Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практическое руководство по выполнению
лабораторных работ для студентов
математического факультета

Введение в анализ

Гомель 2012

УДК 519.667(075.8)
ББК 22. 161я73
М 34

Авторы

А.П. Старовойтов, А.В. Гаврилюк, Ю.А. Ермоленко,
Г.Н. Казимиров, Ж.Н. Кульбакова, И.В. Парукевич

Рецензенты:

В.Н. Семенчук, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»;

А.Н. Старовойтов, кандидат физико-математических наук, доцент, исполняющий обязанности заведующего кафедрой прикладной математики учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта».

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

М34 **Математический анализ**. Введение в анализ: практическое руководство по выполнению лабораторных работ для студентов математического Факультета / А.П. Старовойтов [и др.]; М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2012. – 44с.

ISBN

Гаврилюк, А.В. Введение в анализ / А.П. Старовойтов. – 2012. – 44 с.

Лабораторные работы разработаны в соответствии с требованиями государственного стандарта подготовки специалистов специальностей «Математика», «Прикладная математика», «Экономическая кибернетика». В пособии содержится материал по темам «Элементы теории множеств и математической логики», «Отображения и числовые функции», «Вещественные числа».

Пособие адресовано студентам математического факультета.

УДК 519.667(075.8)
ББК 22. 161я73
М 34

ISBN© 978-985-439-613-2

Содержание

Введение.

Лабораторный практикум по математическому анализу составлен в соответствии с действующей программой по данной дисциплине для математических специальностей университетов. Пособие «Введение в анализ» содержит 4 лабораторные работы по следующим темам: элементы теории множеств и математической логики, отображения и числовые функции, вещественные числа, которые излагаются в 1 семестре обучения. Каждая лабораторная работа содержит наборы заданий с примерами решения типовых задач. Нумерация таблиц и рисунков сквозная, нумерация заданий своя в каждой лабораторной работе. При составлении лабораторного практикума авторы использовали литературу, список которой приводится в конце пособия. Материал пособия подготовили: Гаврилюк А.В., Ермоленко Ю.А., Казимиров Г.Н., Кульбакова Ж.Н., Парукевич И.В., Старовойтов А.П.

Лабораторный практикум по математическому анализу предназначен, с одной стороны, для организации учебного процесса дневного отделения математического факультета по специальностям 1-31 03 01 02 «Математика», 1-31 03 03-01 «Прикладная математика (научно-производственная деятельность)», 1-31 03 03-02 «Прикладная математика (научно-педагогическая деятельность)», 1-31 03 06 01 «Экономическая кибернетика (математические методы в экономике)». С другой стороны, лабораторный практикум может быть использован при проведении практических занятий и формирования индивидуальных заданий студентам разных форм обучения.

Лабораторная работа №1
Элементы теории множеств и математической логики

Необходимые понятия и теоремы: операции над множествами, равенство множеств, декартово произведение множеств, высказывания и формулы алгебры высказываний, таблица истинности, кванторы, важнейшие тавтологии.
Литература: [1] с. 5 – 16, [2] с. 9 – 2, [3] с. 413 – 23.

1 Составьте подмножества множества A элементами которых являются натуральные, целые, нечётные, чётные, отрицательные, положительные числа.

№	A	№	A
1.1	$\left\{-20;-1;\frac{3}{4};2;0\right\}$	1.11	$\{-12;0;21;23;27\}$
1.2	$\left\{-10;-\frac{3}{5};0;2;13;7\right\}$	1.12	$\{2,5;2,6;2,7;2,8;2,9;3\}$
1.3	$\left\{1;2;3;17;\frac{2003}{10}\right\}$	1.13	$\{2;4;6;8;10;12;14;16;18\}$
1.4	$\left\{0;1;-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right\}$	1.14	$\{;3;7;9;11,13;15;17\}$
1.5	$\{2,5;3,5;6,7;12\}$	1.15	$\{-3;3;-4;4;-5;5;-6;6\}$
1.6	$\{-10^4;-10^3;-10^2;-10;0;1;10^2\}$	1.16	$\left\{;\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};0;-\frac{1}{3};-\frac{1}{4};-\frac{1}{5}\right\}$
1.7	$\left\{-7;-5;-3;-1;0;\frac{1}{3};\frac{1}{5};\frac{1}{7}\right\}$	1.17	$\left\{10;100;1000;3\frac{1}{4};5\frac{2}{4}\right\}$
1.8	$\left\{-\frac{9}{10};-\frac{8}{10};-\frac{7}{10};-\frac{6}{10}\right\}$	1.18	$\left\{-3;-9;-12;-15\frac{3}{4}\right\}$
1.9	$\{24;25;26;27;28\}$	1.19	$\left\{7;12;4;48;77\frac{1}{3}\right\}$
1.10	$\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};\frac{1}{6};\frac{1}{7};\frac{1}{8}\right\}$	1.20	$\left\{22;22\frac{1}{5};22\frac{2}{5};23\right\}$

2 Найти пересечение, объединение, разность множеств А и В.

№	A	B	№	A	B
2.1	$\{2;4;6;8;10;\ldots\}$	$\{4;8;12;16;20;\ldots\}$	2.11	$\{-10;-100;-1000;\ldots\}$	$\{-10;-20;-30;\ldots\}$
2.2	$\{3;6;9;12;15;\ldots\}$	$\{9;18;27;36;\ldots\}$	2.12	$\{-4;-8;-12;-16;-20;\ldots\}$	$\{-8;-16;-24;\ldots\}$
2.3	$\{4;8;12;16;\ldots\}$	$\{8;16;24;\ldots\}$	2.13	$\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\ldots\right\}$	$\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16}\ldots\right\}$
2.4	$\{5;10;15;20;\ldots\}$	$\{10;20;30;\ldots\}$	2.14	$\left\{1;\frac{1}{3};\frac{1}{9};\frac{1}{27}\ldots\right\}$	$\left\{1;\frac{1}{9};\frac{1}{81};\ldots\right\}$
2.5	$\{6;12;18;24;\ldots\}$	$\{3;6;9;12;15;\ldots\}$	2.15	$\{0,1;0,01;0,001;\ldots\}$	$\{0,1;0,2;0,3;\ldots\}$
2.6	$\{8;16;24;\ldots\}$	$\{2;4;6;8;10;\ldots\}$	2.16	$\{-1;-2;-3;-4;\ldots\}$	$\{-1;-3;-5;-7;\ldots\}$
2.7	$\{9;18;27;\ldots\}$	$\{3;6;9;12;15;\ldots\}$	2.17	$\{-5;-10;-15;-20;\ldots\}$	$\{-10;-10^2;-10^3;\ldots\}$
2.8	$\{10;10^2;10^3;\ldots\}$	$\{10;20;30;\ldots\}$	2.18	$\{-5;-10;-15;-20;\ldots\}$	$\{-10;-20;-30;\ldots\}$
2.9	$\{2;4;6;8;\ldots\}$	$\{2;4;8;16;\ldots\}$	2.19	$\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{10};\frac{1}{15};\ldots\right\}$	$\left\{\frac{1}{10};\frac{1}{20};\frac{1}{30};\ldots\right\}$
2.10	$\{3;6;9;12;\ldots\}$	$\{1;3;5;7;9;\ldots\}$	2.20	$\{0,1;0,2;0,3;\ldots\}$	$\left\{0;\frac{1}{10};\frac{1}{20};\frac{1}{30};\ldots\right\}$

3 В каком из соотношений $\subset,\supset,=$ находятся множества А и В?

№	A	B	№	A	B
3.1	$\square\setminus\{-1;0\}$	$\square\cup\{0\}$	3.11	$[0;1]\cap\square$	$[0;2]\setminus\square$
3.2	$\square\setminus\square$	$\square\setminus\{0;1;2;\ldots\}$	3.12	$[0;1]\cap(\{1\}\cup\{0\})$	$([0;1]\setminus\{1\})\cup\{0\}$
3.3	$\square\setminus\square$	$\square\setminus\{0;1;2;\ldots\}$	3.13	$([0;2]\setminus[0;1])\cap[1,3]$	$([0;2]\cap[1;3])\setminus[0;1]$
3.4	$\square\cap\square$	$\square\cap\square$	3.14	$\square\cap\square$	$\square\setminus\square$
3.5	$\square\cap\square$	$\square\cap\square$	3.15	$(-\infty;0]\cap\square$	$\square\setminus\square$
3.6	$\square\setminus\square$	$\square$	3.16	$(A\cap B)\cup C$	$(A\cup C)\cap(B\cup C)$
3.7	$\square\setminus\square$	$\square$	3.17	$(A\setminus B)\cap C$	$(A\cap C)\setminus B$
3.8	$\square\cap\square$	$\square\setminus\square$	3.18	$A\setminus B$	$A\setminus(A\cap B)$
3.9	$(-\infty;0)$	$\square\setminus\square$	3.19	A	$(A\cap C)\cup(A\setminus B)$
3.10	$\square\setminus\square$	$(-\infty;0]\cap\square$	3.20	$(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$	$(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

4 Найти и изобразить декартово произведение множеств A и B.

№	A	B	№	A	B
4.1	$[0;1]$	$[0;1]$	4.11	$(-\infty;+\infty)$	$[0;+\infty)$
4.2	$[0;2]$	$[-1;1]$	4.12	$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;0)$
4.3	$(0;3)$	$[1;2)$	4.13	$(0;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$
4.4	$(1;2]$	$(3;4]$	4.14	$(-\infty;0]$	$(-\infty;+\infty)$
4.5	$\{1,2,3\}$	$\{3,4,5\}$	4.15	$(-\infty;+\infty)$	$[0;1]$
4.6	$\{1,2,5\}$	$\{3,6,7\}$	4.16	$[0;2]$	$(-\infty;+\infty)$
4.7	$[0;+\infty)$	$(-\infty;0]$	4.17	$[0;1]\cup[3;4]$	$[2;5]$
4.8	$(-\infty;0)$	$(-\infty;0)$	4.18	$[-1;0]\cup[1;2]$	$[0;+\infty)$
4.9	$(-\infty;0]$	$[0;+\infty)$	4.19	□	$(-\infty;+\infty)$
4.10	$[0;+\infty)$	$(0;+\infty)$	4.20	□	□

5 Каким из знаков $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$ связаны высказывания A и B (доказать). Является ли A необходимым, достаточным, необходимым и достаточным для B? Здесь $f(x) = ax^2 + bx + c$, $D = b^2 - 4ac$.

№	A	B	№	A	B
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
5.1	f принимает только положительные значения	$a > 0$	5.11	множеством значений f является $[-\frac{D}{4a};+\infty)$	$a > 0$
5.2	f принимает только отрицательные значения	$a < 0$	5.12	множеством значений f является $(-\infty;-\frac{D}{4a}]$	$a < 0$
5.3	f принимает только неотрицательные значения	$D \le 0$	5.13	уравнение $f(x) = 0$ имеет 2 положительных корня	$-\frac{b}{a} > 0$
5.4	f принимает только положительные значения	$a > 0$ и $D < 0$	5.14	уравнение $f(x) = 0$ имеет 2 отрицательных корня	$-\frac{b}{a} < 0$
5.5	f принимает только отрицательные значения	$a < 0$ и $D < 0$	5.15	уравнение $f(x) = 0$ имеет 2 положительных корня	$-\frac{b}{a} > 0$ и $\frac{c}{a} > 0$

1	2	3	4	5	6
5.6	f принимает только неотрицательные значения	$a>0$ и $D\le 0$	5.16	уравнение $f(x)=0$ имеет 2 отрицательных корня	$-\frac{b}{a}<0$ и $\frac{c}{a}>0$
5.7	f принимает только неположительные значения	$a<0$ и $D\le 0$	5.17	уравнение $f(x)=0$ имеет 1 положительный и 1 отрицательный корень	$\frac{c}{a}<0$
5.8	f принимает положительные и отрицательные значения	$D>0$	5.18	уравнение $f(x)=0$ имеет 2 положительных корня	$-\frac{b}{a}>0$, $\frac{c}{a}>0$ и $D>0$
5.9	множеством значений f является $[-2;+\infty)$	$a>0$	5.19	уравнение $f(x)=0$ имеет 2 отрицательных корня	$-\frac{b}{a}<0$, $\frac{c}{a}>0$ и $D>0$
5.10	множеством значений f является $(-\infty;4]$	$a<0$	5.20	уравнение $f(x)=0$ имеет неотрицательные корни	$-\frac{b}{a}\ge 0$, $\frac{c}{a}\ge 0$ и $D\ge 0$

6 Записать с помощью кванторов высказывание и его отрицание

6.1 Все элементы x числового множества X удовлетворяют условию $x \ge m$.
6.2 В числовом множестве X существует элемент x_0 такой, что все элементы x числового множества X удовлетворяют условию $x \ge x_0$.
6.3 Все элементы x числового множества X удовлетворяют условию $x \le M$.
6.4 В числовом множестве X существует элемент x_0 такой, что все элементы x числового множества X удовлетворяют условию $x \le x_0$.
6.5 Существует число M такое, что все элементы x числового множества X удовлетворяют условию $x \le M$.
6.6 Во всяком подмножестве B числового множества X существует элемент x_0 такой, что все элементы x множества B удовлетворяют условию $x \le x_0$.
6.7 Существует число m такое, что все элементы x числового множества X удовлетворяют условию $x \ge m$.

