МИНИСТЕРСТВО НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Ф. СКОРИНЫ

ЗАДАЧИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ С БИОЛОГИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

Гомель 1991

МИНИСТЕРСТВО НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

ЗАДАЧИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ С БИОЛОГИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ.

Гомель 1991

УДК.510

Разработала Т.Е.Зверева
Рецензент Б.Л.Мережа ,   кандидат физико-математических наук
Рекомендовано к печати методическим советом математического факультета Гомельского государственного университета им.Ф.Скорины

Цель разработки - помочь студентам в курсе высшей математики увидеть разнообразие связей математики с биологией. В работе указывается подробный "адрес" каждой задачи, по которому можно узнать, как решать ту или иную задачу. Данная работа предназначена для студентов биологического факультета.

I. Векторы и матрицы

1. Рассмотрим аквариум, в котором содержится n_1 рыб одного вида, n_2 рыб второго вида и n_3 рыб третьего вида. Определим популяционный вектор как $n=(n_1, n_2, n_3)$. Для средней рыбы первого вида в день может потребоваться q_1 единиц пищи. Для второго и третьего видов соответствующие потребности составляют q_2 и q_3 . Вектор потребностей есть $q=(q_1, q_2, q_3)$. Найдите общую дневную потребность в пище [I, с.89-90]

2. Популяционный вектор экосистемы, образованной m сосуществующими видами, определяется как m-мерный вектор-строка $n=(n_1, n_2, ..., n_m)$, где i-й компонент n_i показывает численност i-го вида.

а) Численность каждого вида удваивается. Каким становится новый популяционный вектор?

б) Все виды, за исключением первого, вымирают. Каким становится популяционный вектор?

в) В экосистему добавляют по две особи каждого вида. Каким становится новый популяционный вектор? [I, №16, с.91-92]

3. Пять лабораторных животных кормят тремя различными видами пищи. Пусть c_{ij} – суточное потребление i-го вида пищи j-м животным.

Отразите общее суточное потребление в виде матрицы размера 3x5. [I, с.93]

4. (Контакты первого порядка в эпидемиологии.) Предположим, что три человека заболели заразной болезнью. Вторую группу из шести человек опрашивают с целью выяснения, кто из них имел контакт с тремя больными. Затем опрашивают третью группу из семи человек, чтобы выяснить контакты с кем-либо из шести человек второй группы. Определим матрицу $A=(a_{ij})$ размера 3x6, полагая $a_{ij}=1$, если j-й человек второй группы находился в контакте с i-м больным из первой группы, и $a_{ij}=0$ в противном случае. Аналогично определим матрицу $B=(b_{ij})$ размера 6x7, полагая $b_{ij}=1$, если j-й человек третьей группы находился в контакте с i-м человеком из второй группы, и $b_{ij}=0$ в противном случае. Эти две матрицы описывают схему контактов первого порядка между группами. Например, пусть оказалось, что

$$A=\begin{pmatrix} 0&0&1&0&1&0\\ 1&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&1 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&1&1&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

Что означает, что $a_{24}=1$, $b_{33}=0$? [I, с.95]

5. Рассмотрим экосистему, содержащую n конкурирующих видов. Определим матрицу потребления $A=(a_{ij})$ как матрицу размера $n\times n$, в которой элемент a_{ij} показывает среднее число особей j-го вида, потребляемое в день средней особью i-го вида. Какие типы поведения описываются нижеприведенными матрицами потребления:

$$A=\begin{pmatrix} 0&1/2&1/2\\ 1/2&0&1/2\\ 1/2&1/2&0 \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 0&1/2&1/2\\ 1&0&0\\ 0&1&0 \end{pmatrix}?$$

[I, №20, с.99]

6. (Сосуществование бактерий.) Три вида бактерий сосуществуют в пробирке и потребляют три субстрата. Предположим, что в среднем бактерия i-го вида потребляет в день количество c_{ij} j-го субстрата. Определим $C_i=(c_{i1}, c_{i2}, c_{i3})$ как вектор потребления для i-го вида. Пусть $C_1=(1,1,1)$, $C_2=(1,2,3)$, $C_3=(1,3,5)$. Предположим, что каждый день в пробирку вносят 15000 единиц первого субстрата, 30000 единиц второго и 45000 единиц третьего. Каковы численности популяций трех видов бактерий, которые могут сосуществовать в данной среде, если считать, что бактерии потребляют весь дневной запас субстратов? [I, с.106-107]

7. Пусть $C_1=(1,1,1)$, $C_2=(1,2,3)$, $C_3=(1,2,5)$. Если в пробирку вносят ежедневно по 10000, 20000 и 50000 единиц трех видов пищи и если вся она потребляется бактериями, то с какими численностями могут сосуществовать в этой среде три популяции?

8. Из решения задачи 7 вытекает, что вид, способный регулировать свое потребление в зависимости от доступных запасов пищи, имеет селективное преимущество. Обобщите задачу 7 на задачу 6, чтобы получить модель этого явления [I, №18, 19, с.109]

9. Рассмотрим экосистему, которая содержит m сосуществующих видов. Определим популяционный вектор экосистемы $n(t)$ в момент времени t как m-мерный вектор-столбец, у которого i-й компонент $n_i(t)$ представляет собой численность i-го вида в момент t. Определим также $A(t)$ как матрицу перехода экосистемы от момента t к моменту $t+1$. Это означает, что $n(t+1)=A(t)n(t)$. Рассмотрим случай

$$n(0)=\begin{pmatrix}100\\100\\200\end{pmatrix},\qquad A(t)=\begin{pmatrix}1+0{,}05t & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0{,}05t\\ 0 & 0 & 1-0{,}1t\end{pmatrix}.$$

а) Вычислите $n(1)$, $n(2)$, $n(3)$ и $n(4)$.

б) Опишите в биологических терминах эволюцию этой экосистемы из трех конкурирующих видов на протяжении первых четырех периодов времени.

