Элементы функционального анализа

С.В.Асташкин

28 августа 2010 г.

Оглавление

Глава 1

Линейные пространства и операторы

1.1 Линейные пространства. Линейно зависимые и независимые системы векторов.

Определение 1.1. *Линейным (векторным) пространством* (ЛП) над числовым полем $\mathbb{K}$ называется непустое множество E, в котором определены две операции: сложение и умножение на числа, т.е. любым двум элементам $x, y \in E$ поставлен в соответствие элемент $x + y \in E$, называемый их суммой, и любым $x \in E$ и $\alpha \in \mathbb{K}$ поставлен в соответствие элемент $\alpha x \in E$, называемый произведением α на x. При этом введенные операции имеют следующие свойства:

1) для любых $x, y \in E$ $x + y = y + x$;

2) если $x, y, z \in E$, то $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3) в E существует нулевой элемент $\vec{0}$, обладающий тем свойством, что для каждого $x \in E$ $x + \vec{0} = x$;

4) для каждого $x \in E$ существует противоположный элемент $-x \in E$ такой, что $x + (-x) = \vec{0}$;

5) если $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, а $x \in E$, то $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;

6) для каждого $x \in E$ $1 \cdot x = x$;

7) если $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, а $x \in E$, то $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

8) если $\alpha \in \mathbb{K}$, а $x, y \in E$, то $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Обычно в качестве $\mathbb{K}$ рассматривается поле вещественных или комплексных чисел, которые обозначаются соответственно через $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Пример 1.1. Само поле $\mathbb{K}$ над полем $\mathbb{K}$ будет линейным пространством (свойства линейных операций являются следствием аксиом поля).

Пример 1.2. Рассмотрим вещественную плоскость $\mathbb{R}^2$, т.е. множество векторов вида $x = (x_1, x_2)$ $(x_i \in \mathbb{R})$ с покоординатными линейными операциями: если $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$x + y := (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2) \ \text{ и } \ \alpha x := (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

Все аксиомы очевидным образом выполняются. В частности, $\vec{0} = (0,0)$, $-x = (-x_1, -x_2)$. Как известно из курса аналитической геометрии, элементы этого пространства можно отождествить с векторами на плоскости, выходящими из начала координат; тогда их сумму можно находить по правилу параллелограмма, а умножение на положительные числа сводится к растяжению (сжатию) в соответствующее число раз.

Естественным обобщением этого примера является следующий.

Пример 1.3. Если $n \in \mathbb{N}$, то множество $\mathbb{R}^n$ состоит из всех упорядоченных наборов вещественных чисел $x = (x_1, \dots, x_n)$. Пусть $y = (y_1, \dots, y_n)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда линейные операции, определенные следующим образом:

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \ \text{ и } \ \alpha x := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n),$$

превращают $\mathbb{R}^n$ в ЛП. Аналогичным образом (над полем комплексных чисел) определяется ЛП $\mathbb{C}^n$.

Пример 1.4. Обозначим через s ЛП всех последовательностей вещественных чисел $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ с покоординатными линейными операциями: если $y = (y_1, \dots, y_n, \dots)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots) \ \text{ и } \ \alpha x := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n, \dots). \tag{1.1}$$

Пример 1.5. Пусть множество l_∞ состоит из всех ограниченных последовательностей вещественных чисел, т.е.

$$x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l_\infty \iff \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \iff \exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \ |x_n| \le M.$$

Тогда операции, определенные соотношениями (1.1), превращают l_∞ в линейное пространство.

Задача 1.1. Проверить, что l_∞ замкнуто относительно введенных линейных операций, т.е. если $x, y \in l_\infty$, а $\alpha \in \mathbb{R}$, то $x + y \in l_\infty$ и $\alpha x \in l_\infty$.

Пример 1.6. Обозначим через $C[a,b]$ множество всех непрерывных функций $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Определим линейные операции поточечно: если $f, g \in C[a,b]$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$(f + g)(t) := f(t) + g(t) \ \text{ и } \ (\alpha f)(t) := \alpha f(t).$$

Заметим, что $\vec{0}$ в этом пространстве — функция, тождественно равная нулю.

Задача 1.2. Пусть E — произвольное ЛП. Доказать, что

a) для любого $x \in E$ $0 \cdot x = \vec{0}$;
b) для любого $\lambda \in \mathbb{K}$ $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$;
c) для любого $x \in E$ $-x = (-1) \cdot x$;
d) если $\lambda, \beta \in K$, $x \in E$, $x \ne \vec{0}$ и $\lambda x = \beta x$, то $\lambda = \beta$.

Докажем, например, a). Ввиду свойств линейных операций

$$0 \cdot x + x = 0 \cdot x + 1 \cdot x = (0 + 1)x = 1 \cdot x = x.$$

Прибавим к обеим частям этого равенства противоположный элемент $-x$ и, пользуясь ассоциативностью сложения, получим: $0 \cdot x = \vec{0}$.

Определение 1.2. Пусть X — ЛП. Тогда векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ называются *линейно зависимыми,* если существуют $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}$, не все равные нулю, такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \vec{0}. \tag{1.2}$$

Если же равенство (1.2) выполняется лишь в случае, когда $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, то векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *линейно независимыми.*

Пример 1.7. В пространстве $\mathbb{R}^2$ любые три или более векторов линейно зависимы; два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Пример 1.8. Рассмотрим в ЛП $C[0, \pi]$ две системы векторов $a)\, 1,\ \cos 2t,\ \cos^2 t$ и $b)\, 1,\ \cos t,\ \cos^2 t$. Ввиду элементарного тригонометрического тождества $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$ система $a)$ линейно зависима.

В то же время, "чуть-чуть" измененная система $b)$ линейно независима. Действительно, равенство (1.2) для нее имеет вид:

$$\lambda_1 + \lambda_2 \cos t + \lambda_3 \cos^2 t = 0 \ \ (0 \le t \le \pi).$$

Подставляя в это равенство последовательно $t = 0,\ \pi/2,\ \pi$, получаем соотношения

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\ ,\ \lambda_1 = 0\ ,\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

из которых вытекает: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Утверждение доказано.

Определение 1.3. ЛП E называется *бесконечномерным*, если в нем существует сколь-угодно много линейно независимых векторов. В противоположном случае ЛП E называется *конечномерным*; при этом максимальное число векторов, имеющихся в этом пространстве, называется его *размерностью* $(\dim E)$. Иначе говоря, равенство $\dim E = n$ означает, что в E есть n линейно независимых векторов и любые $n + 1$ векторов линейно зависимы. Если E бесконечномерно, мы будем писать: $\dim E = \infty$.

Пример 1.9. Легко проверить, что стандартные орты

$$e_k = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \ldots, 0), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

пространства $\mathbb{R}^n$ линейно независимы. В то же время, любые $n + 1$ векторов $x^1 = (x^1_1, \ldots, x^1_n)$, $x^2 = (x^2_1, \ldots, x^2_n), \ldots,\ x^{n+1} = (x^{n+1}_1, \ldots, x^{n+1}_n)$ этого пространства линейно зависимы. Действительно, для произвольных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n+1}$ равенство (1.2) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x^k = \vec{0}.$$

Если расписать это равенство покоординатно, то получим однородную систему n линейных уравнений с $n + 1$ неизвестными $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n+1}$. Как известно, всякая такая система имеет нетривиальное решение; следовательно, сформулированное ранее утверждение доказано, и $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Пример 1.10. Покажем, что $\dim C[a,b] = \infty$ (предполагая, конечно, что $a < b$). Для этого достаточно проверить, что для любого $n \in \mathbb{N}$ набор элементов $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ линейно независим. Запишем для этой системы равенство (1.2):

$$\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \ldots + \lambda_n t^n \equiv 0.$$

Так как по основной теореме алгебры нетривиальный многочлен не может иметь более, чем n действительных корней, то отсюда $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Следовательно, этот набор линейно независим.

1.2 Подпространства, линейные оболочки, базисы

Определение 1.4. Пусть E — ЛП. Его непустое подмножество Y называется *линейным подпространством (подпространством)* E, если оно замкнуто относительно линейных операций, т.е. 1) из $x, y \in Y$ следует: $x + y \in Y$; 2) из $x \in Y$ и $\alpha \in \mathbb{K}$ следует: $\alpha x \in Y$.

Замечание 1.1. Произвольное подпространство Y ЛП E, в свою очередь, само является ЛП относительно тех же линейных операций. Действительно, все аксиомы выполняются очевидным образом (в частности, $\vec{0} = 0 \cdot x \in Y$, где x — произвольный элемент из Y).

Пример 1.11. Всякое подпространство ЛП $\mathbb{R}^2$ совпадает либо с $\{\vec{0}\}$, либо с $\mathbb{R}^2$, либо является прямой, проходящей через начало координат.

Пример 1.12. Легко проверить, что множество

$$Y := \{x(t) \in C[0,1] : x(0) = 0\}$$

является подпространством в $C[0,1]$.

Определение 1.5. Пусть E — ЛП, $F \subset E$. *Линейной оболочкой* множества F называется множество $\lambda(F)$, состоящее из всевозможных линейных комбинаций векторов из F, т.е. векторов вида:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}, \lambda_k \in \mathbb{K}, \; x_k \in F. \tag{1.3}$$

Пример 1.13. Если $x, y \in \mathbb{R}^2$ — два линейно независимых вектора, то $\lambda(\{x, y\}) = \mathbb{R}^2$.

Пример 1.14. В пространстве $C[a,b]$ линейная оболочка $\lambda(\{1, t, t^2, \ldots\})$ множества степенных функций совпадает со множеством всех многочленов.

Теорема 1.1. *Для произвольных ЛП E и множества $F \subset E$ линейная оболочка $\lambda(F)$ совпадает с наименьшим подпространством пространства E, содержащим множество F.*

Доказательство. Проверим сначала, что $\lambda(F)$ — подпространство E. Действительно, если $x, y \in \lambda(F)$, то x имеет вид (1.3), а второй из этих векторов можно представить следующим образом:

$$y = \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k x_k, \quad \text{где } m > n, \lambda_k \in \mathbb{K}, \; x_k \in F.$$

Тогда

$$x + y = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k, \quad \text{т.е.} \quad x + y \in \lambda(F).$$

Еще проще доказывается импликация: $\alpha \in \mathbb{K}, x \in \lambda(F) \Longrightarrow \alpha x \in \lambda(F)$ (проверить самостоятельно).

Вложение $\lambda(F) \supset F$ очевидно. Пусть H — произвольное подпространство E, такое, что $H \supset F$. Тогда, если вектор $x \in \lambda(F)$ и он представим в виде (1.3), то по определению подпространства $x \in H$. Следовательно, $\lambda(F) \subset H$, и теорема доказана. □

Определение 1.6. Набор векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из ЛП E называется его *базисом*, если любой вектор $x \in E$ единственным образом представим в виде:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, \quad \text{где} \quad n \in \mathbb{N}, \lambda_k \in \mathbb{K}.$$

Задача 1.3. 1. Доказать, что все вектора базиса линейно независимы.

2. Пусть $\dim E = n$. Доказать, что любой набор, состоящий из n линейно независимых векторов пространства E образует базис.

1.3 Линейные операторы. Ядро и образ оператора. Критерий взаимнооднозначности.

Определение 1.7. Пусть E и F — ЛП над полем $\mathbb{K}$. Тогда оператор (отображение) $A : E \to F$ называется *линейным*, если выполняются два свойства:

a) для любых $x_1, x_2 \in E$ $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$;

b) для любых $\lambda \in \mathbb{K}$ и $x \in E$ $A(\lambda x) = \lambda Ax$.