6.8 Во всяком подмножестве *B* числового множества *X* существует элемент x_0 такой, что все элементы x множества *B* удовлетворяют условию $x \geq x_0$.
6.9 Существуют числа m и M такие, что все элементы x числового множества *X* удовлетворяют условию $m \leq x \leq M$.
6.10 Все элементы x числового множества *X* удовлетворяют условию $x \leq M$ и для любого числа $M' < M$ существует элемент x' из множества *X* такой, что $x' > M'$.
6.11 Существуют элементы x числового множества *X*, удовлетворяющие условию $x \geq m$.
6.12 Все элементы x числового множества *X* удовлетворяют условию $x \geq m$ и для любого числа $m' > m$ существует элемент x' из множества *X* такой, что $x' < m'$.
6.13 Существуют элементы x числового множества *X*, удовлетворяющие условию $x \leq M$.
6.14 Существует число M такое, что все элементы x числового множества *X* удовлетворяют условию $x \leq M$ и для любого числа $M' < M$ существует элемент x' из множества *X* такой, что $x' > M'$.
6.15 Для любого числа M существует элемент x числового множества *X* такой, что $x > M$.
6.16 Существует число m такое, что все элементы x числового множества *X* удовлетворяют условию $x \geq m$ и для любого числа $m' > m$ существует элемент x' из множества *X* такой, что $x' < m'$.
6.17 Для любого числа m существует элемент x числового множества *X* такой, что $x < m$.
6.18 Существует число c такое, что любой элемент x числового множества *X* удовлетворяет условию $x \leq c$ и любой элемент y числового множества *Y* удовлетворяет условию $y \geq c$.
6.19 Для любых чисел m и M существуют элементы x и y числового множества *X* такие, что $x < m$ и $y > M$.
6.20 Для любых непустых числовых множеств *X* и *Y* таких, что любой элемент x из множества *X* меньше либо равен любого элемента y из множества *Y*, существует число M такое, что $x \leq M \leq y$ для любых элементов x из *X* и y из *Y*.

Решение типовых примеров

1.20 Составьте подмножества множества A элементами которых являются натуральные, целые, нечётные, чётные, отрицательные, положительные числа.

Решение. Множество B называется подмножеством множества A, если любой элемент множества B является элементом множества A. Так как множество натуральных чисел $\mathbb{N}=\{1;2;3;4;...\}$, то подмножеством натуральных чисел для A будет $\{22;23\}$. Множество целых чисел $\mathbb{Z}=\{...;-3;-2;-1;0;1;2;3;...\}$. Поэтому подмножеством целых чисел для A будет $\{22;23\}$. Нечётными называются числа вида $2n+1$, где $n\in\mathbb{Z}$. Поэтому подмножеством нечётных чисел для A будет $\{23\}$, поскольку $23=2\cdot 11+1$. Чётными называются числа вида $2n$, где $n\in\mathbb{Z}$. Поэтому подмножеством чётных чисел для A будет $\{22\}$, поскольку $22=2\cdot 11$. Отрицательными называются числа, расположенные слева от нуля на числовой прямой. Таких во множестве A нет. Поэтому и подмножеств, состоящих из этих чисел для A нет. Положительными называются числа, расположенные справа на числовой прямой. Все элементы множества A являются положительными числами. Поэтому в качестве подмножества положительных чисел для A можно взять само множество A.

2.20 Найти пересечение, объединение, разность множеств

$$A=\{0,1;0,2;0,3;...\} \text{ и } B=\left\{0;\frac{1}{10};\frac{1}{20};\frac{1}{30};...\right\}.$$

Решение. Пересечением множеств A и B называется множество $A\cap B=\{x|x\in A \text{ и } x\in B\}$. Поскольку $0,1=\frac{1}{10}$, а все остальные элементы множества B меньше любого элемента множества A, то других общих элементов для A и B нет и следовательно в данном случае $A\cap B=\left\{\frac{1}{10}\right\}$. Объединением множеств A и B называется множество $A\cup B=\{x|x\in A$ или $x\in B\}$. Таким образом в объединение множеств A и B входят все элементы как множества A, так и множества B. В нашем случае $A\cup B=\left\{0;\frac{1}{10};0,2;\frac{1}{20};0,3;\frac{1}{30};0,4;\frac{1}{40};...\right\}$. Разностью множеств A и B называется множество $A\setminus B=\{x|x\in A \text{ и } x\notin B\}$. В нашем случае только элемент $0,1$ из множества A принадлежит B. Поэтому $A\setminus B=\{0;0,2;0,3;0,4;...\}$

3.20 Выяснить, в каком из соотношений $\subset, \supset, =$ находятся множества $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ и $(A\cup B)\setminus(A\cap B)$?

Решение. Докажем, что $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$. Два множества равны, если $A\subset B$ и $B\subset A$.

Покажем, что $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\subset(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

Пусть $x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$, тогда $x\in A\setminus B$ или $x\in B\setminus A$.

Если $x\in A\setminus B$, то $x\in A$ и $x\notin B$. Из того, что $x\in A$ следует, что $x\in A\cup B$, а из того, что $x\notin B$ следует, что $x\notin A\cap B$. Значит $x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$. Аналогично получаем, что $x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$, если $x\in B\setminus A$.

Докажем теперь, что $(A\cup B)\setminus(A\cap B)\subset(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Пусть $x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$, тогда $x\in A\cup B$ и $x\notin A\cap B$. Из того, что $x\in A\cup B$ следует, что $x\in A$ или $x\in B$, а из того, что $x\notin A\cap B$ следует, что $x\notin A$ или $x\notin B$. Тогда, если $x\in A$ и $x\notin B$, то $x\in A\setminus B$, а, если $x\in B$ и $x\notin A$, то $x\in B\setminus A$. Других ситуаций быть не может. Итак, $x\in A\setminus B$ или $x\in B\setminus A$. Значит $x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Равенство $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ доказано.

4.20 Найти и изобразить декартово произведение множеств $A=$ □ *и* $B=$ □ .

Решение. Декартовым произведением множеств A и B называется множество $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$. В нашем случае $A\times B=\{(x,y)\mid x\in$ □ , $y\in$ □ $\}$. Изобразим множество $A\times B$ на плоскости

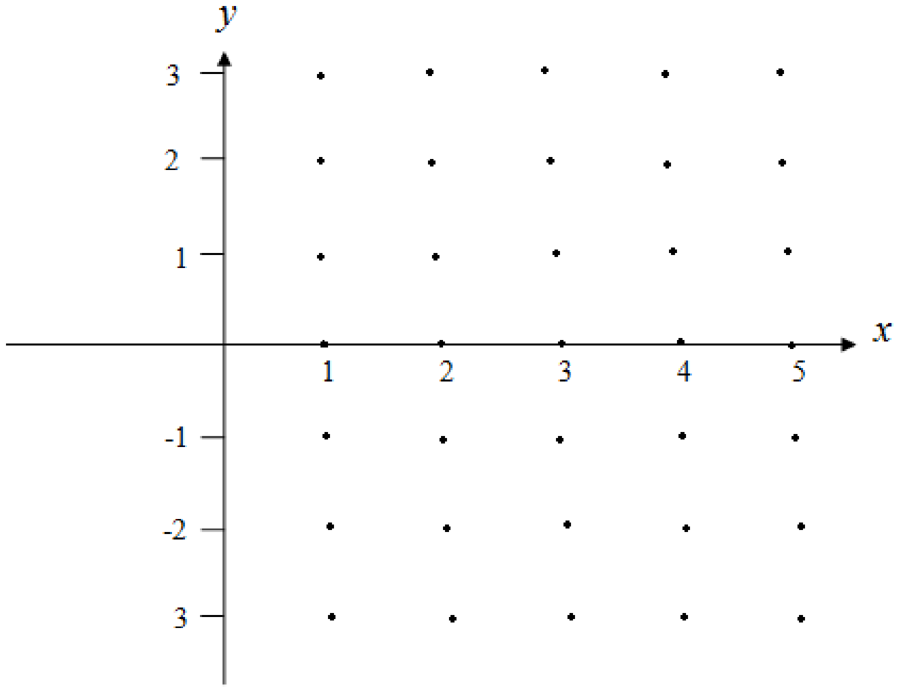

Рисунок 1 – Множество $A\times B=\{(x,y)\mid x\in$ □ , $y\in$ □ $\}$

5.20 Каким из знаков $\Rightarrow,\Leftarrow,\Leftrightarrow$ связаны высказывания A={уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет неотрицательные корни } и B={ $-\dfrac{b}{a}\geq 0$, $\dfrac{c}{a}\geq 0$ и $D\geq 0$ } (доказать). Является ли A необходимым, достаточным, необходимым и достаточным для B? Здесь $D=b^2-4ac$.

Решение. Докажем, что из A не следует B. Рассмотрим уравнение $x^2+3x-4=0$. Оно имеет неотрицательный корень $x=1$. Однако $-\dfrac{b}{a}=\dfrac{-3}{1}=-3<0$.

Докажем, что $B\Rightarrow A$. Пусть $-\dfrac{b}{a}\geq 0$, $\dfrac{c}{a}\geq 0$ и $D\geq 0$. Из условия $D\geq 0$ следует, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет корни. Из теоремы Виета следует, что их произведение равно $\dfrac{c}{a}$ и поскольку $\dfrac{c}{a}\geq 0$, то либо оба корня имеют одинаковый знак либо один из них равен нулю. Если один из корней равен нулю, то он и является неотрицательным корнем, т.е. A выполнено. Если же оба корня имеют одинаковый знак, то из теоремы Виета и условия $-\dfrac{b}{a}\geq 0$ следует, что их сумма $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\geq 0$. Поэтому они оба положительные. Значит и в этом случае уравнение имеет неотрицательный корень. Итак импликация $B\Rightarrow A$ доказана.

6.20 Записать с помощью кванторов высказывание A={Для любых непустых числовых множеств X и Y таких, что любой элемент x из множества X меньше либо равен любого элемента y из множества Y, существует число M такое, что $x\leq M\leq y$ для любых элементов x из X и y из Y} и его отрицание

Решение. Запишем с помощью кванторов высказывание A и его отрицание $\neg A$:

$$A=\left\{\forall X,Y:\forall x\in X,\forall y\in Y\rightarrow x\leq y\exists M:x\leq M\leq y\forall x\in X,\forall y\in Y\right\}$$

$$\neg A=\left\{\exists X,Y:\forall x\in X,\forall y\in Y\rightarrow x\leq y\wedge\forall M\exists x\in X,\exists y\in Y:x>M\vee y<M\right\}$$

Заметим, что высказывание A представляет собой теорему об отделимости числовых множеств и выполняется всегда. Поэтому высказывание $\neg A$ ложно.

Лабораторная работа №2
Отображения и функции

Необходимые понятия и теоремы: отображения, числовые функции, образ, прообраз, сюрьекция, инъекция, биекция, график, обратное отображение, композиция отображений
Литература: [1] с. 16 – 28, [2] с. 71 – 84, [3] с. 23 – 36.