в) Когда произойдет вымирание третьего вида? [I, №I3, с.I26]

I0. В связи с задачей 9 докажите, что в общем случае $n(t)=A(t-1)A(t-2)\ldots A(1)A(0)$. Пусть $n(21)=n(20)$; докажите, что у матрицы $A(20)$ есть собственное значение I. Каков биологический смысл равенства $n(21)=n(20)$? [I, №I4, с.I26]

2. Линейное программирование

I. Горное озеро в одном национальном парке заселяется каждой весной двумя видами рыб: S_1 и S_2. Средняя масса заселяемой рыбы равна 4 фунтам для S_1 и 2 фунтам для S_2. В озере имеется два вида пищи: F_1 и F_2. Средние потребности одной рыбы вида S_1 составляют I единицу F_1 и 3 единицы F_2 в день. Аналогичные потребности для S_2 составляют 2 единицы F_1 и I единицу F_2. Если ежедневный запас пищи поддерживается на уровне 500 единиц F_1 и 900 единиц F_2, то как следует заселить озеро, чтобы максимизировать общую массу двух видов рыб? [I, с.I27-I29]

2. При производстве удобрений смешивают в различных соотношениях три химических вещества, а удобрения подаются в упаковках по I00 фунтов. Предположим, что три этих вещества стоят соответственно 20, I5 и 5 центов за фунт. В любой смеси должно присутствовать не менее 20 фунтов первого вещества, а количество третьего вещества не должно превышать количества второго. Какова смесь,

которая минимизирует стоимость упаковки удобрения? [I, №8, с.129]

3. Средний дневной рацион хищника составляет 10 единиц пищи A, 12 единиц пищи B и 12 единиц пищи C. Эти потребности удовлетворяются в процессе его питания двумя видами жертвы. Одна жертва вида I дает соответственно 5, 2 и I единицу пищи A, B и C, а вида II – соответственно I, 2 и 4 единицы пищи A, B и C. На поимку и усвоение жертвы вида I требуется в среднем 3 единицы энергии. Аналогичные потребности для вида II составляют 2 единицы энергии. Сколько жертв каждого вида следует поймать хищнику, чтобы удовлетворить свои пищевые потребности с наименьшими затратами энергии? [I, с.142-143]

4. (Выбор метода лечения.) Имеются две возможности лечения рака – лучевая терапия и химиотерапия, причем эффективность обоих методов выражена в некоторых общих единицах. Например, лекарственный препарат обладает эффективностью в 1000 единиц на грамм препарата, а облучение – 1000 единиц в минуту. Допустим, что для выздоровления больному требуется не менее 3000 единиц эффективности. Однако оба метода токсичны. Поэтому ни тот, ни другой нельзя применять неограниченно. Пусть токсичность методов также выражена в общих единицах; например, токсичность лекарства равна 400 единицам на грамм, а токсичность облучения – 1000 единицам в минуту. Допустим, что больной не должен получить более 2000 таких единиц. Наконец, предположим, что введение I грамма лекарственного препарата причиняет больному в три раза больше неудобства, чем облучение в течение одной минуты. Подберите такое сочетание обоих методов, которое удовлетворяло бы сформулированным выше ограничениям и в то же время причиняло как можно меньше неудобств больному. [2, с.183-190]

3. Дифференциальное исчисление и исследование функций

I. В расчетной практике по абсорбции, дистилляции, экстракции и выщелачиванию встречается функция $f(x)=\dfrac{x^{n+1}-x}{x^{n+1}-1}$.

Найдите предел этой функции при $x \to 1$. [4, №10.238, с.159]

2. С помощью графиков изобразите процессы непрерывного роста с нулевого момента времени, заданные с помощью следующих функций:

а) $x(t)=100+100\dfrac{1}{1+t^2}$, б) $x(t)=100+100e^{-t}$,

в) $x(t)=90+10t^2$, г) $x(t)=10e^{t/10}$.

В каждом примере найдите начальную популяцию $x(0)$ и $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$, если он существует. [I, с.229-230]

3. При добавлении в бактериальную среду антибактериальный агент вызывает уменьшение популяции бактерий. Найдите скорость изменения численности популяции в момент t, если известно, что спустя t мин после добавления агента популяция насчитывает $p(t)=p(0)\,2^{-t/3}$ бактерий. Если начальная численность составляет $p(0)=10^6$, то какое время потребуется для того, чтобы популяция уменьшилась до 10^3 особей? [I, №3, с.334]

4. При вливании глюкозы её содержание в крови больного (выраженное в соответствующих единицах) спустя t часов составляет $c(t)=10-8e^{-t}$. Постройте график $c(t)$ как функции времени при $t \geq 0$. Найдите $\lim\limits_{t\to\infty} c(t)$ – равновесное содержание глюкозы в крови [I, №5, с.335].

5. Закон Ньютона для охлаждающихся тел утверждает, что разность температур тела и окружающей его среды экспоненциально убывает со временем. Если $T(t)$ – температура тела в момент t, а T_m – температура окружающей его среды, то $T(t)-T_m=k\,e^{-at}$, где k и a – некоторые постоянные.

а) Выразите k через $T(0)$ – начальную температуру тела.

б) Постройте график функции $T(t)$ при $T(0)=10$, $T_m=5$ и $a=1$. [I, №10, с.335]

6. Для борьбы с вирусами табачных растений применяется рентгеновское излучение. С ростом дозы радиации число выживающих вирусов убывает экспоненциально. Если $p(R)$ – доля вирусов, выживающих после дозы радиации R (выраженной в рентгенах), то $p(R)=e^{-aR}$, где a – постоянная, характерная для данного вируса.

а) Выразите через a величину дозы излучения, которая снижает число вирусов на 50%.

б) Какая доза радиации убивает 90% всех вирусов? [I, №II, с.335]

7. Препарат с радиоактивным индикатором теряет половину своей

радиоактивности в течение 2 дней. Если распад радиоактивности считать экспоненциальным, то какая её часть теряется за I день? 4 дня? 8 дней? [I, №I2, с.335]

8. У годовалых лососей потребление кислорода с повышением скорости плавания возрастает экспоненциально. Определим $C(v)$ как потребление кислорода в час годовалым лососем, плывущим со средней скоростью v футов в секунду. Пусть $C(0)=100$ и $C(3)=800$ (соответствующих единиц). Найдите $C(v)$ и $C(2)$. [I, №I4, с.335]

9. Зависимость между количеством x вещества, полученного в результате некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением $x = A(1-e^{-kt})$. Найдите скорость реакции. [4, №I0.239, с.I39; 3, №620, с.I03]

I0. Пусть $p(t)$ обозначает размер популяции бактерий в момент времени t. Найдите скорость роста популяции в момент t, если популяция в момент t насчитывает $p(t)=3000+100t^2$ особей (при этом t измеряется в часах). Вычислите скорость роста при $t=5ч, 10ч$. [I, с.3I8]

