МИНИСТЕРСТВО НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Ф.СКОРИНЫ

В.И.Мироненко

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ УСТОЙЧИВОСТИ

Учебное пособие по одноименному спецкурсу для специальности 01.01

Гомель 1991

МИНИСТЕРСТВО НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ
БЕЛАРУСЬ

ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Ф. СКОРИНЫ

В.И.Мироненко

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ УСТОЙЧИВОСТИ

Учебное пособие по одноименному
спецкурсу для специальности 01.01

Гомель 1991

УДК 517.925

Рецензент Л.А.Альсевич, кандидат физико-математических, доцент кафедры высшей математики Белорусского государственного университета им. В.И.Ленина

Рекомендовано к печати ученым советом Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины.

Настоящая работа представляет собой элементарное введение в курс математической теории устойчивости. Оно может служить своеобразным конспектом лекций по соответствующему курсу. По глубокому убеждению автора, освоить этот курс (как, между прочим, и другие курсы) можно лишь активно решая задачи и доказывая самостоятельно теоремы. Автор попытался выделить те факты, доказательства которых вполне доступны среднему студенту. В этом смысле предлагаемая работа предназначена для самостоятельной работы студента. В то же время преподаватель на своих лекциях несомненно значительно обогатит этот курс, связывая различные его аспекты с приложениями, другими курсами или просто "очеловечивая", иногда сухие, математические факты.

§I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{I}$$

Будем считать, что она задана в области

$$-\infty \leq \underline{t} < t < \infty, \quad x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D} \subset R^n.$$

Можно говорить о коллективных и индивидуальных свойствах решений системы (I). Индивидуальные свойства решения $x(t)$ – это те его свойства, которые не зависят от поведения других решений по отношению к рассматриваемому (периодичность, четность, ограниченность – индивидуальные свойства). Коллективные свойства – это, наоборот, те свойства решения, которые определяются поведением других решений по отношению к данному. К коллективным свойствам относится свойство устойчивости, к изучению которого мы приступаем. Это понятие пришло в теорию дифференциальных уравнений из механики. В настоящее время понятие устойчивости в разнообразных его вариантах находит широкое применение в различных областях науки и техники [I, 2].

Пусть система (I) описывает поведение некоторой реальной (механической, химической, биологической и т.п.) системы и пусть $x(t) \equiv 0$ есть одно из решений системы (I), соответствующее некоторому "движению" реальной системы. Можем ли мы гарантировать, что реальная система, для которой $x(t_0) = 0$ совершает движение, описываемое функцией $x(t) \equiv 0$. Математически для того, чтобы это имело место, достаточно потребовать выполнения условий некоторой теоремы существования и единственности решений задачи Коши для теоремы (I). Практически это далеко не так, в силу того, что равенству $x(t_0) = 0$ можно удовлетворить только приближенно.

Рассмотрим два примера. В первом примере система (I) вырождается в уравнение $\dot{x} = -x$, с общим решением $x(t) = x(t_0)e^{-(t-t_0)}$. Каждое из решений этого уравнения равномерно по t на $[t_0, \infty[$ стремится к нулевому решению при $x(t_0) \to 0$. Поэтому, если даже условие $x(t_0) = 0$ будет выполнено и приближенно, соответствующее решение $x(t)$ при $t \geq t_0$ будет приближенно совпадать с решением $x \equiv 0$.

Во втором примере в качестве системы (I) возьмем уравнение $\dot{x} = x$ с решениями $x = x(t_0)e^{t-t_0}$. В этом примере, как бы ни было $x(t_0)$ близко к нулю, оно отлично от нуля, соответствующее решение уходит с течением времени от решения $x(t) \equiv 0$ как угодно далеко.

Всюду в дальнейшем будем считать f и f_x – непрерывными.

<u>Определение I</u>. Решение $\varphi(t)$ системы (I) называется устойчивым при $t = t_0$, если оно определено при всех $t \geq t_0$ и если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, для которого неравенство $\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta$ влечет за собой неравенство $\|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ для любого решения $x(t)$ и любого $t \geq t_0$.

<u>Определение 2</u>. Решение $\varphi(t)$ системы (I) называется асимптотически устойчивым при $t = t_0$, если оно устойчиво при $t = t_0$ и если существует такое $\Delta > 0$, для которого из неравенства $\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \Delta$ следует равенство $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t) - \varphi(t)\| = 0$.

З а м е ч а н и е. Если решение $\varphi(t)$ устойчиво при $t = t_0$, то оно устойчиво и при любом $t = \tau$, при котором оно определено. Поэтому слова при $t = t_0$ в определениях I и 2 можно опустить. Доказательство этого факта следует из теоремы о непрерывной зависимости решений системы (I) от начальных данных и предлагается доказать читателю после проработки этого параграфа.

Данные определения принадлежат выдающемуся русскому математику А.М.Ляпунову (1857-1918). Соответствующее понятие устойчивости поэтому носит название устойчивости по Ляпунову. Мы, для краткости, будем говорить просто об устойчивости. О других понятиях устойчивости [3].

<u>Упр. I</u>. Когда система (I) имеет решение $x(t) \equiv 0$?

<u>Упр. 2</u>. Сформулируйте определения устойчивости и неустойчивости решения $\varphi(t) \equiv 0$ системы (I), если таковое решение имеется.

<u>Упр. 3</u>. Докажите, что решение $x \equiv 0$ уравнений а) $\dot{x} = x \sin t$ и б) $\dot{x} = -2x$ устойчиво. Будет ли оно асимптотически устойчивым?

<u>Упр. 4</u>. Докажите устойчивость решения $x = y \equiv 0$ системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x.$$

<u>Определение 3</u>. Решение $\varphi(t)$ называется неустойчивым, если оно не устойчиво.

<u>Упр. 5</u>. Сформулируйте определение неустойчивости решения на языке ε, δ.

Упр. 6. Дайте геометрическую интерпретацию понятию устойчивости решения.

Лемма. Решение $\varphi(t)$ системы (I) устойчиво (асимптотически устойчиво) тогда и только тогда, когда устойчиво (асимптотически устойчиво) решение $y \equiv 0$ системы

$$\dot{y} = f(t, y + \varphi(t)) - \dot{\varphi}(t). \tag{2}$$

Доказательство предлагается провести самостоятельно.

Таким образом, исследование на устойчивость (асимптотическую устойчивость) любого известного решения системы (I) можно заменить исследованием на устойчивость (асимптотическую устойчивость) нулевого решения системы (2). Нулевое решение иногда будем называть тривиальным решением.

Домашнее задание. Подготовиться к изложению темы "Линейные системы и уравнения", которое планируется провести на первом часу следующего занятия.

§2. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\dot{y} = P(t)\, y + q(t), \quad y^T = (y_1, \ldots, y_n), \quad t > \underline{t}, \tag{I}$$

и наряду с ней ей соответствующую однородную систему

$$\dot{x} = P(t)\, x. \tag{2}$$

Будем считать, что $P(t)$ и $q(t)$ непрерывны при $t > \underline{t}$. Систему (I) будем называть устойчивой (асимптотически устойчивой), если устойчиво (асимптотически устойчиво) любое решение этой системы.

Теорема. Линейная неоднородная система (I) устойчива (асимптотически устойчива) тогда и только тогда, когда устойчиво (асимптотически устойчиво) тривиальное решение $x \equiv 0$ соответствующей однородной системы (2).

Доказательство естественным образом разбивается на несколько этапов.

I. Пусть система (I) устойчива. Докажем, что тривиальное решение системы (2) также устойчиво.

Возьмем некоторое t_0. Через $\varphi(t)$ обозначим то решение системы (I), для которого $\varphi(t_0)=0$, а через $X(t)$ обозначим фундаментальную, нормированую в точке t_0 матрицу решений системы (2). Тогда общие решения систем (I) и (2) соответственно запишутся в виде

$$x = X(t)\,x(t_0);\quad y(t) = X(t)\,x(t_0) + \varphi(t), \tag{3}$$

если считать $y(t_0) = x(t_0)$.

Из устойчивости системы (I) следует устойчивость решения $\varphi(t)$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, для которого из неравенства $\|y(t_0)-\varphi(t_0)\|<\delta$ следует неравенство $\|y(t)-\varphi(t)\|<\varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$. Откуда, учитывая соотношения (3), убедимся в том, что из неравенства $\|x(t_0)\|<\delta$ следует неравенство $\|x(t)\|<\varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$, что означает устойчивость тривиального решения $x \equiv 0$ системы (2).

В качестве упражнения записать доказательства следующих этапов:

2. Пусть тривиальное решение системы (2) устойчиво. Докажите устойчивость системы (I), т.е. устойчивость любого её решения.

3. Пусть система (I) асимптотически устойчива. Докажите, что решение $x \equiv 0$ системы (2) также асимптотически устойчиво.

4. Пусть решение $x \equiv 0$ системы (2) асимптотически устойчиво. Докажите асимптотическую устойчивость системы (I).

С л е д с т в и е. Линейная система устойчива (асимптотически устойчива) тогда и только тогда, когда устойчиво (асимптотически устойчиво) хотя бы одно её решение. Схема доказательства: из устойчивости (асимптотической устойчивости) любого решения системы (I) следует (как?) устойчивость (асимптотическая устойчивость) тривиального решения системы (2). Тогда ссылка на теорему завершит доказательство.

Упр. I. Запишите подробное доказательство следствия по предложенной схеме.

Из изложенного следует, что если некоторая реальная система адекватно описывается линейной асимптотически устойчивой дифференциальной системой, то у этой реальной системы с течением времени устанавливается некоторый режим функционирования, не зависящий от начальных условий системы. Такая реальная система не имеет памяти. Так как по прошествии достаточно длительного промежутка времени, в течение которого система не подвергалась воздействию, невозможно установить, подвергалась ли эта система, вообще, какому-либо воздействию или нет. Типичным примером такой реальной системы является обычный маятник (§18). Реальные системы, описываемые нелинейными системами таким свойством, вообще говоря, не обладают, так как нелинейная дифференциальная система может иметь устойчивые и неустойчивые решения одновременно. Математическим примером такой системы может служить уравнение

$$\dot{x} = -\sin x,$$

интегральные кривые которого изображены на рис.I

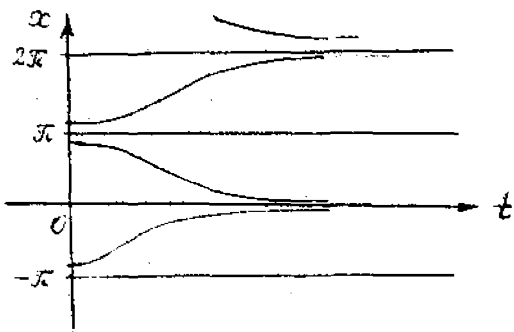


Рис. I.

Решения $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, этого уравнения асимптотически устойчивы, а решения $x = \pi(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, - неустойчивы. Такие нелинейные системы обладают памятью. В рассматриваемом примере, если систему мы оставили в положении равновесия $x \equiv 0$ и за наше отсутствие её вывели из этого положения, возмутив настолько сильно, что она попала в полосу притяжения решения $x = 2\pi$, то после нашего возвращения к наблюдениям над системой мы обнаружим, что система будет находиться в положении $x = 2\pi$, а не в положении $x = 0$. Реальным примером такой системы может служить "бусинка на ободе" (§19).

§3. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{x} = P(t)\,x, \quad t > \underline{t}, \tag{I}$$

с непрерывной матрицей $P(t)$. Из §2 следует, что эта система устойчива (асимптотически устойчива) тогда и только тогда, когда устойчиво (асимптотически устойчиво) её нулевое решение.

<u>Теорема I</u>. Система (I) устойчива тогда и только тогда, когда все её решения ограничены на некотором полуинтервале $[t_0, \infty[$.

Необходимость доказывается от противного. Пусть вопреки утверждению теоремы система (I) устойчива и имеет неограниченное на $[t_0, \infty[$ решение $\bar{x}(t)$, т.е. решение с неограниченной нормой $\|\bar{x}(t)\|$. Из устойчивости системы (I) следует устойчивость её нулевого решения. Пусть нам задано $\varepsilon > 0$. Из устойчивости нулевого решения следует существование $\delta > 0$, для которого верна импликация: $\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geqslant t_0, \ \forall x(t)$.
Построим решение $\underline{x}(t) = \frac{\delta}{2}\, \bar{x}(t)/\|\bar{x}(t_0)\|$ системы (I).
Для него $\|\underline{x}(t_0)\| < \delta$, но $\exists\, t > t_0$, при которых $\|\underline{x}(t)\| \geqslant \varepsilon$. Это противоречит выбору δ. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть все решения системы (I) ограничены на $[t_0, \infty[$, а $X(t)$ есть её фундаментальная, нормированная при $t = t_0$ матрица. Из ограниченности решений следует существование такого числа $\mathcal{M}$, для которого $\|X(t)\| \leqslant \mathcal{M}$ при всех $t \geqslant t_0$. Поэтому для произвольного решения $x(t)$ системы (I) верны неравенства $\|x(t)\| = \|X(t)\,x(t_0)\| \leqslant \mathcal{M}\,\|x(t_0)\| < \mathcal{M}\delta < \varepsilon$, если $\delta < \varepsilon/\mathcal{M}$. Достаточность и теорема I доказаны.

<u>Упр. I</u>. Почему $\underline{x}(t)$ является решением системы (I)?

<u>Упр. 2</u>. Дайте подробное доказательство того, что из ограниченности всех решений системы (I) следует ограниченность фундаментальной матрицы $X(t)$.

<u>Теорема 2</u>. Система (I) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все её решения стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Необходимость доказывается от противного. Пусть асимптотически устойчивая система имеет решение $\bar{x}(t)$, не стремящееся к нулю при $t \to \infty$.

Тогда решение $x(t) \equiv \frac{\Delta}{2}\tilde{x}(t)/\|\tilde{x}(t_0)\|$ также не стремится к нулю. Отсюда следует, что нулевое решение системы (I) не является асимптотически устойчивым, что противоречит асимптотической устойчивости системы. Необходимость доказана.

Достаточность. Из стремления к нулю решений системы (I) следует их ограниченность, а значит и устойчивость как самой системы (I), так и её нулевого решения. Так как нулевое решение устойчиво и любое решение $x(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$, то нулевое решение и асимптотически устойчиво. Из асимптотической устойчивости нулевого решения следует асимптотическая устойчивость самой системы.