Пример 1.15. Среди функций $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ линейными в смысле введенного определения будут лишь функции вида $Ax = \lambda \cdot x$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

Пример 1.16. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, определенный соотношением:

$$Ax(t) := \int_0^t x(s)\sin(ts)ds.$$

Так как ввиду линейности интеграла для произвольных $x, y \in C[0,1]$ и $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A(x+y)(t) = \int_0^t (x(s) + y(s))\sin(ts)ds =$$

$$= \int_0^t x(s)\sin(ts)ds + \int_0^t y(s)\sin(ts)ds = Ax(t) + Ay(t)$$

и

$$A(\lambda x)(t) = \int_0^t \lambda x(s)\sin(ts)ds = \lambda \int_0^t x(s)\sin(ts)ds = \lambda Ax(t),$$

то этот оператор линеен.

Определение 1.8. Пусть $A : E \to F$ —линейный оператор. Тогда его *ядром* называется множество

$$\mathrm{KerA} = \mathrm{A}^{-1}\{\{\tilde{0}_{\mathrm{F}}\}\} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X} : \mathrm{Ax} = \tilde{0}_{\mathrm{F}}\},$$

где через $\vec{0}_F$ обозначается нуль-вектор пространства F. *Образом* A называется множество

$$\mathrm{ImA} = \mathrm{A(E)} = \{\mathrm{y} \in \mathrm{F} : \mathrm{Ax} = \mathrm{y} \ \text{ для некоторого } \ \mathrm{x} \in \mathrm{E}\}.$$

Замечание 1.2. Для произвольного линейного оператора $A : E \to F$

$$A(\vec{0}_E) = A(0 \cdot \vec{0}_E) = 0 \cdot A(\vec{0}_E) = \vec{0}_F.$$

Поэтому всегда $\vec{0}_E \in \mathrm{KerA}$.

Задача 1.4. Найти ядро и образ оператора $A : C[0,1] \to C[0,1]$, если: a) $Ax(t) = \int_0^1 x(s)\,ds$; b) $Ax(t) = x(t^2)$; c) $Ax(t) = \int_0^t x(s)\,ds$.

Теорема 1.2. *Если оператор $A : E \to F$ линеен, то его ядро* KerA *и образ* ImA *являются подпространствами пространств E и F соответственно.*

Доказательство. Если $x_1, x_2 \in \mathrm{KerA}$, то по определению ядра $Ax_1 = Ax_2 = \vec{0}$. Отсюда, так как A линеен,

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0},$$

т.е. $x_1 + x_2 \in \mathrm{KerA}$.

Точно так же, если $\lambda \in \mathbb{K}, x \in \mathrm{KerA}$, то

$$A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0},$$

и значит, $\lambda x \in \mathrm{KerA}$. Доказательство соответствующего утверждения для образа ImA совершенно аналогично (проверить самостоятельно). □

Определение 1.9. Отображение $A : X \to Y$ называется *инъективным*, если из того, что $x_1 \neq x_2$, следует: $Ax_1 \neq Ax_2$; *сюръективным*, если $A(X) = Y$, или эквивалентно: для любого $y \in Y$ существует $x \in X$, такой, что $Ax = y$. И наконец, отображение A называется *биективным* (или *взаимнооднозначным*), если оно одновременно инъективно и сюръективно.

Обладает или нет отображение этими свойствами, зависит как от его области определения, так и от его множества значений.

Пример 1.17. Если обычную квадратичную функцию $y = x^2$ рассматривать как отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, то оно не будет ни инъективным, ни сюръективным; если — из $\mathbb{R}$ в $[0,\infty)$, то сюръективно, но не инъективно; если — из $[0,\infty)$ в $[0,\infty)$, то это отображение будет биективно.

Теорема 1.3. *Если $A : E \to F$ — линейный оператор, то*

1) A инъективен тогда и только тогда, когда $\mathrm{KerA} = \{\tilde{0}\}$;

2) A сюръективен тогда и только тогда, когда $\mathrm{ImA} = \mathrm{F}$.

Доказательство. Так как 2) — следствие определений, докажем только утверждение 1). Пусть сначала оператор A инъективен. Тогда, если $x \neq \vec{0}$, то $Ax \neq A\vec{0} = \vec{0}$, и значит, $x \notin \mathrm{KerA}$, т.е. $\mathrm{KerA} = \{\tilde{0}\}$.

Пусть теперь, наоборот, $\mathrm{KerA} = \{\tilde{0}\}$. Если $x_1 \neq x_2$, то $x_1 - x_2 \neq \vec{0}$, откуда по условию $x_1 - x_2 \notin \mathrm{KerA}$. Таким образом, $A(x_1 - x_2) \neq \vec{0}$, т.е. $Ax_1 \neq Ax_2$. Тем самым A инъективен. □

Следствие 1.1. *Линейный оператор $A: E \to F$ является биективным тогда и только тогда, когда* $\mathrm{KerA} = \{\tilde{0}\}$*, а* $\mathrm{ImA} = \mathrm{F}$.

1.4 Линейные операторы и функционалы в конечномерных пространствах

Здесь мы покажем, что в случае конечномерных пространств линейные операторы — это по сути дела обычные матрицы. Поэтому с определенной точки зрения теорию линейных операторов можно рассматривать как продолжение теории матриц на бесконечномерные пространства.

Теорема 1.4. *Пусть E и F — линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$, $\dim E = n, \dim F = m$. *Тогда любой линейный оператор $A: E \to F$ может быть однозначно задан с помощью некоторой матрицы $\mathcal{A} = (a_{ik})_{i=\overline{1,m};\, k=\overline{1,n}}$, зависящей от выбора базисов в пространствах E и F.*

И наоборот, любая матрица $\mathcal{A} = (a_{ik})_{i=\overline{1,m};\, k=\overline{1,n}}$, порядка $m \times n$ порождает линейный оператор $A: E \to F$.

Доказательство. Произвольным образом возьмем и зафиксируем базисы $e^1, \ldots, e^n$ — в E и $f^1, \ldots, f^m$ — в F. Так как для любого $k = 1, \ldots, n$ вектор $Ae^k \in F$, то

$$Ae^k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} \cdot f^i \ \ (k = 1, \ldots, n), \quad \text{где} \ \ a_{ik} \in \mathbb{K}.$$

Если теперь $x \in E$ и

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e^k, \ \ \text{где} \ \ x_k \in \mathbb{K},$$

то ввиду линейности оператора

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} x_k Ae^k = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{m} a_{ik} f^i = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \Big) f^i. \tag{1.4}$$

Таким образом, координаты y_i вектора Ax в базисе f^i определяются по формулам:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \ \ (i = 1, 2, \ldots, m),$$

т.е. получаются умножением строк матрицы $\mathcal{A} = (a_{ik})$ на вектор-столбец, состоящий из координат x_k вектора x в базисе e^k. Наоборот, если задана матрица $\mathcal{A} = (a_{ik})$, то при фиксированных базисах $\{e^k\}$ и $\{f^i\}$ оператор A однозначно определяется соотношением (1.4) (проверить самостоятельно, что A линеен). □

Замечание 1.3. Ввиду только что доказанной теоремы линейные операторы, действующие в конечномерных пространствах, называют *матричными.*

Определение 1.10. Если X — произвольное множество, а $\mathbb{K}$ — как обычно, поле скаляров, то любую функцию $f : X \to \mathbb{K}$ называют *функционалом.* В частности, когда f линейна, она называется *линейным функционалом.*

Пример 1.18. Отображение

$$f : C[0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \int_0^1 tx(t)\,dt,$$

определяет линейный функционал на пространстве непрерывных функций $C[0,1]$ (проверить).

Применяя теорему 1.4 в случае $m = 1$, получаем

Следствие 1.2. *Любой линейный функционал $f : E \to \mathbb{K}$, определенный на ЛП E, $\dim E = n$, задается в виде:*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,$$

где x_k — координаты вектора x в некотором базисе пространства E, а $\lambda_k \in \mathbb{K}$ — некоторые числа, зависящие лишь от выбора этого базиса.

1.5 Алгебраические изоморфизмы ЛП

Определение 1.11. Линейное биективное отображение $\varphi : E \to F$, где E, F — ЛП, называется *алгебраическим изоморфизмом* пространств E и F.

Задача 1.5. Пусть $A : E \to F$ — алгебраический изоморфизм, а $U \subset E$ — линейно независимое множество. Доказать, что его образ $A(E)$ — линейно независимое множество в Y.

Определение 1.12. ЛП E и F называют *алгебраически изоморфными*, если существует хотя бы один алгебраический изоморфизм $\varphi : E \to F$.

Лемма 1.1. *Если $\varphi : E \to F$ — алгебраический изоморфизм, то обратное отображение $\varphi^{-1} : F \to E$ определено и также является алгебраическим изоморфизмом.*

Доказательство. Так как φ — биекция, то обратное отображение φ^{-1} существует и определяется следующим образом: если $y \in F$, то

$$\varphi^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow \varphi(x) = y.$$

Биективность φ^{-1} является непосредственным следствием этого определения. Докажем линейность.

Покажем, что для произвольных $y_1 \in F$ и $y_2 \in F$ выполнено равенство:

$$\varphi^{-1}(y_1 + y_2) = \varphi^{-1}(y_1) + \varphi^{-1}(y_2). \tag{1.5}$$

Так как φ — биекция, то существуют векторы $x_i \in X$, для которых $\varphi(x_i) = y_i$ ($i = 1, 2$). Ввиду линейности φ имеем: $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$ или после применения к обеим частям отображения φ^{-1}:

$$x_1 + x_2 = \varphi^{-1}(\varphi(x_1) + \varphi(x_2)).$$

Так как $x_i = \varphi^{-1}(y_i)$ ($i = 1, 2$), то в итоге мы получаем равенство (1.5).

Совершенно аналогично проверяется, что $\varphi^{-1}(\lambda y) = \lambda \varphi^{-1}(y)$, где $y \in F$, а $\lambda \in \mathbb{K}$ (доказать самостоятельно). $\square$

Следующие две теоремы показывают, что с точностью до алгебраического изоморфизма конечномерное ЛП определяется своей размерностью. Для определенности рассмотрим случай, когда $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Теорема 1.5. *Любое линейное n–мерное пространство E над полем вещественных чисел алгебраически изоморфно пространству $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Построим алгебраический изоморфизм $A : \mathbb{R}^n \to E$. Для этого выберем и зафиксируем в E некоторый базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ и для любого $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ определим оператор $A : \mathbb{R}^n \to E$ следующим образом:

$$Ax := \sum_{i=1}^{n} x_i e_i. \tag{1.6}$$

Если $Ax = \vec{0}$, то $\sum_{i=1}^n x_i e_i = \vec{0}$. Одновременно $\sum_{i=1}^n 0 \cdot e_i = \vec{0}$, и так как разложение по базису единственно, то отсюда $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Следовательно, $\operatorname{Ker} A = \{\vec{0}\}$.

Покажем теперь, что $\operatorname{Im} A = E$. Если $z \in E$, то по определению базиса и ввиду соотношения (1.6)

$$Ax = z = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

где $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тем самым $z \in \operatorname{Im} A$, откуда $\operatorname{Im} A \supset E$. Так как противоположное вложение выполнено всегда, равенство $\operatorname{Im} A = E$ доказано.

Для проверки линейности возьмем произвольные $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ из $\mathbb{R}^n$. Тогда $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ и по формуле (1.6)

$$A(x + y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = Ax + Ay.$$

Совершенно аналогично доказывается соотношение $A(\lambda x) = \lambda Ax$ ($x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$) (проверить самостоятельно). В итоге A — алгебраический изоморфизм, и теорема доказана. $\square$

Определение 1.13. Если $A\colon X \to Y$ и $B : Y \to Z$ — два отображения, то их произведение $BA = B \cdot A$ понимается как суперпозиция, т.е. $BA(x) = B(A(x))$. При этом $BA : X \to Z$.

Задача 1.6. Пусть E, F, H — ЛП. Доказать, что произведение BA алгебраических изоморфизмов $A : E \to F$ и $B : F \to H$ также является алгебраическим изоморфизмом.

