}$$

и сводятся к табличным.

5.4 Интегралы вида $\int R\left(e^x\right)dx$, $\int R(\mathrm{sh}\, x, \mathrm{ch}\, x)dx$

Интегралы вида $\int R\left(e^x\right)dx$ сводятся к интегралам от рациональных функций подстановкой $t=e^x$. При этом

$$x=\ln t,\ dx=\frac{dt}{t}.$$

Интегралы $\int R(\mathrm{sh}\, x, \mathrm{ch}\, x)dx$ всегда можно свести к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки $t=\mathrm{th}\dfrac{x}{2}$. В этом случае

$$\mathrm{sh}\, x=\frac{2t}{1-t^2},\ \mathrm{ch}\, x=\frac{1+t^2}{1-t^2},\ dx=\frac{2dt}{1-t^2}.$$

Интегралы вида $\int \mathrm{ch}^n\, x\, \mathrm{sh}^m\, x dx$ ($m \geq 0$, $n \geq 0$, $m,n \in \mathbf{Z}$) в случае, если хотя бы одно из чисел m или n – *нечетное*, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x=1$ оставшуюся четную степень через кофункцию, приходим к табличному интегралу. Если же m и n – *четные* числа, то степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью формул:

$$\mathrm{ch}^2 x=\frac{1+\mathrm{ch}\, 2x}{2},\ \mathrm{sh}^2 x=\frac{\mathrm{ch}\, 2x-1}{2},\ \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x=\frac{1}{2}\mathrm{sh}\, 2x.$$

Если m, $n \in \mathbf{Q}$, то подстановками $t=\mathrm{sh}\, x$ или $t=\mathrm{ch}\, x$ интеграл $\int \mathrm{ch}^n\, x\, \mathrm{sh}^m\, x dx$ сводится к интегралу от дифференциального бинома.

Вопросы для самоконтроля

1 Как вычисляются интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$? Какие возможны частные случаи?

2 Как вычисляются интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$, $\int \operatorname{tg}^n x dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x dx$?

3 Какие формулы используются при вычислении интегралов вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$?

4 Какая подстановка применяется при вычислении интегралов вида $\int R(e^x) dx$?

5 Какие подстановки используются при вычислении интегралов вида $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx$?

Решение типовых примеров

Найти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$; е) $\int \sin 2x \cdot \cos 5x dx$;

б) $\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos 2x} dx$ ж) $\int \sin 7x \cdot \sin 5x dx$;

в) $\int \cos^2 x \sin x dx$; и) $\int \frac{e^{3x} dx}{e^{2x} + 1}$;

г) $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$; к) $\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^3 x\, dx$.

д) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$;

Решение. а) подынтегральная функция рационально зависит от $\sin x$ и $\cos x$. Применяя универсальную тригонометрическую подстановку $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, получим:

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + c = \left[tg\frac{x}{2} = t \right] =$$

$$= -\frac{1}{tg\frac{x}{2} + 2} + C;$$

б) подынтегральная функция является нечетной относительно $\sin x$. Поэтому применяем подстановку $\cos x = t$. Тогда получим

$$\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos 2x} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = \cos x,\ \sin^2 x = 1 - t^2, \\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1, \\ dt = -\sin x dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} dt = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{\sqrt{1-t^2} - \left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{2t^2 - 1} \left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt = \int \frac{t^2 - 2}{2t^2 - 1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t^2 - 4}{2t^2 - 1} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2 - 1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(2\sqrt{2}t)}{(2\sqrt{2}t)^2 - 1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln\left| \frac{\sqrt{2}t - 1}{\sqrt{2}t + 1} \right| + C =$$

$$= [t = \cos x] = \frac{\cos x}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln\left| \frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1} \right| + C;$$

в) имеем: $\int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$;

г) имеем:

$$\int \cos^2 x \sin^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx =$$

$$=\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8}\int\cos 4xdx=\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+C;$$

д) имеем:

$$\int \mathrm{tg}^2\,xdx=\begin{bmatrix}\mathrm{tg}\,x=t;\\ x=\mathrm{arctg}\,t;\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{bmatrix}=\int\frac{t^2dt}{1+t^2}=\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt=\int dt-\int\frac{1}{1+t^2}dt=$$

$$=t+\mathrm{arctg}\,t+C=[t=\mathrm{tg}\,x]=\mathrm{tg}\,x+\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x)+C=\mathrm{tg}\,x+x+C;$$