Упр. 3. Запишите подробное доказательство теоремы 2.

§4. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

В этом параграфе рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax, \quad x^T = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{I}$$

где A есть постоянная $n \times n$ матрица.

В связи с этим нам понадобятся некоторые сведения из теории таких систем[I], известные нам из общего курса по обыкновенным дифференциальным уравнениям. С системой (I) связывается уравнение $|A - \lambda E| = 0$, называемое характеристическим уравнением системы (I). Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ $(m \leq n)$ его корни. Считаем, что корень λ_j имеет кратность n_j. Каждому корню λ_j соответствует ровно n_j линейно независимых комплексных решений. Каждое из этих решений можно записать в виде $x_j(t) = \sum_{s=1}^{k} \gamma_s t^s e^{\lambda_j t}$, где k - натуральное число, не превосходящее $n_j - 1$, а γ_s - постоянный вектор $\gamma_s^T = (\gamma_{s1}, \dots, \gamma_{sn})$. Из решений такого вида и состоит фундаментальная система комплекснозначных решений системы (I). Общее комплекснозначное решение системы (I) представляет собой линейную комбинацию решений, составляющих фундаментальную систему решений. Множество всех действительных решений содержится во множестве всех комплекснозначных решений.

[I] Основные сведения по теории линейных стационарных систем студенты излагают самостоятельно в письменном виде во время аудиторных занятий. Изложения сдаются преподавателю, после чего преподаватель сообщает проведенные ниже краткие сведения по теории линейных стационарных систем.

Лемма. Предел $\lim\limits_{t\to\infty} |t^k e^{\lambda t}|$ при $k \geq 0$ равен нулю тогда и только тогда, когда $Re\,\lambda < 0$.

$\triangleright$ Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$. Тогда $Re\,\lambda = \alpha$ и

$$|t^k e^{\lambda t}| = |t|^k e^{\alpha t} |e^{i\beta t}| = |t|^k e^{\alpha t}.$$

Откуда и следует утверждение леммы.

Упр. I. Закончить доказательства леммы.

Вопрос: Какими должны быть корни характеристического уравнения, чтобы система (I) была асимптотически устойчива?

Теорема. Линейная стационарная система (I) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все реальные части $Re\,\lambda_j$ корней характеристического уравнения этой системы отрицательны. Необходимость доказывается от противного. Лемма используется при доказательстве и необходимости и достаточности.

Упр. 2. Докажите теорему.

Определение. Матрица A называется устойчивой, если все $Re\,\lambda_j < 0$.

Используя это определение, теорему можно сформулировать следующим образом: система (I) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда матрица A устойчива.

Для определения устойчивости матрицы A разработаны различные способы [3]. Приведем здесь

Критерий Гурвица. Пусть характеристическое уравнение имеет вид $a_n\lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$, где $a_0 > 0$ и $a_n \neq 0$. Составим матрицу

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} \ldots & a_n \end{bmatrix} \text{где } a_j = 0 \text{, если } j > n. \qquad (2)$$

Рассматриваемое уравнение имеет корни только с отрицательными действительными частями тогда и только тогда, когда положительны все главные миноры

$$\Delta_1 \equiv a_1,\ \Delta_2 \equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_3 & a_2 \end{vmatrix} \text{ и т.д.}$$

матрицы (2).

Упр. 3. Каким условиям должны удовлетворять числа a и b, чтобы система $\dot{x}=y$, $\dot{y}=ax+by$ была асимптотически устойчивой?

Замечание. Можно доказать [3, с.91], что если действительные части всех корней характеристического уравнения отрицательны, то все коэффициенты рассматриваемого уравнения имеют один и тот же знак.

Теорема 2. Пусть хотя бы для одного корня характеристического уравнения системы (I) $\mathrm{Re}\,\lambda_j>0$. Тогда система (I) неустойчива.

▷ В рассматриваемом случае система (I) имеет неограниченное решение, соответствующее корню λ_j. Поэтому согласно §3 система (I) неустойчива. ◁.

§5. ВТОРОЙ (ПРЯМОЙ) МЕТОД ЛЯПУНОВА ДЛЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим систему

$$\dot{x}=f(x),\quad x^T=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^n. \qquad (I)$$

Будем считать, что область задания $\mathcal{D}$ этой системы содержит точку $x=0$ и $f(0)=0$. В этом предположении система (I) имеет тривиальное решение $x(t)\equiv 0$. Будем также считать, что решения системы (I) однозначно определяются своими начальными данными.

Наряду с системой (I) рассмотрим функцию $V(x)$, $V: G\to\mathbb{R}$, которая определена в некоторой окрестности $G\subset\mathcal{D}$ точки $x=0$ и дифференцируема там.

Определение. Производной функции $V(x)$ в силу системы (I) назовем функцию $\dot{V}(x)$, определяемую формулой

$$\dot{V}(x)\triangleq\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x)=\frac{\partial V_1}{\partial x_1}(x)f_1(x)+\ldots+\frac{\partial V_1}{\partial x_n}f_n(x). \qquad (2)$$

Упр. I. Запишите в координатной форме систему (I) и формулу (2). В общем курсе обыкновенных дифференциальных уравнений доказывалась

Лемма. Пусть $x(t)$, $t\in J$, есть некоторое решение системы (I). Тогда

$$\dot{V}(x(t))\equiv\frac{d}{dt}V(x(t)),\quad t\in J.$$

Упр. 2. Докажите лемму.

Упр. 3. Пусть $V(x,y) = x^2 + y^2$. Найдите производную этой функции в силу системы

$$\dot{x} = y - x^3, \quad \dot{y} = -x - y^5.$$

Что можно сказать об ограниченности нормы любого решения $x(t)$, $y(t)$ рассматриваемой системы? Можно ли утверждать, что любое решение рассматриваемой системы стремится к нулю при $t \to +\infty$? (Если слушатели затрудняются дать ответ на этот вопрос, то его следует повторить после разбора теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости).

Теорема Ляпунова об устойчивости. Пусть для системы (I) в некоторой окрестности G точки $x=0$ существует дифференцируемая функция $V: G \to \mathbb{R}$, обладающая свойствами:

I) $V(x) > 0$ при $x \neq 0$, а $V(0) = 0$;

2) $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x) \leq 0$ при всех $x \in G$.

Тогда тривиальное решение $x \equiv 0$ системы (I) устойчиво.

▷ Пусть задано $\varepsilon > 0$. Найдем $V_0 \triangleq \min\limits_{\|x\| = \varepsilon} V(x)$.

Выберем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы для любого x, для которого $\|x\| < \delta$, выполнялось неравенство $V(x) \leq V_0/2$. Покажем теперь, что построенное δ удовлетворяет необходимым требованиям, т.е. что для выбранного $\delta > 0$ неравенство $\|x(t_0)\| < \delta$ влечет за собой неравенство $\|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$. Действительно, если это не так, то для некоторого решения $x(t)$ будет существовать момент времени $\tau > t_0$, для которого $\|x(\tau)\| = \varepsilon$, хотя $\|x(t_0)\| < \delta$. Тогда

$$V(x(\tau)) \geq V_0 > \frac{V_0}{2} \geq V(x(t_0)), \text{ т.е. } V(x(\tau)) > V(x(t_0)).$$

Таким образом, функция $V(x(t))$ возросла при изменении t от t_0 до τ, хотя её производная $dV(x(t))/dt = \dot{V}(x(t)) \leq 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Вопросы к доказательству теоремы, предназначенные для самостоятельной проработки:

I) Можно ли утверждать, что $V_0 > 0$?

2) Какое свойство функции $V(x)$ обеспечивает возможность выбора $\delta > 0$ таким, что $V(x) < V_0/2$ при $\|x\| < \delta$?

3) Почему можно утверждать, что существует τ, для которого $\|x(\tau)\| = \varepsilon$, а не $\|x(\tau)\| \geq \varepsilon$?

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Пусть для системы (I) существует дифференцируемая в некоторой окрестности G точки $x=0$ функция $V: G \to \mathbb{R}$, обладающая свойствами:

1) $V(x)>0$ при $x \neq 0$ и $V(0)=0$;

2) $\dot V(x)=\frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x)<0$ при всех $x \in G$ и $x \neq 0$.

Тогда тривиальное решение $x \equiv 0$ системы (I) асимптотически устойчиво.

▷ Устойчивость решения $x \equiv 0$ следует из предыдущей теоремы.

Для доказательства того, что начинающиеся вблизи $x=0$ решения стремятся к нулю при $t \to \infty$, выберем $\Delta > 0$ таким, чтобы неравенство $\|x(t_0)\| < \Delta$ влекло за собой выполнимость условия $\|x(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$, где ε настолько мало, что шар $\|x\| \leqslant \varepsilon$ лежит в G. Тогда $\frac{d}{dt} V(x(t)) = \dot V(x(t)) < 0$ при всех $t \geqslant t_0$. Поэтому функция $V(x(t))>0$ строго убывает и потому имеет предел

$$\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = \alpha \geqslant 0 \quad \text{и} \quad V(x(t_0)) \geqslant V(x(t)) \geqslant \alpha > 0.$$

В первом случае, когда $\alpha > 0$, из неравенства $V(x(t)) \geqslant \alpha$ следует неравенство $\|x(t)\| \geqslant \beta > 0$ и, значит, неравенство $\dot V(x(t)) \geqslant \gamma > 0$. Тогда для $t \geqslant t_0$

$$V(x(t)) - V(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t} \dot V(x(\tau))d\tau \geqslant \int_{t_0}^{t} \gamma\, d\tau = \gamma(t-t_0)$$

и, значит, $V(x(t)) \to \infty$ при $t \to \infty$. С другой стороны, $V(x(t))$ должна быть ограниченной на полуинтервале $t \geqslant t_0$, так как на этом полуинтервале $\|x(t)\| \leqslant \varepsilon$. Полученное противоречие убеждает нас в том, что $\alpha = 0$. Это значит, что $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = 0$ и потому $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$. ◁

<u>Первая теорема Ляпунова о неустойчивости</u>. Пусть для системы (I) существует дифференцируемая в некоторой окрестности G точки $x=0$ функция $V: G \to \mathbb{R}$, обладающая свойствами:

1) $\dot V(x) > 0$ при всех $x \neq 0$ и $x \in G$;

2) в каждой окрестности точки $x=0$ существует точка x_0, в которой $V(x_0)>0$. Тогда решение $x(t) \equiv 0$ системы (I) неустойчиво.

Доказательство от противного. Пусть вопреки утверждению теоремы решение $x(t) \equiv 0$ системы (I) устойчиво. Возьмем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы шар $\|x\| \leqslant \varepsilon$ содержался в G. По предположению существует $\delta > 0$, для которого $\|x(t)\| < \varepsilon$ для любого решения $x(t)$ со свойством $\|x(t_0)\| < \delta$. Для всех таких решений по условию теоремы $\dot V(x(t)) > 0$ и потому $V(x(t)) \geqslant V(x(t_0))$ при всех $t \geqslant t_0$.

Выберем из этих решений такое решение $x(t)$, для которого $V(x(t_0))>0$. Тогда из неравенства $V(x(t))\geq V(x(t_0))>0$ будет следовать существование числа $\alpha>0$, для которого $\|x(t)\|\geq\alpha$. Поэтому при всех $t\geq t_0$ верно неравенство

$$\dot V(x(t))\geq \min_{\varepsilon\geq\|x\|\geq\delta}\dot V(x)\triangleq\beta>0.$$

Из этого неравенства и продолжимости решения $x(t)$ на промежуток $t\geq t_0$ следуют соотношения

$$V(x(t))=V(x(t_0))+\int_{t_0}^{t}\dot V(x(\tau))d\tau\geq V(x(t_0))+\int_{t_0}^{t}\beta d\tau=V(x(t_0))+\beta(t-t_0)\to\infty.$$

А это значит, что решение $x(t)$ при достаточно больших t обязано выйти за пределы шара $\|x\|\leq\varepsilon$. Полученное утверждение противоречит предположению. ◁.

Вопросы к доказательству:

1. Почему решение $x(t)$, для которого $\|x(t_0)\|<\delta$ можно считать существующим при всех $t\geq t_0$?
2. Откуда следует, что $\beta>0$?
3. Почему из неравенств $V(x(t))\geq V(x(t_0))>0$ следует неравенство $\|x(t)\|\geq\alpha$?

<u>Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости</u>. Пусть для системы (I) существуют постоянная $\alpha>0$ и определенные в некоторой окрестности G точки $x=0$ функции $V(x)$ и $W(x)$, обладающие свойствами:

1) функция V дифференцируема, а W непрерывна и
$$\dot V(x)\equiv\alpha V(x)+W(x);$$
2) $W(x)>0$ при всех $x\in G$ и $x\neq 0$;
3) в каждой окрестности точки $x=0$ существует точка x_0, в которой $V(x_0)>0$.

Тогда решение $x(t)\equiv 0$ системы (I) неустойчиво.

Доказательство. Для любого решения $x(t)$ системы (I) по условию выполнено тождество

$$\dot V(x(t))\equiv\alpha V(x(t))+W(x(t)).$$

Рассматривая это тождество как линейное дифференциальное уравнение относительно $V(x(t))$, получим соотношения

$$V(x(t))=e^{\alpha t}V(x(t_0))+e^{\alpha t}\int_{t_0}^{t}e^{-\alpha\tau}W(x(\tau))d\tau\geq e^{\alpha t}V(x(t_0)).$$

Из этих соотношений, при $V(x(t_0))>0$ следует, что $V(x(t))\to+\infty$ при всех $t\to\infty$. ◁

Упр. 4. Записать подробно доказательство этой теоремы. В случае затруднений обратиться еще раз к изучению доказательства первой теоремы Ляпунова о неустойчивости.

Доказанные теоремы обосновывают метод исследования решений системы (I) на устойчивость. Этот метод состоит в том, чтобы для исследуемой системы подобрать соответствующую функцию V. Ляпунов разработал два метода исследования решений на устойчивость. Изложенный выше метод он называл второй методой [4]. Этот метод получил широкое распространение. Учитывая, что этот метод не требует отыскания решений исследуемой системы, а позволяет проводить исследование непосредственно по правой части системы, многие авторы называют его прямым методом (прямо непосредственно по системе). Функция V, удовлетворяющая хотя бы одной теореме Ляпунова, называется функцией Ляпунова.