Теорема 1.6. *Любые два конечномерных ЛП одинаковой размерности алгебраически изоморфны.*

Доказательство. Если $\dim E = \dim F = n$, то по теореме 1.5 существуют алгебраические изоморфизмы $A : E \to \mathbb{R}^n$ и $B : \mathbb{R}^n \to F$. Рассмотрим отображение $BA : E \to F$. Так как ввиду результата задачи 1.6 оно также будет алгебраическим изоморфизмом, то пространства E и F алгебраически изоморфны. $\square$

Задача 1.7. Доказать, что два конечномерных ЛП алгебраически изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.

Задача 1.8. Показать, что не существует конечномерного ЛП, алгебраически изоморфного некоторому бесконечномерному ЛП.

Задача 1.9. Доказать, что для произвольных $a < b$ пространство $C[a, b]$ алгебраически изоморфно пространству $C[0, 1]$.

Указание. В качестве искомого алгебраического изоморфизма можно взять оператор суперпозиции $A(x(t)) = x(\varphi(t))$, где $\varphi(t)$ — подходящее отображение $[0, 1]$ на $[a, b]$.

Задача 1.10. Придумать пример двух бесконечномерных линейных пространств, не алгебраически изоморфных между собой.

Указание. Пусть Λ — множество, мощность которого больше мощности континуума. Рассмотреть ЛП $F(\Lambda)$, состоящее из всех функций $f : \Lambda \to \mathbb{R}$, и его подпространство $F_0(\Lambda)$, элементы которого — функции, отличные от нуля лишь на конечных подмножествах Λ.

Глава 2

Линейные нормированные и банаховы пространства

2.1 Линейные нормированые пространства: определение и примеры.

Определение 2.1. Пусть X — ЛП над полем $\mathbb{K}$. Вещественнозначный функционал $x \mapsto \|x\|$, определенный на X, называют *нормой*, если он имеет следующие свойства:

1) $\|x\| \geq 0$ $(x \in X)$ (неотрицательность);

2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$ (невырожденность);

3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, где $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ (положительная однородность);

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, где $x, y \in X$ (неравенство треугольника).

Пара $(X, \|\cdot\|)$ (или просто X) в этом случае называется *линейным нормированным пространством (ЛНП).*

Лемма 2.1. *[Обратное неравенство треугольника] Если X — ЛНП, $x, y \in X$, то*

$$| \, \|x\| - \|y\| \, | \leq \|x - y\|. \tag{2.1}$$

Доказательство. Так как ввиду неравенства треугольника

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$

то

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Меняя местами x и y и пользуясь положительной однородностью нормы, точно так же получим:

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = \|x - y\|.$$

Остается заметить, что неравенство (2.1) — непосредственное следствие двух последних соотношений, а также элементарного равенства $|\alpha| = \max(\alpha, -\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ в случае $\alpha = \|x\| - \|y\|$. □

Лемма 2.2. *Для произвольного ЛНП X функция двух переменных*

$$\rho(x, y) := \|x - y\| \;\; (x, y \in X)$$

является метрикой на X.

Доказательство. Напомним, что *метрикой* (или *расстоянием*) на множестве X называется вещественнозначная функция двух переменных $(x, y) \mapsto \rho(x, y)$, обладающая следующими свойствами:

(a) $\rho(x, y) \geq 0$ $(x, y \in X)$;

(b) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(c) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ $(x, y \in X)$;

(d) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ $(x, y, z \in X)$.

Переходя к доказательству леммы, заметим, что свойства (a), (b) и (c) соответственно вытекают из свойств 1), 2) и 3) нормы. Что касается свойства (d), то оно — следствие неравенства треугольника. Действительно,

$$\rho(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

□

Замечание 2.1. Ввиду только что доказанной леммы всякое ЛНП одновременно является метрическим пространством. Поэтому в ЛНП определены все метрические понятия и свойства: сходимость, предельные точки, открытые и замкнутые шары, открытые и замкнутые множества и т.д.

Замечание 2.2. Конечно, не всякое метрическое пространство является линейным нормированным, хотя бы потому, что оно может не иметь линейной структуры. Так, например, $[0, 1]$ — метрическое пространство относительно обычного расстояния $\rho(x, y) = |x - y|$. В то же время, это не ЛНП относительно соответствующей нормы $\|x\| = |x|$, так как не является линейным относительно обычных операций над полем $\mathbb{R}$.

Следующие примеры ЛНП будут использоваться далее на протяжении всего курса.

Пример 2.1. На ЛП $\mathbb{R}^n$ можно ввести различные нормы. Самые простые (и наиболее важные из них) определяются следующим образом: если $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k| \quad \text{и} \quad \|x\|_\infty := \max_{k=1,\ldots,n} |x_k|$$

(проверить самостоятельно выполнение свойств нормы).

Пример 2.2. На пространстве l_1 всех абсолютно сходящихся последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ вещественных чисел (т.е. таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$) определим функционал

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|.$$

Покажем, что l_1 — ЛП, а $\|\cdot\|_1$ обладает всеми свойствам нормы.

Если $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_1$ и $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l_1$, то $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$ и для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^{m} |x_k| + \sum_{k=1}^{m} |y_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, заключаем, что, во-первых,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k| < \infty,$$

и значит, $x + y \in l_1$, а во-вторых, что $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$. Неотрицательность и невырожденность $\|\cdot\|_1$ очевидны. И наконец, если $x \in l_1$, а $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$\|\alpha x\|_1 = \|(\alpha x_k)_{k=1}^{\infty}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k| = |\alpha| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = |\alpha| \|x\|_1$$

Тем самым, если $x \in l_1$, то $\alpha x \in l_1$ и $\|\alpha x\|_1 = |\alpha| \|x\|_1$.

Пример 2.3. На пространстве l_∞ всех ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ вещественных чисел (т.е. таких, что $\sup_{k=1,2,\ldots} |x_k| < \infty$) введем функционал

$$\|x\|_\infty := \sup_{k=1,2,\ldots} |x_k|.$$

Доказать, что $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ является ЛНП.

Пример 2.4. Напомним, что $C[a, b]$ — ЛП, элементы которого — непрерывные функции на $[a, b]$. Для $x = x(t) \in C[a, b]$ положим

$$\|x\|_C = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

Проверить, что это норма.

2.2 Сходимость в ЛНП и ее свойства

Напомним, что по лемме 2.2 всякое ЛНП является метрическим пространством и, значит, в нем определена сходимость последовательностей.

Определение 2.2. Пусть X — ЛНП, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x \in X$. Говорят, что $\{x_n\}$ *сходится к x по норме* ($x_n \to x$), если $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Подробнее это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Теорема 2.1. *Пусть X — ЛНП, $\{x_n\} \subset X$, $\{y_n\} \subset X$, $x \in X$, $y \in X$, $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда*

1) если $x_n \to x$ и $\lambda_n \to \lambda$, то $\lambda_n x_n \to \lambda x$;

2) если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $x_n + y_n \to x + y$;

3) если $x_n \to x$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена в X, т.е. существует такое $M > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ $\|x_n\| \leq M$;

4) (непрерывность нормы) если $x_n \to x$, то $\|x_n\| \to \|x\|$.

Доказательство. 1) По неравенству треугольника и ввиду положительной однородности нормы

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \leq \|\lambda_n (x_n - x)\| + \|(\lambda_n - \lambda) x\| = |\lambda_n| \, \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \, \|x\|.$$

Так как последовательность $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{K}$ имеет предел, она ограничена, т.е. $|\lambda| \le K$ $(n \in \mathbb{N})$. Тем самым

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \le K \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \, \|x\| \ \ (n \in \mathbb{N}).$$

Правая часть в последнем неравенстве по условию стремится к нулю при $n \to \infty$, и значит, $\lambda_n x_n \to \lambda x$.

2) Доказать самостоятельно, используя неравенство треугольника.

3) Так как $x_n \to x$, то для $\varepsilon = 1$ найдется такой номер N, что $\|x_n - x\| < 1$ $(n \ge N)$. Покажем, что неравенство $\|x_n\| \le M$ $(n \in \mathbb{N})$ верно, если

$$M := \max(\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_{n-1}\|, \, 1 + \|x\|).$$

Действительно, в случае $n < N$ оно является следствием определения числа M. Если же $n \ge N$, то ввиду неравенства треугольника и опять определения M получаем:

$$\|x_n\| = \|(x_n - x) + x\| \le \|x_n - x\| + \|x\| \le 1 + \|x\| \le M.$$

4) По лемме 2.1 для всех $n \in \mathbb{N}$

$$|\|x_n\| - \|x\| \,| \le \|x_n - x\|.$$

Так как правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$, то отсюда $\|x_n\| \to \|x\|$. $\square$

В каждом ЛНП сходимость по норме имеет определенный смысл, иногда оказываясь сходимостью, "знакомой" по анализу. Рассмотрим в качестве примера пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_\infty = \max_{k=1,\ldots,n} |x_k|$ (здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$).

Теорема 2.2. *Сходимость последовательностей в ЛНП* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *эквивалентна их покоординатной сходимости.*

Доказательство. Итак, пусть $x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Мы хотим доказать, что

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - x\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \quad \lim_{k\to\infty} x_i^k = x_i.$$

Предположим сначала, что $\|x^k - x\|_\infty \to 0$. Тогда для любого $i = 1, 2, \ldots, n$

$$|x_i^k - x_i| \le \max_{j=1,2,\ldots,n} |x_j^k - x_j| = \|x^k - x\|_\infty,$$

и поэтому ввиду условия $x_i^k \to x_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Наоборот, пусть есть покоординатная сходимость. Возьмем $\varepsilon > 0$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ существует такой N_i, что для всех $k \ge N_i$ выполнено неравенство

$$|x_i^k - x_i| \le \varepsilon.$$

Если теперь $N = \max(N_1, N_2, \ldots, N_n)$, то при $k \ge N$ получаем:

$$\|x^k - x\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j^k - x_j| \le \varepsilon.$$

Следовательно, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ $\|x^k - x\|_\infty \to 0$, и теорема доказана. $\square$

Задача 2.1. Доказать, что сходимость в ЛНП $(C[a,b], \|\cdot\|_C)$, где $\|x\|_C = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$, эквивалентна равномерной сходимости функциональной последовательности на отрезке $[a, b]$.

2.3 Открытые и замкнутые множества в ЛНП и их свойства.

Определение 2.3. Пусть X — ЛНП, $x_0 \in X$, $r > 0$. *Открытым* (соответственно *замкнутым*) *шаром с центром в* x_0 *и радиусом* r называется множество

$$S_r(x_0) := \{x \in X : \|x - x_0\| < r\} \text{ (соответственно } \bar{S}_r(x_0) := \{x \in X : \|x - x_0\| \le r\}).$$

Определение 2.4. Множество $G \subset X$ (X — ЛНП) называется *открытым*, если любая его точка — *внутренняя*, то есть она входит в G вместе с некоторым шаром: $\forall\, x_0 \in G \;\; \exists\, \varepsilon > 0 \; S_\varepsilon(x_0) \subset G$.

Замечание 2.3. Пустое множество $\varnothing$ считается открытым по определению.

Пример 2.5. На вещественной прямой $\mathbb{R}$ с обычной нормой $\|x\| = |x|$ непустые открытые множества допускают следующее простое описание: каждое из них представимо в виде не более чем счетного объединения открытых интервалов.

Теорема 2.3. *Пусть X — ЛНП. Тогда*
1) конечное пересечение открытых множеств открыто;
2) любое объединение открытых множеств открыто;
3) все пространство X — открытое множество.

Доказательство. Мы докажем только первое утверждение теоремы (справедливость двух других проверить самостоятельно).