1 Для отображения $y = ax^2 + bx + c$ найти коэффициенты a, b, c так, чтобы это отображение было сюрьекцией множества X на множество Y и его график проходил через точку (x_0, y_0), или доказать, что таких коэффициентов a, b, c не существует

№	X	Y	$(x_0; y_0)$	№	X	Y	$(x_0; y_0)$
1.1	$\mathbb{R}$	$[0;+\infty)$	$(0;1)$	1.11	$(-4;5)$	$(0;8]$	$(0;3)$
1.2	$\mathbb{R}$	$[2;+\infty)$	$(0;4)$	1.12	$(-3;1]$	$[1;5]$	$(0;4)$
1.3	$[2;+\infty)$	$[1;+\infty)$	$(3;4)$	1.13	$(-\infty;+\infty)$	$[0;4]$	$(1;3)$
1.4	$[1;+\infty)$	$(-\infty;0]$	$(1;0)$	1.14	$(-\infty;0]$	$(0;8]$	$(-1;4)$
1.5	$\mathbb{R}$	$(-\infty;1]$	$(0;1)$	1.15	$(0;8)$	$[1;3]$	$(1;2)$
1.6	$(-\infty;0]$	$(-\infty;0]$	$(-3;0)$	1.16	$[4;10]$	$(1;5)$	$(5;4)$
1.7	$[0;+\infty)$	$(-\infty;-1]$	$(2;-1)$	1.17	$(-1;3)$	$[1;9)$	$(2;4)$
1.8	$[1;6]$	$[2;8]$	$(2;4)$	1.18	$(1;5)$	$(3;8]$	$(2;4)$
1.9	$[2;8]$	$[-3;9]$	$(3;5)$	1.19	$(-\infty;1]$	$(1;5)$	$(0;3)$
1.10	$(-3;8)$	$(-4;3)$	$(0;1)$	1.20	$[-2;4)$	$(-1;3)$	$(0;0)$

2 Для функции $f(x)$ найти образ множества A и прообраз множества B

№	$f(x)$	A	B	№	$f(x)$	A	B
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
2.1	$3x^2+6x-1$	$(-3;5)$	$(-3;8)$	2.11	e^{x-1}	$(-\infty;1)$	$(0;1)$
2.2	$-x^2+2x+1$	$(-4;0)$	$(-\infty;0]$	2.12	$2^{-(x+1)}$	$(-\infty;-1)$	$(0;2]$
2.3	$\sin x$	$\left\{\frac{\pi}{2}k, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\left\{-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$	2.13	$\ln(x+2)$	$(-2;3]$	$(-\infty;3]$
2.4	$\cos 2x$	$\left\{\frac{\pi}{2}k, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{1}{2};1\right\}$	2.14	$\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}$	$(-1;4]$	$[2;5]$
2.5	tgx	$\left\{\frac{\pi}{4}k, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right\}$	2.15	$\cos 2x-1$	$(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$	$[-1;0]$

1	2	3	4	5	6	7	8
2.6	$\cos x$	$\left[\frac{7\pi}{6};\frac{4\pi}{3}\right]$	$\left(-1;-\frac{1}{2}\right]$	2.16	$\sin(x-1)$	$\left(1;\frac{3}{2}\right)$	$\left(0;\frac{1}{3}\right)$
2.7	$\cos(-x)$	$\left(\frac{3\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right)$	$\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	2.17	$\log_{1/2}(x+1)$	$(0;3)$	$(-\infty;\log_2 3)$
2.8	$\lvert x\rvert-1$	$[-4;1)$	$[5;+\infty)$	2.18	$\lvert x^2-5x+6\rvert$	$(0;2,8]$	$\left(\frac{1}{8};+\infty\right)$
2.9	$\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert$	$[-3;8]$	$(1;+\infty)$	2.19	$ctg(x+2)$	$(-1;1)$	$\left(\frac{\pi}{4};2\pi\right)$
2.10	$\lvert x-1\rvert-1$	$[0;1]$	$(2;4]$	2.20	$y=2^{-\sqrt{x}}$	$(3;5]$	$\left(0;\frac{1}{13}\right)$

3 Если это возможно, найти инъективное, биективное отображение множества X в Y или доказать, что такого отображения нет

№	X	Y	№	X	Y
3.1	□	□	3.11	□	$(-\pi;\pi)$
3.2	□	$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$	3.12	$\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$	□
3.3	$[0;+\infty)$	$[2;+\infty)$	3.13	(-1;1)	□
3.4	$[3;+\infty)$	$[0;+\infty)$	3.14	□	(-2;2)
3.5	$[1;+\infty)$	$(-\infty;2]$	3.15	$(0;\pi)$	□
3.6	□	$(0;+\infty)$	3.16	$\{2n-1, n\in □\}$	□
3.7	□	$(-\infty;0)$	3.17	$\{2n, n\in □\}$	□
3.8	$(-\infty;0)$	□	3.18	□	□
3.9	$(-\infty;0)$	$(0;+\infty)$	3.19	□	□
3.10	$[-1;2]$	$[-4;8]$	3.20	□	(0;1)

4 Построить график отображения $f: X\to Y$. Найти Y и обратное отображение $f^{-1}: Y\to X$, если это возможно, или доказать, что его нет

№	$y=f(x)$	X	№	$y=f(x)$	X
1	2	3	4	5	6
4.1	$2x^2+x-1$	$\left[-\frac{1}{4};5\right]$	4.11	$\sin 2x$	$[0;\pi]$

1	2	3	4	5	6
4.2	$\sin x$	$\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$	4.12	$\cos 2x$	$\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$
4.3	$\cos x$	$[\pi;2\pi]$	4.13	$ctgx$	$(\pi;2\pi)$
4.4	$y=x^2-4x+3$	$[3;8]$	4.14	$\sin(x/2)$	$[-\pi;\pi]$
4.5	$e^{\lvert x-1\rvert}$	$[-1;1]$	4.15	$\cos(x/2)$	$[0;2\pi]$
4.6	$\lvert x-1\rvert$	$[1;5]$	4.16	$\sin(x-1)$	$[0;1]$
4.7	$\lvert x+1\rvert$	$[-2;3]$	4.17	$\cos(x+1)$	$[0;1]$
4.8	$\lvert\ln x\rvert$	$(0;1]$	4.18	$\sin(x+2)$	$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
4.9	$e^{\lvert x\rvert}$	$[-1;2]$	4.19	$\cos(x-2)$	$[0;\pi]$
4.10	tgx	$\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$	4.20	$tg(x+1)$	$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{8}\right]$

5 Найти следующие композиции: $f(g), g(f), f(f), g(g), f\left(\frac{1}{f^2}\right), \sqrt{f}$ или доказать, что такая композиция невозможна на естественных областях определения функций f и g

№	$f(x)$	$g(x)$	№	$f(x)$	$g(x)$
5.1	2^x	x^3	5.11	3^{x+1}	$\log_3 x-1$
5.2	x^2	$\sqrt{x^3}$	5.12	$\arcsin x$	$\sin x$
5.3	3^x	x^2	5.13	$\arccos x$	$\cos x$
5.4	x^2	$\sqrt{x}$	5.14	$\cos x$	$\arccos x$
5.5	10^x	$\lg x$	5.15	$\arcsin x$	$\cos x$
5.6	x^5	$x+5$	5.16	$\arccos x$	$\sin x$
5.7	$\sin x$	$x-1$	5.17	$\arcsin x$	e^x
5.8	$\cos x$	$\ln x$	5.18	$\arccos x$	$\ln x$
5.9	$x+2$	$\ln(x-2)$	5.19	$\arccos x$	$\arcsin x$
5.10	e^x	$\ln(x-1)$	5.20	$arctgx$	$\ln x$

Решение типовых примеров

1.20 Для отображения $y = ax^2 + bx + c$ найти коэффициенты a, b, c так, чтобы это отображение было сюрьекцией множества $X=[-2;4)$ на множество $Y=(-1;3)$ и его график проходил через точку $(x_0, y_0) = (0;0)$, или доказать, что таких коэффициентов a, b, c не существует.

Решение. Очевидно, что при отображении $y = ax^2 + bx + c$ образом промежутка (интервала, полуинтервала, отрезка) будет промежуток (убедиться в этом, нарисовав все возможные случаи) или одна точка. Образом включённого левого конца промежутка будет включённый конец промежутка (убедиться геометрически). Поэтому полуинтервал $[-2;4)$ не может перейти в интервал $(-1;3)$. Значит указанного отображения, а, следовательно, и чисел a, b, c не существует.

2.20 Для функции $f(x) = 2^{-\sqrt{x}}$ найти образ множества $A = (3;5]$ и прообраз множества $B = \left(0; \dfrac{1}{13}\right)$.

Решение. Образом множества A при отображении f называется множество $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$. Поскольку функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на $[0;+\infty)$, то $\forall x_1, x_2 \in [0;+\infty) : x_1 < x_2 \to \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, а функция $y = \dfrac{1}{2^x}$ или $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ убывает на $(-\infty;+\infty)$, то $\dfrac{1}{2^{\sqrt{x_1}}} > \dfrac{1}{2^{\sqrt{x_2}}}$. Поэтому функция $y = \dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}$ убывает на $[0;+\infty)$. Отсюда заключаем, что для $f(x) = \dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}$ образ $f((3;5]) = \left\{\dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}} | x \in (3;5]\right\} = \left[\dfrac{1}{2^{\sqrt{5}}}; \dfrac{1}{2^{\sqrt{3}}}\right)$, поскольку $f(x) = \dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}$ не может принять любое значение вне $\left[\dfrac{1}{2^{\sqrt{5}}}; \dfrac{1}{2^{\sqrt{3}}}\right)$при $x \in (3;5]$ (в силу убывания) и принимает любое значение $a \in \left[\dfrac{1}{2^{\sqrt{5}}}; \dfrac{1}{2^{\sqrt{3}}}\right)$ в точке $x_0 = \log_2^2 a \in (3;5]$ (доказать).

Прообразом множества B при отображении f называется множество $f^{-1}(B) = \{x | f(x) \in B\}$. В нашем случае $f^{-1}((0; \dfrac{1}{13})) = \left\{x \left| \dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}} \in (0; \dfrac{1}{13}) \right.\right\} =$

$=\left\{x \left| 0<\frac{1}{2^{\sqrt{x}}}<\frac{1}{13}\right.\right\}$. Решим неравенство $0<\frac{1}{2^{\sqrt{x}}}<\frac{1}{13}$. Левое неравенство выполняется при всех $x\in[0;+\infty)$ (области определения f). Правое перепишем в виде $\frac{1}{2^{\sqrt{x}}}<\frac{1}{2^{\log_2 13}}$ или $\sqrt{x}>\log_2 13$ или $x>\log_2^2 13$. Итак $f^{-1}\left(\left(0;\frac{1}{13}\right)\right)=\left(\log_2^2 13;+\infty\right)$.

3.20 Если это возможно, найти инъективное, биективное отображение множества $X=\mathbb{N}$ в $Y=(0;1)$ или доказать, что такого отображения нет.

Решение. Рассмотрим отображение $f: X \to Y$, действующее по формуле: $f(x)=\frac{1}{2x}$. Отображение называется инъективным, если оно различные элементы переводит в различные (если $x_1 \neq x_2$, то и $f(x_1)\neq f(x_2)$). Очевидно, f инъективно. Отображение $f: X \to Y$ называется биективным, если оно сюрьективно, т.е. $\forall y\in Y \exists x\in X: f(x)=y$, и инъективно. Докажем, что нет биективного отображения $f: \mathbb{N} \to (0;1)$. Предположим, что такое отображение существует. Тогда оно является сюрьективным и каждому действительному числу из (0;1) соответствует вполне определённый номер $n\in\mathbb{N}$. Значит, все действительные числа из (0;1) можно записать в порядке возрастания соответствующих им номеров:

$$\alpha_1=0,\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(1)}\ldots$$
$$\alpha_2=0,\alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)}\alpha_3^{(2)}\ldots$$
$$\alpha_3=0,\alpha_1^{(3)}\alpha_2^{(3)}\alpha_3^{(3)}\ldots$$

Рассмотрим число $\beta=0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots$ такое, что $\beta_1\neq\alpha_1^{(1)},\beta_1\neq 9,\beta_1\neq 0$, $\beta_2\neq\alpha_2^{(2)},\beta_2\neq 9,\beta_2\neq 0$, $\beta_3\neq\alpha_3^{(3)},\beta_3\neq 9,\beta_3\neq 0,\ldots$. Очевидно, число $\beta\in(0;1)$ и не совпадает ни с одним из чисел $\alpha_n, n\in\mathbb{N}$. Противоречие. Следовательно, наше предположение неверно. На самом деле нами доказано, что (0;1) не является счётным множеством.