Упр. 5. Будет ли функция $V(x)=x^2$ функцией Ляпунова для следующих систем:

1) $\dot{x}=-x$; 2) $\dot{x}=-x(y^2+1)$, $\dot{y}=y(x^2+1)$; 3) $\dot{x}=-\sin x$.

З а м е ч а н и е. Теоремы, аналогичные доказанным, установлены Ляпуновым и для систем, правая часть которых зависит явно от времени [4, 3].

Упр. 6. Подобрав соответствующую функцию Ляпунова, установить устойчивость или неустойчивость нулевого решения следующих систем:

1) $\begin{cases} \dot{x}=y-2x^7, \\ \dot{y}=-x-3y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x}=y-x^3, \\ \dot{y}=-2x-y^3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x}=y-x^3, \\ \dot{y}=-x^3-y^3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dot{x}=y^3-3x^7, \\ \dot{y}=-6x^5-y; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dot{x}=y-\sin x, \\ \dot{y}=-x-\sin y; \end{cases}$ 5) $\begin{matrix} \dot{x}=y-x-x^3, \\ \dot{y}=-x-y; \end{matrix}$

§6. АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА О СУЩЕСТВОВАНИИ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ С ЗАДАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В СИЛУ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax, \quad A = (a_{ij}), \quad x^T = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{I}$$

с постоянными коэффициентами a_{ij}. Пусть

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \tag{2}$$

есть характеристическое уравнение этой системы.

<u>Теорема</u>. Пусть для корней λ_r характеристического уравнения (2) при любых r и s (в том числе и при $r = s$) выполняются соотношения $Re\lambda_r + Re\lambda_s \neq 0$. Тогда для любой квадратичной формы $W(x)$ существует квадратичная форма $Q(x)$, производная которой $\dot{Q}(x)$ в силу системы (I) равна $W(x)$, т.е. $\dot{Q}(x) \equiv W(x)$.

Доказательство разобьем на несколько шагов.

1. Отметим сначала, что квадратичные формы

$$x_1^2, \; x_1x_2, \; x_1x_3, \ldots, \; x_{n-1}x_n, \; x_n^2$$

линейно независимы, так как любые две из них зависят от разных независимых переменных.

2. Найдем теперь квадратичные формы $(x_r x_s)' = \sum^{n} b_{ik} x_i x_k$, представляющие собой производные в силу системы (I) от функций $x_r x_s$. Методом от противного покажем, что формы $(x_r x_s)'$ линейно независимы. В самом деле, если для некоторых c_{rs}, не все из которых равны нулю, выполнено соотношение $\sum c_{rs} (x_r x_s)' \equiv 0$, то для любого решения $x^T(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ системы (I) будет выполнено тождество $\sum c_{rs} \frac{d}{dt}(x_r(t) x_s(t)) = 0$, из которого следует тождество

$$\sum c_{rs} (x_r(t) x_s(t)) \overset{t}{\equiv} C,$$

где c - постоянная. Полученное тождество, учитывая вид решения $x(t)$ системы (I), можно записать в форме

$$\sum c_{rs}\, x_r(t) x_s(t) = \sum \rho_{rs}(t)\, e^{(Re\lambda_r + Re\lambda_s)t} \equiv c, \qquad (3)$$

где $\rho_{rs}(t)$ представляют собой многочлены, относительно t, коэффициенты которых есть некоторые ограниченные функции. При этом считается, что все $Re\lambda_r + Re\lambda_s$ различны. Так как $Re\lambda_r + Re\lambda_s \neq 0$, то величины $\rho_{rs}(t)\, e^{(Re\lambda_r + Re\lambda_s)t}$ неограничены на $\mathbb{R}$. Поэтому тождество (3) может выполняться только тогда, когда $c = 0$, т.е. когда $\sum c_{rs}\, x_r(t) x_s(t) \equiv 0$ для любого решения системы (I). Поэтому при всех x_r, x_s обязательно выполнится тождество $\sum c_{rs}\, x_r x_s \equiv 0$. А это значит, что функции $x_r x_s$ линейно зависимы. Это противоречит первому пункту доказательства. Таким образом, квадратичные формы $(x_r x_s)'$ линейно независимы.

3. Рассмотрим теперь векторное пространство $\vec{V}$, натянутое на векторы $x_1^2, x_1 x_2, \ldots, x_{n-1} x_n, x_n^2$ т.е. пространство квадратичных форм. Квадратичные формы $(x_r x_s)'$ являются элементами этого пространства и их ровно столько, сколько форм $(x_r x_s)$. Кроме того, формы $(x_r x_s)'$ линейно независимы. Поэтому они образуют базис в $\vec{V}$. Квадратичная форма $W(x)$, данная нам по условию, является элементом $\vec{V}$. Поэтому её можно разложить по базису $(x_r x_s)'$, т.е. представить в виде

$$W(x) = \sum d_{rs}\, (x_r x_s)', \qquad (4)$$

где d_{rs} есть некоторые числа.

Положим $Q(x) \stackrel{\Delta}{=} \sum d_{rs}\, x_r x_s$. Тогда согласно (4) производная от Q в силу системы (I) $\dot{Q}(x) = W(x)$. Теорема доказана.

Следствие I. Пусть система (I) асимптотически устойчива. Тогда существует положительно определенная квадратичная форма $V(x)$, производная которой в силу системы (I) $\dot{V}(x) = -\|x\|^2$.

▷ Так как система (I) асимптотически устойчива, то согласно теореме §4 все $Re\,\lambda_r < 0$. Поэтому выполнены условия только что доказанной теоремы. Согласно этой теореме для квадратичной формы $-\|x\|^2$ существует квадратичная форма $V(x)$, для которой $\dot{V}(x) = -\|x\|^2$. Покажем, что $V(x)$ положительно определенная квадратичная форма. Тем самым теорема будет доказана. Действительно.

но, если квадратичная форма $V(x)$ принимает в некоторой точке x_0 отрицательное значение, то $V(\alpha x_0) = \alpha^2 V(x_0) < 0$ при всех положительных α. Это означает, что в каждой окрестности точки $x=0$ существует точка αx_0, в которой $V(\alpha x_0) < 0$. Тогда функция $W(x) \triangleq -V(x)$ удовлетворяет первой теореме Ляпунова о неустойчивости, а система (I) неустойчива. Противоречие с асимптотической устойчивостью системы (I) убеждает нас в том, что $V(x)$ не может принимать отрицательных значений.

Покажем, что $V(x)$ в точках x, отличных от точки $x=0$, не может обращаться в нуль. Действительно, если для некоторых $x_0 \neq 0$ выполнено равенство $V(x_0) = 0$, то для решения $x(t)$, $x(0) = x_0$, при $t > 0$ будет выполнено неравенство $V(x(t)) < 0$, так как в силу неравенства $\dot V(x(t)) \equiv -\|x(t)\|^2 < 0$ функция $V(x(t))$ строго убывает. Ранее, однако, было показано, что $V(x)$ не может принимать отрицательных значений.

Таким образом, $V(x)$ при $x \neq 0$ не может принимать отрицательных значений и обращаться в ноль. Это означает, что $V(x)$ есть положительно определенная квадратичная форма. ◁.

С л е д с т в и е 2. Пусть хотя бы один корень характеристического уравнения (2) имеет положительную реальную часть α_0. Тогда существует положительное число α и квадратичная форма $V(x)$, которая в любой окрестности начала координат принимает положительные значения и производная которой, в силу системы (I)

$$\dot V(x) = \alpha V(x) + \|x\|^2.$$

▷ Наряду с системой (I) рассмотрим систему

$$\dot x = \left(A - \frac{\alpha}{2} E\right) x, \tag{5}$$

где α есть некоторое, подлежащее выбору, число. Характеристическое уравнение этой системы имеет вид $\left|A - \left(\frac{\alpha}{2} + \rho\right) E\right| = 0$. Поэтому его корни ρ_r связаны с корнями λ_r уравнения (2) по формуле $\frac{\alpha}{2} + \rho_r = \lambda_r$, а

$$Re\,\rho_r + Re\,\rho_s = Re\,\lambda_r + Re\,\lambda_s - \alpha. \tag{6}$$

Выберем теперь число $\alpha > 0$ так, чтобы выполнялись два условия:

1) α не совпадает ни с одним из чисел $Re\lambda_r + Re\lambda_s$;

2) среди чисел $\rho_r = \lambda_r - \frac{\alpha}{2}$ есть число с положительной реальной частью. При таком выборе числа α в силу соотношения (6) $Re\rho_r + Re\rho_s \neq 0$. Поэтому, согласно теореме существует квадратичная форма $V(x)$, производная которой $\dot V_5(x)$ в силу системы (5), $\dot V_5(x) = \|x\|^2$. Так как система (5) неустойчива, ибо имеет корень с положительной реальной частью, то функция $V(x)$, чтобы не противоречить теореме Ляпунова об устойчивости, обязана при $x \neq 0$ принимать положительные и нулевые значения. Если функция $V(x)$ в точке x_0 принимает нулевое значение, то на решении $x(t)$, $x(0) = x_0$, она при $t > 0$ принимает положительные значения $V(x(t))$, так как $V(x(t))$ в силу условия $\dot V(x(t)) = \|x(t)\|^2 > 0$ строго возрастает. Таким образом, хотя бы в одной точке $x_0 \neq 0$ функция $V(x_0) > 0$. Тогда в силу однородности в любой окрестности точки $x = 0$ существует точка τx_0, в которой $V(\tau x_0) = \tau^2 V(x_0) > 0$.

Для рассматриваемой квадратичной формы $V(x)$, используя теорему Эйлера об однородных функциях [5, с.452], получим соотношения

$$\|x\|^2 = \dot V_5(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(A - \frac{\alpha}{2}E)x = \frac{\partial V}{\partial x}Ax - \frac{\alpha}{2}\sum_1^n \frac{\partial V}{\partial x_r}x_r =$$

$$= \dot V(x) - \alpha V(x),$$

где $\dot V$ означает производную от V в силу системы (I). Поэтому $\|x\|^2 = \dot V(x) - \alpha V(x)$. Откуда и следует утверждение теоремы

§7. ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Рассмотрим систему

$$\dot x = f(x),\ f(0) = 0,\ x^T = (x_1, \dots, x_n), \tag{I}$$

определенную в некоторой окрестности точки $x=0$. Предположим, что каким-то образом вектор-функцию $f(x)$ нам удалось представить в виде

$$f(x) = Ax + \varphi(x), \tag{2}$$

где $A=(a_{ij})$ - постоянная $n\times n$ - матрица, а $\varphi(x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{\|x\|} = 0. \tag{3}$$

Тогда говорят, что система

$$\dot{x} = Ax \tag{4}$$

есть система первого (линейного) приближения для системы (I).

<u>Теорема I</u>. Если система (4) линейного приближения для системы (I) асимптотически устойчива, то тривиальное решение $x\equiv 0$ системы (I) асимптотически устойчиво.

▷ Из асимптотической устойчивости системы (4) следует, согласно §6, существование положительно определенной квадратичной формы $V(x)$, производная которой в силу системы (4)

$$\dot{V}_4(x) = \frac{\partial V}{\partial x} Ax = -\|x\|^2.$$

Производная квадратичной формы $V(x)$ в силу системы (I)

$$\dot{V}_1(x) = \frac{\partial V}{\partial x}\left(Ax + \varphi(x)\right) = -\|x\|^2 + \frac{\partial V}{\partial x}\varphi(x) =$$
$$= -\|x\|^2\left[1 - \left(\frac{1}{\|x\|}\frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\varphi(x)}{\|x\|}\right]. \tag{5}$$

Так как $V(x)$ квадратичная форма, то $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ при всех i является линейной формой переменных x_i:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{in}x_n.$$

Из ограниченности функций $x_i/\|x\|$ следует ограниченность функций $\left(\frac{1}{\|x\|}\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)$. Поэтому из условия (3) следует соотношение

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\|x\|}\frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\varphi(x)}{\|x\|} = 0.$$

поэтому при достаточно малом Δ неравенство

$$\left| \left(\frac{1}{\|x\|} \frac{\partial V}{\partial x} \right) \frac{\varphi(x)}{\|x\|} \right| < \frac{1}{2}$$

выполнено при всех x, для которых $\|x\| < \Delta$. Для этих x, как следует из соотношений (5), $\overset{\circ}{V_1}(x) < 0$, если только $x \neq 0$. Тогда согласно теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости решение $x \equiv 0$ системы (I) асимптотически устойчиво. ◁

Следствие. Пусть все реальные части корней характеристического уравнения системы первого приближения для системы (I) $Re\,\lambda_s < 0$. Тогда тривиальное решение системы (I) асимптотически устойчиво.

Теорема 2. Пусть среди корней характеристического уравнения $|A-\lambda E| = 0$ системы первого приближения (4) имеется хотя бы один с положительной реальной частью. Тогда тривиальное решение системы (I) неустойчиво.

▷ Из следствия 2 §5 следует существование положительного числа α и квадратичной формы $V(x)$, принимающей положительные значения в любой окрестности точки $x = 0$, для которых производная от V в силу системы (4)

$$\overset{\circ}{V_4}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} A x = \alpha V(x) + \|x\|^2.$$

Поэтому производная от V в силу системы (I)

$$\overset{\circ}{V_1}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(Ax + \varphi(x)) = \alpha V(x) + W(x),$$

где $W(x) = \|x\|^2 + \frac{\partial V}{\partial x}\varphi(x).$

По аналогии с соответствующим промежутком доказательства теоремы I докажем, что $W(x)$ при достаточно малых $\|x\| \neq 0$ принимает только положительные значения. Тогда согласно второй теореме Ляпунова о неустойчивости решение $x \equiv 0$ системы (I) неустойчиво. ◁

Упр. I. Докажите, что функция $W(x)$, определяемая формулой (6) при достаточно малых $\|x\| \neq 0$, принимает только положительные значения.

Упр. 2. Исследуйте на устойчивость нулевое решение следующих систем:

1) $\dot{x} = -x + x^3$;

2) $\dot{x} = -\sin x$;

3) $\dot{x} = 1 - e^x$;

4) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = ax + by + cx^3$.

§8. ИССЛЕДОВАНИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x), \quad f(o) = o, \quad x^T = (x_1, \dots, x_n), \tag{I}$$

определенную в некоторой окрестности точки $x = 0$. Если $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = Ax + \varphi(x), \quad \lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{\|x\|} = 0, \tag{2}$$

то система первого приближения $\dot{x} = Ax$, согласно предыдущему параграфу, во многих случаях позволяет исследовать решение $x \equiv 0$ на устойчивость. А именно: если все корни характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$ имеют отрицательные действительные части, то решение $x \equiv 0$ системы (I) асимптотически устойчиво; если же среди этих корней имеется хоть один корень с положительной реальной частью, то решение $x \equiv 0$ системы (I) неустойчиво. Из этих рассуждений следует, что нам полезно научиться выделять систему первого приближения, т.е. находить матрицу A. С этой целью допустим, что вектор-функция

$$f^T = (f_1, \dots, f_n)$$

дифференцируема в точке $x = 0$, т.е. для любого $i = \overline{1,n}$

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f_i(o)}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(o) x_n + o(\|x\|).$$

Это значит, что если $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$, то

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(0)=\left|\begin{matrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\ldots\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \ldots\ldots\ldots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\ldots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{matrix}\right|_{x=0}. \qquad (3)$$

Будем по-прежнему рассматривать систему (I), считая, что $f(x)$ задана и дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и обращается в нуль при $x=x_0$, т.е. $f(x_0)=0$. Тогда

$$f(x)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\,(x-x_0)+o(\|x-x_0\|)$$

и система (I) имеет вид

$$\dot{x}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)(x-x_0)+o(\|x-x_0\|), \qquad (4)$$

а функция $x(t)\equiv x_0$ является её решением. Исследуем это решение на устойчивость. Для этого в системе (4) сделаем замену переменных $y=x-x_0$. Тогда эта система будет преобразована в систему

$$\dot{y}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\,y+o(\|y\|). \qquad (5)$$

Решению $x(t)\equiv x_0$ системы (4) будет соответствовать решение $y(t)\equiv 0$ системы (5). Причем из устойчивости (неустойчивости) решения $y(t)\equiv 0$ вытекает устойчивость (неустойчивость) решения $x(t)\equiv x_0$. Системой первого приближения для системы (5) является система $\dot{y}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\,y$. Поэтому, если все корни уравнения

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)-\lambda E\right|=0$$

имеют отрицательные действительные части, то решение $x(t)\equiv x_0$ системы (I) асимптотически устойчиво; если же среди этих корней имеется хотя бы один с положительной действительной частью, то рассматриваемое решение неустойчиво.

Упр. I. По первому приближению исследуйте на устойчивость все стационарные решения следующих уравнений и систем:

1) $\dot{x}=\sin\pi x$; 2) $\dot{x}=\cos\pi x$;

3) $\dot{x}=\sin y,\ \dot{y}=x+y$; 4) $\dot{x}=y+x^2,\ \dot{y}=z,\ \dot{z}=3y-2x$.

Упр. 2. По первому приближению исследуйте на устойчивость нулевые решения следующих систем:

1) $\dot{x} = y - x + x^2, \qquad \dot{y} = -x - y + y^2;$

2) $\dot{x} = \sin y - \sin x, \qquad \dot{y} = -x - y + y^2;$

3) $\dot{x} = \sin \pi y, \qquad \dot{y} = y - \cos x + 1.$

Замечание. Решения уравнений высших порядков вида $x^{(n)} = f(t, x, \ldots, x^{(n-1)})$ исследуются на устойчивость после того, как эти уравнения стандартным образом (заменой $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$, $\ddot{x} = x_3, \ldots$) сведены к системе.

Упр. 3. Исследуйте на устойчивость нулевые решения следующих уравнений:

1) $\dddot{x} - 2\ddot{x} + \sin x = 0$; 2) $\ddot{x} + 2\dot{x} + \sin x = 0$.

§9. ЛОГАРИФМ МАТРИЦЫ

Определение. Матрица Y называется логарифмом матрицы X и обозначается $Y = \ln X$, если $e^Y = X$.

Напомним, что

$$e^X \triangleq E + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \ldots .$$

Теорема. Всякая неособенная матрица X имеет логарифм.

Вместо доказательства этой теоремы укажем явные формулы для вычисления $\ln X$.

I. Пусть вначале

$$X = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

есть диагональная матрица. Тогда

$$\ln X \triangleq \begin{bmatrix} \ln\lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ln\lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ln\lambda_n \end{bmatrix}.$$

2. Если

$$X = \lambda E + J_1, \quad J_1 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

есть клетка Жордана, то

$$\operatorname{Ln} X \triangleq E \operatorname{Ln} \lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{J_1}{\lambda} \right)^k .$$

Так как в рассматриваемом случае

$$X = \lambda E + J_1 = \lambda \left(E + \frac{J_1}{\lambda} \right),$$

то это определение соответствует обычной формуле

$$\ln(\lambda + z) = \ln \lambda + \ln\left(1 + \frac{z}{\lambda}\right) = \ln \lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{z}{\lambda} \right)^k .$$

3. Если

$$X = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{bmatrix},$$

где $J_1, \dots, J_m$ - клетки Жордана, то

$$\operatorname{Ln} X \triangleq \begin{bmatrix} \operatorname{Ln} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \operatorname{Ln} J_m \end{bmatrix}.$$

4. Если X есть произвольная неособая матрица, то её с помощью некоторой неособой матрицы S можно привести к форме Жордана так, что $X = S^{-1} J S$. Тогда полагаем

$$\operatorname{Ln} X \triangleq S^{-1} \operatorname{Ln} J \, S .$$

Можно проверить, что в каждом из указанных случаев выполняется необходимое тождество $e^{\operatorname{Ln} X} \equiv X$.

Упр. В каждом из указанных ниже случаев найдите $\operatorname{Ln} X$ и проверьте равенство $e^{\operatorname{Ln} X} = X$:

1) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 2) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; 3) $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

§10. ТЕОРИЯ ФЛОКЕ

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = P(t)x, \quad x^T = (x_1, \ldots, x_n), \tag{1}$$

с непрерывной на $\mathbb{R}$ и ω -периодической матрицей $P(t)$. Имеет место

Теорема Флоке. Для линейной системы (1) с непрерывной ω -периодической матрицей $P(t)$ фундаментальная матрица решений $X(t)$, $X(0)=E$, имеет вид

$$X(t) \equiv \varphi(t)\, e^{\Lambda t}, \tag{2}$$

где Λ - некоторая постоянная матрица $n \times n$, а $\varphi(t)$ - неособая ω -периодическая непрерывно дифференцируемая матрица.

▷ Пусть $X(t)$, $X(0)=E$, фундаментальная матрица системы (1). Тогда

$$\dot{X}(t) \equiv P(t)X(t)$$

и потому

$$\frac{d}{dt}X(t+\omega) \equiv \dot{X}(t+\omega) \equiv P(t+\omega)X(t+\omega) \equiv P(t)X(t+\omega),$$

т.е. $X(t+\omega)$ есть также фундаментальная матрица решений системы (1). Поэтому существует постоянная матрица $\mathbb{C}$, для которой $X(t+\omega) \equiv X(t)\,\mathbb{C}$.

Полагая в этом тождестве $t=0$, получим $\mathbb{C} = X(\omega)$ и, значит,

$$X(t+\omega) \equiv X(t)\, X(\omega). \tag{3}$$

Матрица $X(\omega)$ неособая и называется матрицей монодромии.

Положим

$$\Lambda \triangleq \frac{1}{\omega} \operatorname{Ln} X(\omega), \quad \varphi(t) \triangleq X(t)\, e^{-\Lambda t}. \tag{4}$$

Тогда $\varphi(t)$ есть неособая непрерывно дифференцируемая матрица и

$$\varphi(t+\omega) \equiv X(t+\omega)\, e^{-\Lambda(t+\omega)} \equiv X(t)\, X(\omega)\, e^{-\Lambda\omega} e^{-\Lambda t} \equiv$$

$$\equiv X(t)\, e^{\Lambda\omega} e^{-\Lambda\omega} e^{-\Lambda t} \equiv X(t)\, e^{-\Lambda t} \equiv \varphi(t),$$

т.е. $\Phi(t)$ есть ω -периодическая матрица.

Корни ρ_i уравнения $|X(\omega)-\rho E|=0$ называются мультипликаторами.

Теорема 2. Для всякого мультипликатора ρ существует нетривиальное комплекснозначное решение $\varphi(t)$ системы (I), обладающее свойством $\varphi(t+\omega)\equiv\rho\varphi(t)$.

$\triangleright$ По условию ρ есть собственное число матрицы $X(\omega)$. Пусть x_0 есть собственный вектор, соответствующий числу ρ. Тогда $X(\omega)x_0=\rho x_0$. Возьмем решение $\varphi(t)$ системы (I) с начальным условием $\varphi(0)=x_0$. Тогда $\varphi(t)\equiv X(t)x_0$ и $\varphi(t+\omega)\equiv X(t+\omega)x_0\equiv X(t)X(\omega)x_0\equiv X(t)\rho x_0\equiv\rho\varphi(t)$, и теорема доказана.

Теорема 3. Если для некоторого нетривиального комплекснозначного решения $\varphi(t)$ системы (I) и некоторого комплексного числа ρ выполнено тождество $\varphi(t+\omega)\equiv\rho\varphi(t)$, то ρ является мультипликатором системы (I).

$\triangleright$ Как известно из общей теории линейных систем, каждое решение $\varphi(t)$ системы (I) можно записать в виде $\varphi(t)\equiv X(t)\varphi(0)$. По условию теоремы для решения $\varphi(t)$ верны тождества

$$X(t+\omega)\varphi(0)\equiv\varphi(t+\omega)\equiv\rho\varphi(t)\equiv\rho X(t)x_0.$$

Откуда при $t=0$ получим соотношение

$$X(\omega)\varphi(0)=\rho\varphi(0),$$

доказывающее, что ρ есть мультипликатор системы (I).

Из теорем 2 и 3 вытекает

Следствие. Линейная ω -периодическая система имеет нетривиальное действительное решение периода ω тогда и только тогда, когда хотя бы один из её мультипликаторов равен единице.

Упр. I. Докажите следствие.

Упр. 2. Докажите, что сумма всех мультипликаторов системы (I) равна следу $\mathrm{Sp}\,X(\omega)$.

Упр. 3. Докажите, что произведение всех мультипликаторов системы (I) равно $\det X(\omega)=\exp\int_0^\omega \mathrm{Sp}\,P(t)\,dt$.

Упр. 4. Докажите, что ни один из мультипликаторов системы (I) не равен нулю.

§II. ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Будем по-прежнему рассматривать систему

$$\dot{x} = P(t)\,x,\quad x^T = (x_1, \dots, x_n),\quad t \in \mathbb{R}, \tag{I}$$

с непрерывной ω -периодической матрицей $P(t)$.

Теорема I. Система (I) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда модули всех её мультипликаторов ρ_k удовлетворяют условию $|\rho_k| < 1$.

▷ Из теоремы Флоке следует, что фундаментальную матрицу $X(t)$, $X(0) = E$, системы (I) можно записать в виде

$$X(t) = \varphi(t)\, e^{\Lambda t}, \tag{2}$$

где матрица $\varphi(t)$ непрерывная, неособая и ω -периодическая. Так что $\varphi(\omega) = \varphi(0) = E$. Поэтому матрица монодромии

$$X(\omega) = e^{\Lambda \omega}. \tag{3}$$

Пусть λ_k есть корни уравнения $\det[\Lambda - \lambda E] = 0$. Тогда, как следует из соотношения (3), мультипликаторы ρ_k, т.е. корни уравнения $\det[X(\omega) - \rho E] = 0$ связаны с λ_k по формулам

$$\rho_k = e^{\lambda_k \omega},\quad \lambda_k = \frac{1}{\omega}\left[\ln|\rho_k| + i \operatorname{Arg} \rho_k\right]. \tag{4}$$

Поэтому из соотношения (2) следует, что все решения системы (I) стремятся к нулю при $t \to +\infty$ тогда и только тогда, когда $|\rho_k| < 1$. Тогда утверждение теоремы будет следовать из теоремы об асимптотической устойчивости линейной системы из § 4. ◁

Теорема 2. Если хотя бы один из мультипликаторов системы (I) удовлетворяет условию $|\rho_k| > 1$, то система (I) неустойчива.

Из соотношений (4) и (2) следует, что система (I) имеет неограниченное решение. Тогда согласно теореме I из §3 система (I) неустойчива.

Упр. I. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие устойчивости системы в терминах мультипликаторов.

Теорема 3. Пусть след матрицы $P(t)$, т.е. величина

$$Sp\,P(t) \stackrel{\triangle}{=} \sum_{i=1}^{n} p_{ii}(t)$$

при каждом t не меньше нуля. Тогда система (I) не может быть асимптотически устойчивой.

Доказательство от противного. Пусть, несмотря на то, что $Sp\,P(t) \geq 0$, система (I) асимптотически устойчива. Тогда все её решения и, значит, определитель $\det X(t)$ фундаментальной матрицы $X(t)$ стремятся к нулю при $t \to \infty$. С другой стороны, по формуле Остроградского-Лиувилля

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} Sp\,P(\tau)d\tau \geq \det X(t_0) > 0$$

при всех $t \geq t_0$. Поэтому $\det X(t) \not\to 0$ при $t \to \infty$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие. Система $\dot{x} = y$, $\dot{y} = p(t)x$ (и потому уравнение $\ddot{x} = p(t)x$) не могут быть асимптотически устойчивыми.

Упр. 2. Докажите следствие.

Теорема 4. Пусть $\int_0^u Sp\,P(\tau)d\tau > 0$.
Тогда система (I) неустойчива.

Упр. 3. Докажите теорему 4.

§12. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ А.М.ЛЯПУНОВА

Линейное преобразование $y = L(t)x$, $t \geq 0$, пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ называется преобразованием Ляпунова, если как сама матрица $L(t)$, так и матрица, составленная из производных $\dot{L}(t)$, а также обратная матрица $L^{-1}(t)$ ограничены на $[0;\infty[$. Матрица $L(t)$ при этом называется матрицей Ляпунова.

Упр. I. Показать, что если преобразование $y = L(t)x$ есть преобразование Ляпунова, то преобразование $y = L^{-1}(t)x$ есть также преобразование Ляпунова. Или иначе: если $L(t)$ есть матрица Ляпунова, то $L^{-1}(t)$ есть также матрица Ляпунова.