Пусть G_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) — открытые множества в X и $G = \bigcap_{k=1}^n G_k$. Если $x_0 \in G$, то $x_0 \in G_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. По определению для каждого k существует такое $\varepsilon_k > 0$, что $S_{\varepsilon_k}(x_0) \subset G_k$. Тогда

$$\varepsilon := \min_{k=1,\ldots,n} \varepsilon_k > 0$$

и для всех $k = 1, 2, \ldots, n$

$$S_\varepsilon(x_0) \subset S_{\varepsilon_k}(x_0) \subset G_k,$$

откуда $S_\varepsilon(x_0) \subset G$. Тем самым x_0 — внутренняя точка множества G, и утверждение доказано. □

Замечание 2.4. Утверждение 1), вообще говоря, не верно в случае бесконечного числа множеств. Действительно, уже в случае $\mathbb{R}$ одноточечное (и тем самым не открытое) множество можно представить в виде счетного пересечения открытых интервалов. Например,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}.$$

Теорема 2.4. *Любой открытый шар в произвольном ЛНП является открытым множеством.*

Доказательство. Покажем, что любая точка x_0 шара

$$S_r(a) = \{x \in X : \|x - a\| < r\}, \text{ где } a \in X, r > 0,$$

является в нем внутренней. Так как $\|x_0 - a\| < r$, то найдется $\varepsilon \in (0, r - \|x_0 - a\|)$. Проверим, что

$$S_\varepsilon(x_0) \subset S_r(a).$$

Действительно, если $x \in S_\varepsilon(x_0)$, то $\|x - x_0\| < \varepsilon$, и поэтому ввиду неравенства треугольника и выбора ε

$$\|x - a\| \le \|x - x_0\| + \|x_0 - a\| < \varepsilon + \|x_0 - a\| < r - \|x_0 - a\| + \|x_0 - a\| = r.$$

Тем самым $x \in S_r(a)$, и нужное вложение доказано. □

Определение 2.5. Пусть X — ЛНП. Множество $F \subset X$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки, то есть из того, что $\{x_n\} \subset F$ и $x_n \to x \in X$, следует: $x \in F$.

Задача 2.2. Доказать, что множество F в ЛНП X замкнуто тогда и только тогда, когда из того, что $x_0 \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ $S_\varepsilon(x_0) \cap F \neq \varnothing$, следует: $x_0 \in F$.

Теорема 2.5. *Пусть X — ЛНП. Множество $G \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда его дополнение $F := X \setminus G$ замкнуто.*

Доказательство. Пусть сначала G открыто. Тогда по определению для любой $x_0 \in G = X \setminus F$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $S_\varepsilon(x_0) \subset G$. Поэтому $S_\varepsilon(x_0) \cap F = \varnothing$, и значит, x_0 не является предельной точкой множества F. Тем самым F содержит все свои предельные точки, т.е. замкнуто.

Докажем обратное утверждение. Пусть F замкнуто. Тогда любая точка x_0 из его дополнения $G = X \setminus F$ не является предельной точкой F. Иначе говоря, существует такое $\varepsilon > 0$, что $S_\varepsilon(x_0) \cap F = \varnothing$. Это означает, что $S_\varepsilon(x_0) \subset G$, т.е. x_0 — внутренняя точка множества G. Таким образом, G открыто, и теорема доказана. □

Теорема 2.6. *Пусть X — ЛНП. Тогда*

1) конечное объединение замкнутых множеств замкнуто;

2) любое пересечение замкнутых множеств замкнуто;

3) все пространство X — замкнутое множество.

Доказательство. Все три утверждения доказываются почти одинаково с помощью теорем 2.3 и 2.5. Поэтому мы ограничимся доказательством только первого из них (остальные два проверить самостоятельно).

Итак, пусть множества F_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ замкнуты и $F = \bigcup_{k=1}^n F_k$. Тогда ввиду известного теоретико-множественного равенства

$$X \setminus F = X \setminus \Big(\bigcup_{k=1}^n F_k\Big) = \bigcap_{k=1}^n (X \setminus F_k).$$

Так как по теореме 2.5 множества $X \setminus F_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ открыты, то отсюда и из теоремы 2.3 следует, что множество $X \setminus F$ открыто. В итоге опять по теореме 2.5 F замкнуто. □

Задача 2.3. Доказать, что любой замкнутый шар в произвольном ЛНП является замкнутым множеством.

2.4 Неравенства Гельдера и Минковского для сумм и интегралов

Здесь будут доказаны неравенства, играющие фундаментальную роль в анализе и его приложениях.

Определение 2.6. Если $p \in (1, \infty)$, то *сопряженным* к нему будем называть число q, определяемое равенством:

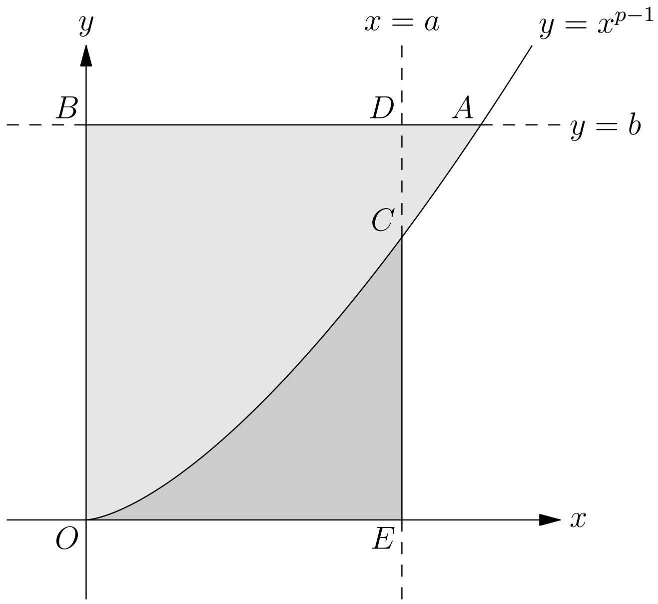
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ \text{ или иначе } \ q = \frac{p}{p-1}.$$

Сопряженным к $p = 1$ (соответственно к $p = \infty$) будем считать $q = \infty$ (соответственно $q = 1$).

Лемма 2.3. *Пусть $a \geq 0$, $b \geq 0$, $p \in (1, \infty)$, а q — число, сопряженное к p. Тогда*

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab. \tag{2.2}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $y = x^{p-1}$ $(x \geq 0)$. Ее график, прямые $x = a$, $y = b$ и оси координат ограничивают прямоугольник $OBDE$ и две криволинейные трапеции OCE и $BACO$ (см. рис. внизу).



Нетрудно видеть, что для площадей этих фигур при любых a и b выполнено соотношение:

$$S_{OBDE} \leq S_{OCE} + S_{BACO}.$$

Так как

$$S_{OBDE} = ab \ \ , \ \ S_{OCE} = \int_0^a x^{p-1}\, dx = \frac{a^p}{p},$$

а

$$S_{BACO} = \int_0^b y^{q-1}\, dy = \frac{b^q}{q}$$

(здесь мы воспользовались тем, что $x = y^{1/(p-1)}$ и $1/(p-1) = q-1$), то неравенство для площадей после подстановки переходит в соотношение (2.2). $\square$

Пример 2.6. Доказать, что неравенство (2.2) эквивалентно следующему неравенству между обобщенными средними арифметическим и геометрическим:

$$x^{1-\alpha} \cdot y^{\alpha} \le (1-\alpha)x + \alpha y \ \text{ для любых } \ x, y \ge 0 \ \text{ и } \ 0 < \alpha < 1.$$

Определение 2.7. Для каждого $1 \le p \le \infty$ определим на $\mathbb{R}^n$ функционал: если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \ (p < \infty) \ \text{ и } \ \|x\|_\infty = \max_{k=1,2,\ldots,n} |x_k|.$$

Теорема 2.7. *[неравенство Гельдера] Пусть $n \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, а q — число, сопряженное к p. Тогда для произвольных $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $y = (y_1, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство:*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \le \|x\|_p \cdot \|y\|_q. \tag{2.3}$$

Доказательство. Прежде всего, неравенство (2.3) выполнено, если $\|x\|_p = 0$ или $\|y\|_q = 0$, так как в каждом из этих случаев $x_k y_k = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому можно предположить, что $\|x\|_p > 0$ и $\|y\|_q > 0$. Применим лемму 2.3 к числам

$$a = \frac{|x_k|}{\|x\|_p} \ \text{ и } \ b = \frac{|y_k|}{\|y\|_q} \ \text{ для каждого } \ k = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\frac{|x_k| \cdot |y_k|}{\|x\|_p \cdot \|x\|_q} \le \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q}.$$

Суммируя эти неравенства по $k = 1, 2, \ldots, n$, получим:

$$\frac{1}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \le \frac{1}{p\|x\|_p^p} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p + \frac{1}{q\|y\|_q^q} \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

так как числа p и q взаимно сопряженные, а также ввиду того, что по определению

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = \|x\|_p^p \ \text{ и } \ \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q = \|y\|_q^q.$$

Умножая теперь последнее неравенство на произведение $\|x\|_p \cdot \|y\|_q$, приходим к соотношению (2.3). Теорема доказана. □

Замечание 2.5. Неравенство (2.3) сохраняется также и в крайних случаях: т.е. для пар $p = 1$, $q = \infty$ и $p = \infty$, $q = 1$. Проверим это, например, для первой пары. Действительно, по определению $\|\cdot\|_\infty$

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \le \|y\|_\infty \sum_{k=1}^{n} |x_k| = \|x\|_1 \cdot \|y\|_\infty.$$

Задача 2.4. Доказать, что для любого $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство:

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Задача 2.5. Доказать, что неравенство (2.3) обращается в равенство тогда и только тогда, когда существует такое $c > 0$, что для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ выполняется: $|x_k|^p = c \cdot |y_k|^q$.

Теорема 2.8. *[неравенство Минковского] Для произвольного* $1 < p < \infty$ *и всех* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство:*

$$\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p. \tag{2.4}$$

Доказательство. Сначала, используя определение функционала $\|\cdot\|_p$, оценим:

$$\begin{aligned} \|x+y\|_p^p &= \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} \\ &\le \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1}. \end{aligned}$$

Далее, применяя к каждой из сумм справа неравенство Гёльдера (2.3), а также учитывая, что $(p-1)q = p$, получим:

$$\|x+y\|_p^p \le \|x+y\|_p^{\frac{p}{q}} \cdot (\|x\|_p + \|y\|_p),$$

откуда

$$\|x+y\|_p^{p(1-\frac{1}{q})} \le \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Так как $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, то последнее неравенство — это в точности неравенство (2.4). Теорема доказана. □

Замечание 2.6. В случае $p = 2$ неравенство (2.4) называется *неравенством Коши-Буняковского.*

Замечание 2.7. Неравенство (2.4) верно также, если $p = 1$ и $p = \infty$ (проверить самостоятельно).

Неравенство Минковского, доказанное в теореме 2.8, позволяет определить новые примеры норм как на $\mathbb{R}^n$, так и на пространствах последовательностей.

Пример 2.7. Неравенство (2.4) означает, что функционал $\|\cdot\|_p$ $(1 \le p \le \infty)$, определенный ранее на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяет неравенству треугольника. Остальные свойства нормы выполняются для него очевидным образом. Таким образом, мы получаем семейство ЛНП $\mathbb{R}^n_p = \big(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p\big)$ $(1 \le p \le \infty)$.

Пример 2.8. Для любого $1 \le p \le \infty$ через ℓ_p обозначим пространство всех последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, таких, что $\|x\|_p < \infty$, где

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ (1 \le p < \infty) \ \text{ и } \ \|x\|_\infty = \sup_{k=1,2,3,\ldots} |x_k|.$$

Проверим, что это ЛНП. Так как случай $p = \infty$ был рассмотрен ранее, ограничимся ситуацией, когда $1 \le p < \infty$. Докажем лишь неравенство треугольника, так как все остальные свойства нормы выполняются очевидным образом.

Действительно, так как ввиду неравенства Минковского для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \|x\|_p + \|y\|_p,$$

то нужное нам соотношение

$$\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

получается переходом к пределу при $n \to \infty$. Последнее неравенство также показывает, что множество ℓ_p замкнуто относительно суммы элементов (его замкнутость относительно произведения на числа и остальные свойства нормы проверить самостоятельно).