II. Размер популяции насекомых в момент t (время выражено в днях) задается величиной $p(t)=10\,000-9\,000(1+t)^{-1}$. Вычислите начальную популяцию $p(0)$ и скорость роста $p'(t)$ в момент t. [I, №4, с.320]

I2. Теплым летним вечером температуру можно оценить, подсчитав, сколько раз в течение I5с застрекочет цикада, и прибавив к полученному числу 40. Этот "термометр" оказывается довольно точным в диапазоне от 55 до I00° F. Вычислите скорость изменения числа стрекотаний (за I5с) на градус Фаренгейта. [I, №II, с.320]

I3. Дрожжи в растворе сахара растут таким образом, что их масса увеличивается за каждый час на 3%. Если начальная масса составляет Iг, то после t часов роста масса равна $w(t)=1{,}03^t$. Найдите приближенные значения массы после а) I0 мин, б) 20 мин роста. [I, №8, с.320]

Найдите скорость изменения $w'(t)$ при: $t=1ч,\ 2ч,\ 5ч$. [I, №5, с.335]

I4. Размер популяции бактерий в момент t (время выражено в часах) задается формулой $p(t)=10^6+10^4t-10^3t^2$. Найдите скорость роста популяции, когда а) $t=1ч$, б) $t=5ч$, в) $t=10ч$. [I, №I0. с.320]

I5. Рассмотрим шарообразную клетку радиуса r, которая, не изменяя формы, непрерывно увеличивается в объеме. Объем равен $\frac{4}{3}\pi r^3$. Оцените изменение объема клетки, если её радиус увеличился от $2{,}5\cdot10^{-3}$ до $2{,}6\cdot10^{-3}$ см. [I, №9, с.320]

I6. Функция $f(x)=70x^{0{,}74}$ выражает зависимость между количеством кислорода, поглощенного животным в единицу времени, и весом животного (константы взяты для млекопитающих). Пусть $x=60кг$, а $\Delta x=1кг$. Исследуйте приращение функции, воспользовавшись дифференциалом [2, с.78-79].

I7. Скорость роста y популяции x задана формулой $y=0{,}001x(100-x)$, когда время выражается в днях. При каком размере популяции эта скорость максимальна? Какова равновесная популяция, т.е. популяция, для которой скорость роста равна нулю? [I, №3, с.330].

I8. В питательную среду вносят популяцию из I000 бактерий. Численность популяции возрастает согласно уравнению

$$p(t)=1000+\frac{1000t}{100+t^2},$$

где t выражается в часах. Найдите максимальный размер этой популяции [I, с.329]

I9. Реакция организма на введенное лекарство может выражаться в повышении кровяного давления, уменьшении температуры тела, изменении пульса или других физиологических показателей. Степень реакции зависит от назначенной дозы лекарства. Предположим, что x обозначает дозу назначенного лекарства, а степень реакции y описывается функцией $y=f(x)=x^2(a-x)$, где a – некоторая положительная постоянная. При каком значении x реакция максимальна? [I, с.328-329]

20. Процессы сульфирования и хлорирования органических соединений часто осуществляются с применением света. Найдите, на какой высоте над площадкой следует поместить источник света, чтобы освещенность площадки была максимальной. (Освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света) [3, №630, с.I09 ; 4, №I0.237, с.I39]

21. При прохождении света через жидкость его интенсивность экспоненциально убывает с длиной пройденного пути. Это означает, что если $I(x)$ – сила света на расстоянии x футов от поверхности жидкости, то $I(x)=I(0)e^{-ax}$, где a – положительная постоянная, характерная для данной жидкости. Допустим, что в неко-

тором водоеме $a=0,5$ и что для водных растений определенного вида необходим свет интенсивности не менее 0,I силы света на поверхности, составляющей $J(0)$. На какой максимальной глубине могут жить эти растения? [I, №15, с.335]

22. Больному делается инъекция лекарства в момент времени $t=0$. Концентрация этого лекарства в крови в момент t описывается зависимостью $x(t)=c\,(e^{-at}-e^{-bt})$, где a, b, c – положительные постоянные, причем $a<b$.

а) Докажите, что $x(0)=0$ и что $x(t)>0$ при $t>0$.

б) Каково максимальное значение $x(t)$ и когда оно достигается?

в) Нарисуйте график концентрации $x(t)$ как функции времени при $a=1$, $b=2$ и $c=1$. [I, №13, с.335]

23. Реакции организма на два лекарства как функции t (время выражается в часах) составляют $r_1(t)=t\,e^{-t}$ и $r_2(t)=t^2 e^{-t}$. У какого из лекарств выше максимальная реакция? Какое из лекарств медленнее в своем воздействии? [I, №9, с.335]

24. Популяция бактерий растет от начального размера в 1000 особей до размера $p(t)$ в момент t (время выражается в днях) согласно уравнению $p(t)=\dfrac{1000e^t}{1+0,1(e^t-1)}$. Найдите скорость роста $p'(t)$. Когда эта скорость максимальна? Найдите $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)$ – равновесную популяцию. [I, №8, с.335]

25. Газ, содержащий окись азота, смешивается с воздухом. Определите, при каком содержании кислорода (в%) в полученной смеси скорость окисления азота максимальна и какой объем добавляемого к газу воздуха обеспечивает это количество кислорода в смеси. (Считается, что воздух содержит 21% кислорода по объему) [4, с.138-139; №10.236, с.139; 6, с.354]

26. (Задача об экстракции уксусной кислоты из разбавленного бензолом водного раствора.) Общий объем бензола V распределяется на три части V_1, V_2, V_3 для трех последовательных экстрагирований кислоты из водного слоя. Добейтесь полного извлечения кислоты при данном количестве бензола. [5, с.29-30]

27. При лечении некоторого заболевания одновременно назначается два препарата. Реакция R (выраженная в соответствующих единицах) на x единиц первого препарата и y единиц второго выражается зависимостью $R(x,y)=x^2y^2(a-x)(b-y)$. Какое количество y второго препарата вызывает максимальную реакцию при фиксированном количестве x первого препарата? [I, №3, с.336]

28. Реакция на инъекцию x единиц лекарственного препарата описывается функцией $y=x^2(a-x)te^{-t}$, где t выражается в часах с момента инъекции. Когда при заданной дозе лекарства реакция достигает максимума? [I, с.337]

При каком количестве x реакция окажется максимальной? Когда наступит эта максимальная реакция? [I, №5, с.338]