е) имеем:

$$\int\sin 2x\cdot\cos 5xdx=\frac{1}{2}\int(\sin 7x+\sin(-3x))dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\sin 7xdx-\frac{1}{2}\int\sin 3xdx=-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{6}\cos 3x+C;$$

ж) имеем:

$$\int\sin 7x\sin 5xdx=\left[\sin 5x\sin 7x=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 12x)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 12x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 12x}{12}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{24}\sin 12x+C;$$

и) имеем:

$$\int\frac{e^{3x}dx}{e^{2x}+1}=\begin{bmatrix}t=e^x,\\ x=\ln t,\ dx=\dfrac{dt}{t}\end{bmatrix}=\int\frac{t^3\cdot\dfrac{dt}{t}}{t^2+1}=\int\frac{t^2dt}{t^2+1}=\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=$$

$$=\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=t-\mathrm{arctg}\,t+C=\left[t=e^x\right]=e^x-\mathrm{arctg}\left(e^x\right)+C;$$

к) имеем:

$$\int\mathrm{ch}^2\,x\,\mathrm{sh}^3\,x\,dx=\int\mathrm{ch}^2\,x\,\mathrm{sh}^2\,x\,\mathrm{sh}\,x\,dx=\int\mathrm{ch}^2\,x\left(\mathrm{ch}^2\,x-1\right)d(\mathrm{ch}\,x)=$$

$$=\int\mathrm{ch}^4\,x\,d(\mathrm{ch}\,x)-\int\mathrm{ch}^2\,x\,d(\mathrm{ch}\,x)=\frac{\mathrm{ch}^5\,x}{5}-\frac{\mathrm{ch}^3\,x}{5}+C.$$

Задания для аудиторной работы

1 Найти интегралы:

а) $\int\sin 3x\cos 5xdx$;

б) $\int\cos\frac{x}{6}\cos\frac{5x}{6}dx$;

в) $\int\sin x\cos^7 xdx$;

г) $\int\frac{dx}{9+4\cos x}$;

д) $\int\frac{\sin xdx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$;

е) $\int\mathrm{ch}^2\,x\,\mathrm{sh}^2\,x\,dx$;

ж) $\int\mathrm{sh}^3\,x\,dx$;

и) $\int\mathrm{ch}\,5x\,\mathrm{sh}\,x\,dx$;

к) $\int\frac{e^{2x}dx}{5+e^x}$;

л) $\int\sin^5 x\sqrt[3]{\cos x}dx$;

м) $\int\frac{\sin xdx}{1-\sin x}$;

н) $\int\sin^4 x\cos^3 xdx$;

о) $\int\frac{dx}{2+3\sin x+2\cos x}$;

п) $\int\mathrm{tg}^5\,xdx$;

р) $\int\frac{dx}{\sin x\cos^5 x}$;

с) $\int\mathrm{ch}^2\,x\,\mathrm{sh}\,x\,dx$;

т) $\int x\,\mathrm{ch}\,2x\,dx$;

у) $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$;

ф) $\int\cos^3 x\sin^2 xdx$;

х) $\int\sqrt{\mathrm{th}\,x}dx$.

Задания для домашней работы

1 Найти интегралы:

а) $\int\cos 7x\cos 9xdx$;

б) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$;

л) $\int\sin\frac{x}{5}\sin\frac{4x}{5}dx$;

м) $\int\sin^3 xdx$;

в) $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$;

г) $\int \frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x+\cos x} dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 x+2\cos^2 x}}$;

е) $\int \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^2 x\, dx$;

ж) $\int \operatorname{ch} 2x \operatorname{sh} 3x\, dx$;

и) $\int \frac{e^x dx}{4-3e^x}$;

к) $\int \operatorname{ch}^5 x \sqrt[3]{\operatorname{sh} x} dx$;

н) $\int \frac{dx}{4+3\sin x}$;

о) $\int \frac{dx}{3+\sin x-3\cos x}$;

п) $\int \operatorname{ctg}^5 x dx$;

р) $\int \operatorname{ch}^3 x\, dx$;

с) $\int x \operatorname{sh} 3x\, dx$;

т) $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x-2}}$;

у) $\int \sqrt{\operatorname{tg} x} dx$.