Перейдем теперь к функциональным неравенствам Гёльдера и Минковского. Напомним, что пространство с мерой — это тройка (X, Σ, μ), где X — произвольное множество, Σ — σ-алгебра его подмножеств и $\mu : \Sigma \to [0; +\infty)$ — мера, определенная на Σ, т.е. функция множества, обладающая следующими свойствами: 1) $\mu(\varnothing) = 0$ и 2)(σ-аддитивность) если $E_i \in \Sigma$ $(i \in \mathbb{N})$, $E_i \cap E_j = \varnothing$ $(i \ne j)$, то

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Будут рассматриваться Σ-измеримые функции $f\colon X \to \mathbb{R}$, т.е. такие, что множество $\{x \in X :\ f(x) < c\}) \in \Sigma$ для произвольного $c \in \mathbb{R}$. Напомним (см. [1, гл. 6, § 1] или [2, гл. 5, § 5]), что из определения интеграла Лебега следует, что $\int\limits_X f(x)\, d\mu$ принимает некоторое значение (конечное или равное $+\infty$), если Σ-измеримая функция f неотрицательна. Поэтому можно ввести следующее обозначение.

Определение 2.8. Если $1 \le p < \infty$, то $L_p = L_p(X, \Sigma, \mu)$ — множество всех функций $f : X \to \mathbb{R}$, обладающих следующими свойствами:

a) f Σ-измерима;

b) $\|f\|_p = \Big(\int\limits_X |f(x)|^p\, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

Как и в случае $\mathbb{R}^n$ (а также пространств последовательностей), соответствующий функционал можно определить и для $p = \infty$.

Определение 2.9. Измеримая функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *существенно ограниченной*, если найдется такое $\alpha > 0$, что $\mu\{x \in X :\ |f(x)| > \alpha\} = 0$. В этом случае величина

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha > 0 :\ \mu\{x \in X :\ |f(x)| > \alpha\} = 0\}$$

называется ее *существенно верхней гранью.*

Пример 2.9. Рассмотрим отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега m и функцию $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, определенную следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x^2,\ x \ne \frac{1}{n}\ (n \in \mathbb{N}); \\ n,\ x = \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Ясно, что f не ограничена. В то же время, для произвольного $\alpha > 1$

$$\{x \in (0,1) : |f(x)| > \alpha\} \subset \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Так как мера Лебега не более чем счетного множества равна нулю, то

$$m\{x : |f(x)| > \alpha\} = 0 \text{ для любого } \alpha > 1,$$

откуда $\|f\|_\infty \leq 1$ (доказать самостоятельно, что $\|f\|_\infty = 1$).

Теорема 2.9. *[Интегральные неравенства Гёльдера и Минковского] Если (X, Σ, μ) — произвольное пространство с мерой, $1 < p < \infty$, а q — число, сопряженное к p, то для произвольных Σ-измеримых функций f и g справедливы неравенства:*

$$\int_X |f(x)g(x)|\, d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad \textit{(неравенство Гельдера)} \tag{2.5}$$

и

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad \textit{(неравенство Минковского).} \tag{2.6}$$

Доказательство. Применяются совершенно те же рассуждения, что и в доказательстве теорем 2.7 и 2.8, только суммирование нужно заменить интегрированием по X. □

Задача 2.6. Доказать неравенства (2.5) и (2.6) для крайних индексов $p = 1$ и $p = \infty$.

2.5 Эквивалентные нормы и изоморфизмы в ЛНП

Определение 2.10. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, определенные на ЛП X, называют *эквивалентными* ($\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$), если существуют такие константы $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, что для всех $x \in X$ выполнено:

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1. \tag{2.7}$$

Теорема 2.10. *Если $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две нормы на ЛП, то $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ тогда и только тогда, когда из сходимости последовательности в одной норме следует сходимость в другой, и наоборот.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ и $\|x_n - x\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Применяя правую часть неравенства (2.7) к векторам $x_n - x$ ($n \in \mathbb{N}$) получим

$$0 \leq \|x_n - x\|_2 \leq \beta\|x_n - x\|_1,$$

откуда по теореме о сжатой переменной $\|x_n - x\|_2 \to 0$. Противоположная импликация ($\|x_n - x\|_2 \to 0 \;\Rightarrow\; \|x_n - x\|_1 \to 0$) доказывается точно так же с помощью левой части (2.7).

Пусть теперь, наоборот, сходимость последовательности в одной норме эквивалентна сходимости в другой. Предположим, что соотношение (2.7) неверно. Например, пусть не выполнена его правая часть. Это означает, что для каждого $\beta > 0$

найдется $x_\beta \in X$, для которого $\|x_\beta\|_2 > \beta\|x_\beta\|_1$. В частности, тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $x_n \in X$, такой, что

$$\|x_n\|_2 > n \cdot \|x_n\|_1. \tag{2.8}$$

Так как ввиду (2.8) $x_n \neq \vec{0}$, для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно определить вектор

$$y_n = \frac{x_n}{\sqrt{n} \cdot \|x_n\|_1}.$$

Тогда, с одной стороны,

$$\|y_n\|_1 = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \|x_n\|_1} \cdot \|x_n\|_1 = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

и значит, $\|y_n\|_1 \to 0$. С другой, учитывая (2.8),

$$\|y_n\|_2 = \frac{\|x_n\|_2}{\sqrt{n} \cdot \|x_n\|_1} \geq \sqrt{n},$$

и поэтому последовательность $\{y_n\}$ не ограничена относительно $\|\cdot\|_2$. Таким образом, она в этом смысле не имеет предела. Так как это противоречит нашему условию, то теорема доказана. □

Теорема 2.11. *На конечномерном ЛП X любые две нормы эквивалентны между собой.*

Доказательство. Пусть для определенности $\dim X = n < \infty$, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис в X. Наряду с нормой $\|\cdot\|$, заданной на X, определим на этом пространстве еще одну (евклидову) норму следующим образом:

$$\text{если } \ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ (x_i \in \mathbb{R}), \ \text{ то } \ \|x\|_e := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.9}$$

В частности, неравенство треугольника для $\|\cdot\|_e$ является непосредственным следствием неравенства Коши-Буняковского.

Докажем, что $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_e$. Если вектор $x \in X$ представим так, как в (2.9), то ввиду неравенства Гёльдера при $p = q = 2$

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|e_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2\right)^{1/2},$$

откуда

$$\|x\| \leq \beta\|x\|_e, \tag{2.10}$$

где $\beta := \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2\right)^{1/2}$. Осталось доказать неравенство противоположного характера.

Введем функцию $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\text{если } \ z = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \text{ то } \ \varphi(z) := \Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big\|.$$

Покажем, что эта функция непрерывна относительно нормы $\|z\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ в $\mathbb{R}^n$. Действительно, для произвольных $z^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и $z = (x_1, \ldots, x_n)$ ввиду обратного неравенства треугольника, неравенства Коши-Буняковского, а также определения числа β

$$\begin{aligned} |\varphi(z) - \varphi(z^0)| &= \left| \Big\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \Big\| - \Big\| \sum_{i=1}^n x_i^0 e_i \Big\| \right| \\ &\leq \Big\| \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0) e_i \Big\| \leq \beta \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 \right)^{1/2} = \beta \|z - z^0\|_2. \end{aligned}$$

Тем самым, если $\|z - z^0\|_2 \to 0$, то $\varphi(z) \to \varphi(z^0)$.

Рассмотрим φ на сфере

$$S := \left\{ z = (x_1, \ldots, x_n) : \sum_{k=1}^n x_k^2 = 1 \right\}$$

единичного радиуса в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что S — ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, и значит, компакт. Поэтому φ достигает на S свое минимальное значение. Иначе говоря, если $\alpha := \min_{z \in S} \varphi(z)$, то $\varphi(z^0) = \alpha$ для некоторого $z^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in S$.

Так как $\varphi(z) \geq 0$, то $\alpha \geq 0$. Предположим, что $\alpha = 0$. Тогда $\varphi(z^0) = 0$, и значит, по определению φ и ввиду невырожденности нормы

$$\sum_{i=1}^n x_i^0 e_i = \vec{0}.$$

Но $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис, следовательно, $x_i^0 = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Последнее, конечно, противоречит тому, что $x^0 \in S$, и значит, $\alpha > 0$.

Для произвольного $z = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ z \neq \vec{0}$, определим вектор $\bar{z} := z / \|z\|_2$. Тогда $\bar{z} \in S$ и по определению α

$$\varphi(\bar{z}) = \frac{\left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|}{\|z\|_2} \geq \alpha > 0.$$

После умножения последнего неравенства на $\|z\|_2$ получим:

$$\Big\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \Big\| \geq \alpha \|z\|_2.$$

Заметим, что $\|z\|_2 = \|x\|_e$, где $x \in X$ имеет вид (2.9). Поэтому последнее неравенство можно переписать следующим образом:

$$\|x\| \geq \alpha \|x\|_e.$$

Отсюда и из соотношения (2.10) следует эквивалентность норм $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_e$.

Пусть теперь на X определены две произвольные нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Так как каждая из них эквивалентна евклидовой, то существуют такие α_1, β_1, α_2 и β_2, что для всех $x \in X$

$$\alpha_1 \|x\|_e \leq \|x\|_1 \leq \beta_1 \|x\|_e \ \text{ и } \ \alpha_2 \|x\|_e \leq \|x\|_2 \leq \beta_2 \|x\|_e.$$

Из этих неравенств следует:

$$\frac{\alpha_2}{\beta_1}\|x\|_1 \le \alpha_2\|x\|_e \le \|x\|_2 \le \beta_2\|x\|_e \le \frac{\beta_2}{\alpha_1}\|x\|_1,$$

и значит, соотношение (2.7) выполняется с константами $\alpha = \alpha_2/\beta_1$ и $\beta = \beta_2/\alpha_1$. Таким образом, $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, и теорема доказана. □

Следствие 2.1. *В пространстве $\mathbb{R}^n$ все нормы эквивалентны между собой. При этом сходимость относительно любой из них эквивалентна покоординатной сходимости.*

Доказательство. Первое утверждение — непосредственное следствие конечномерности $\mathbb{R}^n$ и теоремы 2.11. Ранее (см. теорему 2.2) было показано, что сходимость в ЛНП $\mathbb{R}^n_\infty = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, где $\|x\|_\infty = \max\limits_{k=1,\dots,n} |x_k|$, эквивалентна покоординатной сходимости. Ввиду теоремы 2.10 и уже доказанного первого утверждения следствия то же самое верно и для произвольной нормы на $\mathbb{R}^n$. Следствие доказано. □

Задача 2.7. На линейном пространстве ℓ_1 всех последовательностей $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ таких, что $\sum_{k=1}^\infty |x_k| < \infty$, рассмотрим семейство норм

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p\right)^{1/p}, \ \ 1 \le p < \infty.$$

Доказать, что для любых $p_1 \ne p_2$ $\|\cdot\|_{p_1} \nsim \|\cdot\|_{p_2}$.

Задача 2.8. На пространстве $C^1[0,1]$ всех функций, непрерывно-дифференцируемых на $[0,1]$, определим две нормы:

$$\|x\|_1 = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| \ \text{ и } \ \|x\|_2 = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)|.$$

Доказать, что они не эквивалентны.

Лемма 2.4. *Пусть X — ЛП, Y — ЛНП, а $A : X \to Y$ — алгебраический изоморфизм. Тогда функционал $\|x\|_A := \|Ax\|_Y$ $(x \in X)$ обладает всеми свойствами нормы.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться определением нормы и алгебраического изоморфизма (проверить самостоятельно). □

Определение 2.11. Отображение $A : X \to Y$ будем называть *изоморфизмом ЛНП* (или просто *изоморфизмом*), если A — алгебраический изоморфизм и нормы $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_A$ эквивалентны на X. Последнее означает, что существуют константы $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, для которых выполнено:

$$\alpha\|x\|_X \le \|Ax\|_Y \le \beta\|x\|_X \ \ (x \in X).$$

Определение 2.12. Если существует хотя бы один изоморфизм $A : X \to Y$, то ЛНП X и Y называются *изоморфными.*

Следующее утверждение показывает, что ЛНП одинаковой размерности "практически одинаковы" не только в алгебраическом (см. теорему 1.6), но и в топологическом смысле.