4.20 Построить график отображения $f: X\to Y$, $f(x)=tg(x+1)$, если $X=\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{8}\right]$. Найти Y и обратное отображение $f^{-1}: Y\to X$, если это возможно, или доказать, что его нет.

Решение. Если $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{8}\right]$, то $x+1 \in \left[1-\frac{\sqrt{2}}{2}; 1+\frac{\pi}{8}\right] \subset \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому графиком функции $f(x) = tg(x+1), x \in X$ будет часть графика функции $f(x) = tgx, x \in \left[1-\frac{\sqrt{2}}{2}; 1+\frac{\pi}{8}\right]$, сдвинутая на 1 влево. Нарисуем эти графики (рис.2).

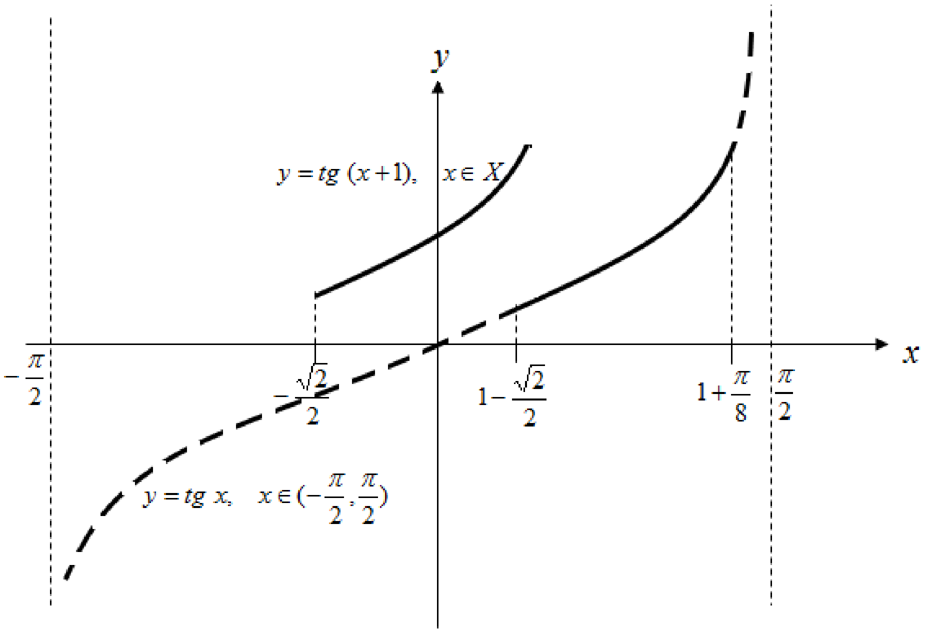

Рисунок 2 – Рисунок к задаче 4.20

Поскольку при $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1$ и $f(x) = tgx, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ возрастает, то и функция $f(x) = tg(x+1), x \in X$ возрастает. Поэтому множеством значений этой функции будет множество $Y = \left[tg\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right); tg\left(1+\frac{\pi}{8}\right)\right]$ и в силу возрастания отображение $f : X \rightarrow Y$ будет взаимно-однозначным (биективным), следовательно будет существовать обратное отображение $f^{-1} : Y \rightarrow X$. Найдём его, выразив переменную x через y из уравнения $y = tg(x+1)$ и учтя, что $x+1 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$: $x+1 = arctgy$ или $x = arctgy - 1$.

Итак, $f^{-1}(x) = arctgx - 1, x \in Y$ – отображение, обратное к $f(x) = tg(x+1), x \in X$.

5.20 Найти следующие композиции: $f(g), g(f), f(f), g(g), f\left(\frac{1}{f^2}\right), \sqrt{f}$ или доказать, что такая композиция невозможна на естественных областях определения функций $f(x) = arctgx$ f и $g(x) = \ln x$.

Решение. Сложная функция $f(g)$ (или композиция функций f и g) будет определена тогда, когда множество значений *E(g)* функции g содержится в области определения *D(f)* функции *f*. В нашем случае *E(g)*= $(-\infty;+\infty)$, *D(f)*= $(-\infty;+\infty)$, *D(g)*= $(0;+\infty)$, *E(f)*= $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Так как *E(g)*$\subset$*D(f)*, то определена функция $f(g(x)) = arctg(\ln x)$.

Поскольку *E(f)* не содержится в *D(g)*, то композиция *g(f)* на естественных областях не возможна.

E(f)$\subset$*D(f)* и значит определена сложная функция $f(f(x)) = arctg(arctgx)$.

E(g) не содержится в *D(g)*. Поэтому композиция *g(g)* на естественных областях не возможна.

На естественной области определения f не определена функция $\frac{1}{f^2}$ (в точке *x=0*) и поэтому не определена функция $f\left(\frac{1}{f^2}\right)$.

Областью определения функции $y = \sqrt{x}$ является множество $[0;+\infty)$. Так как множество значений функции f не содержится в нём, то композиция $\sqrt{f}$ не возможна на естественной области определения f.

Лабораторная работа №3
Числовые функции

Необходимые понятия и теоремы: область определения, область значений, графики элементарных функций, сдвиги
Литература: [1] с. 16 – 28, [2] с. 71 – 84, [3] с. 23 – 36.

1 Найти область определения функции $f(x)$

№	$f(x)$	№	$f(x)$
1.1	$ctg\dfrac{\pi}{\sqrt{x}}$	1.11	$\arccos\dfrac{3x}{1-x}$
1.2	$\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x}}$	1.12	$\dfrac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert-\lvert x+1\rvert}}$
1.3	$\log_x \sin x$	1.13	$\sqrt[4]{(x-1)\cos^2 \pi x}$
1.4	$\log_{-x}\cos x$	1.14	$\sqrt[5]{\ln(x^2+x-1)}$
1.5	$\sqrt{\cos 2x}$	1.15	$\arccos(\lvert 1-x\rvert+\lvert 1+x\rvert)$
1.6	$\dfrac{1}{x-2}\sqrt{\dfrac{3+x}{3-x}}$	1.16	$\left(\sqrt[6]{\sin x-\dfrac{1}{2}}\right)^6$
1.7	$\dfrac{1}{\sqrt[3]{\sin 3x-1}}$	1.17	$\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\log_x(x^2-1)$
1.8	$\log_3\log_2 x$	1.18	$\sqrt{5x-3x^3}$
1.9	$\dfrac{1}{\sqrt{(\sin x)^2}}$	1.19	$arctg\left(\ln\lvert\cos x\rvert-\dfrac{1}{2}\right)$
1.10	$\arcsin(2\cos 2x)$	1.20	$\arccos(\lg(10x))$

2 Найти множество значений функции $f(x)$

№	$f(x)$	№	$f(x)$
1	*2*	*3*	*4*
2.1	$\sqrt{x^2-x-2}$	2.11	$\sqrt{\sin x-\dfrac{1}{2}}$
2.2	$\sqrt[3]{x^2-4x-5}$	2.12	$\sqrt{\cos(2x+1)}$
2.3	$3x-4, x\in[-2;2]$	2.13	$\cos\sqrt{x^2-6x+5}$
2.4	$3^{\sin x}$	2.14	$\sin\sqrt[4]{3-x^2}$

1	2	3	4
2.5	$2^{-\cos x}$	2.15	$\arccos(x^2-10x+6)$
2.6	$e^{\log_2 x}$	2.16	$arctg\sqrt[6]{x^2+5x+6}$
2.7	$\sin\left(-\sqrt{x-2}\right)$	2.17	$\arccos(\log_{1/2} x)$
2.8	$\ln(\cos x)$	2.18	$\log_{1/2}(\arcsin x)$
2.9	$\ln(tgx)$	2.19	$y=\log_2(\log_{1/2}(\cos x))$
2.10	$\arcsin 2^x$	2.20	$y=\arccos(\arcsin x)$

3 Построить график функции $f(x)$

№	$f(x)$	№	$f(x)$
3.1	$\left\|x^2-4\right\|$	3.11	$4\cos 2x$
3.2	$\left\|\sin 2x\right\|$	3.12	$5\sin(x-2)$
3.3	$\left\|\cos\frac{x}{2}\right\|$	3.13	$2\cos\frac{x}{2}$
3.4	$\log_{1/2}\left\|x-1\right\|$	3.14	$\sqrt[3]{x+3}$
3.5	$\left\|3-x^2\right\|$	3.15	$\sqrt[4]{\left\|x\right\|}$
3.6	$2^{\left\|x+1\right\|}$	3.16	$\sqrt[5]{x-0,5}$
3.7	2^{-x-1}	3.17	$\sqrt[3]{\left\|x+1\right\|}$
3.8	$-\cos 2x$	3.18	$\left\|\sqrt{x+1}-1\right\|$
3.9	$ctg(-x)$	3.19	$\sqrt{\left\|x-1\right\|-3}$
3.10	$tg(1-x)$	3.20	$\log_2(x-2)^2$

4 Построить графики функций $f(x-1)$, $f(x+2)$, $f(x)+3$, $f(x)-4$, $f(2x)$, $f(x/3)$, $\left|f(x)\right|$, $f\left(\left|x\right|\right)$, $2f(x)$, $-f(x)$, $f(-x)$,исходя из графика функции $f(x)$, и объяснить такое построение

№	$f(x)$	№	$f(x)$
1	2	3	4
4.1	$\ln x$	4.11	$arctgx$
4.2	e^x	4.12	$\log_\pi x$
4.3	$1/x$	4.13	$\log_{1/2} x$

1	2	3	4
4.4	$\sqrt[3]{x}$	4.14	$\sqrt{x+2}$
4.5	$(x-1)^2$	4.15	$\lvert 3x+1\rvert$
4.6	$\cos x$	4.16	$\sin x$
4.7	$-\frac{2}{x}$	4.17	$\frac{3}{x+2}$
4.8	$\arccos x$	4.18	$\log_2(x+2)^2$
4.9	$\arcsin x$	4.19	$\sin(x/2)$
4.10	tgx	4.20	$\arcsin(x-1)$

5 Найдите функцию $f(x)$, если известно, что

№	Уравнение	№	Уравнение
5.1	$f(x+1)=x^2+2x+2$	5.11	$f(x^3)=\sqrt[3]{x}$
5.2	$f(x-1)=x^2-2x+5$	5.12	$f(\sqrt{x})=x^3+1$
5.3	$f(x-\frac{1}{x})=\frac{x^4+1}{x^2}$	5.13	$f(\sqrt[3]{x})=x^9$
5.4	$f(\frac{1}{x})=x^3+1$	5.14	$f(x^3)=1-x^2$
5.5	$f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$	5.15	$f(e^x)=e^{2x}+e^x-1$
5.6	$f(\frac{x}{x+1})=x^2$	5.16	$f(\ln x)=2\ln x^2-3\ln x+1$
5.8	$f(x^2)=1-x^3$	5.17	$f(\cos x)=1+2\cos 2x$
5.9	$f(x+2)=e^{4-2x-x^2}$	5.18	$f(\sin x)=\cos^4 x-\cos 4x$
5.10	$f(3x)=\ln x^2$	5.19	$f(tgx)=\frac{1}{\cos^2 x+1}$
	$f(\frac{x}{4})=\log_3 x^3$	5.20	$f(\lvert x\rvert)=\ln x^6-\lvert x\rvert$

Решение типовых примеров

1.20 Найти область определения функции $f(x)=\arccos(\lg(10x))$.

Решение. Функция $f(x)=\lg(10x)$ определена, если $10x>0$, а функция $y=\arccos x$ определена при $x\in[-1;1]$. Поэтому сложная функция $f(x)=\arccos(\lg(10x))$ будет определена при выполнении двух условий:

$\begin{cases}10x>0\\ -1\le\lg(10x)\le1\end{cases}$ или $\begin{cases}x>0\\ -1\le1+\lg x\le1\end{cases}$ или $\begin{cases}x>0\\ -2\le\lg x\le0\end{cases}$ или $\begin{cases}x>0\\ 10^{-2}\le x\le10^{0}\end{cases}$ или $\begin{cases}x>0\\ 0{,}01\le x\le1\end{cases}$, что равносильно условию $x\in[0{,}01;1]$.