29. В "Основах химии" Д.И.Менделеев приводит данные о растворимости азотно-натриевой соли $NaNO_3$ в зависимости от температуры воды. В I00 частях воды растворяется следующее количество условных частей $NaNO_3$ (y) при соответствующей температуре (x):

0	4	I0	I5	2I	29	36	5I	68
66,7	7I,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	II3,6	I25,I

Д.И. Менделеев указывает, что эту зависимость можно выразить формулой $y=ax+b$. Определите параметры a и b методом наименьших квадратов. [5, с.33-34; 7, с.362]

4. Интегральное исчисление

I. Если известна скорость роста популяции $v(t)$, то можно найти прирост численности за промежуток времени от t_0 до t_1:

$$N(t_1)-N(t_0)=\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt.$$

В условиях неограниченных ресурсов питания скорость роста многих популяций экспоненциальна: $v(t)=ae^{kt}$. Найдите $N(t_1)$ для этого случая. (Численность культивируемых плесневых грибков, выделяющих пенициллин, подсчитывают аналогично этому случаю). [2, с.I26-I27]

2. Популяция насекомых вырастает от начального размера в I0000 особей до численности $p(t)$ спустя время t (которое выражается в днях). Если скорость роста в момент t равна $p'(t)=t+t^2$, то какова будет численность популяции спустя: а) I день, б) 5 дней, в) I0 дней? [I, №7, с.343]

3. Скорость изменения концентрации $c(t)$ препарата с изотопным индикатором в момент t есть $c'(t) = e^{-t}$, где t измеряется в часах. Найдите концентрацию в момент t, если начальная концентрация составляет I мкг на литр. [I, №9, с.319]

4. Рассмотрим популяцию, в которой вес особи заметно меняется в течение жизни. Пусть τ означает возраст в тех или иных единицах времени, а $N(\tau)$ - число особей популяции, возраст которых равен τ. Пусть $P(\tau)$ - средний вес особи возраста τ, а $M(\tau)$ - биомасса всех особей в возрасте от 0 до τ. Докажите, что общая биомасса популяции равна

$$M = M(T) = \int_0^T N(\tau)P(\tau)\,d\tau,$$

где T - максимальный возраст особи в данной популяции. [2, с.127]

5. В некоторых исследованиях необходимо знать среднюю длину пути при прохождении животным некоторого фиксированного участка. Найдите среднюю длину пролета птицы а) через круг, б) через квадрат. [2, с.127-129]

5. Дифференциальные уравнения

I. В культуре пивных дрожжей быстрота прироста действующего фермента пропорциональна его наличному количеству. Если это количество удваивается в течение I ч, то во сколько раз оно увеличится через 4 ч? [3, с.220; I, №8, с.230]

2. Активность некоторого радиоактивного отложения пропорциональна скорости своего уменьшения. Найдите зависимость этой активности от времени, если известно, что в течение 4 дней она уменьшилась вдвое. [3, №1224, с.223]

3. Некоторые бактерии размножаются со скоростью, пропорциональной их количеству. Найдите закон изменения числа бактерий в зависимости от времени. [3, №1226, с.223; I, с.229]

4. Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. В начальный момент имелось 100 бактерий, а в течение 4 ч их число удвоилось. Во сколько раз увеличится количество бактерий в течение 12 ч? [3, №1227, с.223]

5. Предположим, что скорость прироста населения прямо пропорциональна количеству населения. Найдите зависимость между количеством населения A и временем t, если известно, что в некоторый момент, принимаемый за начальный, количество населения равнялось A_0, а через год оно увеличилось на a %. Вычислите на этой основе количество населения одного из городов на I января 1935г., если известно, что I января 1976г. оно составляло 200тыс. человек, а годовой прирост за 1975г. составил 1,7%. [3, №1226, с.223]

6. Скорость роста площади молодого листа виктории-регии, имеющего форму круга, пропорциональна длине окружности листа и количеству солнечного света, падающего на лист. Последнее, в свою очередь, пропорционально площади листа и косинусу угла между направлением лучей и вертикалью. Найдите зависимость между площадью листа S и временем t, если известно, что в 6 ч утра эта площадь равнялась 1600$см^2$, а в 6 ч вечера того же дня - 2500 $см^2$. (Полагать, что угол между направлением солнца и вертикалью равен 90^0 в 6 ч утра и в 6 ч вечера и 0^0 в полдень.) [3, №1230, с.223-224]

7. Человек в среднем делает вдох 18 раз в I мин, вводя каждый раз 2000 $см^3$ воздуха, содержащего 4% CO_2. Какой процент углекислоты будет содержать по истечении получаса воздух аудитории вместимостью 400 $м^3$, если в ней находится 50 человек и вентиляторы доставляют в I мин 40 $м^3$ воздуха? (Воздух содержит 0,04% CO_2.) [5, №II.161, с.172]

8. (Внутривенное питание глюкозой.) Вливание глюкозы в кровеносную систему является важной лечебной процедурой. Для изучения этого процесса определим $G(t)$ как количество глюкозы в крови пациента в момент времени t. Допустим, что глюкоза вводится в кровь с постоянной скоростью c (г/мин). В то же время глюкоза разлагается и удаляется из кровеносной системы со скоростью, пропорциональной имеющемуся количеству глюкозы. Опишите этот процесс дифференциальным уравнением, выразите $G(t)$ через $G(0)$, - найдите равновесное количество глюкозы в крови $\left(\lim\limits_{t\to\infty} G(t)\right)$. [I, с.237-238]

9. В эксперименте с голоданием масса испытуемого за 30 дней уменьшилась со 140 до 110 фунтов. Ежедневные потери массы, согласно наблюдениям, были пропорциональны массе испытуемого. Какому

дифференциальному уравнению удовлетворяет масса испытуемого как функция времени? Найдите массу испытуемого после 15 дней голодания. [I, №3, с.233]

10. При выращивании в идеальных условиях популяции мух возрастали бы экспоненциально с постоянной a, равной 0,1, если время выражается в днях. Допустим, что начальная популяция состоит из 100 особей и они выращиваются в идеальных условиях. Найдите размер популяции после: а) 10, б) 20, в) 50 дней роста. [I, №4, с.233]

11. Рассмотрим ген с двумя аллелями A и a, которые в некоторой популяции в момент времени t представлены с частотами $p(t)$ и $q(t)=1-p(t)$. Предположим, что аллель A мутирует в аллель a в единицу времени с вероятностью μ. Это означает, что $\frac{dp}{dt}=-\mu p$. Постоянная μ называется частотой мутаций.