Теорема 2.12. *Любые два конечномерных ЛНП одинаковой размерности изоморфны между собой.*

Доказательство. Во-первых, по теореме 1.6 существует алгебраический изоморфизм $A : X \to Y$. Кроме того, по лемме 2.4 функционал $\|x\|_A = \|Ax\|_Y$ является нормой на X. И наконец, применяя теорему 2.11, получаем, что $\|\cdot\|_X \sim \|\cdot\|_A$, т.е. A — изоморфизм ЛНП X и Y. $\square$

2.6 Банаховы пространства

Определение 2.13. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из ЛНП X называется *фундаментальной* (*последовательностью Коши*), если $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$ или подробнее:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N = N(\varepsilon) \;\forall\, n, m \geq N \;\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Теорема 2.13. *[Свойства фундаментальных последовательностей] Пусть X — произвольное ЛНП.*

1. *Если $x_n \to x$ по норме, то $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность.*

2. *Если $\{x_n\} \subset X$ фундаментальна, то она ограничена, то есть существует такое $M > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ $\|x_n\| \leq M$.*

3. *Если $\{x_n\} \subset X$ фундаментальна и существует $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, такая, что $x_{n_k} \to x$, то и $x_n \to x$.*

Доказательство. 1. Достаточно воспользоваться неравенством треугольника (доказать самостоятельно).

2. Доказательство совершенно аналогично доказательству пункта 3) теоремы 2.1.

3. По определению фундаментальности для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для $n, m \geq N$ $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. С другой стороны, так как $x_{n_k} \to x$, можно взять k так, что одновременно $n_k \geq N$ и $\|x_{n_k} - x\| < \varepsilon$. Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что для всех $n \geq N$ выполнено:

$$\|x_n - x\| = \|(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - x)\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| < 2\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ теорема доказана. $\square$

Итак, всякая сходящаяся последовательность фундаментальна. Обратное, как мы увидим далее, вообще говоря, не верно: существуют ЛНП, содержащие не сходящиеся фундаментальные последовательности. Следующее определение вводит важный класс ЛНП, в которых понятия фундаментальности и сходимости совпадают.

Определение 2.14. ЛНП X называется *полным* (или *банаховым*), если любая фундаментальная последовательность сходится в нем.

Рассмотрим примеры банаховых пространств.

Пример 2.10. ЛНП $\mathbb{R}$ с естественной нормой $\|x\| = |x|$ полно, так как по принципу Больцано–Вейерштрасса любая фундаментальная числовая последовательность сходится.

Задача 2.9. Пусть на ЛНП X заданы две эквивалентные нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Доказать, что любая последовательность $\{x_n\} \subset X$, фундаментальная относительно одной из них, фундаментальна и относительно другой.

Пример 2.11. Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ с произвольной нормой и докажем, что оно полно. Так как по следствию 2.1 все нормы на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны, то ввиду результата только что сформулированной задачи нам достаточно показать полноту этого пространства относительно некоторой конкретной нормы, например,

$$\|x\|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} |x_k|, \text{ где } x = (x_1, \dots, x_n).$$

Итак, предположим, что последовательность $x^m = (x_1^m, \dots, x_n^m)$ $(m = 1, 2, \dots)$ фундаментальна, т.е.

$$\|x^m - x^k\|_\infty \xrightarrow[m,k\to\infty]{} 0.$$

Тогда из неравенства

$$|x_i^m - x_i^k| \le \max_{j=1,\dots,n} |x_j^m - x_j^k| = \|x^m - x^k\|_\infty$$

следует, что для каждого $i = 1, \dots, n$

$$x_i^m - x_i^k \xrightarrow[k,m\to\infty]{} 0.$$

Последнее означает фундаментальность числовой последовательности $\{x_i^m\}_{m=1}^\infty$ для любого $i = 1, \dots, n$. Опять ввиду принципа Больцано–Вейерштрасса существует $x_i := \lim\limits_{m\to\infty} x_i^m$. Таким образом, последовательность $\{x^m\}$ сходится к вектору $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ покоординатно, а значит, и по норме $\|\cdot\|_\infty$ (см. следствие 2.1). Тем самым $\mathbb{R}^n$ — банахово пространство.

Пример 2.12. Докажем полноту пространства ℓ_1 всех числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, таких, что $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^\infty |x_k| < \infty$.

Если последовательность $x^m = (x_1^m, x_2^m \dots)$ $(m = 1, 2, \dots)$ фундаментальна, то

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, N \ \forall m, k \ge N \ \ \|x^m - x^k\|_1 = \sum_{i=1}^\infty |x_i^m - x_i^k| \le \varepsilon. \tag{2.11}$$

Отсюда для каждого $j = 1, 2, \dots$ $|x_j^m - x_j^k| \le \varepsilon$ $(m, k \ge N)$, и значит, числовая последовательность $\{x_j^m\}_{m=1}^\infty$ фундаментальна. Поэтому, как и в предыдущем примере, существует $\lim\limits_{m\to\infty} x_j^m := x_j$ $(j = 1, 2, \dots)$. В заключение покажем, что $x = (x_1, \dots, x_n) \in \ell_1$ и $\|x^m - x\|_1 \to 0$.

Для этого воспользуемся неравенством из (2.11). Зафиксировав $m \ge N$ и переходя к пределу при $k \to \infty$, получим, что для всех $m \ge N$

$$\sum_{i=1}^\infty |x_i^m - x_i| \le \varepsilon \text{ или иначе } \|x^m - x\|_1 \le \varepsilon.$$

Отсюда, во-первых, $x^m - x \in \ell_1$, а значит, и $x = x^m - (x^m - x) \in \ell_1$. Во-вторых, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ из этого неравенства следует, что $\|x^m - x\|_1 \to 0$ при $m \to \infty$.

Задача 2.10. Доказать, что пространство ℓ_p, состоящее из числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, таких, что

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} < \infty,$$

полно для каждого $1 \le p < \infty$.

Задача 2.11. Доказать полноту пространства $C[a,b]$ всех функций, непрерывных на $[a,b]$, с нормой $\|x\|_C = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$.

Приведем теперь пример неполного ЛНП. Ход рассуждений при построении таких примеров обычно следующий. Мы рассматриваем ЛНП, которое является "частью" другого, и пытаемся найти в нем последовательность, сходящуюся к элементу второго, более широкого пространства (и не принадлежащему нашему пространству). Если нам это удается, то тем самым построена фундаментальная последовательность, не сходящаяся в исходном пространстве, которое по этой причине неполно.

Определение 2.15. Функцию $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ будем называть *кусочно-непрерывной*, если отрезок $[a,b]$ мохно разбить на конечное число промежутков, внутри каждого из которых она непрерывна, а их концы — ее точки разрыва первого рода.

Определение 2.16. Будем говорить, что точка разрыва первого рода x_0 функции $f(x)$ регулярна, если

$$f(x_0) = \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}.$$

Определение 2.17. Через $\widetilde{C}_2[a,b]$ обозначим множество всех кусочно-непрерывных функций $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, внутренние точки разрыва которых регулярны и, кроме того, непрерывных в точке a слева, а в точке b справа.

Лемма 2.5. $\widetilde{C}_2[a,b]$ *— ЛП относительно поточечных операций, а функционал*

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{1/2}, \tag{2.12}$$

где справа стоит интеграл Римана, является нормой на этом пространстве.

Доказательство. Соотношения $\|f\|_2 \ge 0$ и $\|\alpha f\|_2 = |\alpha| \cdot \|f\|_2$, где $f \in \widetilde{C}_2[a,b]$, а $\alpha \in \mathbb{R}$, очевидны. Неравенство треугольника является следствием неравенства Коши-Буняковского. Докажем, что функционал $\|\cdot\|_2$ невырожден, т.е., что из $\|f\|_2 = 0$ следует: $f(x) \equiv 0$.

Итак, пусть

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = 0. \tag{2.13}$$

Тогда существует точка $x_0 \in [a,b]$, для которой

$$|f(x_0)| = \varepsilon > 0. \tag{2.14}$$

Предположим сначала, что f непрерывна в точке x_0. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполнено: $|f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда

$$\int\limits_a^b f^2(x)\,dx \geq \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)\,dx \geq \frac{\varepsilon^2\delta}{2} > 0,$$

что противоречит (2.13).

Подобные аргументы применимы и в случае, когда x_0 — регулярная точка разрыва. Из предположения (2.14) вытекает, что хотя бы одно из чисел $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ не равно нулю. Пусть, например, $|f(x_0 - 0)| = \varepsilon_1 > 0$. Тогда по определению предела опять существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $|f(x)| \geq \frac{\varepsilon_1}{2}$. Следовательно,

$$\int\limits_a^b f^2(x)\,dx \geq \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} f^2(x)\,dx \geq \frac{{\varepsilon_1}^2\delta}{4} > 0,$$

что опять противоречит (2.13). Лемма доказана. □

Определение 2.18. Пусть $C_2[a,b]$ — ЛП всех непрерывных функций $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, рассматриваемое с нормой (2.12).

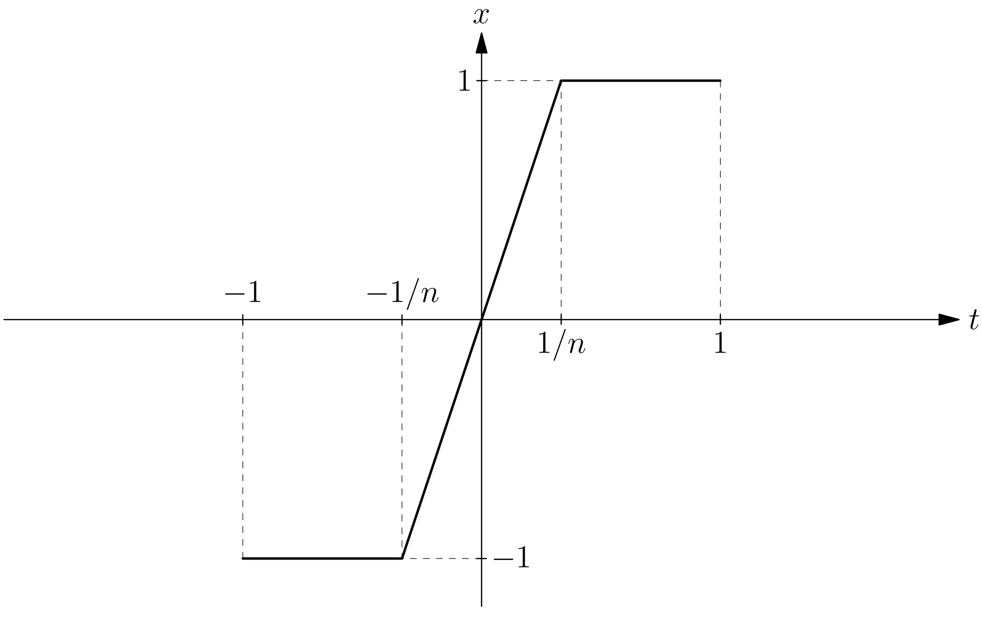
Ясно, что $C_2[a,b] \subset \widetilde{C}_2[a,b]$. Кроме того, по лемме 2.5 $C_2[a,b]$ — ЛНП.

Теорема 2.14. *ЛНП $C_2[a,b]$ неполно.*

Доказательство. Достаточно найти в $C_2[a,b]$ фундаментальную последовательность, не имеющую в этом пространстве предела. Для простоты рассмотрим случай, когда $a = -1$, а $b = 1$ (в общей ситуации рассуждения те же самые).