Итак, областью определения функции $f(x)=\arccos(\lg(10x))$ является множество $[0{,}01;1]$.

2.20 Найти множество значений функции $f(x)=\arccos(\arcsin x)$.

Решение. Найдём сначала область определения этой функции. Она будет определена для всех *x*, удовлетворяющих системе

$\begin{cases}x\in[-1;1]\\ -1\le\arcsin x\le1\end{cases}$ или $\begin{cases}-1\le x\le1\\ \sin(-1)\le\sin(\arcsin x)\le\sin1\end{cases}$ или $\begin{cases}-1\le x\le1\\ -\sin1\le x\le\sin1\end{cases}$,

что равносильно условию $x\in[-\sin1;\sin1]$. Поскольку функция $y=\arcsin x$ возрастает, то для $x\in[-\sin1;\sin1]$ она примет все значения из [-1;1] и только их. Поэтому функция $y=\arccos(\arcsin x)$ примет все значения из $[0;\pi]$ и только их. Итак, множеством значений функции $f(x)=\arccos(\arcsin x)$ является $[0;\pi]$.

3.20 Построить график функции $f(x)=\log_2(x-2)^2$.

*Решение***.** Так как $a^2=|a|^2$, то функция может быть переписана в виде $f(x)=2\log_2|x-2|$. Построим сначала график функции $y=\log_2|x|$ (рис.3). Он состоит из графика функции $y=\log_2 x$ и линии, симметричной этому графику относительно оси *Oy*, так как в точках *x* и –*x* функция $y=\log_2|x|$ принимает одно и тоже значение (чётная).

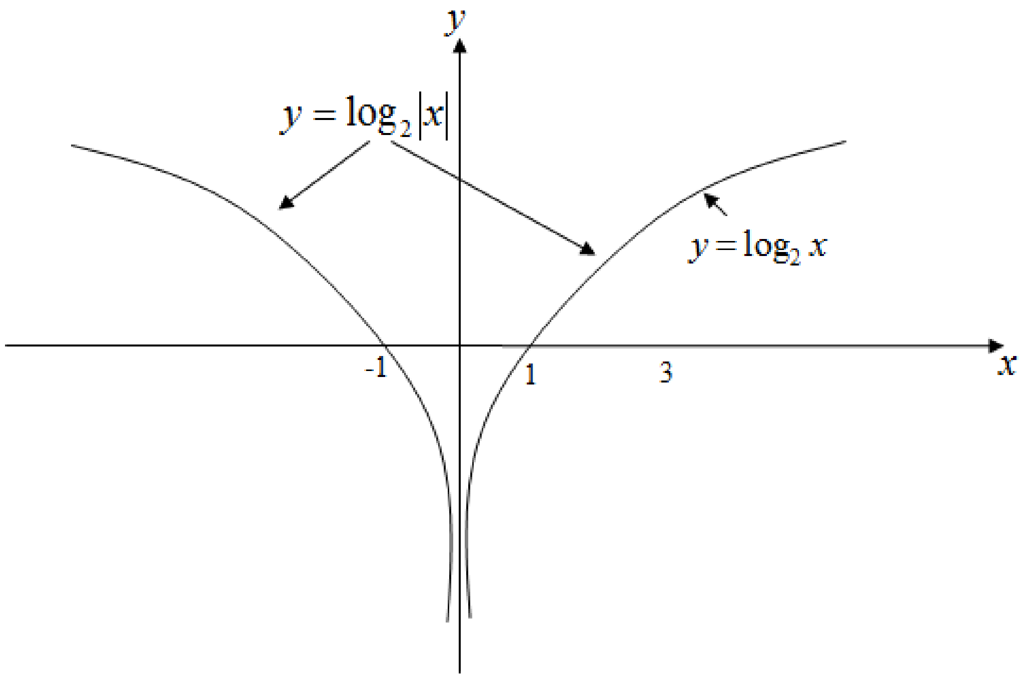

Рисунок 3 – График функции $y = \log_2|x|$

Далее построим график функции $y = \log_2|x-2|$ (рис.4), который получается из графика функции $y = \log_2|x|$ сдвигом вправо на 2 единицы, так как значение функции $y = \log_2|x-2|$ в точке $x+2$ совпадает со значением функции $y = \log_2|x|$ в точке x.

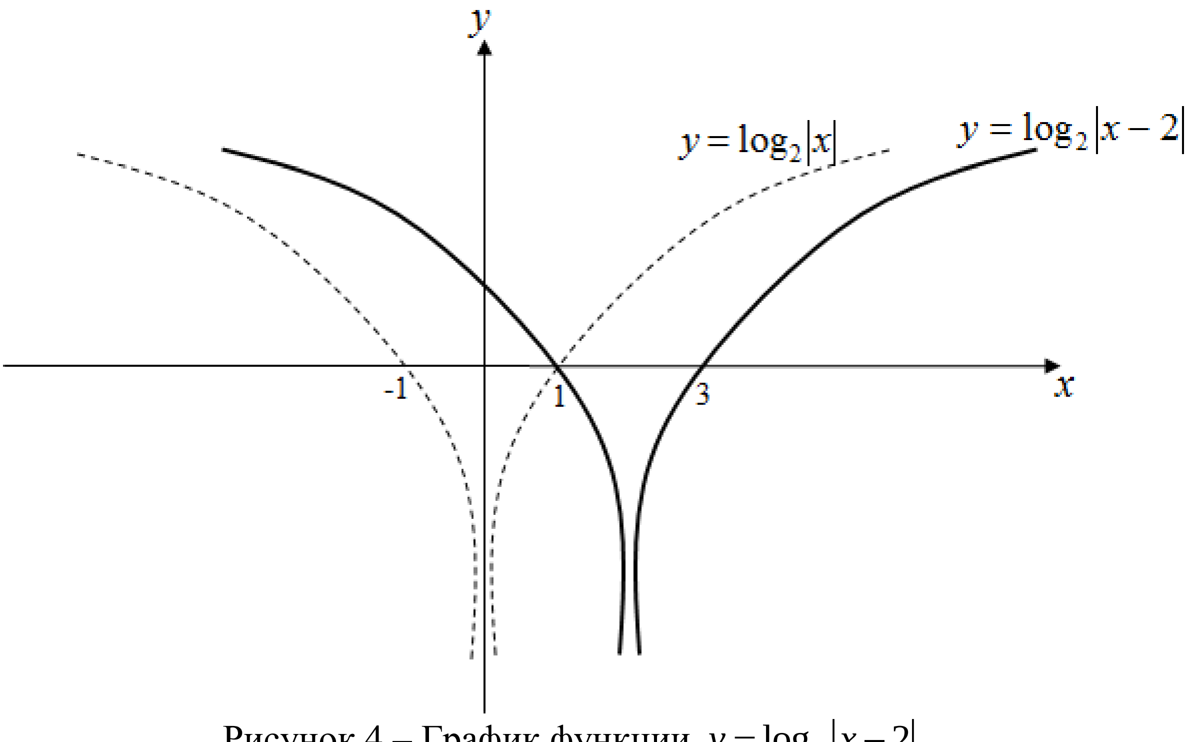

Рисунок 4 – График функции $y = \log_2|x-2|$

И наконец, строим график функции $y = 2\log_2|x-2|$ (рис. 5), который получается из графика функции $y = \log_2|x-2|$ растяжением в 2 раза вдоль оси *Oy* относительно точки *O*.

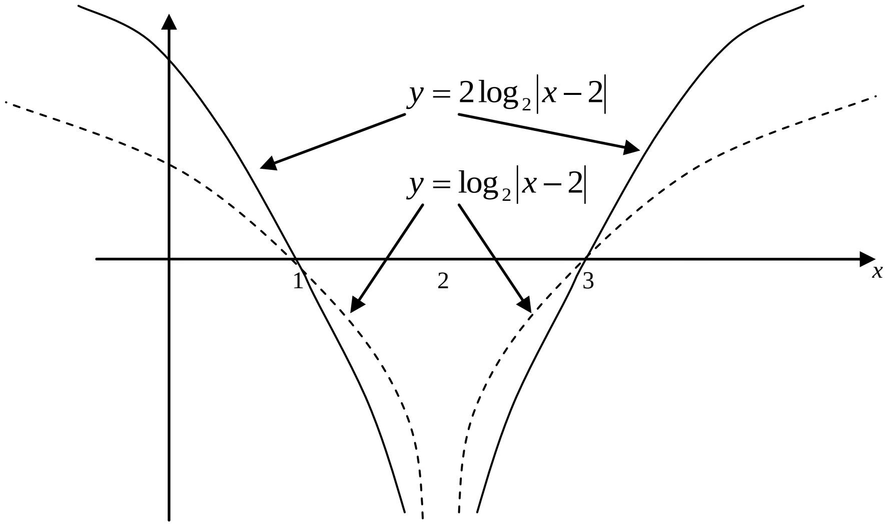

Рисунок 5 – График функции $y = 2\log_2|x-2|$

4.20 Построить графики функций $f(x-1)$, $f(x+2)$, $f(x)+3$, $f(x)-4$, $f(2x)$, $f(x/3)$, $|f(x)|$, $f(|x|)$, $2f(x)$, $-f(x)$, $f(-x)$,исходя из графика функции $f(x) = \arcsin(x-1)$, и объяснить такое построение

Решение. В нашем случае $f(x) = \arcsin(x-1)$. Построим сначала график функции $y = \arcsin(x-1)$, исходя из графика функции $y = \arcsin x$ в одной системе координат (рис. 6).

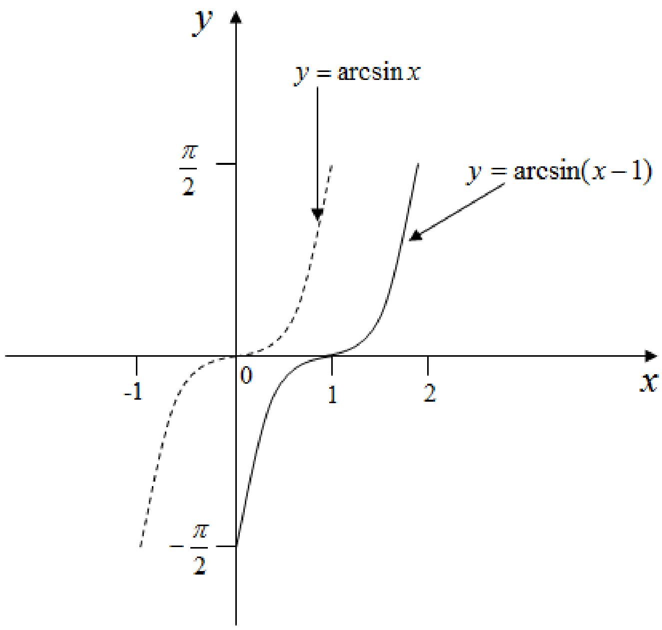

Рисунок 6 – График функции $y = \arcsin(x-1)$

Графиком функции $y = f(x)$ является множество $A = \{(x, f(x)) | x \in [0;2]\}$. Функция $y = f(x-1)$ определена при всех $x : x-1 \in [0;2]$ или $x \in [1;3]$. Графиком функции $y = f(x-1)$ является множество $B = \{(x, f(x-1)) | x \in [1;3]\}$. Сделаем замену $x-1 = z$. Тогда $B = \{(x-1+1; f(x-1)) | x \in [1;3]\} = \{(z+1; f(z)) | z \in [0;2]\}$. Поэтому каждая точка множества B получается из соответствующей точки множества A сдвигом на 1 вправо, т.е. график функции $y = f(x-1)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом на 1 вправо (рис. 7).