а) Выразите $p(t)$ и $q(t)$ через μ, если в начальный момент $p(0)=q(0)=0{,}5$.

б) Выразите через μ время, необходимое для того, чтобы $p(t)$ уменьшилось до 0,3. [I, №14, с.239-240]

12. Мутации между аллелями A и a могут происходить как в прямом, так и в обратном направлении с частотой прямых мутаций μ и частотой обратных мутаций ν. Это означает, что

$$\frac{dp}{dt}=-\mu p+\nu q=-\mu p+\nu(1-p)=\nu-(\mu+\nu)p.$$

а) Выразите $p(t)$ и $q(t)$ через $p(0)$, $q(0)$, μ и ν.

б) Докажите, что $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=\frac{\nu}{\mu+\nu}$ и $\lim\limits_{t\to\infty}q(t)=\frac{\mu}{\mu+\nu}$.

(Это равновесные частоты генов.) [I, №15, с.240]

13. Допустим, что уравнение $\frac{dx}{dt}=2x+e^{3t}$ отражает скорость роста популяции $x(t)$ в момент времени t. Дайте биологическую интерпретацию каждому члену правой части уравнения. Найдите размеры популяции в моменты $t=0{,}1,\ t=0{,}2,\ t=0{,}5$, если начальный размер составляет $x(0)=50$. [I, №17, с.240]

14. Пусть уравнение $\frac{dx}{dt}=r\,x(t)\cos t$ отражает скорость изменения популяции $x(t)$ в момент времени t. Дайте биологическую интерпретацию правой части уравнения. [I, с.235]

15. В популяцию большого размера занесено инфекционное заболевание. Доля людей, перенесших заболевания, возрастает со временем. Пусть $p(t)$ обозначает долю людей, переболевших этой

болезнью за t лет после её возникновения в популяции, и пусть $p'(t)=[1-p(t)]/3$. Найдите $p(t)$ для всех моментов $t>0$, если $p(0)=0$. За сколько лет доля переболевших достигнет 90% ? [I, №18, с.240]

16. Рост, выживание и деление клеток определяются потоком питательных веществ через оболочку клетки. Это означает, что на ранних стадиях клеточного роста увеличение массы клетки пропорционально площади её поверхности. Если во время роста форма и плотность клетки не изменяются, то масса клетки $x(t)$ в момент t пропорциональна кубу радиуса, в то время как площадь поверхности пропорциональна квадрату радиуса клетки.

а) Убедитесь в том, что на ранних стадиях роста $x(t)$ удовлетворяет уравнению первого порядка $\frac{dx}{dt}=cx^{2/3}$ (c - положительная постоянная).

б) Выразите массу клетки $x(t)$ в момент t через постоянную c и начальную массу $x(0)$.

в) Определите время, за которое масса клетки удваивается, если $c=3$, а $x(0)=1$ (усл. ед.). [I, №13, с.245]

17. (Уравнение Мальтуса.) Рассмотрим колонию микроорганизмов. Будем считать эту популяцию изолированной, ресурсы питания неограниченными, а прирост поголовья пропорциональным количеству взрослых особей. Получите уравнение динамики численности популяции. [2, с.261-263]

18. (Уравнение Ферхюльста-Перла. Логистический рост.) Получите более точное описание развития популяции, чем уравнение Мальтуса, учтя "эффект самоотравления" популяции, или внутривидовую борьбу в популяции. Этот эффект, снижающий скорость роста популяции, объясняется такими причинами, как конкурентная борьба за место и пищу, распространение инфекции из-за тесноты и т.п. Для многих популяций $x(t)$ он может быть описан величиной δx^2, $\delta>0$. [2, с.324-327; I, с.242-243]

19. Потребление сигарет на душу населения в Соединенных Штатах возросло с 50 шт. в 1900г. до 3900 шт. в 1960г. (данные приблизительные). Считая, что рост потребления сигарет подчиняется логистическому уравнению и что предельное потребление составляет 4000 шт., оцените уровень потребления в 1910, 1920, 1930, 1940 и 1950 гг. [I, №3, с.244]

20. Рассмотрите популяцию $x(t)$, которая увеличивается со-

гласно уравнению логистического роста $\frac{dx}{dt} = x(\beta - \delta x)$. Докажите, что скорость роста максимальна, когда популяция достигает размера, равного половине равновесного значения. (Если популяция должна эксплуатироваться путем сбора урожая, то её следует поддерживать на этом уровне, чтобы максимизировать урожай.) [I, №4, с.244]

21. Популяция бактерий возрастает от начального размера в 100 единиц до предельного (равновесного) размера в 100 000 единиц. Пусть в течение первого часа она увеличивается до 120 единиц. Считая, что рост популяции подчиняется логистическому уравнению, найдите её размер как функцию времени. Через сколько часов размер популяции достигнет уровня 1000; 10 000; 50 000 единиц ? [I, №5, 6; с.244]

22. Одним из недостатков логистической модели роста популяции является тот факт, что удельная скорость роста $\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}$ стремится к своему наибольшему значению, когда популяция x мала. В действительности многие виды вымирают, когда их популяции становятся слишком малыми. Пусть m соответствует минимальному жизнеспособному размеру популяции такого вида. Популяции размером меньше m будут вымирать. Докажите, что модификация логистического уравнения $\frac{dx}{dt} = x(\beta - \delta x)(1 - \frac{m}{x})$ обладает тем свойством, что если $x < m$, то происходит вымирание популяции. (Здесь $1 - \frac{m}{x}$ является корректирующим членом, который учитывает фактор, не принимавшийся в расчет в исходной модели популяционного роста.) [I, №7, с.244]

23. Решите модифицированное логистическое уравнение методом разделения переменных с использованием соотношения

$$\frac{1}{(\beta - \delta x)(x - m)} = \frac{1}{\beta - \delta m}\left(\frac{\delta}{\beta - \delta x} + \frac{1}{x - m}\right).$$

Для $\beta = 100$, $\delta = 1$ и $m = 10$ нарисуйте графики решений $x(t)$ при $t > 0$, если $x(0) = 20$; $x(0) = 5$. [I, №8, с.244]

24. Бактерии, служащие пищей для популяции простейших, поступают в экспериментальную среду с постоянной скоростью w . Установлено, что они потребляются со скоростью, пропорциональной квадрату их концентрации. Концентрация $c(t)$ бактерий в среде в момент t удовлетворяет, таким образом, уравнению первого порядка $\frac{dc}{dt} = w - rc^2$, где r - положительная постоянная пропорциональности.