Определим последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} 1,\ t \geq \frac{1}{n}, \\ -1,\ t \leq -\frac{1}{n}, \\ nt,\ -\frac{1}{n} < t < \frac{1}{n}. \end{cases}$$



Заметим, что $\{x_n\}$ можно рассматривать и как последовательность из $C_2[a,b]$, и как — из $\widetilde{C}_2[a,b]$. Во втором случае она имеет предел. Точнее,

$$\|x_n - x\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{2.15}$$

где

$$x(t) = \begin{cases} 1, \ t > 0 \\ -1, \ t < 0 \\ 0, \ t = 0. \end{cases}$$

Действительно, из определения этих функций следует:

$$\|x_n - x\|_2^2 = \int\limits_{-1}^{1} |x_n(t) - x(t)|\, dt = \int\limits_{-1/n}^{1/n} |x_n(t) - x(t)|^2\, dt \le \frac{8}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел в $C_2[a,b]$, т.е. существует $\overline{x} \in C_2[a,b]$, такая, что $x_n \to \overline{x}$. Так как норма в $C_2[a,b]$ и $\widetilde{C}_2[a,b]$ — одна и та же и $C_2[a,b] \subset \widetilde{C}_2[a,b]$, то одновременно $\overline{x}$ — предел этой последовательности в $\widetilde{C}_2[a,b]$. Но тогда ввиду единственности предела в ЛНП $\overline{x}(t) \equiv x(t)$. Однако последнее равенство невозможно, так как $\overline{x}(t)$ — непрерывная функция, а $x(t)$ — разрывная. Тем самым последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела в $C_2[a,b]$. В то же время, из-за (2.15), а также опять ввиду совпадения норм в обоих пространствах она фундаментальна в пространстве $C_2[a,b]$. В итоге заключаем, что $C_2[a,b]$ — неполное ЛНП. $\square$

Задача 2.12. Доказать, что ЛНП $\widetilde{C}_2[a,b]$ также неполно.

Задача 2.13. Обозначим через Φ множество финитных числовых последовательностей, т.е. $x = (x_1, x_2, \dots) \in \Phi$, если существует такой индекс $k_0 = k_0(x)$, что $x_k = 0$ для всех $k \ge k_0$.

Доказать, что ЛП Φ, рассматриваемое с нормой $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$, является неполным ЛНП.

2.7 Ряды в ЛНП. Критерий полноты.

По аналогии с числовыми рядами в ЛНП можно ввести определение рядов, их сходимости и сумм.

Определение 2.19. Пусть X — ЛНП, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Образуем формальную бесконечную сумму (ряд)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots. \tag{2.16}$$

Говорят, что ряд (2.16) *сходится*, если последовательность его частичных сумм $S_k := \sum\limits_{n=1}^{k} x_n$ $(k = 1, 2, \dots)$ имеет предел $S \in X$ по норме. При этом вектор S называется *суммой* ряда (2.16) и в этом случае пишут, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S.$$

Если же последовательность частичных сумм $\{S_k\}$ не имеет предела, то ряд (2.16) называется *расходящимся.*

Теорема 2.15. *[Векторный критерий Коши] Пусть X — ЛНП. Для того, чтобы ряд (2.16) сходился в X необходимо, а если X банахово, то и достаточно выполнение следующего условия:*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon): \;\; \forall m > k \geq N \;\; \| \sum_{n=k+1}^{m} x_n \| < \varepsilon. \tag{2.17}$$

Доказательство. Предположим сначала, что ряд (2.16) сходится. Тогда последовательность частичных сумм $\{S_k\}$ имеет предел и, значит, фундаментальна. Тем самым

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon): \;\; \forall m > k \geq N \;\; \|S_m - S_k\| < \varepsilon.$$

Так как

$$S_m - S_k = \sum_{n=1}^{m} x_n - \sum_{n=1}^{k} x_n = \sum_{n=k+1}^{m} x_n,$$

то предыдущее соотношение означает выполнение условия (2.17).

Пусть теперь X банахово и выполнено условие Коши (2.17). Рассуждения из первой части доказательства показывают, что условие (2.17) эквивалентно фундаментальности последовательности частичных сумм $\{S_k\}$ ряда (2.16). Следовательно, она фундаментальна, и, значит, ввиду полноты X имеет предел. В итоге ряд (2.16) сходится, и теорема доказана. $\square$

Задача 2.14. Доказать необходимый признак сходимости векторного ряда: если ряд (2.16) сходится, то $\|x_n\| \to 0$.

Определение 2.20. Пусть X — ЛНП, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Ряд (2.16) называется *абсолютно сходящимся*, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty. \tag{2.18}$$

Теорема 2.16. *ЛНП X полно тогда и только тогда, когда любой абсолютно сходящийся ряд сходится в этом пространстве.*

Доказательство. Пусть сначала пространство X банахово и ряд (2.16) сходится абсолютно, то есть выполняется условие (2.18). Тогда ввиду числового критерия Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N = N(\varepsilon) \, \forall m > k \geq N: \; \sum_{n=k+1}^{m} \|x_n\| < \varepsilon$$

Заметим, что по неравенству треугольника

$$\Big\| \sum_{n=k+1}^{n} x_n \Big\| \leq \sum_{n=k+1}^{m} \|x_n\|.$$

Следовательно, для ряда (2.16) выполняется векторное условие Коши. Так как X банахово, то по теореме 2.15 этот ряд сходится в X.

Наоборот, предположим, что X — ЛНП, в котором каждый абсолютно сходящийся ряд сходится. Для того, чтобы доказать его полноту, возьмем произвольную фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Идея будет состоять в ее "прореживании" таким образом, чтобы разности членов полученной подпоследовательности образовывали абсолютно сходящийся ряд.

Прежде всего, ввиду фундаментальности найдется такой номер n_1, что для всех $n \geq n_1$ выполняется неравенство: $\|x_n - x_{n_1}\| < 2^{-1}$. Далее, по той же причине существует $n_2 > n_1$, такой, что для всех $n > n_2$ $\|x_n - x_{n_2}\| < 2^{-2}$. Тем самым, в частности,

$$\|x_{n_2} - x_{n_1}\| < \frac{1}{2}.$$

Продолжая аналогичные рассуждения, построим подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, такую, что

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k} \ \ (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.19}$$

Рассмотрим ряд

$$x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}). \tag{2.20}$$

Ввиду неравенств (2.19) он абсолютно сходится:

$$\|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \|x_{n_1}\| + 1 < \infty.$$

Следовательно, по условию этот ряд сходится в пространстве X. Это означает, что последовательность $\{S_m\}$ его частичных сумм имеет предел в X. Так как

$$S_{m+1} = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{m} (x_{k+1} - x_{n_k}) = x_{n_{m+1}},$$

то тем самым подпоследовательность $\{x_{n_m}\}$ сходится. Применяя теперь третье утверждение теоремы 2.13, заключаем, что то же можно сказать и о самой последовательности $\{x_n\}$. Теорема доказана. □

Определение 2.21. Говорят, что ряд (2.16) сходится безусловно в ЛНП X, если для любой перестановки $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ сходится в этом пространстве.

Задача 2.15. Доказать, что из абсолютной сходимости ряда в банаховом пространстве вытекает его безусловная сходимость.

Задача 2.16. Предположим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится в ЛНП безусловно. Показать, что тогда сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ не зависит от перестановки π.

Если скалярный ряд сходится, но не абсолютно, то по теореме Римана [3, гл. 6, § 6.3] существует расходящийся "переставленный" ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$. Поэтому этот ряд не будет сходиться безусловно. Тем самым в случае скалярных рядов понятия безусловной и абсолютной сходимости совпадают. Оказывается, последнее верно и в конечномерных ЛНП. Приведем пример, показывающий, что в бесконечномерном случае это уже не так.

Пример 2.13. В пространстве ℓ_2 рассмотрим последовательность векторов: $x^k = (0, \dots, 0, \underbrace{1/k}_{k}, 0, \dots)$.

С одной стороны, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x^k\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty,$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ не сходится абсолютно. Покажем, что он сходится безусловно.

Для произвольно малого $\varepsilon > 0$ найдем такой номер N, что

$$\Big(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \Big)^{1/2} < \varepsilon. \tag{2.21}$$

Пусть теперь π — произвольная перестановка натурального ряда. Так как π — взаимно однозначное отображение $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$, то существует номер N_1, такой, что образ $\pi(\{1, 2, \dots, N_1\})$ содержит множество $\{1, 2, \dots, N\}$. Тогда, если $m > n \geq N_1$, то $\{\pi(n+1), \pi(n+2), \dots, \pi(m)\} \cap \{1, 2, \dots, N\} = \varnothing$, и значит, ввиду (2.21)

$$\Big\| \sum_{k=n+1}^{m} x^{\pi(k)} \Big\|_2 \leq \Big(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \Big)^{1/2} < \varepsilon.$$

Так как пространство ℓ_2 полно, а $\varepsilon > 0$ произвольно, то тем самым по теореме 2.15 "переставленный" ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x^{\pi(k)}$ сходится, а исходный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ сходится безусловно.

2.8 Принцип вложенных шаров в банаховом пространстве.

Следующее утверждение является естественным обобщением принципа стягивающихся сегментов на прямой. Напомним, что замкнутым шаром в ЛНП X с центром в $x_0 \in X$ и радиусом $r > 0$ называется множество

$$\bar{S}_r(x_0) := \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}.$$

Теорема 2.17. *Пусть X — банахово пространство, $\{\overline{S}_{r_k}(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров в X (т.е. $\overline{S}_{r_1}(x_1) \supset \overline{S}_{r_2}(x_2) \supset \dots$), такая, что $r_k \to 0$.*

Тогда существует единственная точка $x \in X$, принадлежащая всем этим шарам (т.е. $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{S}_{r_k}(x_k)$).

Доказательство. Покажем, что последовательность $\{x_k\}$ центров шаров фундаментальна. Действительно, так как по условию

$$x_n \in \overline{S}_{r_m}(x_m) \ \text{ для всех } \ n \geq m,$$

то

$$\|x_n - x_m\| \leq r_m \ \ (n \geq m). \tag{2.22}$$

Отсюда $\|x_n - x_m\| \to 0$ при $m \to \infty$, и фундаментальность доказана. Следовательно, ввиду полноты X существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, который обозначим через x. Если теперь в неравенстве (2.22) зафиксировать m, а n устремить к бесконечности, то, учитывая непрерывность нормы в ЛНП, получим:

$$\|x - x_m\| \le r_m \ \text{ для всех } \ m \in \mathbb{N},$$

или эквивалентно $x \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{S}_{r_m}(x_m)$.

Единственность точки, принадлежащей всем шарам нашей последовательности — прямое следствие единственности предела последовательности $\{x_k\}$ (самостоятельно провести более подробные рассуждения). $\square$

Задача 2.17. Доказать утверждение, обратное к утверждению последней теоремы: если в ЛНП X любая последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет общую точку, то пространство X банахово.

Задача 2.18. Доказать, что первое утверждение (о существовании общей точки) теоремы 2.17 остается справедливым и без условия $r_k \to 0$.

2.9 Множества первой и второй категории. Принцип Бэра-Хаусдорфа.

Определение 2.22. Подмножество E ЛНП X называется *нигде не плотным в* X, если для любого шара S из X существует такой шар $S_1 \subset S$, что $S_1 \cap E = \varnothing$.

Определение 2.23. Множество $E \subset X$ называется *всюду плотным в шаре* $S \subset X$, если для произвольного шара $S_1 \subset S$ $S_1 \cap E \neq \varnothing$. В частности, E *всюду плотно в ЛНП* X, если для всякого шара S выполнено: $S \cap E \neq \varnothing$.

Лемма 2.6. *Множество $E \subset X$ не нигде не плотно в ЛНП X тогда и только тогда, когда оно всюду плотно в некотором шаре.*

Доказательство. Вытекает из приведенных определений. $\square$

Определение 2.24. Множество $E \subset X$ называется *множеством первой категории* в ЛНП X, если оно представимо в виде конечного или счетного объединения множеств, нигде не плотных в X, т.е.