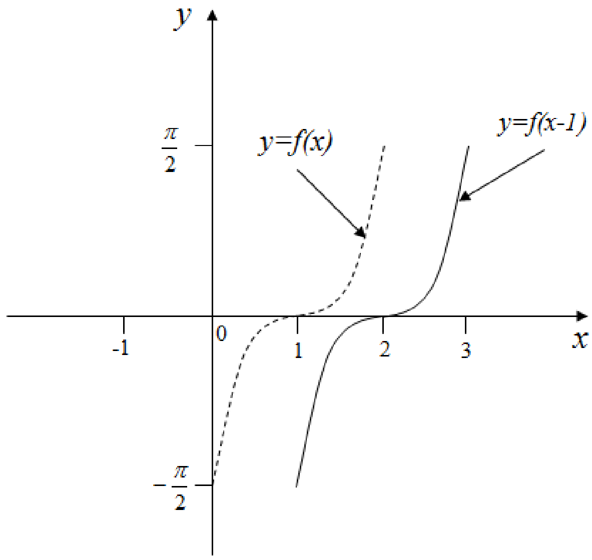

Рисунок 7 – График функции $y = f(x-1)$

График функции $y = f(x+2)$ (рис. 8) получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом влево на 2 единицы (объяснить)

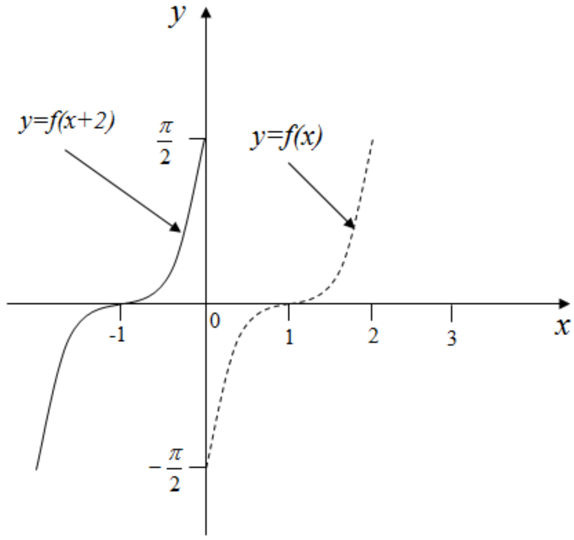

Рисунок 8 – График функции $y = f(x+2)$

График функции $y = f(x)+3$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом на 3 единицы вверх (рис. 9).

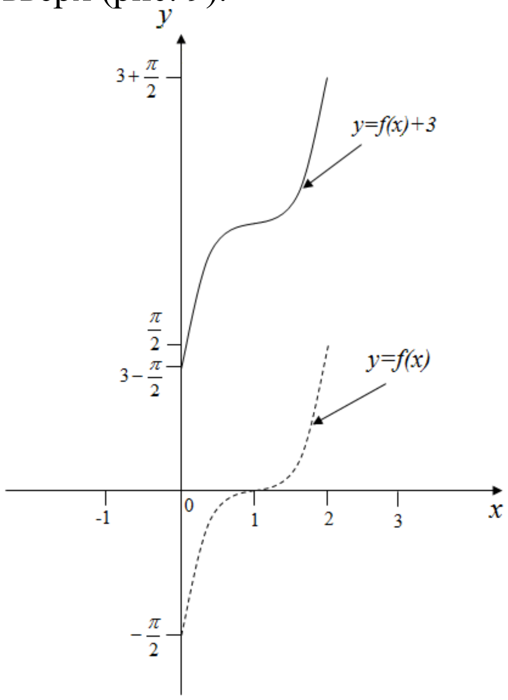

Рисунок 9 – График функции $y = f(x)+3$

График функции $y = f(x)-4$ (рис. 10) получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вниз на 4 единицы (объяснить).

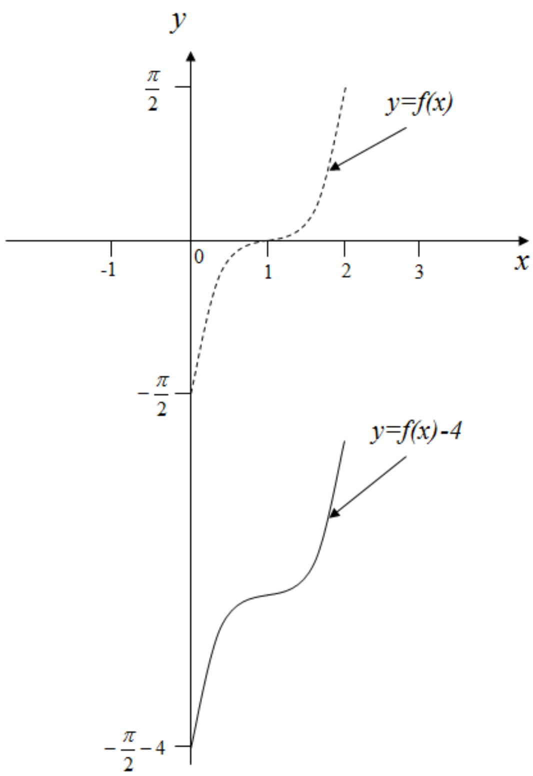

Рисунок 10 – График функции $y = f(x)-4$

График функции $y = f(2x)$ (рис. 11) получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием вдоль оси Ox в 2 раза (объяснить).

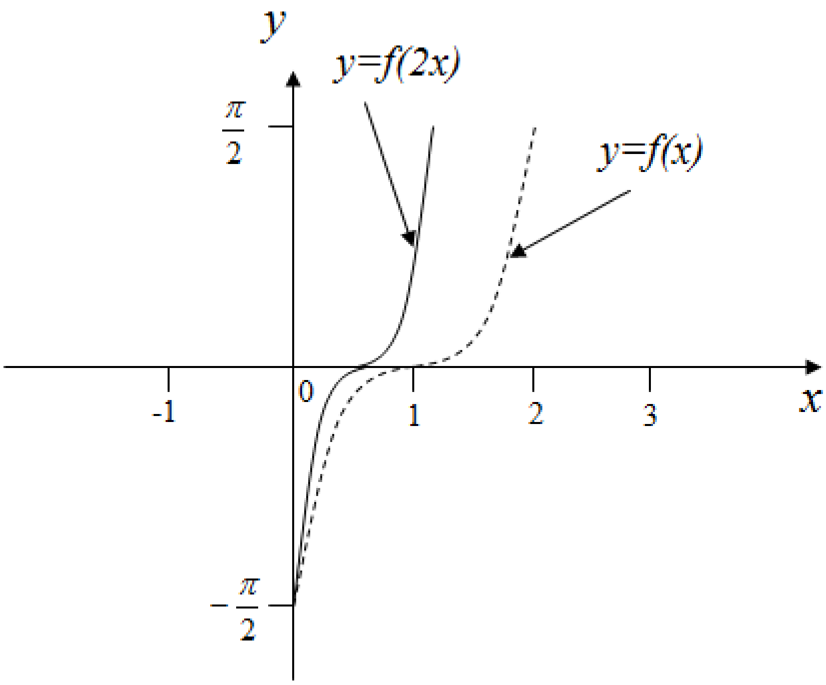

Рисунок 11 – График функции $y = f(2x)$

График функции $y = f(x/3)$ (рис. 12) получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением вдоль оси Ox в 3 раза (объяснить).

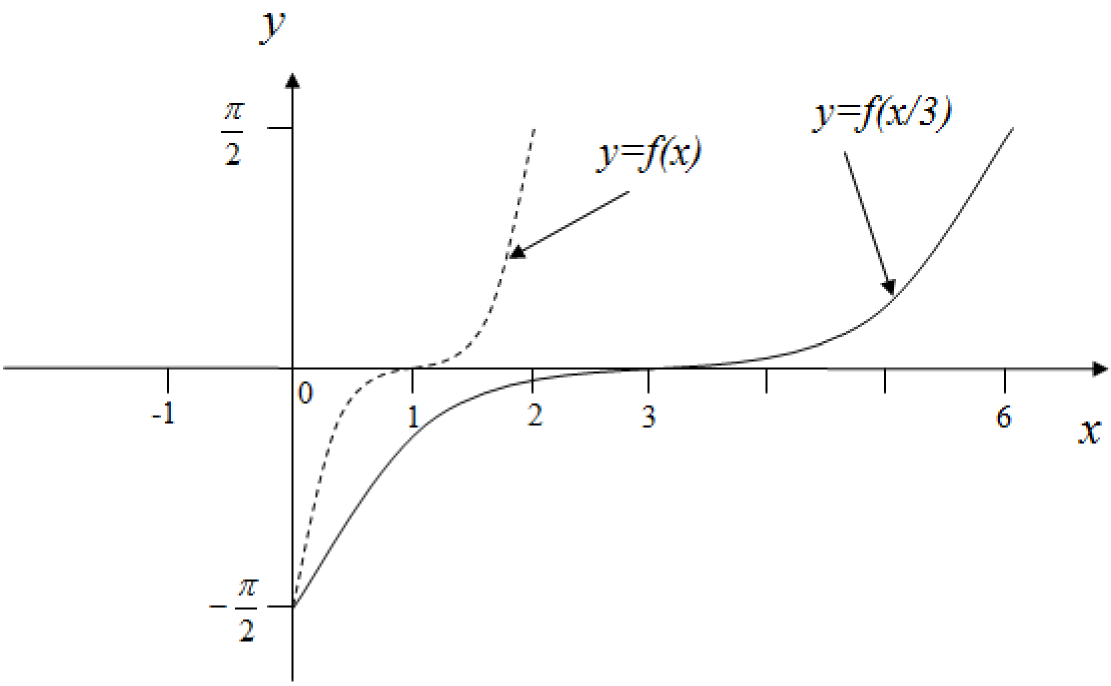

Рисунок 12 – График функции $y = f(x/3)$

График функции $y=|f(x)|$ (рис. 13) состоит из части графика функции $y=f(x)$, расположенной выше оси Ox и линии, симметричной относительно оси Ox части графика $y=f(x)$, расположенной ниже оси Ox (объяснить).

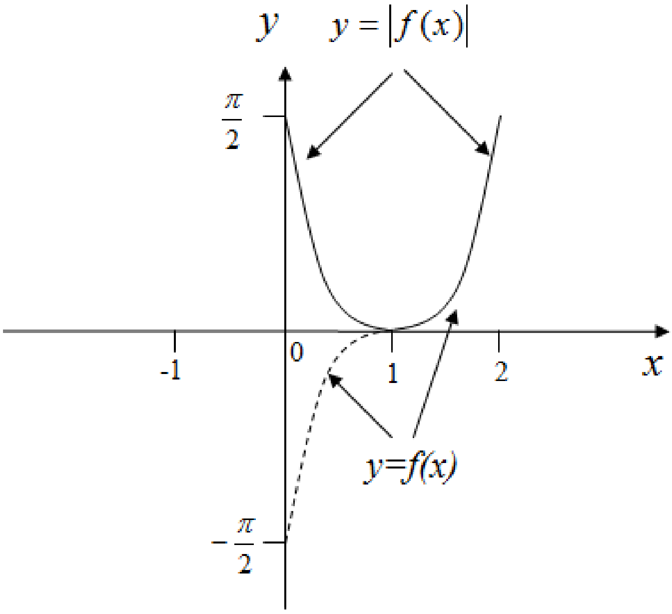

Рисунок 13 – График функции $y=|f(x)|$

График функции $y=f(|x|)$ (рис. 14) состоит из графика функции $y=f(x)$ и линии, симметричной графику функции $y=f(x)$ относительно оси Oy (объяснить).

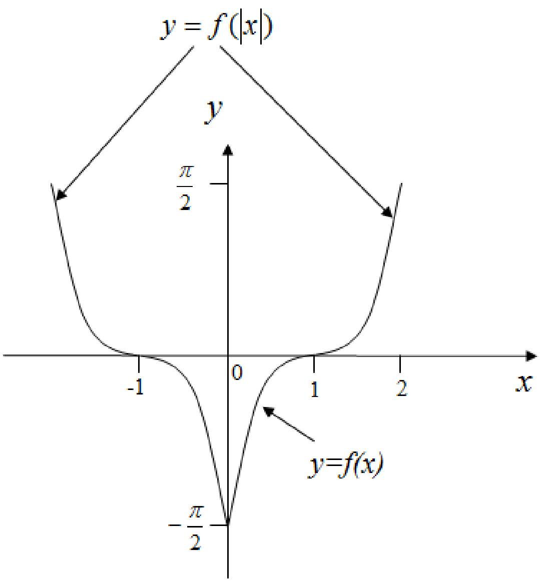

Рисунок 14 – График функции $y=f(|x|)$

График функции $y = 2f(x)$ (рис. 15) получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением вдоль оси Oy в 2 раза (объяснить).