а) Выразите концентрацию бактерий $c(t)$ через $c(0)$.

б) Какова равновесная концентрация бактерий, т.е. при каком значении c производная $\frac{dc}{dt}$ обращается в нуль? [I, №9, с.244]

25. В модели эпидемий один зараженный индивидуум вводится в сообщество, состоящее из n индивидуумов, восприимчивых к заболеванию. Определим $x(t)$ как численность незараженных индивидуумов в популяции в момент t. Если предположить, что инфекция распространяется на всех восприимчивых к заболеванию, то $x(t)$ будет убывать от начального значения $x(0)=n$ до нуля. Уравнением для $x(t)$ может служить $\frac{dx}{dt}=-r x(n+1-x)$,
где r - положительная постоянная, характеризующая скорость заражения. Найдите решение этого уравнения первого порядка. Когда скорость распространения эпидемии максимальна? [I, №15, с.245]

26. В эксперименте с голоданием масса двух испытуемых за 30 дней убывала со 140 и 170 фунтов соответственно до 110 и 125 фунтов. Установлено, что скорость потери массы каждым испытуемым была пропорциональна его массе. Определим $x(t)$ как суммарную массу двух испытуемых после t дней голодания. Найдите дифференциальное уравнение второго порядка, которому удовлетворяет $x(t)$. Чему равна суммарная масса после 15 дней голодания?[I, №12, с.251] (Докажите, что если $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям первого порядка $\frac{dx}{dt}=ax$, $\frac{dy}{dt}=by$, то $z(t)=x(t)+y(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2z}{dt^2}-(a+b)\frac{dz}{dt}+abz=0.$$

[I, №16, с.251])

27. В благоприятных условиях выращивают две популяции мух. Для популяции I удельная скорость роста составляет 0,1, если время выражено в днях. Для популяции II аналогичная скорость составляет 0,08. Определим $x(t)$ как суммарную численность двух популяций в момент t. Найдите дифференциальное уравнение второго порядка, которому удовлетворяет $x(t)$. [I, №14, с.251]

Найдите общую численность популяций после 10 и после 20 дней роста, если в начальный момент популяции насчитывали по 1000 особей. [I, №15, с.251]

(Удельная скорость - скорость на единицу популяции, т.е. $\frac{1}{x(t)}\frac{d}{dt}x(t)$.)

28. Равновесный размер популяции некоторого вида в заданной

среде оценивается в 1000 индивидуумов. Численность популяции испытывает флуктуации около этого среднего значения и описывается уравнением $x''(t)=4x^2[1000-x(t)]$, где $x(t)$ – численность популяции в момент t, а время t выражается в годах. Найдите численность популяции спустя 6, 12 и 18 месяцев, если $x(0)=1500$ и $x'(0)=0$. Постройте график численности $x(t)$ как функции t. [1, №10, с.256]

29. Известно, что при фиксированной температуре количество вещества, содержащееся в определенном объеме растворителя, не может превзойти некоторого, определенного для каждого вещества, числа P, соответствующего насыщенному раствору. Известно также, что по мере приближения к насыщенному раствору уменьшается количество вещества, переходящего в раствор за единицу времени. Пусть $x(t)$ – количество вещества, перешедшего в раствор к моменту времени t. Эксперименты показывают, что для многих веществ скорость перехода пропорциональна разности $P-x$. Найдите закон перехода вещества в раствор. [2, с.263-264]

30. Некоторые бактерии размножаются пропорционально их наличному количеству, но в то же время вырабатывают яд, истребляющий их пропорционально количеству яда и количеству бактерий. Скорость выработки яда пропорциональна наличному количеству бактерий. Показать, что число бактерий сначала возрастает до некоторого наибольшего значения, а затем убывает до нуля; в момент t оно выражается формулой $y=\frac{4y_0}{(e^{kt}+e^{-kt})^2}$, где y_0 – наибольшее количество бактерий, а время t измеряется с того момента, когда $y=y_0$. [3, с.220-222]

31. В некоторой химической реакции вещество B разлагается на два вещества X и Y, причем скорость образования каждого из них пропорциональна количеству b вещества B. Найдите законы изменения количеств x и y веществ X и Y в зависимости от времени t, если в начале процесса $b=x_0$, $x=0$, $y=0$, а по истечении одного часа $b=\frac{1}{2}b_0$, $x=\frac{b_0}{8}$, $y=\frac{3}{8}b_0$. [5, с.170-171]

32. (Модель межвидовой конкуренции.) Однородная линейная система

$$\begin{cases} x'=2x-y \\ y'=-x+2y \end{cases} \qquad \left(\begin{matrix} x'=a_{11}x+a_{12}y \\ y'=a_{21}x+a_{22}y \end{matrix}\right)$$

описывает взаимное влияние популяций двух конкурирующих видов на скорости их роста. (Отрицательные коэффициенты a_{12} и a_{21}: скорость роста популяции одного вида убывает по мере роста популяции другого.) Допустим, что начальные популяции насчитывают $x(0)=100$ и $y(0)=200$ особей. Требуется найти численности обоих видов в любой последующий момент времени. [1, с.257]

33. (Взаимодействие хищник-жертва.) Допустим, что $x(t)$ соответствует численности вида – хищника, а $y(t)$ – численности вида-жертвы в момент t. Предположим, что скорости роста их популяций описываются линейной системой

$$\begin{cases} x'=x+y \\ y'=-x+y \end{cases}.$$

Требуется определить численности популяций во все последующие моменты времени, если начальные популяции составляют $x(0)=y(0)=1000$ особей. Когда наступит вымирание вида – жертвы? (Здесь знак минус во втором уравнении указывает на то, что скорость роста $y'(t)$ популяции жертв уменьшается по мере увеличения популяции хищников $x(t)$.) [1, с.258]

34. (Модель кооперации видов.) Допустим, что два вида находятся в отношениях симбиоза, т.е. популяция каждого вида возрастает пропорционально численности другого, а уменьшение популяций каждого вида будем считать пропорциональным собственной численности. Моделью такого поведения популяций может служить линейная система

$$\begin{cases} x'=-2x+4y \\ y'=x-2y \end{cases}.$$

Требуется найти численности видов во все последующие моменты времени, если начальные популяции насчитывают $x(0)=100$ и $y(0)=300$ особей. (В этой модели предельные размеры популяций зависят от их начальных численностей, поэтому понятие равновесной популяции, соответствующей возможностям данной среды, здесь не столь наглядно, как, например, в логистической модели, где из любого начального состояния популяция стремилась к равновесному размеру.) [1, с.258-[illegible]]

35. Солевой раствор вытекает из одного сосуда со скоростью, пропорциональной объему раствора, в другой сосуд, откуда он вытекает с постоянной скоростью. Определим $V_1(t)$ и $V_2(t)$ как

объемы солевого раствора в первом и втором сосудах в момент времени t. Тогда $V_1(t)$ и $V_2(t)$ удовлетворяют уравнениям $\frac{dV_1}{dt}=-aV_1$ и $\frac{dV_2}{dt}=aV_1-b$, где a и b – положительные постоянные.