Лемма. Пусть система

$$\dot{y} = g(t, y) \qquad (1$$

получена из системы

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) \equiv 0, \tag{2}$$

с помощью некоторого преобразования Ляпунова. Тогда тривиальное решение $x \equiv 0$ системы (I) устойчиво (асимптотически устойчиво) тогда и только тогда, когда устойчиво (асимптотически устойчиво) тривиальное решение $y \equiv 0$ системы (I).

Упр. 2. Докажите лемму, используя определения устойчивости и преобразования Ляпунова.

§13. ПРИВОДИМЫЕ СИСТЕМЫ. ТЕОРЕМА Н.П.ЕРУГИНА

Согласно А.М.Ляпунову система вида

$$\dot{x} = P(t)x, \quad x^T = (x_1, \ldots, x_n), \tag{1}$$

называется приводимой, если с помощью некоторого преобразования Ляпунова $x = L(t)y$ она приводится к системе

$$\dot{y} = Ay \tag{2}$$

с постоянной матрицей A.

Н.П.Еругиным доказана [3, с.154]

Теорема. Линейная система (I) приводима тогда и только тогда, когда некоторая её фундаментальная матрица может быть представлена в виде

$$X(t) = L(t)e^{At}, \tag{3}$$

где $L(t)$ - матрица Ляпунова, а A - постоянная матрица.

Необходимость. Пусть система (I) приводима к некоторой системе (2). Тогда любая её фундаментальная матрица $X(t)$ будет выражаться через фундаментальную матрицу e^{At} системы (2) по формуле $X(t) = L(t)e^{At}C$, где C - любая неособая постоянная матрица. Полагая здесь $C = E$, докажем необходимость.

Достаточность. Пусть некоторая фундаментальная матрица записывается в виде (3). Тогда заменой система (I) сводится к системе (2). Достаточность, а с ней и теорема доказаны.

Упр. 1. В системе (I) сделайте замену $x = X(t)e^{-At}y$.

С л е д с т в и е. Всякая система (I) с непрерывной периодической матрицей приводима.

▷ Согласно теореме Флоке $X(t) = \varphi(t)e^{\Lambda t}$, где $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая неособая периодическая матрица. Это значит, что $\varphi(t), \varphi^{-1}(t), \dot{\varphi}(t)$ - периодические непрерывные и потому ограниченные матрицы, а матрица $\varphi(t)$ есть матрица Ляпунова. Поэтому согласно теореме Н.П.Еругина рассматриваемая система приводима.

Упр. 2. Покажите, что ω -периодическая система (I) с непрерывной матрицей $P(t)$ приводима к системе с постоянной матрицей с помощью преобразования Ляпунова с ω -периодической матрицей Ляпунова $\varphi(t)$.

П р и м е ч а н и е. Ю.С.Богданов в [6, 7] указал, что для любой системы (I) с непрерывной ограниченной матрицей $P(t)$ можно построить систему того же вида (I), но с кусочно-постоянной матрицей таким образом, что обе эти системы будут связаны между собой преобразованием Ляпунова.

§14. ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = P(t)x + \varphi(t, x), \quad x^T = (x_1, \ldots, x_n), \qquad (1)$$

определенную при всех $t \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ есть некоторая область, содержащая начало координат. Будем считать, что непрерывная матрица $P(t)$ и непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\varphi(t,x)$ ω-периодичны по t и, кроме того, существует равномерный по t:

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\varphi(t, x)}{\|x\|} = 0. \qquad (2)$$

В этих предположениях линейную систему

$$\dot{x} = P(t)\,x \tag{3}$$

будем называть системой первого(линейного)приближения для системы (I). Из описанных выше предположений следует, что $\varphi(t,0)=0$ и, значит, система (I) имеет тривиальное решение $x=0$.

Теорема. Если система (3) асимптотически устойчива, то тривиальное решение $x\equiv 0$ системы (I) также асимптотически устойчиво.

▷ Согласно теореме Флоке фундаментальную матрицу $X(t)$, $X(0)=E$ системы (3) можно представить в виде

$$X(t)=\varphi(t)\,e^{\Lambda t}, \tag{4}$$

где $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая периодическая, неособая матрица, которая является и матрицей Ляпунова, а Λ - постоянная матрица. Как следует из предыдущего параграфа, мультипликаторы системы (I) связаны с корнями λ_k уравнения $\det[\Lambda-\lambda E]=0$ формулами

$$\lambda_k=\frac{1}{\omega}\left[\ln|\rho_k|+i\,Arg\,\rho_k\right]. \tag{5}$$

В системе (I) сделаем преобразование Ляпунова $x=\varphi(t)y$. Тогда система (I) преобразуется в систему

$$\dot{y}=\Lambda y+\psi(t,y),\quad \psi(t,y)\triangleq\varphi^{-1}(t)\,\varphi(t,\varphi(t)y), \tag{6}$$

с ω-периодической по t функцией $\psi(t,y)$. При этом решение $x(t)\equiv 0$ системы (I) и решение $y(t)\equiv 0$ системы (2) либо одновременно асимптотически устойчивы, либо нет. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что решение $y(t)\equiv 0$ системы (2) асимптотически устойчиво.

Для доказательства асимптотической устойчивости решения $y(t)\equiv 0$ отметим, что все $Re\,\lambda_k<0$ и существует равномерный предел

$$\lim_{\|y\|\to 0}\frac{\psi(t,y)}{\|y\|}=0. \tag{7}$$

Согласно теореме Ляпунова из §6 существует положительно определенная квадратичная форма $V(y)$, производная которой в силу системы $\dot{y}=\Lambda y$ равна

$$\frac{\partial V}{\partial y} A y = -\|y\|^2.$$

Производная этой квадратичной формы в силу системы (1)

$$\dot V(t,y) = \frac{\partial V}{\partial y}(Ay+\varphi) = -\|y\|^2 + \frac{\partial V}{\partial y}\varphi.$$

Пользуясь этим соотношением, аналогично тому, как это было сделано в §7, докажем, что в некоторой сферической окрестности G точки $y=0$, за исключением самой этой точки, при всех $t\in\mathbb{R}$ выполняется неравенство $\dot V(t,y)<0$.

Пусть теперь задано некоторое $\varepsilon>0$. Будем считать его настолько малым, чтобы шар $\|y\|<\varepsilon$ лежал в G.

Положим $m = -\inf\limits_{\|y\|=\varepsilon} V(y)$ и выберем $\delta>0$ настолько малым, чтобы при всех $\|y\|<\delta$ выполнялось неравенство $V(y)<m/2$. Тогда для всех решений $y(t)$, $\|y(t_0)\|<\delta$ и всех $t\geq t_0$ обязательно выполнится неравенство $\|y(t)\|<\varepsilon$. А это означает устойчивость решения $y(t)\equiv 0$.

Покажем теперь, что для всех решений $y(t)$, $\|y(t_0)\|<\delta$, выполнено соотношение $\lim\limits_{t\to\infty}\|y(t)\|=0$. В самом деле, если это не так, то при всех $t\geq t_0$ обязаны выполняться неравенства $\varepsilon\geq\|y(t)\|\geq\alpha>0$. А это означает, что для таких решений

$$\max_{t\in\mathbb{R}} \dot V(t,y(t)) \leq \max_{\substack{\varepsilon\geq\|y\|\geq\alpha,\\ t\in\mathbb{R}}} \dot V(t,y) \triangleq -\beta<0.$$

Поэтому

$$V(y(t)) = V(y(t_0)) + \int_{t_0}^{t}\dot V(\tau, y(\tau))\,d\tau \leq V(y(t_0)) - \beta(t-t_0) \to -\infty$$

при $t\to\infty$, что противоречит положительной определенности $V(y)$ и, значит, $\lim\limits_{t\to\infty}\|y(t)\|=0$, а решение $y(t)\equiv 0$ асимптотически устойчиво. ◁

Следующие упражнения позволяют лучше понять и усвоить доказательство теоремы. Все символы в этих упражнениях обозначают то же, что они обозначают и в доказательстве теоремы.

Упр. 1. Покажите, что при всех $t\in\mathbb{R}$ и достаточно малых $\|y\|$ выполняется неравенство $\dot V(t,y)<0$.

Упр. 2. Покажите, что если $V(y(t_0)) < m/2$, то $\|y(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$. (В случае затруднения прочтите ещё раз доказательство теоремы Ляпунова об устойчивости).

Упр. 3. Покажите, что если $\|y(t_0)\| < \delta$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \|y(t)\| \neq 0$, то при всех $t \geq t_0$ выполняется неравенство $\varepsilon \geq \|y(t)\| \geq \alpha > 0$. (В случае затруднения прочтите еще раз доказательство теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости).

§15. ЛЕММА ГРОНУОЛЛА-БЕЛЛМАНА

Лемма. Пусть постоянная $c > 0$, а функции $\varphi(t)$ и $u(t)$ непрерывны и неотрицательны на $[t_0, \infty[$ и удовлетворяют там неравенству

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) u(\tau) d\tau. \tag{1}$$

Тогда при всех $t \geq t_0$ выполнено неравенство

$$u(t) \leq c\, e^{\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau}. \tag{2}$$

▷ Из неравенства (1) получим неравенство

$$\frac{u(t)\varphi(t)}{c + \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) u(\tau) d\tau} \leq \varphi(t).$$

Интегрируя это неравенство в пределах от t_0 до t, получим неравенство

$$\ln\left[c + \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) u(\tau) d\tau\right] - \ln c \leq \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau,$$

из которого следует неравенство

$$c + \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) u(\tau) d\tau \leq c\, e^{\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau}.$$

Из полученного неравенства и неравенства (1) следует неравенство (2).

Примечание. Лемма остается верной и при $c = 0$, что можно доказать, переходя в неравенстве (2) к пределу при $c \to +0$.

§16. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОЧТИ ПОСТОЯННОЙ МАТРИЦЕЙ

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

с постоянной $n \times n$ - матрицей. Естественно ожидать, что если система (1) устойчива, а непрерывная матрица $B(t)$ в некотором смысле мала, то система

$$\dot{y} = [A + B(t)]\,y \tag{2}$$

также будет устойчива. Следующие две теоремы позволяют придать смысл словам "матрица $B(t)$ мала".

Теорема 1. Пусть система (1) устойчива, а интеграл $\int_{t_0}^{t} \|B(\tau)\|\, d\tau \le M$ ограничен при всех $t \ge t_0$. Тогда система (2) также устойчива.

▷ В системе (2) сделаем замену переменных $y = e^{At} z$. Тогда получим систему

$$\dot{z} = e^{-At} B(t) e^{At} z.$$

Интегрируя эту систему в пределах от t_0 до t, получим интегральное уравнение

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau} B(\tau) e^{A\tau} z(\tau)\, d\tau.$$

Заменив здесь $z(t)$ по формуле $z(t) = e^{-At} y(t)$, а затем, умножив слева на e^{At}, получим соотношение

$$y(t) = e^{A(t-t_0)} y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B(\tau) y(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Используя соотношение (3), произведем при $t \ge t_0$ оценку нормы $\|y(t)\|$ и получим неравенство

$$\|y(t)\| \le \|e^{A(t-t_0)}\| \|y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|e^{A(t-\tau)}\| \|B(\tau)\| \|y(\tau)\|\, d\tau. \tag{4}$$

Так как система (1) устойчива, то все её решения ограничены при $t \geq 0$, и, значит, ограничена фундаментальная матрица e^{At} системы (1), т.е. $\|e^{At}\| \leq k$ при всех $t \geq 0$. Поэтому из (4) получим неравенство

$$\|y(t)\| \leq k\|y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} k\|B(\tau)\|\,\|y(\tau)\|\,d\tau.$$

Из этого неравенства, используя лемму Гронуолла-Беллмана, получим неравенства

$$\|y(t)\| \leq k\|y(t_0)\|\, e^{\int_{t_0}^{t} k\|B(\tau)\|d\tau} \leq k\|y(t_0)\|\, e^{k\cdot U},$$

доказывающие ограниченность решений системы (2). Из ограниченности решений системы (2) следует её устойчивость (§ 3).

<u>Теорема 2</u>. Пусть система (1) асимптотически устойчива, а $\lim\limits_{t\to\infty} B(t)=0$. Тогда система (2) также асимптотически устойчива.

▷ Из асимптотической устойчивости системы (1) следует, что все корни λ_k характеристического уравнения $|A-\lambda E|=0$ имеют отрицательные действительные части. Пусть $-\alpha = \max\limits_k Re\,\lambda_k$. Тогда существует постоянная $\beta > 0$, для которой при $t \geq 0$ верно неравенство

$$\|e^{At}\| \leq \beta e^{\left(-\alpha + \frac{\alpha}{3}\right)t} = \beta e^{-\frac{2\alpha t}{3}}. \qquad (5)$$

Теперь точно также, как и при доказательстве теоремы 1, получим соотношение (4), из которого, используя оценку (5), при $t \geq 0$ получим неравенство

$$\|y(t)\| \leq \beta e^{-\frac{2\alpha}{3}(t-t_0)}\|y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \beta e^{-\frac{2\alpha}{3}(t-\tau)}\|B(\tau)\|\,\|y(\tau)\|\,d\tau.$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$\underbrace{e^{\frac{2\alpha t}{3}}\|y(t)\|}_{u(t)} \leq \underbrace{\beta e^{\frac{2\alpha t_0}{3}}\|y(t_0)\|}_{C} + \int_{t_0}^{t} \beta\|B(\tau)\|\,\underbrace{e^{\frac{2\alpha\tau}{3}}\|y(\tau)\|}_{u(\tau)}\,d\tau,$$

из которого, используя лемму Гронуолла-Беллмана, получим неравенство

$$e^{\frac{2\alpha t}{3}}\|y(t)\| \le C\, e^{\beta\int_{t_0}^{t}\|B(\tau)\|\,d\tau},$$

равносильное неравенству

$$\|y(t)\| \le C e^{-\frac{2\alpha t}{3}+\beta\int_{t_0}^{t}\|B(\tau)\|\,d\tau}. \tag{6}$$

По правилу Лопиталя

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\beta\int_{t_0}^{t}\|B(\tau)\|\,d\tau}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{\beta\|B(t)\|}{1} = 0.$$

Поэтому при достаточно больших t

$$\frac{\beta\int_{t_0}^{t}\|B(\tau)\|\,d\tau}{t} \le \frac{\alpha}{3}, \quad \text{а} \quad \beta\int_{t_0}^{t}\|B(\tau)\|\,d\tau \le \frac{\alpha t}{3}.$$

Тогда из неравенства (6) для достаточно больших t будет следовать неравенство

$$\|y(t)\| \le C\, e^{-\frac{\alpha}{3}t},$$

доказывающее, что все решения системы (2) стремятся к нулю. Из стремления к нулю решений системы (2) следует её устойчивость.◁

Примечание. Утверждения теорем 1 и 2 оказываются неверными, если матрицу A считать переменной. Чтобы эти утверждения остались верными, словам "матрица $B(t)$ мала" нужно придать другой смысл.