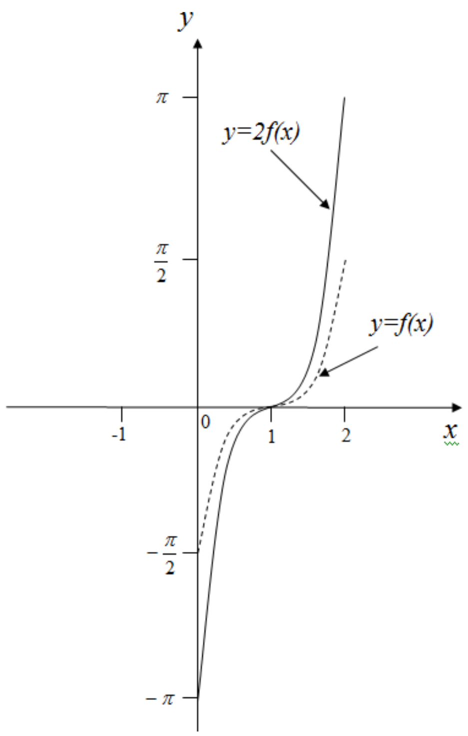

Рисунок 15 – График функции $y = 2f(x)$

График функции $y = -f(x)$ (рис. 16) состоит из линии, симметричной относительно оси Ox части графика функции $y = f(x)$, расположенной выше оси Ox и линии, симметричной относительно оси Ox части графика функции $y = f(x)$, расположенной ниже оси Ox (объяснить).

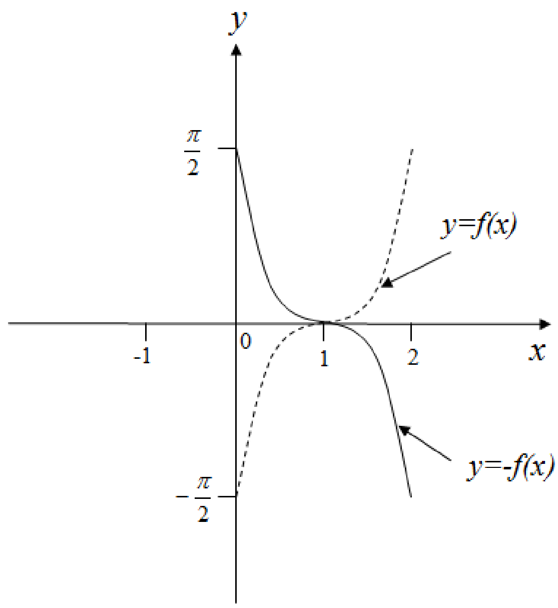

Рисунок 16 – График функции $y = -f(x)$

График функции $y = f(-x)$ (рис. 17) получается из графика функции $y = f(x)$ симметрией относительно оси Oy (объяснить).

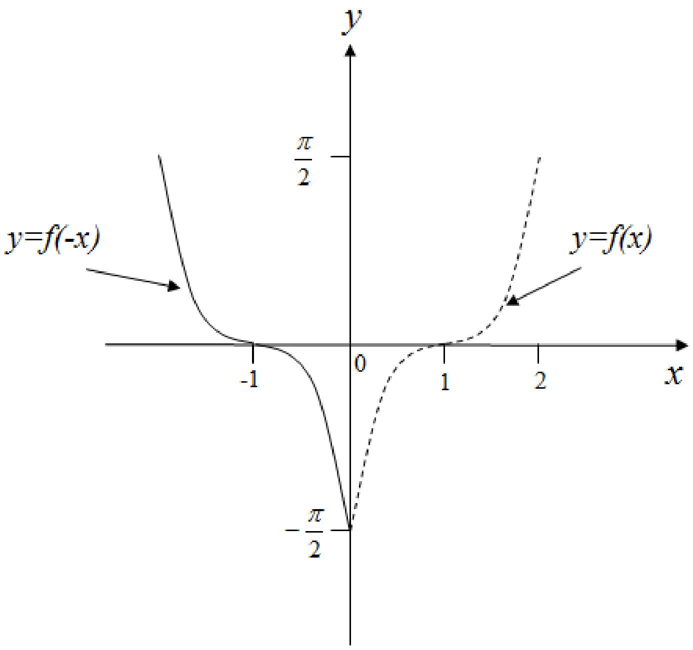

Рисунок 17 – График функции $y = f(-x)$

Лабораторная работа № 4
Вещественные числа

Необходимые понятия и теоремы: рациональные и иррациональные числа, действительные числа, аксиомы действительных чисел, принцип математической индукции, верхняя и нижняя грани множеств, ограниченные множества.

Литература: [1] с. 29 – 61, [4] с. 37 – 80.

1 Исходя из аксиом действительных чисел, доказать утверждения:

1.1 Если $a+b=c$, то $a=c-b$.

1.2 Число, обладающее свойством единицы, единственно.

1.3 Если $a>b$, то для любого числа c справедливо $a+c>b+c$.

1.4 Для любого числа a справедливо $a\cdot 0=0$.

1.5 Число, обладающее свойством нуля, единственно.

1.6 Число, обратное к данному отличному от нуля числу, единственно.

1.7 Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.

1.8 Если $a\cdot b=0$, то хотя бы один из сомножителей a и b равен нулю.

1.9 Число, противоположное данному, единственно.

1.10 Для любого числа $a\neq 0$ справедливо $a:a=1$.

1.11 Если $a<b$, то $-a>-b$.

1.12 Для любых чисел a и b справедливо $(-a)\cdot b=-a\cdot b$.

1.13 Для любых чисел a и b справедливо $-a-b=-(a+b)$.

1.14 Для любого числа $a\neq 0$ справедливо $1:(1:a)=a$.

1.15 Если $a<b$ и $c\leq d$, то $a+c<b+d$.

1.16 Уравнение $a\cdot x=b$, $a\neq 0$, имеет единственное решение.

1.17 Для любой дроби $\frac{a}{b}$, $b\neq 0$, и $\forall c\neq 0$ справедливо $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$.

1.18 Если $a<b$ и $c\leq d$, то $a-c<b-d$.

1.19 Если $a<b$ и $c<0$, то $ac>bc$.

1.20 Уравнение $a+x=b$ имеет единственное решение.

2 Доказать иррациональность числа a:

№	a	№	a	№	a	№	a
2.1	$\sqrt{3}$	2.6	$\sqrt{13}$	2.11	$\sqrt{21}$	2.16	$\sqrt{43}$
2.2	$\sqrt{5}$	2.7	$\sqrt{17}$	2.12	$\sqrt{22}$	2.17	$\sqrt{51}$
2.3	$\sqrt{7}$	2.8	$\sqrt{15}$	2.13	$\sqrt{33}$	2.18	$\sqrt{57}$
2.4	$\sqrt{11}$	2.9	$\sqrt{19}$	2.14	$\sqrt{37}$	2.19	$\sqrt{50}$
2.5	$\sqrt{10}$	2.10	$\sqrt{20}$	2.15	$\sqrt{41}$	2.20	$\sqrt{2}$

3 Найти $\max X$, $\min X$, $\sup X$, $\inf X$ числового множества:

№	X	№	X
3.1	$\{x\in\square : \lvert x\rvert<1\}$	3.11	$\{x\in\square : \lvert x\rvert>1\}$
3.2	$[0; 2)$	3.12	$[1; 2]$
3.3	$\{(-1)^n(1-1/n), n\in\square\}$	3.13	$\{1+(-1)^n/n, n\in\square\}$
3.4	$\{\cos n, n\in\square\}$	3.14	$\{-1/3; -1/9; \ldots, -1/3^n, \ldots\}$
3.5	$\{1/3; 1/9; \ldots, 1/3^n, \ldots\}$	3.15	$\{-1/2; -3/4; \ldots, -(2^n-1)/2^n, \ldots\}$
3.6	$\{x\in\square : \lvert x\rvert\ge 1\}$	3.16	$\{x\in\square : \lvert x\rvert<3\}$
3.7	$(0; 5]$	3.17	$\{\sin n, n\in\square\}$
3.8	$\{n^2e^{-n}, n\in\square\}$	3.18	$\{1/10; 1/100; \ldots, 1/10^n, \ldots\}$
3.9	$\{1/10; 1/100; \ldots, 1/10^n, \ldots\}$	3.19	$\{2; 1+1/2; \ldots, 1+1/n, \ldots\}$
3.10	$\{1/2; 3/4; \ldots, (2^n-1)/2^n, \ldots\}$	3.20	$\{m/n \mid m, n\in\square, m<n\}$

4 Пусть $n, m\in\square$. Найти:

4.1	$\sup\limits_m \inf\limits_n \frac{m-n}{m+n}$	4.8	$\inf\limits_n \sup\limits_m \frac{m-n}{m+3n}$	4.15	$\sup\limits_n \inf\limits_m \frac{m-n}{2m+n}$
4.2	$\inf\limits_n \sup\limits_m \frac{m-n}{m+n}$	4.9	$\sup\limits_m \inf\limits_n \frac{m}{7m+n}$	4.16	$\inf\limits_m \sup\limits_n \frac{m-n}{2m+n}$
4.3	$\sup\limits_m \inf\limits_n \frac{m}{m+n}$	4.10	$\inf\limits_n \sup\limits_m \frac{m}{7m+n}$	4.17	$\sup\limits_n \inf\limits_m \frac{m-n}{m+3n}$
4.4	$\inf\limits_n \sup\limits_m \frac{m}{m+n}$	4.11	$\sup\limits_n \inf\limits_m \frac{m-n}{m+n}$	4.18	$\inf\limits_m \sup\limits_n \frac{m-n}{m+3n}$
4.5	$\sup\limits_m \inf\limits_n \frac{m-n}{2m+n}$	4.12	$\inf\limits_m \sup\limits_n \frac{m-n}{m+n}$	4.19	$\sup\limits_n \inf\limits_m \frac{m}{7m+n}$
4.6	$\inf\limits_n \sup\limits_m \frac{m-n}{2m+n}$	4.13	$\sup\limits_n \inf\limits_m \frac{m}{m+n}$	4.20	$\inf\limits_m \sup\limits_n \frac{m}{m+n}$
4.7	$\sup\limits_m \inf\limits_n \frac{m-n}{m+3n}$	4.14	$\inf\limits_m \sup\limits_n \frac{m}{m+n}$	4.21	$\sup\limits_m \inf\limits_n \frac{m-n}{m+2n}$

5 С помощью метода математической индукции доказать истинность утверждений при $n\in\square$:

№	Утверждение	№	Утверждение
5.1	$5+9\cdot5+13\cdot5^2+\dots+(4n+1)\cdot5^{n-1}=n\cdot5^n$	5.11	n^3+5n кратно 6
5.2	$1+4+7+\dots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$	5.12	$n^3+9n^2+26n+24$ кратно 6
5.3	$4\cdot2+7\cdot2^3+10\cdot2^5+\dots+(3n+1)\cdot2^{2n-1}$	5.13	$7^{2n}-1$ кратно 24
5.4	$2\cdot2+3\cdot5+\dots+(n+1)(3n-1)=\dfrac{n(2n^2+5n+1)}{2}$	5.14	13^n+5 кратно 6
5.5	$1+6+\dots+(2n-1)2^{n-1}=3+2^n(2n-3)$	5.15	15^n+6 кратно 7
5.6	$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$	5.16	9^n+3 кратно 4
5.7	$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$	5.17	7^n+3n-1 кратно 9
5.8	$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}$	5.18	$7^n+12n+17$ кратно 18
5.9	$\frac{1}{5\cdot12}+\ldots+\frac{1}{(7n-2)\cdot(7n+5)}=\frac{n}{5(7n+5)}$	5.19	$1^3+2^3+\dots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
5.10	$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$	5.20	$1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

6 С помощью метода математической индукции доказать неравенство при $n\in\mathbb{N}$:

№	Неравенство	№	Неравенство
1	*2*	*3*	*4*
6.1	$4^n>7n-5$	6.11	$2^n n!<n^n,\ \forall n>2$
6.2	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}},\ \forall n\geq2$	6.12	$(2n)!>\dfrac{4n}{n+1}(n!)^2,\ \forall n\geq2$
6.3	$4^n>n^2+3^n$	6.13	$3^n>2^n+7n,\ \forall n\geq4$
6.4	$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}<1$	6.14	$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n},\ \forall n\geq2$
6.5	$y_1+y_2+\ldots+y_n\geq n,$ $\forall y_1,y_2,\ldots,y_n>0\colon y_1y_2\ldots y_n=1$	6.15	$\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},$ $x_k\geq0,\ \forall k=\overline{1,n}$
6.6	$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2},$ $\forall n\geq2$	6.16	$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{14},$ $\forall n\geq2$

1	*2*	*3*	*4*
6.7	$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$, $\forall n\geq 2$	6.17	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}<n$, $\forall n\geq 2$
6.8	$\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$, $\forall n\geq 2$	6.18	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}$, $\forall n\geq 2$
6.9	$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$	6.19	$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)\geq\frac{1}{2}$, $x_k\geq 0, \forall k=\overline{1,n}, x_1+x_2+\ldots+x_n\leq\frac{1}{2}$
6.10	$3^n-2^n\geq n$	6.20	$n\leq 2^{n-1}$

7 Построив соответствующее сечение, доказать равенство:

7.1	$\sqrt{2}+\sqrt{32}=\sqrt{50}$	7.7	$\sqrt{3}+\sqrt{75}=\sqrt{108}$	7.13	$\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{30}$
7.2	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{10}$	7.8	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$	7.14	$\sqrt{7}\cdot\sqrt{11}=\sqrt{77}$
7.3	$\sqrt{3}+\sqrt{27}=\sqrt{48}$	7.9	$\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{27}$	7.15	$\sqrt{5}+\sqrt{20}=\sqrt{45}$
7.4	$\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{15}$	7.10	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{12}$	7.16	$\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{21}$
7.5	$\sqrt{5}+\sqrt{20}=\sqrt{45}$	7.11	$\sqrt{7}+\sqrt{28}=\sqrt{63}$	7.17	$\sqrt{3}+\sqrt{27}=\sqrt{48}$
7.6	$\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{35}$	7.12	$\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{14}$	7.18	$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$

Решение типовых примеров

1.20 Уравнение $a+x=b$ имеет единственное решение.

Решение. Число $-a+b$ удовлетворяет уравнению $a+x=b$. В самом деле: $a+(-a+b)=(a+(-a)+b)=0+b=b$. Других решений нет. Действительно, если $x\in\mathbb{R}$ и является решением уравнения $a+x=b$, то

$$-a+b=-a+b,\ -a+(a+x)=-a+b,$$
$$(-a+a)+x=-a+b,\ 0+x=-a+b,\ x=-a+b.$$

2.20 Доказать, что $\sqrt{2}$ – иррациональное число.

Решение. Доказываем методом от противного. Допустим, что существует такое рациональное число $\frac{m}{n}$ (несократимая дробь), квадрат которого равен 2. Тогда $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$ или $m^2=2n^2$. Следовательно, число m^2 есть четное число. Отсюда m есть четное число, и, следовательно, представимо в виде $m=2k$. Тогда имеем $n^2=2k^2$. Значит, n^2 есть четное число, тогда и

n – четное. Таким образом, числа m и n являются четными. Поэтому дробь $\frac{m}{n}$ сократима, что противоречит предположению. Допущение не верно, т.е. не существует рационального числа, квадрат которого равен 2, а, значит, $\sqrt{2}$ – иррациональное число, $\sqrt{2}=1,41421356\ldots$

3.20 Найти $\max X$, $\min X$, $\sup X$, $\inf X$ числового множества

$$X=\left\{\frac{m}{n}\,\middle|\; m,n\in\mathbb{N},\, m<n\right\}$$

Решение. Шаг 1. Покажем, что $\inf X=0$, то есть, 1) $\forall x=\frac{m}{n}\in X$, $\frac{m}{n}>0$ (0 – нижняя граница X); 2) $\forall x^*>0\ \exists\overline{x}\in X$ такой, что $\overline{x}<x^*$ (0 – наибольшая из нижних границ). Утверждение 1) очевидно.

Докажем утверждение 2). Представим x^* в виде десятичной дроби $x^*=a,x_1x_2...x_nx_{n+1}...$. Если $a>0$, то неравенство $\overline{x}<x^*$ очевидно, так как множество X состоит из правильных дробей. Если $a=0$, то $\exists n$ такой, что $x_n\neq 0$, и поэтому $\overline{x}=0,x_1x_2...x_{n-1}(x_n-1)...$ – искомое, то есть, $\overline{x}<x^*$.

Шаг 2. Покажем, что $\min X$ не существует. По определению, наименьшим элементом множества X называется такое число $c\in X$, что для всех $x\in X$ выполняется неравенство $x\geq c$. Заметим, что $\inf X\notin X$, так как $\frac{0}{n}\notin X$, 0– не натуральное число, и поэтому множество не имеет наименьшего элемента.

Шаг 3. Покажем, что $\sup X=1$, то есть 1) $\forall x=\frac{m}{n}\in X$, $\frac{m}{n}<1$ (1 – верхняя граница X); 2) $\forall x^*<1\ \exists\overline{x}\in X$ такой, что $\overline{x}>x^*$ (1 – наименьшая из верхних границ). Утверждение 1) очевидно, так как X содержит только правильные дроби.

Докажем утверждение 2). Представим x^* в виде десятичной дроби $x^*=0,x_1x_2...x_nx_{n+1}...$. Тогда $\exists n$ такой, что $x_n\neq 0$, и поэтому $\overline{x}=0,x_1x_2...x_{n-1}(x_n+1)...$ – искомое, то есть, $\overline{x}>x^*$.

Шаг 4. . Покажем, что $\max X$ не существует. По определению, наибольшим элементом множества X называется такое число $c\in X$, что для всех $x\in X$ выполняется неравенство $x\leq c$. Заметим, что $\sup X\notin X$, так как $\frac{m}{n}=1$ при $m=n$, что противоречит определению правильной дроби. Поэтому множество X не имеет наибольшего элемента.

4.20 Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. Найти $\inf\limits_m \sup\limits_n \dfrac{m}{m+n}$.

Решение. Заметим, что если $\exists \max X$ и $\min X$, то $\sup X = \max X$, $\inf X = \min X$. Для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $0 \le \dfrac{m}{m+n} \le \dfrac{m}{m+1}$. Следовательно, $\max\limits_n \dfrac{m}{m+n} = \dfrac{m}{m+1}$, а значит, $\sup\limits_n \dfrac{m}{m+n} = \dfrac{m}{m+1}$

Для всех $m \in \mathbb{N}$ выполняется $\dfrac{1}{2} \le \dfrac{m}{m+1} < 1$. Следовательно, $\min\limits_m \dfrac{m}{m+1} = \dfrac{1}{2}$, а значит, $\inf\limits_m \dfrac{m}{m+1} = \dfrac{1}{2}$.

5.20 Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Решение. *Шаг 1*. При $n=1$ равенство очевидно.

Шаг 2. Предположим, что равенство верно для натурального числа

$$n=k:\ 1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Шаг 3. Проверим верность утверждения для натурального числа $n=k+1$: $1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \left[\begin{matrix}\textit{учитывая}\\ \textit{шаг}\,2\end{matrix}\right] = \dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$

$$= (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) = (k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Из истинности утверждения при $n=k$ вытекает его истинность при $n=k+1$. Согласно методу математической индукции, утверждение верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

6.20 С помощью метода математической индукции доказать неравенство $n \le 2^{n-1}$ при $n \in \mathbb{N}$.

Решение. *Шаг 1* При $n=1$ неравенство верно, т.к. $1 \le 1$.

Шаг 2. Предположим, что неравенство верно для $n=k$, то есть $k \le 2^{k-1}$.

Шаг 3. Докажем, что неравенство верно для $n=k+1$:

$$2^k = 2\cdot 2^{k-1} \ge \left[\begin{matrix}\textit{учитывая}\\ \textit{шаг}\ 2\end{matrix}\right] \ge 2\cdot k \ge k+k \ge k+1.$$

Таким образом, из истинности утверждения при $n=k$ вытекает его истинность при $n=k+1$. Согласно методу математической индукции, утверждение верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

7.20 Построив сечение, доказать равенство $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$.

Решение. Для удобства обозначим $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\alpha$. Необходимо доказать, что $\alpha=\sqrt{18}$. Покажем, что совпадают верхние классы сечений, определяющие числа α и $\sqrt{18}$. Сначала построим сечения, определяющие действительные числа $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}$. Рассмотрим верхние классы этих сечений:

$$\sqrt{2}=A|A'; \quad A'=\{a' \mid a'^2>2, a'>0\}; \sqrt{8}=B|B'; \quad B'=\{b' \mid b'^2>8, b'>0\};$$

$$\sqrt{18}=C|C'; \quad C'=\{c' \mid c'^2>18, c'>0\}.$$

Теперь определим, какой верхний класс определяет число $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{8}$. Пусть α производит сечение $D|D'$. Рассмотрим рациональные числа $a', a, b', b,$ удовлетворяющие неравенствам $a<\sqrt{2}<a'$ и $b<\sqrt{8}<b'$, где $a\in A,\ a'\in A'$, $b\in B$, $b'\in B'$.

По определению, суммой $\sqrt{2}+\sqrt{8}$ называется число, которое содержится в следующих рациональных границах $a+b<\sqrt{2}+\sqrt{8}<a'+b'$.

Из определения суммы двух вещественных чисел следует, что в верхний класс D' сечения, определяющего число $\sqrt{2}+\sqrt{8}$, входят всевозможные суммы вида $a'+b'$: $D'=\{d' \mid d'=a'+b', a'\in A', b'\in B'\}$.

Докажем совпадения классов D' и C'. Для этого вначале покажем, что $D'\subset C'$. Пусть $d'\in D'$, тогда $\alpha'=a'+b'$, $a'\in A'$, $b'\in B'$ и $a'^2>2$, $a'>0$, $b'^2>b$, $b'>0$. Ясно, что $d'>0$. Докажем, что $d'^2>18$. Так как $a'^2b'^2>16$, то $a'b'>4$ и $2a'b'>8$. Следовательно,

$d'^2=(a'+b')^2=a'^2+2a'b'+b'^2>2+8+8$,т. е. $d'^2>18$, $d'\in C \Rightarrow D'\subset C'$.

Покажем, что $C'\subset D'$. Пусть $c'>0$, $c'\in C'$, т. е. $c'^2>18$. Положим $c'^2-18=h$ (h –рациональное число) и выберем $a'>0$ так, чтобы

$$2<a'^2<2+\frac{1}{6}h,\ a'^2<3 \text{ и } b'=c'-a'.$$

Тогда $b'>0$ и $b'^2=c'^2+a'^2-2c'a'$. Так как $c'^2=18+h$, а $4a'^2<4(2+h/6)=8+2h/3$, то

$$4c'^2a'^2<(8+2h/3)(18+h)=144+20h+2h^2/3<$$
$$<144+20h+25h^2/36=(12+5h/6)^2,$$

т.е. $2c'a'<12+5h/6$, а $a'^2+c'^2>20+h$, следовательно, $b'^2>8+h/6$, т.е. $b'^2>8$ или $c'=a'+b'$, где $a'\in A'$, $b'\in B'$ и верхний класс C' содержится в классе D'. Так как $C'\subset D'$ и $D'\subset C'$, то классы C' и D' совпадают. Верхние классы D' и C' сечений совпадают, значит, совпадают и нижние классы D и C и, следовательно, $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$.

Литература

1. Зверович, Э.И. Вещественный и комплексный анализ. Часть 1. Введение в анализ и дифференциальное исчисление/ Э.И. Зверович. – Минск: Высш.шк., 2006. – 319с.

2. Тер-Крикоров, А.М. Курс математического анализа: Учеб. Пособ. Для вузов. / А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин – М.: Гл. ред. физ. мат. лит., 1988. – 816 с.

3. Зорич, В.А. Математический анализ, часть 1/ В.А. Зорич. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 544 с.

4. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа: Учеб. Для студентов университетов и вузов. В 3 т. Т. 1 – М.: Высш. Шк., 1988. – 712 с.