а) Найдите $V_1(t)$ и $V_2(t)$ при $t>0$, если $V_1(0)=1000$ и $V_2(0)=100$.

б) Докажите, что если $\frac{b}{a}>V_1(0)$, то объем раствора во втором сосуде убывает со временем.

в) Если $\frac{b}{a}<V_1(0)$, то до какого максимального объема накапливается раствор во втором сосуде и когда достигается этот максимальный объем? [I, №6, с.260]

36. Популяция некоторого вида в момент t содержит $x(t)$ самцов и $y(t)$ самок. Система, предлагаемая в качестве модели роста такой популяции, состоит из уравнений

$$\begin{cases} x'=-ax+by \\ y'=cy \end{cases},$$

где a, b, c – положительные постоянные.

а) Выразите общее решение через начальные популяции самцов и самок $x(0)$ и $y(0)$.

б) Что происходит, если $x(0)=0$? $y(0)=0$?

в) В каком отношении эта модель является переупрощением? Что могло бы сделать её более реалистичной? [I, №7, с.260]

37. Сообщество из n индивидуумов подвергается воздействию редкого инфекционного заболевания. В любой момент t сообщество подразделяется на $x(t)$ восприимчивых, $y(t)$ заражаемых, контактируемых с другими, и $z(t)$ изолированных, умерших или обладающих иммунитетом индивидуумов. Пусть первоначально $y(t)$ и $z(t)$ малы по сравнению с $x(t)$. Модель распространения этого заболевания задается уравнениями

$$\frac{dx}{dt}=-\beta x(0)y, \quad \frac{dy}{dt}=\beta x(0)y-\gamma y, \quad \frac{dz}{dt}=\gamma y,$$

где β и γ – положительные постоянные, отражающие скорости, с какими заражаются восприимчивые индивидуумы и зараженные изолируются, умирают или приобретают иммунитет.

в) Выразите решение системы через $x(0)$, $y(0)$ и $z(0)=n-x(0)-y(0)$.

б) Докажите, что если $\beta x(0)<\gamma$, то заболевание не приводит к эпидемии.

в) Что происходит, если $\beta x(0)>\gamma$? [I, №8, с.260]

6. Некоторые физические и химические задачи

1. (Химическая реакция первого порядка.) Обозначим через a начальную концентрацию вещества A, через x - количество молей на литр, прореагировавших за время t от начала реакции. Тогда действующая масса к этому времени равна $a-x$, а скорость реакции выразится производной x'_t. Согласно закону действующих масс (скорость, с которой вещество вступает в реакцию, пропорциональна концентрации этого вещества, т.е. количеству молей в единице объема) для мономолекулярных реакций, или реакций первого порядка, справедливо уравнение $\frac{dx}{dt}=k(a-x)$, где k - коэффициент пропорциональности. Найдите неизвестную функцию $x=x(t)$, если $x=0$ при $t=0$ (в начальный момент времени нет продукта реакции). [6, с.401]

2. (Химическая реакция второго порядка.) Имеются два вещества A и B, начальные концентрации которых, выраженные в молях на единицу объема, равны соответственно a и b (предположим, что $a<b$). За время t образуется $x(t)$ молей продукта химической реакции. Согласно закону действующих масс для бимолекулярной реакции, или реакции второго порядка, скорость пропорциональна произведению действующих масс $(a-x)$ и $(b-x)$, т.е. $x'_t=k(a-x)(b-x)$, где k - коэффициент пропорциональности. Найдите функцию $x=x(t)$, удовлетворяющую этому дифференциальному уравнению, если $x=0$ при $t=0$. [6, с.401-402; I, №10, с.240]

3. Выход вещества S в одной химической реакции составляет z молей в минуту. В то же время оно расходуется со скоростью c молей в минуту на каждый моль S. Определим $S(t)$ как число молей вещества, имеющегося в момент времени t.

а) Составьте дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $S(t)$.

б) Решив это дифференциальное уравнение, выразите $S(t)$ через $S(0)$.

в) Докажите, что $\lim\limits_{t\to\infty} S(t)=\frac{z}{c}$. (Это равновесное количество вещества.) [I, №16, с.240]

4. В некоторых химических реакциях отдельные продукты могут выступать катализатором своего собственного образования. Если $x(t)$

– количество такого продукта в момент t , то моделью для такой реакции может служить уравнение $\frac{dx}{dt} = kx(x-c)$. В данной модели реакция заканчивается, когда $x=c$, по-видимому, в результате исчерпания одного из компонентов реакции.

а) Выразите общее решение через постоянные k , c и $x(0)$.

б) Для $k=1$, $c=100$ и $x(0)=20$ постройте график $x(t)$ при $t>0$. [I, №II, с.245]

5. В сосуд, содержащий 20л воды, со скоростью 4л/мин поступает раствор, в каждом литре которого находится 0,2кг соли. В сосуде раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 10мин? [4, с.I67-I68; №I2.II4, с.I68; 5, №II.I57, с.I72]

6. Через сосуд вместимостью a л , наполненный водным раствором некоторой соли, непрерывно протекает жидкость, причем в единицу времени в сосуд поступает b л чистой воды и вытекает такое же количество раствора. Найдите закон, по которому изменяется содержание соли в сосуде в зависимости от времени протекания жидкости через сосуд, если известно, что в начальный момент $t=0$ в сосуде было c кг соли. [5, с.I69-I70]

7. В резервуаре имеется I00л раствора, содержащего 5кг растворенного вещества (соли). В резервуар поступает чистая вода со скоростью 30 л/мин. Одновременно с той же скоростью из него вытекает раствор. Сколько соли останется в резервуаре к моменту t ? [4, №I2.II5, с.I68; 5, №II.I58, с.I72]