Упр. 1. Используя теорему 1, докажите ограниченность на $[0;\infty[$ решений системы

$$\dot x = y,\ \dot y = \left(\frac{\sin t}{t^2+1} - a^2\right)x \quad \text{и уравнения} \quad \ddot x = \left(\frac{\sin t}{t^2+1} - a^2\right)x.$$

Упр. 2. Используя теорему 2, докажите, что система

$$\dot x = (A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \ldots + A_1 t + A_0)\,x$$

с постоянными матрицами $A_n, \ldots, A_0$ устойчива, если все корни уравнения $|A_n - \lambda E| \sim$ имеют отрицательные действительные части.

Указание. Сделайте замену переменных $t^n dl = d\tau$.

§17. ОТОБРАЖЕНИЕ ЗА ПЕРИОД И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \qquad (1)$$

Будем считать, что для каждой точки $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{1+n}$ существует и единственное решение $\varphi(t; t_0, x)$ этой системы. Пусть $J(t_0, x)$ есть интервал определения этого решения, которое будем считать продолженным. Предположим также, что функция X ω-периодична по t. Для всех тех x, для которых $J(t_0, x) \supset [t_0, t_0 + \omega]$ определено отображение

$$\Pi_{t_0} : x \mapsto \varphi(t_0 + \omega; t_0, x),$$

которое называется отображением Пуанкаре или отображением за период системы (1).

Теорема 1. Решение $\varphi(t; t_0, x)$ системы (1) будет ω-периодическим тогда и только тогда, когда x есть неподвижная точка отображения Пуанкаре Π_{t_0}. (При этом t_0 считается произвольным, но фиксированным).

Упр. 1. Докажите эту теорему. Доказательство можно найти в [8, 9].

В дальнейшем значок t_0 у отображения Π_{t_0} будем для краткости опускать.

Неподвижная точка x^0 отображения Π называется устойчивой, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, при котором неравенство $\|x - x_0\| < \delta$ влечет за собой выполнение неравенства $\|\Pi^m x - \Pi^m x_0\| < \varepsilon$ для всех натуральных m.

Неподвижная точка x^0 отображения Π называется асимптотически устойчивой, если она устойчива и $\Pi^m x - \Pi^m x^0 \to 0$ при $m \to \infty$.

Упр. 2. Докажите, что если x^c есть неподвижная точка поворота Π плоскости, то x^c устойчива.

Упр. 3. Пусть x^c есть неподвижная точка преобразования подобия Π с коэффициентом подобия k. Докажите, что при $k<1$ точка x^c асимптотически устойчива, а при $k>1$ – неустойчива.

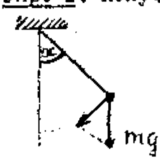
Теорема 2. Периодическое решение $\varphi(t; t_0, x_0)$ с периодом ω устойчиво (асимптотически устойчиво) тогда и только тогда, когда устойчива (асимптотически устойчива) неподвижная точка x_0 отображения Пуанкаре Π_{t_0} системы (I).

Упр. 4. Докажите теорему 2.

§18. УРАВНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА. РЕЗОНАНС

Математическим маятником называют систему, состоящую из материальной точки массы m, подвешенной на тонкой нити длины ℓ таким образом, что материальная точка может совершать малые колебания около нижней точки равновесия.

Упр. I. Получите уравнение $\ddot{x} + \frac{g}{\ell}x = 0$ свободных малых колебаний математического маятника и найдите его решения.



Указания. Для малых x считать $\sin x = x$.

Упр. 2. Докажите, что период малых колебаний математического маятника не зависит от амплитуды $a \triangleq \max x(t)$ колебаний.

Упр. 3. Получите уравнение вынужденных колебаний математического маятника при условии, что на него действует внешняя сила, зависящая только от времени.

Упр. 4. Покажите, что если на материальную точку действует несколько сил, то эффект их суммарного действия может быть получен в результате сложения эффектов действия каждой силы в отдельности (принцип суперпозиции).

Упр. 5. Найдите решение уравнения вынужденных колебаний маятника $\ddot{x} + \omega_0^2 x = F\sin\omega t$:

а) при $\omega \neq \omega_0$, б) при $\omega = \omega_0$

и исследовать поведение этих решений при $t \to \infty$. Истолкуйте полученные результаты физически.

Упр. 6. Выведите уравнения вынужденных малых колебаний маятника, помещенного в вязкую среду.

Ответ: $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$, где $b=\frac{g}{l}$.

Пусть маятник помещен в вязкую среду и пусть на него действует вынуждающая сила $F=F_0\sin\omega_0 t$ частоты ω_0. В этом случае уравнение колебаний принимает вид

$$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f_0\sin\omega_0 t, \tag{1}$$

где $b=\frac{g}{l}$, $f_0=\frac{F_0}{m}$. При этом коэффициент a характеризует величину силы сопротивления среды. Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$x=e^{\alpha t}(c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t)+\bar{x}(t), \tag{2}$$

где $\alpha\pm i\omega$ есть корни алгебраического уравнения

$$\lambda^2+a\lambda+b=0,$$

а
$$\bar{x}(t)=\frac{-f_0(\omega_0^2-b)\sin\omega_0 t-af_0\omega_0\cos\omega_0 t}{(\omega^2-b)^2+a^2\omega^2}. \tag{3}$$

(Докажите соотношение (2)).

В формуле (2) c_1 и c_2 есть произвольные постоянные, зависящие от начального угла x_0 и начальной угловой скорости $\dot{x}_0$ (Почему?). Само частное решение $\bar{x}(t)$, как показывает формула (3), от начальных значений x_0 и $\dot{x}_0$ не зависит. Для любого решения $x(t)$ уравнения (1) выполнено, как следует из (2), условие

$$\lim_{t\to+\infty}\left[(x(t)-\bar{x}(t))^2+(\dot{x}(t)-\dot{\bar{x}}(t))^2\right]=0.$$

Другими словами, все решения уравнения (1) приближаются к некоторому фиксированному периодическому решению $\bar{x}(t)$.

Таким образом, маятник, помещенный в вязкую среду, по прошествии достаточно длительного времени совершает периодические колебания с частотой, равной частоте внешней вынуждающей силы. В том случае, когда внешняя сила отсутствует, т.е. $f_0=0$, по прошествии достаточно длительного времени маятник приходит в состояние покоя. (Как это доказать?).

Если сопротивление среды отсутствует ($a=0$) и внешняя вынуждающая сила отсутствует ($f_0=0$), то уравнение (1) принимает вид

$$\ddot{x} + bx = 0, \quad b = \frac{g}{l}.$$

Его решения имеют вид

$$x = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin(\omega t + \varphi),$$

где $\omega = \sqrt{g/l}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{c_1}{c_2}$.

Это значит, что в рассматриваемом случае маятник совершает периодические колебания. Амплитуда этих колебаний $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ зависит от начальных данных x_0, $\dot{x}_0$. Частота же $\omega = \sqrt{g/l}$ от начальных данных не зависит. Она зависит только от параметров самой физической системы g и l и называется собственной частотой рассматриваемой системы (маятника) или частотой собственных колебаний.

Упр. 7. Как изменится собственная частота, если увеличить длину маятника?

Упр. 8. Зависит ли собственная частота маятника от широты местности, на которой расположен этот маятник?

Упр. 9. Можно ли использовать маятник для определения залежей полезных ископаемых?

В том случае, когда сопротивление среды отсутствует или мало ($a = 0$ или $a \approx 0$), а частота ω_0 вынуждающей силы близка к собственной частоте $\omega = \sqrt{g/l} = \sqrt{b}$, амплитуда установившихся колебаний маятника, описываемых функцией $\tilde{x}(t)$, будет очень большой. Так как в формуле (3) знаменатель в рассматриваемом случае оказывается близким к нулю. Это явление получило название резонанса.

§19. ПРИМЕР РЕАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ УСТОЙЧИВЫМИ РЕЖИМАМИ

В качестве такого примера можно рассмотреть систему, состоящую из бусинки на вращающемся ободе (рис. I).

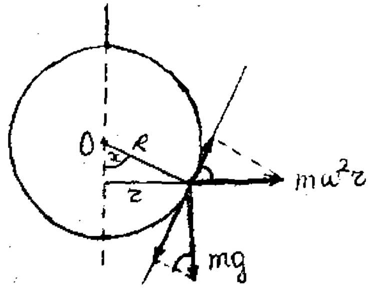


Рис. I.

Угловая скорость вращения обода равна ω , масса бусинки - m , радиус обода - R , сила сопротивления движению бусинки пропорциональна скорости её движения. Положение бусинки на ободе будем описывать углом x . Так как бусинка движется только вдоль обода, то для составления уравнения её движения по ободу достаточно рассмотреть лишь проекции действующих на бусинку сил на касательную к ободу. Записывая уравнение Ньютона для бусинки, получим

$$m\frac{d^2}{dt^2}(Rx)=m\omega^2 R\sin x\cos x - mg\sin x - k_1\dot{x}.$$

Это уравнение равносильно системе

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=\omega^2\left(\cos x-\frac{g}{\omega^2 R}\right)\sin x - ky, \qquad \text{(I)}$$

где $k = k_1/mR > 0.$

Упр. Найдите все стационарные решения этой системы и исследуйте их на устойчивость.

Рассматриваемая система при малых угловых скоростях вращения $\omega<\sqrt{g/R}$ имеет только одно устойчивое положение равновесия $x=0$. Все другие решения системы (I) стремятся к этому нулевому решению. При малых скоростях система мало чем отличается от маятника. При больших ω , однако, у системы имеются два асимптотически устойчивых положения равновесия $x_{1,2}=\pm\arccos g/\omega^2 R$. Небольшие отклонения возмущения бусинки $|\Delta x|<\arccos g/\omega^2 R$. от любого из этих положений не выводят из области притяжения того положения равновесия, в котором первоначально находилась бусинка. Если, однако, бусинка первоначально находилась в состоянии равновесия $x_1=-\arccos g/\omega^2 R$, а её отклонили на угол больший чем

$\arccos g/\omega^2 R$ так, что она попала в область притяжения x_2, то, будучи предоставлена сама себе, она уже не вернется в первоначальное положение x_1, а окажется в положении x_2. Другими словами, эта система уже обладает памятью: она запоминает достаточно сильные возмущения.

§20. УРАВНЕНИЕ КАЧЕЛЕЙ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС

В этом параграфе рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + p(t)x = 0 \tag{1}$$

с ω-периодической непрерывной функцией $p(t)$. Это уравнение называется уравнением качелей.

Качели представляют собой физический маятник, а изучение физического маятника можно заменить изучением колебаний математического маятника с длиной ℓ равной приведенной длине физического маятника. Раскачиваясь на качелях, мы изменяем центр тяжести физического маятника и, значит, его приведенную длину. Откуда и получается уравнение (1).

Уравнение (1) стандартной заменой сводится к системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -p(t)x. \tag{2}$$

Пусть

$$x_1(t), \quad y_1(t) \triangleq \dot{x}_1(t), \quad x_1(0)=1, \ y_1(0)=0;$$
$$x_2(t), \quad y_2(t) \triangleq \dot{x}_2(t), \quad x_2(0)=0, \ y_2(0)=1$$

есть два решения системы (2), образующие фундаментальную матрицу

$$X(t) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}.$$

Упр. 1. Найдите $\det X(t)$.

Лемма. Система (2) (значит, и уравнение (1)) не может быть асимптотически устойчивым.

Следует из того, что след матрицы системы (2) равен нулю.

Упр. 2. Составьте уравнение для определения мультипликаторов системы (2).

Теорема I. Система (2) (значит, и уравнение (I)) устойчива, если $\operatorname{Sp} X(\omega) < 2$, и неустойчива, если $\operatorname{Sp} X(\omega) > 2$.

▷ Как следует из §17, система (2) устойчива тогда и только тогда, когда устойчиво соответствующее отображение за период. В нашем случае отображение за период задается матрицей $X(\omega)$. Собственные числа этой матрицы (мультипликаторы), как следует из упр. I, находятся из уравнения

$$\rho^2 - s\rho + 1 = 0, \tag{3}$$

где $s \triangleq \operatorname{Sp} X(\omega)$ (Определитель $|X(\omega)| = |X(0)|\, e^{\int_0^\omega 0\,dt} = 1$).

Пусть $s < 2$. Тогда

$$\rho_{1,2} = \frac{s \pm \sqrt{s^2-4}}{2} = \frac{s}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{4-s^2}}{2},$$

а $|\rho_{1,2}| = 1$. Поэтому отображение за период есть поворот и, значит, оно устойчиво. Откуда следует устойчивость системы (2).

Если $s > 2$, то мультипликатор

$$\rho_1 = \frac{s + \sqrt{s^2-4}}{2} > \frac{s}{2} > 1.$$

Поэтому отображение за период неустойчиво и, значит, неустойчива система (2).

Упр. 3. Покажите, что если матрица A имеет собственное число большее единицы, то соответствующее этой матрице преобразование (отображение) неустойчиво.

Упр. 4. Для уравнения

$$\ddot{x} + \alpha^2 x = 0 \tag{4}$$

вычислить матрицу $X(2\pi)$ и мультипликаторы. Найдите значения α, при которых $\operatorname{Sp} X(2\pi) < 2$. При каких α рассматриваемое уравнение устойчиво?

Теорема 2. Уравнение

$$\ddot{x} + \alpha^2 (1 + \varepsilon a(t))\, x = 0 \tag{5}$$

с непрерывной 2π-периодической функцией $a(t)$ устойчиво при достаточно малых ε, если $\alpha \neq n/2$, $n \in \mathbb{N}$.

▶ Пусть $X(2\pi, \alpha, \varepsilon)$ есть матрица монодромии уравнения (5). Тогда $X(2\pi, \alpha, 0)$ есть матрица монодромии уравнения (4). Из непрерывной зависимости решений уравнения (5) от параметра ε следует, что $X(2\pi, \alpha, \varepsilon)$ зависит непрерывно от ε. Так как при $\alpha \neq n/2$ согласно упр. 4 $Sp\,X(2\pi, \alpha, \varepsilon) < \varepsilon$, то при достаточно малых ε выполнено неравенство $Sp\,X(2\pi, \alpha, \varepsilon) < 2$. Это значит, что при малых ε уравнение (5) устойчиво.