8. В резервуар, содержащий I0 кг соли на I00л смеси, каждую минуту поступает 30л воды и вытекает 20л смеси. Сколько соли останется в резервуаре через t мин? [4, №I2.II6, с.I68]

9. Дно резервуара вместимостью 300л покрыто смесью соли и нерастворимого вещества. Предположив, что скорость растворения соли пропорциональна разности между концентрацией раствора в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (Iкг соли на 3л воды) и что данное количество чистой воды растворяет I/3 кг соли в I мин, найдите, сколько соли будет содержать раствор через час. [5, №II.I59, с.I72]

I0. Некоторое количество нерастворимого вещества содержит в своих порах I0кг соли. Подвергнув его действию 90л воды, нашли, что в течение 1 ч растворилась половина содержащейся в нем соли. Сольно соли растворилось бы в течение того же времени, если бы

количество воды было удвоено? Скорость растворения пропорциональна количеству нерастворенной соли и разности между концентрацией раствора в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (Iкг на 3л). [3, №I229, с.223; 5, №II.I65, с.I72]

II. Пусть $T(t)$ – разность в температуре объекта и окружающей его среды в момент времени t . Закон Ньютона утверждает, что при охлаждении скорость изменения этой разности в температуре пропорциональна самой разности. Это означает, что $T(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка $\frac{dT}{dt} = -kT$, где k – положительная постоянная, характерная для данного объекта и окружающей его среды.

а) Выразите через k продолжительность времени, необходимого для того, чтобы первоначальная разность температур уменьшилась вдвое.

б) Вычислите время, через которое разность температур уменьшится до $\frac{1}{4}$ своего начального значения. [I, №6, с.230]

Пусть $k=0,05$, время измеряется в часах, а начальная разность температур составляет $T(0)=100^\circ C$.

в) Вычислите $T(t)$ при t = I, I0, 24 и 48 ч .

г) Определите, через какое время разность температур упадет до 50 и 25°С. [I, №7, с.230] (Сравните эти задачи с задачей 5 из п.3.)

I2. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Температура воздуха равна 20°С. Известно, что в течение 20 мин тело охлаждается от I00 до 60°С. Найдите закон изменения температуры тела в зависимости от времени t . [4, №I2.II9, с.I69]

I3. Тело охладилось за I0 мин от I00 до 60°С. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20°С. Когда тело охладится до 25°С? [4, №I2.I2I, с.I69; 5, №II.I62, с.I72]

I4. Тело имеет температуру t_1 , а окружающая его среда – постоянную температуру t_0 , причем $t_0 < t_1$. Найдите закон охлаждения этого тела. [4, №I2.I20, с.I69]

I5. Радиоактивный распад происходит таким образом, что уменьшение количества атомов dN за время dt пропорционально количеству N оставшихся атомов, т.е. $-dN = \lambda N dt$, где λ – свойственная данному веществу постоянная, называемая константой радиоактивности. Вычислите количество N атомов, не распашихся к моменту t , если в момент $t=0$ было N_0 атомов. [4, №12.117, с.168] (Сравните эту задачу с задачей 2 из п.5.)

16. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через какое время останется 1% от первоначального количества? [4, №12.124, с.169]

17 Опытным путем установлено, что в течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия? [4, №12.125, с.169]

18. Кислород проходит через трубку в бутылку вместимостью 1л, а смесь кислорода с воздухом вытекает через другую трубку. Вычислите, сколько % кислорода будет содержаться в бутылке после того, как через нее пройдет 10л газа при условии, что процесс идет настолько медленно, что в каждый момент можно считать газ в бутылке однородным. (Считается, что воздух содержит 21% кислорода по объему.) [5, №II.160, с.172]

19. Сосуд вместимостью 20л содержит воздух (80% азота и 20% кислорода). В сосуд за секунду поступает 0,1л азота, который непрерывно перемешивается, и вытекает такое же количество смеси. Через какое время в сосуде будет 99% азота? [4, №12.122, с.169]

20. В воздухе комнаты объемом 200$м^3$ содержится 0,15% углекислого газа (CO_2). Вентилятор подает в минуту 20 $м^3$ воздуха, содержащего 0,04% CO_2. Через какое время количество углекислого газа в воздухе комнаты уменьшится втрое? [4, №12.123, с.169]

21. В некоторой химической реакции вещество x преобразуется в вещество y со скоростью, пропорциональной количеству x. В то же время образовавшееся вещество y посредством обратной реакции переходит в вещество x со скоростью, пропорциональной количеству y. Химический анализ дал следующие результаты:

t	0	3	∞
x	10	6	5,5
y	0	4	4,5

Найдите зависимость x и y от t. [5, №II.166, с.173]

22. Двубромзамещенная янтарная кислота, взятая в количестве 5,11 г, гидролизуется в воде, нагретой до определенной температуры, по реакции: $COOH-CH_2-CBr_2-COOH+H_2O=COOH-CH_2-CO-COOH+2HBr$ При этом количество кислоты для различных моментов времени определяется данными из таблицы:

Время t, мин	0	10	20	30	40	50	60
Количество кислоты, г	5,11	3,77	2,74	2,02	1,48	1,08	0,80

Вычислите константу скорости реакции k, предположив, что это реакция первого порядка. [4, №12.118, с. 168]

Литература

1. Гроссман С., Тернер Дж. Математика для биологов. - М.: Высшая школа, 1983.
2. Гильдерман Ю.И. Лекции по высшей математике для биологов.- Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1974.
3. Гусак А.А. Сборник задач и упражнений по высшей математике. - Мн.: Вышэйшая школа, 1930.
4. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. - Мн.: Вышэйшая школа, 1988. - Ч. I.
5. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. - Мн.: Вышэйшая школа, 1988. - Ч.2.
6. Гусак А.А. Высшая математика. - Мн.: Изд-во БГУ им.В.И.Ленина, 1983. - Т.I.
7. Гусак А.А. Высшая математика. - Мн.: Изд-во "Университетское", 1984. - Т.2.

Содержание

Задачи по высшей математике с биологическим содержанием
Разработала Зверева Татьяна Евгеньевна

Подписано в печать 25.09.91. Формат 60x84 1/16. Бумага писчая №1.
Печать офсетная. Усл.п.л. 1,6. Уч.-изд.л. 1,3. Тираж 100 экз.
Заказ 118 Цена 4 р. 60 к.
Отпечатано на ротапринте ГГУ им. Ф.Скорины. г.Гомель, ул.Советская, 104.