В том случае, когда $\alpha = n/2$ при малых n, наблюдается неустойчивость. Это явление получило название параметрического резонанса [9, с.212]. Именно благодаря параметрическому резонансу мы имеем возможность раскачиваться на качелях без внешнего воздействия.

§21. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С РАСПАДАЮЩИМИСЯ ОТОБРАЖЕНИЯМИ ЗА ПЕРИОД

Высокая размерность системы дифференциальных уравнений часто является большим препятствием при изучении этой системы. В том случае, когда система распадается на отдельные независимые подсистемы, ее исследование значительно облегчается. Аналогичным образом изучение 2ω-периодической по t системы размерности $m+n$ вида

$$\dot{x} = f(t, x, y), \quad \dot{y} = g(t, x, y), \qquad (1)$$
$$x \in D_1 \subset \mathbb{R}^m, \quad y \in D_2 \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

с однозначно определяемыми своими начальными данными решениями $\varphi(t; t_0, x_0, y_0)$, $\psi(t; t_0, x_0, y_0)$ значительно облегчается, если ее отображение за период

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(\omega; -\omega, x, y) \\ \psi(\omega; -\omega, x, y) \end{pmatrix}$$

распадается на два независимых отображения

$$x \mapsto \varphi_1(\omega; -\omega, x) \quad \text{и} \quad y \mapsto \psi_1(\omega; -\omega, y),$$

являющихся отображениями за период независимых систем вида

$$\dot{x} = f_1(t, x), \tag{2}$$

$$\dot{y} = g_1(t, y) \tag{3}$$

размерностей m и n соответственно, т.е. если

$$\varphi(\omega; -\omega, x, y) \equiv \varphi_1(\omega; -\omega, x), \psi(\omega; -\omega, x, y) \equiv \psi_1(\omega; -\omega, y).$$

В связи со сказанным возникают вопросы: Существуют ли вообще нераспадающиеся системы с распадающимися отображениями за период? Можно ли построить достаточно большие множества таких систем? Можно ли построить эффективный алгоритм их распознавания? Частично на эти вопросы дает ответ настоящая работа.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые сведения об отражающей функции, доказательства которых содержатся в [8].

Пусть решения системы

$$\dot{z} = Z(t, z), \; t \in \mathbb{R}, \; z \in \mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^k, \tag{4}$$

однозначно определяются своими начальными данными, а $z(t)$ есть произвольное решение, определенное при $t = 0$ и $z(0) = z_0$. Через $]-\alpha(z_0), \alpha(z_0)[$ обозначим максимальный по длине симметричный промежуток, на котором определено это $z(t)$, а через $\mathcal{D}$ область

$$\mathcal{D} = \{(t, z(t)) : z_0 \in \mathcal{D}_0, \; t \in]-\alpha(z_0), \alpha(z_0)[\}.$$

Отражающей функцией (ОФ) системы (4) называется дифференцируемая функция $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^k$, для которой $F(t, z(t)) \equiv z(-t)$, т.е. такая функция, которая по будущему состоянию $z(t)$ системы позволяет найти ее прошлое состояние $z(-t)$ и наоборот.

Если $h(t; t_0, z_0)$ есть общее решение системы (4), записанное в форме Коши, то $F(t, z) \equiv h(-t; t, z)$. Это значит, что каждая система вида (4) имеет свою ОФ. Оказывается, что разные системы могут иметь одну и ту же ОФ. Две системы одинаковой размерности называются эквивалентными, если их ОФ совпадают в пересечении областей существования этих функций. Каждый класс эквивалентности характеризуется общей для систем этого класса ОФ, называемой ОФ класса. Если $F(t, z)$ есть ОФ класса, то все системы этого класса и только они могут быть записаны в виде

$$\dot{z} = -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z}(-t,F)\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z}(-t,F)R(t,z) - R(-t,F), \qquad (5)$$

где $R(t,z)$ есть произвольная вектор-функция, для которой решения системы (5) однозначно определяются своими начальными данными.

Дважды непрерывно дифференцируемая функция $F(t,z)$ является ОФ хотя бы для одной системы вида (4) (и, значит, для целого класса систем (5)) тогда и только тогда, когда

$$F(-t, F(t,z)) \equiv F(0,z) \equiv z.$$

Этому условию наверняка удовлетворяют функции, определяемые неявным образом из уравнения

$$U(-t,F) = U(t,z), \quad F(0,z) \equiv z,$$

где U - произвольная функции, для которой выполнены условия теоремы о существовании неявной функции.

Если система (4) 2ω-периодична по t, а $F(t,z)$ есть ее ОФ, то $F(-\omega,z) = h(\omega;-\omega,z)$ есть отображение за период для этой системы (4). Поэтому, если ОФ системы (4) как вектор-функция распадается на независимые функции, то и отображение за период для системы (4) распадается.

Если некоторая система (4) эквивалентна какой-то стационарной системе, то эта стационарная система имеет вид $\dot{z} = Z(0,z)$.

Дифференцируемая функция $F(t,z)$ является ОФ для системы (4) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет так называемому основному соотношению для ОФ:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} Z(t,z) + Z(-t,F) = 0, \quad F(0,z) \equiv z.$$

Отсюда следует, что дифференцируемая функция $F(t,z)$ является ОФ для системы (4) тогда и только тогда, когда уравнение $\bar{z} = F(t,z)$ задает интегральное многообразие [10] системы более высокой размерности $2k$:

$$\dot{z} = Z(t,z), \qquad \dot{\bar{z}} = -Z(-t,\bar{z}),$$

содержащее плоскость $t=0$, $\bar{z}=z$ пространства $\mathbb{R}^{2k+1}$. Поэтому продолжимое на $[-\omega,\omega]$ решение $z(t)$ системы (4) будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда точка $(\omega, z(\omega), z(\omega))$ лежит на указанном интегральном многообразии.

Геометрическая интерпретация ОФ как функции, задающей интегральное многообразие вместе с понятиями точек входа и выхода [II, с.53] позволяют сформулировать достаточные условия наличия периодических решений у возмущенных систем вида $\dot{z}=Z(t,z)+\Delta(t,z)$, если ОФ невозмущенной системы (4) известна.

Неинтегрируемые в квадратурах системы могут иметь даже элементарные ОФ. В частности, ОФ всякой системы вида (4) с нечетной по t правой частью задается формулой $F(t,z)\equiv z$. Поэтому каждое продолжимое на $[-\omega,\omega]$ решение 2ω-периодической по t системы (4) будет 2ω-периодическим и четным. Этот факт отмечен в [I2, с.37].

Возвратимся теперь к вопросу о существовании нераспавшейся системы с распадающимся отображением за период. Для построения такой системы возьмем произвольную непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $R(t,x,y)$ со значениями в $\mathbb{R}^{m+n}$ и две дважды непрерывно дифференцируемые функции $F_1(t,x)$ и $F_2(t,y)$ со значениями в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$, соответственно удовлетворяющие условиям

$$F_1(-t, F_1(t,x))\equiv x, \quad F_2(-t, F_2(t,y))\equiv y.$$

Построим систему (5), считая $F=\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}$. Эта система и будет нужной нам системой, если только первые m компонент вектор-функции R зависят от y, а последние – от x. При этом, однако, следует позаботиться и о том, чтобы построенная система (5) была периодической.

Если для определенности считать

$$F_1=x\,e^{2\sin t-2t}, \quad F_2=y\,e^{2t-2\sin t}, \quad x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},$$

$$R=(R_1,R_2)^T, \quad R_1=\frac{\alpha(t)}{2}F_1^2F_2, \quad R_2=\frac{\beta(t)}{2}F_1F_2^2,$$

а $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ непрерывными нечетными 2ω-периодическими функциями, то система (5) примет вид

$$\dot{x} = (1-\cos t)x + \alpha(t)x^2 y,$$
$$\dot{y} = (\cos t - 1)y + \beta(t)xy^2.$$

Эта нераспадающаяся, интегрируемая подстановкой $u = xy$, система с линейным распадающимся неустойчивым отображением за период

$$F(-\pi, x, y) \equiv (xe^{2\pi}, ye^{-2\pi}).$$

Приведем теперь пример неинтегрируемой в квадратурах системы с распадающейся ОФ и, значит, с распадающимся отображением за период. Для этого рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2 + \delta_1 x_1 + \Delta_1 y_1; \quad && \dot{y}_1 = y_2 + \delta_2 x_1 + \Delta_2 y_1; \\ &\dot{x}_2 = p(t)x_1 + \delta_1 x_2 + \Delta_2 y_2; \quad && \dot{y}_2 = p(t)y_1 + \delta_2 x_2 + \Delta_2 y_2, \end{aligned} \tag{6}$$

где δ_1, δ_2, Δ_1, Δ_2 есть функции величин t и $x_1 y_2 - x_2 y_1$ нечетные относительно t. ОФ этой системы распадается линейна и ее матрица имеет вид $diag\,(F, F)$, где F есть отражающая матрица системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = p(t)x_1. \tag{7}$$

Для доказательства высказанного утверждения нужно записать основные соотношения для отражающих матриц систем (6) и (7) и убедиться в том, что из основного соотношения для системы (7) следует основное соотношение для системы (6), если в это соотношение (7) подставить матрицу $diag\,(F, F)$. При этом удобно воспользоваться тем, что функция $V := x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t)$ является решением уравнения

$$\frac{dV}{dt} = (\delta_1(t,V) + \Delta_2(t,V))V$$

с нечетной правой частью. Поэтому V есть четная функция переменной t и потому, если $(F_1, F_2, \varphi_1, \varphi_2)^T$ есть ОФ системы (6), то

$$F_1\varphi_2 - F_2\varphi_1 \overset{t,x,y}{\equiv} x_1 y_2 - x_2 y_1 .$$

В том случае, когда δ_1, δ_2, Δ_1, Δ_2 зависят только от t, система (6) является линейной, а необходимость в рассмотрении функции V отпадает.

Приведенные примеры показывают, что системы с распадающимися ОФ существуют и образуют достаточно большое, чтобы заинтересовать исследователя, множество.

Доказанная ниже теорема дает легко проверяемое необходимое условие того, что данная нам система имеет распадающуюся ОФ и позволяет разбить рассматриваемую систему на соответствующие подсистемы.

Теорема I. Пусть система (I) имеет такую же ОФ, как и распавшаяся система (2)-(3). Тогда $f(0,x,y) \equiv f_1(0,x)$ не зависит от y, а $g(0,x,y) \equiv g_1(0,y)$ не зависит от x.

Доказательство. Согласно [8, с.24], и это легко получить из (5), существует вектор-функция $R_1(t,x,y)$, для которой

$$\begin{pmatrix} f(t,x,y) \\ g(t,x,y) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ g_1(t,y) \end{pmatrix} + \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}(-t,F)\, R_1(t,x,y) - R(-t,F_1,F_2)$$

Полагая в этом тождестве $t=0$ и учитывая, что $F_1(0,x,y) \equiv x$, $F_2(0,x,y) \equiv y$, получим утверждение теоремы ◁.

Теорема 2. Пусть существует стационарное преобразование $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, преобразующее систему

$$\dot u = A(t,u,v), \quad \dot v = B(t,u,v)$$

в систему (I), ОФ которой совпадает с ОФ некоторой системы (2)-(3). Тогда это же преобразование преобразует систему

$$\dot u = A(0,u,v), \quad \dot v = B(0,u,v)$$

в распадающуюся систему

$$\dot x = f(0,x,y) \equiv f_1(0,x), \quad \dot y = g(0,x,y) \equiv g_1(0,y).$$

Доказательство. В тождестве

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\begin{pmatrix} f(t,x,y)\\ g(t,x,y)\end{pmatrix} \overset{t,x,y}{\equiv} \begin{pmatrix} A(t,x,y)\\ B(t,x,y)\end{pmatrix}$$

положить $t=0$ и воспользоваться теоремой I. ◁

Теорема 3. Пусть $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $\mathcal{D}(t)$ – непрерывные 2ω -периодические матрицы размерностей $m\times m$, $m\times n$, $n\times m$, $n\times n$ соответственно $B(0)=0$, $C(0)=0$ и существуют, натуральное k и, возможно, разрывные, нечетные скалярные функции $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $\gamma_i(t)$, $\delta_i(t)$, для которых

$$\begin{aligned} \dot{B} &\equiv AB - B\mathcal{D} + \sum_{i=0}^{k}\left[\alpha_i (BC)^i B + \beta_i B (CB)^i\right],\\ \dot{C} &\equiv \mathcal{D}C - CA + \sum_{i=0}^{k}\left[\gamma_i (CB)^i C + \delta_i C (BC)^i\right], \end{aligned} \tag{8}$$

а функции $\alpha_i (BC)^i$, $\beta_i (CB)^i$, $\delta_i (BC)^i$, $\gamma_i (CB)^i$ доопределяются до непрерывных. Тогда матрица монодромии системы

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} A(t) & B(t)\\ C(t) & \mathcal{D}(t)\end{pmatrix} z \tag{9}$$

совпадает с матрицей монодромии распадающейся системы

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad \dot{y} = \mathcal{D}(t)y. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $Z(t)$ есть фундаментальная матрица системы (9), для которой $Z(0)=E$. Отражающая функция системы (9) линейна и ее матрица (отражающая матрица) имеет вид $F_0(t) = Z(-t)Z^{-1}(t)$ [8, с.30]. Так как $Z(t+2\omega) \equiv Z(t)Z(2\omega)$, то при $t=-\omega$ получим $Z(2\omega) = Z(\omega)Z^{-1}(-\omega)=F_0(-\omega)$. Поэтому теорема будет доказана, если мы докажем, что отражающие матрицы систем (9) и (10) совпадают.

Пусть $F(t)$ и $\varphi(t)$ есть отражающие матрицы систем (10). Для них [8, с.30] верны основные соотношения

$$\frac{dF}{dt} + FA(t) + A(-t)F = 0, \quad F(0) = E_m;$$
$$\frac{d\varphi}{dt} + \varphi\mathcal{D}(t) + \mathcal{D}(-t)\varphi = 0, \quad \varphi(0) = E_n. \tag{II}$$

Покажем, что матрица

$$G(t) = \begin{pmatrix} F(t) & 0 \\ 0 & \varphi(t) \end{pmatrix}$$

есть отражающая матрица системы (9). Для этого достаточно показать, что $G(t)$ удовлетворяет основному соотношению, которое в нашем случае будет выполнено тогда и только тогда, когда выполнены соотношения (II) и тождества

$$F(t)B(t) + B(-t)\varphi \equiv 0, \quad \varphi(t)C(t) + C(-t)F(t) \equiv 0. \tag{I2}$$

Соотношения (II), как уже отмечено, выполняются. Чтобы доказать справедливость тождеств (I2), положим

$$\bar{B} = B(-t), \quad \bar{C} = C(-t), \quad u = FB + \bar{B}\varphi, \quad v = \varphi C + \bar{C}F.$$

Тогда $F(BC)^i = uC(BC)^{i-1} - \bar{B}v(BC)^{i-1} + (\bar{B}\bar{C})F(BC)^{i-1}$,

т.е. $F(BC)^i = L(u,v) + (\bar{B}\bar{C})F(BC)^{i-1}$,

где $L(u,v)$ есть линейная функция от u и v. Применяя эту формулу i раз, получим формулу

$$F(BC)^i = L(u,v) + (\bar{B}\bar{C})^i F. \tag{I3}$$

Точно также докажем, что

$$\varphi(CB)^i = L(u,v) + (\bar{C}\bar{B})^i\varphi. \tag{I4}$$

Тогда, используя (8), получим

$$\dot{u} = L_1(u,v), \quad \dot{v} = L_2(u,v). \tag{I5}$$

Т.о. U и V являются решением системы (I5) с начальными условиями $U(0)=0$, $V(0)=0$. Поэтому в силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы (I5) $U(t)\equiv 0$, $V(t)\equiv 0$. Тождества (I2), а с ними и теорема доказаны. ◁

Примером системы, удовлетворяющей условиям теоремы, является система (9), у которой

$$A(t)=\mathcal{D}(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p(t) & 0 \end{pmatrix},\ B(t)=\alpha(t)E_2,\ C(t)=\gamma(t)E_2,$$

где $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ - нечетные скалярные непрерывные функции. Здесь $k=0$.

Более сложный пример доставляет система (9), у которой

$$B=\alpha S,\quad C=\beta S^{-1},\quad \dot{S}+S\mathcal{D}=AS,$$

где α и β - нечетные скалярные непрерывные функции, $S=S(t)$ - произвольная неособая дифференцируемая матрица, $A(t)$ - произвольная матрица. Изучение отображения за период такой системы (9) сводится к изучению отображения за период системы $\dot{x}=A(t)x$.

Теорема 4. Пусть I) системы (2) и (3) являются простыми системами [I3]; 2) производная в силу системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(t,x)(1+\mathcal{M}(t,v)),\\ \dot{y} &= g_1(t,y)(1+\mathcal{N}(t,V)) \end{aligned} \tag{I6}$$

от функции $V=V(t,x,y)$ имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}f_1(t,x)(1+\mathcal{M})+\frac{\partial V}{\partial y}g_1(t,y)(1+\mathcal{N})\equiv A(t,V),$$

где $A(t,V)$ - нечетная по t функция; 3) функции $\mathcal{M}(t,v)$ и $\mathcal{N}(t,V)$ - нечетны по t. Тогда ОФ системы (I6), а значит и ее отображение за период, совпадают соответственно с ОФ и с отображением за период системы (2)-(3).

▷ Из второго условия теоремы следует, что для любого решения $x(t)$, $y(t)$ системы (I6) верно тождество

$$V(-t,x(-t),y(-t))\overset{t}{\equiv}V(t,x(t),y(t)).$$

Поэтому для ОФ системы (I6) верно тождество

$$V(-t, \tilde{F}_1(t,x,y), \tilde{F}_2(t,x,y)) \overset{t,x,y}{\equiv} V(t,x,y).$$

Это тождество верно при любых нечетных по t $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. В частности, оно верно и при $\mathcal{M} \equiv 0$, $\mathcal{N} \equiv 0$. А это значит, что для ОФ $(F_1(t,x), F_2(t,y))$ распавшейся системы (2)-(3) верно аналогичное тождество

$$V(-t, F_1(t,x), F_2(t,y)) \overset{t,x,y}{\equiv} V(t,x,y). \tag{I7}$$

Так как системы (2) и (3) простые, то для них верны соотношения

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(t,x) f_1(t,x) \equiv f_1(-t, F_1), \quad \frac{\partial F_2}{\partial y}(t,y) g_1(t,y) \equiv g_1(-t, F_2).$$

Используя эти тождества и тождества (I7) подстановкой в основное соотношение для ОФ системы (I6), убедимся в том, что функция $(F_1(t,x), F_2(t,y))$ удовлетворяет основному соотношению. Поэтому согласно [8, с.II] она является ОФ системы (I6). Откуда и следует утверждение теоремы.

Следствие. Пусть I) функции $\mathcal{M}(t,v)$, $\mathcal{N}(t,v)$ нечетны по t; 2) производная

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x)(1+\mathcal{M}) + \frac{\partial V}{\partial y} g(y)(1+\mathcal{N}) \equiv A(t,v)$$

также нечетна по t. Тогда ОФ и отображение за период системы

$$\dot{x} = f(x)(1+\mathcal{M}(t,v)), \quad \dot{y} = g(y)(1+\mathcal{N}(t,v))$$

совпадает, соответственно, с ОФ и отображением за период распавшейся системы

$$\dot{x} = f(x), \quad \dot{y} = g(y).$$

▷ Это следует из того, что всякая стационарная система является простой [I3]. ◁

• Рассмотрим теперь систему (4) размерности $k = m + n$. Пусть чувство, приходящее к исследователю, возможно, из-вне математических (а, например, физических) соображений, подсказывает, что отображение за период для системы (I) распадается на отображения за период некоторых систем вида (2) и (3), которые исследователю заранее не известны. Тогда естественно записать систему (4) в виде (I). Проверка условий теоремы I позволит нам либо убедиться в несостоятельности наших ожиданий, либо укрепиться в нашей вере. Если ОФ системы (I) действительно распадается на $F(t,x)$ и $\varphi(t,y)$, то, в силу основного соотношения для ОФ, должны выполняться тождества:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} f(t,x,y) + f(-t,F,\varphi) \equiv 0,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} g(t,x,y) + g(-t,F,\varphi) \equiv 0. \tag{18}$$

Продифференцируем первое из этих тождеств по y, а второе по x и получим тождества:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(t,x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(-t,F,\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial y} \equiv 0,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}(t,x,y) + \frac{\partial g}{\partial y}(-t,F,\varphi)\frac{\partial F}{\partial x} \equiv 0, \tag{19}$$

из которых следуют тождества:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(t,x,y)\frac{\partial g}{\partial x}(t,x,y) \equiv \frac{\partial f}{\partial y}(-t,F,\varphi)\frac{\partial g}{\partial x}(-t,F,\varphi)\frac{\partial F}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}(t,x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(t,x,y) \equiv \frac{\partial g}{\partial x}(-t,F,\varphi)\frac{\partial f}{\partial y}(-t,F,\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{20}$$

Тождества (18)-(20) в определенных случаях позволяют установить распадается ОФ системы (I) или нет. Рассмотрим простой иллюстративный пример системы

$$\dot{x} = e^{-\sin t}\alpha(t)xy - x\cos t,$$
$$\dot{y} = e^{\sin t}\beta(t)xy + y\cos t$$

с непрерывными нечетными 2π -периодическими функциями $\alpha(t)$, $\beta(t)$. Для этой системы тождества (19) принимают вид

$$F_x e^{-\sin t}\alpha x - e^{\sin t}\alpha F\varphi_y \equiv 0,$$
$$\varphi_y e^{\sin t}\beta y - e^{-\sin t}\beta\varphi F_x \equiv 0.$$

Отсюда следует, что вне некоторого множества нулевой меры

$$\frac{\varphi_y}{F_x} \equiv \frac{e^{-2\sin t}x}{F(t,x)} \equiv \frac{\varphi(t,y)\,e^{-2\sin t}}{y} \triangleq a(t).$$

Из этих соотношений следует, что если ОФ рассматриваемой системы распадается, то

$$F(t,x) \equiv x e^{2\sin t}, \quad \varphi(t,y) \equiv y e^{-2\sin t}.$$

Проверка основного тождества для ОФ показывает, что эти функции действительно задают ОФ нашей системы. Её отображение за период есть тождественное отображение. Все продолжимые на $[-\pi,\pi]$ решения этой системы 2π -периодичны.

Замечание. Тождества (20) наверняка выполняются, если $f_y\, g_x = E\, V,$ где $V = V(t,x,y)$ есть скалярная функция, дифференцируемая функция, производная которой в силу системы (I) $\dot{V}$, $\dot{V} = A(t,V)$, где $A(t,V)$ -нечетная по t функция

Упражнения: 1. Выяснить, когда распадаются ОФ следующих систем:

1) $\dot{x} = a(t)x + b(t)y, \quad \dot{y} = c(t)x + d(t)y;$

2) $\dot{x} = P_2(t,x,y), \quad \dot{y} = Q_2(t,x,y);$

где P_2 и Q_2 - многочлены второй степени относительно x, y.

2. Показать, что ОФ и отображение за период системы

$$\dot{x}_1 = [x_1 + x_2\,\alpha(x_1,x_2)](1 + M(t,\rho)),$$

$$\dot{x}_2 = [x_2 + x_1\,\alpha(x_1,x_2)](1 + M(t,\rho)),$$

$$\dot{y}_1 = [y_2\,\beta(y_1,y_2) - y_1](1 + N(t,\rho)),$$

$$\dot{y}_2 = [-y_1\,\beta(y_1,y_2) - y_2](1 + N(t,\rho)),$$

где $\rho = (x_1^2 - x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$ и M, N - нечетные 2ω -периодические непрерывно дифференцируемые скалярные функции; α и β - непрерывно дифференцируемые функции, совпадают соответственно с ОФ и отображением за период системы

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2\,\alpha(x_1,x_2), \quad \dot{x}_2 = x_2 + x_1\,\alpha(x_1,x_2);$$

$$\dot{y}_1 = y_2\,\beta(y_1,y_2) - y_1; \quad \dot{y}_2 = -y_1\,\beta(y_1,y_2) - y_2.$$

3. Показать, что ОФ и отображение за период системы

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \alpha \\ p & 0 & \alpha e^{2m} & -\alpha\dot{m} \\ -\dot{m}\alpha_1 & \alpha_1 & 0 & 1 \\ e^{2m}\alpha_1 & 0 & e^{2m} & 0 \end{bmatrix} x, \quad x \in R^4,$$

где из 2ω -периодических дважды непрерывно дифференцируемых функций α , α_1 , m функции α и α_1 - нечетные, а m - четная, совпадает с ОФ и отображением за период распадающейся системы

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} u, \qquad \dot{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{2m} & 0 \end{pmatrix} v,$$

если $p = e^{2m} + (\dot{m})^2 - \ddot{m}$.

4. Когда четная замена $y = S(t)x$ сводит двумерную систему $\dot{x} = P(t)x$ к системе с распадающейся ОФ?

5. Пусть $p(t)$ - четная не обращающаяся в нуль дифференцируемая периодическая функция, а

$$\tau = \frac{2\dot{p}}{p^2\sqrt{cp^2 - 4}}, \quad c = const.$$

Показать, что система двух связанных маятников

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/p^2 & 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \tau & 0 & -1/p^2 & 0 \end{bmatrix} x$$

четной неособой заменой $y = \begin{pmatrix} E & S \\ S & E \end{pmatrix} x$

сводится к системе с распадающейся ОФ.

6. Систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{x}_1 = a(t)x_1 + b(t)\dot{x}_1 + F, \quad \ddot{y}_1 = A(t)y_1 + B(t)\dot{y}_1 - F,$$

где F есть некоторая линейная форма переменных $x_1, \dot{x}_1, y_1, \dot{y}_1$, с зависящими от t коэффициентами, описывающую колебания двух связных маятников, свести к системе вида

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + m(t)y_1 + n(t)y_2, \\
\dot{x}_2 &= p(t)x_1 + q(t)x_2 + r(t)y_1 + s(t)y_2, \\
\dot{y}_1 &= M(t)x_1 + N(t)x_2 + y_2, \\
\dot{y}_2 &= R(t)x_1 + S(t)x_2 + p_1(t)y_1 + q_1(t)y_2
\end{aligned}
$$

с распадающейся ОФ.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел.

$\mathbb{R}$ - множество действительных чисел.

$\mathbb{R}^n$ - арифметическое n -мерное пространство.

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ - производная по времени t.

$\triangleright$ - начало доказательства.

$\triangleleft$ - конец доказательства.

$\triangleq$ - равно по определению.

Литература

I. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. - Гос.изд-во физико-математической литературы. - М., 1959. - 915с.

2. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. - М.: Наука, 1971. - 312с.

3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. - М.: Наука, 1967. - 472с.

4. Ляпунов А.М. Собр. соч. - Т.2. - М.-Л., 1956.

5. Зорич В.А. Математический анализ. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. - Ч.I.-544с.

6. Богданов Ю.С.// Дифференциальные уравнения. - 1965. - Т.I.- - №6. - С.707-716.

7. Мазаник С.А.// Дифференциальные уравнения. - 1981. - Т.17.- - №5. - С.923-926.

8. Мироненко В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. - Минск: изд-во "Университетское", 1986. - 76с.

9. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: - Учеб.пособие для вузов. 3-е изд. - М.: Наука, 1984. - 272с.

10. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. - М.: Наука, 1973. - 512с.

11. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Мир, 1970. - 720с.

12. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. - Киев: Вища школа, 1976.

13. Мироненко В.И.// Дифференциальные уравнения. - 1989. - Т.25. - №12. - С.1209-2114.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Мироненко Владимир Иванович

Введение в теорию устойчивости

Учебное пособие по одноименному спецкурсу для спец. 01.01

Редактор Е.Ф.Зайцева

Подписано в печать 31.10.91.
Формат 60x84 1/16. Бумага писчая №1. Печать офсетная.
Усл.п.л. 3,5 Уч.-изд.л. 3,2 Тираж 200 экз. Заказ 140
Цена 36-80

Отпечатано на ротапринте ГГУ им.Ф.Скорины.
г.Гомель, ул. Советская, 104.