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \ \text{ где } \ E_k \ (k = 1, 2, \dots) \ \text{ нигде не плотны в } \ X.$$

Любое множество, не являющееся множеством первой категории, называется *множеством второй категории.*

Пример 2.14. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^3$ с произвольной нормой.

a) Множество точек любой плоскости нигде не плотно в $\mathbb{R}^3$.

b) Множество всех точек с рациональными координатами всюду плотно в $\mathbb{R}^3$, но одновременно является там множеством первой категории.

Теорема 2.18. *[принцип Бэра-Хаусдорфа] Любое банахово пространство X является множеством второй категории (в себе), т.е. оно не представимо в виде*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad \text{где } E_n \text{ нигде не плотны в } X. \tag{2.23}$$

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно и представление пространства X в виде (2.23) существует. Так как E_1 нигде не плотно в X, то существует такой шар $\overline{S}_{r_1}$, что $\overline{S}_{r_1} \bigcap E_1 = \varnothing$. Не ограничивая общности, считаем, что $r_1 \leq 1$ (при необходимости его радиус всегда можно уменьшить). Аналогичным образом, так как E_2 нигде не плотно в шаре S_{r_1}, найдется шар $\overline{S}_{r_2} \subset \overline{S}_{r_1}$, для которого $\overline{S}_{r_2} \cap E_2 = \varnothing$. При этом опять можно предположить, что $r_2 \leq 1/2$. Продолжая этот процесс далее, получим последовательность вложенных замкнутых шаров

$$\overline{S}_{r_1} \supset \overline{S}_{r_2} \supset \ldots \supset \overline{S}_{r_n} \supset \ldots$$

с радиусами $r_n \leq 1/n$, такую, что

$$\overline{S}_{r_n} \cap E_n = \varnothing \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{2.24}$$

Так как X — банахово пространство, а $r_n \to 0$, то по принципу вложенных шаров существует точка $x_0 \in X$, такая, что

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S}_{r_n}.$$

С другой стороны, отсюда и из (2.24) следует, что $x_0 \notin E_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и тем самым ввиду (2.23) $x_0 \notin X$. Полученное противоречие показывает, что сделанное нами вначале предположение о возможности равенства вида (2.23) неверно, и теорема доказана. □

Задача 2.19. Доказать, что в банаховом пространстве пересечение любого счетного семейства открытых всюду плотных множеств всюду плотно.

Задача 2.20. Доказать, что любое непустое открытое подмножество банахова пространства является там множеством второй категории.

Задача 2.21. Напомним, что функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется *липшицевой* (удовлетворяющей *условию Липшица*), если существует такое $C > 0$, что для всех $u, v \in [a, b]$ выполнено неравенство:

$$|f(u) - f(v)| \leqslant C \cdot |u - v|.$$

a) Доказать, что любая липшицева функция непрерывна на $[a, b]$.

b) Доказать, что класс липшицевых функций образует множество первой категории в пространстве $C[a, b]$.

Задача 2.22. Доказать, что множество функций $M \subset C[a, b]$, имеющих производную хотя бы в одной точке отрезка, является множеством первой категории в $C[a, b]$.

Глава 3

Пространства $L_p(X, \Sigma, \mu)$

3.1 Множество $L_p(X,\ \Sigma,\ \mu)$ $(p > 0)$ и его свойства.

Пусть $(X,\ \Sigma,\ \mu)$ — пространство с мерой. Напомним, что мера μ называется *полной*, если из того, что $A \subset B$ и $\mu(B) = 0$, следует: $A \in \Sigma$ (и значит, $\mu(A) = 0$).

Здесь будут рассмотрены простейшие свойства определенного в прошлой главе множества $L_p = L_p(X, \Sigma, \mu)$ $(p > 0)$, состоящего изо всех Σ-измеримых функций $f\colon X \to \mathbb{R}$, таких, что

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \infty.$$

Теорема 3.1. *[теорема о вложении] Если $0 < p < q < \infty$, то $L_q \subset L_p$ и для всех $f \in L_q$ выполнено неравенство:*

$$\|f\|_p \leqslant \mu(X)^{\frac{q-p}{pq}} \|f\|_q. \tag{3.1}$$

Доказательство. Ввиду определения класса L_p достаточно доказать неравенство (3.1), так как из конечности $\|f\|_q$ и (3.1) вытекает конечность $\|f\|_p$.

Применяя неравенство Гёльдера со взаимно сопряженными показателями q/p и $q/(q-p)$, получим:

$$\|f\|_p^p = \int\limits_X |f(x)|^p \cdot 1 \, d\mu \leqslant \left(\int\limits_X (|f(x)|^p)^{\frac{q}{p}} \, d\mu \right)^{\frac{p}{q}} \cdot \left(\int\limits_X 1 \, d\mu \right)^{\frac{q-p}{q}} = \mu(X)^{\frac{q-p}{q}} \cdot \|f\|_q^p.$$

После возведения в степень $1/p$ приходим к неравенству (3.1). □

Замечание 3.1. Противоположное вложение, вообще говоря, не верно. Например, если $X = [0, 1]$ с мерой Лебега m, то функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x(0) = 0. \end{cases}$$

измерима по Лебегу и принадлежит классу L_1, так как

$$\|f\|_1 = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx < \infty,$$

В то же время, $f \notin L_2$. Действительно,

$$\|f\|_2^2 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \infty.$$

Тем самым $L_1([0,1],m) \not\subset L_2([0,1],m)$.

Задача 3.1. Пусть $0 < p < q < \infty$. Привести пример пространства с мерой (X, Σ, μ) и Σ-измеримой функции $f\colon X \to \mathbb{R}$, таких, что $f \in L_p \setminus L_q$ (можно использовать пространство с мерой из предыдущего примера).

Теорема 3.2. *Для любого пространства с мерой и произвольного $p > 0$ множество L_p является линейным пространством относительно обычных поточечных операций.*

Доказательство. Пусть $f, g \in L_p$. Покажем, что тогда $f + g \in L_p$ (более простую импликацию $\alpha \in \mathbb{R},\ f \in L_p \Rightarrow\ \alpha f \in L_p$ проверить самостоятельно).

Прежде всего, из курса "Интеграл Лебега"известно, что функция $f+g$ измерима, если измеримы f и g [1, гл. 4, § 2]. Осталось доказать, что $\|f+g\|_p < \infty$. Если $p \geqslant 1$, то достаточно применить интегральное неравенство Минковского:

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p < \infty.$$

Пусть теперь $0 < p < 1$. Для произвольных $a, b > 0$ справедливо неравенство:

$$(a+b)^p \leqslant 2^p(a^p + b^p). \tag{3.2}$$

Действительно, если $a < b$, то

$$(a+b)^p \leqslant (2b)^p \leqslant 2^p(b^p + a^p).$$

Так как случай $b < a$ рассматривается совершенно аналогично, то (3.2) доказано.

Применим неравенство (3.2) к числам $a = |f(x)|$ и $b = |g(x)|$, где $x \in X$:

$$|f(x) + g(x)|^p \leqslant 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

и затем проинтегрируем по всем $x \in X$:

$$\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\,d\mu \leqslant 2^p \left(\int\limits_X |f(x)|^p\,d\mu + \int\limits_X |g(x)|^p\,d\mu \right).$$

В итоге

$$\|f+g\|_p^p \leqslant 2^p(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) < \infty,$$

и теорема доказана. □

Замечание 3.2. Функционал $\|\cdot\|_p$, вообще говоря, не является нормой на L_p даже в случае $p \geq 1$, так как он не обладает свойством невырожденности: $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$.

Определение 3.1. Через $S_0 = S_0(X, \Sigma, \mu)$ обозначим множество всех функций $f\colon X \to \mathbb{R}$, равных нулю почти всюду относительно меры μ, т.е. таких, что $\mu\{x \in X\colon f(x) \neq 0\} = 0$.

Теорема 3.3. *Для любого пространства с мерой и произвольного $p > 0$ S_0 — линейное подпространство пространства L_p.*

Доказательство. Во-первых, если $f \in S_0$, то $\mu\{x\colon f(x) \neq 0\} = 0$, откуда

$$\|f\|_p^p = \int\limits_X |f(x)|^p d\mu = \int\limits_{\{x: f(x)=0\}} |f(x)|^p \, d\mu + \int\limits_{\{x: f(x)\neq 0\}} |f(x)|^p \, d\mu = 0,$$

и значит, $f \in L_p$. Покажем теперь, что S_0 замкнуто относительно линейных операций. Мы проверим лишь справедливость импликации: $f, g \in S_0 \Rightarrow f+g \in S_0$ (то, что $\alpha \in \mathbb{R},\ f \in S_0 \ \Rightarrow\ \alpha f \in S_0$, проверить самостоятельно).

Имеет место следующее вложение:

$$\{x\colon f(x) + g(x) \neq 0\} \subset \{x\colon f(x) \neq 0\} \cup \{x\colon g(x) \neq 0\},$$

откуда ввиду неотрицательности и субаддитивности меры ($\mu(A \cup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B)$) получаем:

$$0 \leqslant \mu\{x\colon f(x) + g(x) \neq 0\} \leq \mu\{x\colon f(x) \neq 0\} + \mu\{x\colon g(x) \neq 0\}.$$

Так как оба слагаемых из правой части последнего неравенства равны нулю, то отсюда $\mu\{x\colon f(x) + g(x) \neq 0\} = 0$, т.е. $f + g \in S_0$. □

Пример 3.1. Рассмотрим $[0, 1]$ с мерой Лебега m и функцию

$$f(x) = \begin{cases} n, & x = \dfrac{1}{n}, \\ 0, & x \neq \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Так как $\mu\big(\{1/n\}_{n=1}^{\infty}\big) = 0$, то $f \in S_0$.

Задача 3.2. Привести пример такой функции $f \in S_0([0, 1], m)$, что множество $\{x \in [0, 1] : \ f(x) \neq 0\}$ имеет мощность континуума.

3.2 Отношения эквивалентности и фактор-множества. Фактор- пространство ЛП по его подпространству.

Определение 3.2. *Бинарным отношением* на произвольном множестве X называется любое подмножество R декартова произведения $X \times X := \{(x, y), x, y \in X\}$. Вместо $(x, y) \in R$ далее пишем: xRy.

Определение 3.3. Бинарное отношение R называют *отношением эквивалентности*, если:

1. Для любого $x \in X$ выполнено: xRx (*рефлексивность*);
2. Если $x, y \in X$, то из xRy следует: yRx (*симметричность*);
3. Если $x, y, z \in X$, то из xRy и yRz следует: xRz (*транзитивность*).

Далее, если R — отношение эквивалентности, мы вместо xRy будем писать: $x \sim y$.

Задача 3.3. Доказать, что отношение изоморфизма между ЛНП является отношением эквивалентности на множестве всех ЛНП.

Теорема 3.4. *Всякое отношение эквивалентности на множестве X порождает разбиение X на классы эквивалентности. Точнее, имеет место представление*

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i, \tag{3.3}$$

где каждое подмножество X_i непусто, состоит из эквивалентных между собой элементов и при этом $X_{i_1} \cap X_{i_2} = \varnothing$, если $i_1 \neq i_2$.

Доказательство. Для произвольного $a \in X$ через X_a обозначим класс эквивалентности, порожденный элементом a, т.е. множество $X_a := \{x \in X \colon x \sim a\}$. Заметим, что ввиду рефлексивности отношения эквивалентности $a \in X_a$, и значит, $X_a \neq \varnothing$.

Покажем, что два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают. Иначе говоря, докажем импликацию:

$$X_a \cap X_b \neq \varnothing \;\Rightarrow\; X_a = X_b. \tag{3.4}$$

Действительно, если $x \in X_a \cap X_b$, то $x \sim a$ и $x \sim b$, откуда ввиду симметричности и транзитивности отношения эквивалентности $b \sim a$. Если теперь $y \in X_b$, то $y \sim b$, что вместе с $b \sim a$ дает: $y \sim a$, т.е. $y \in X_a$. Итак, $X_b \subset X_a$. Точно так же можно показать, что $X_a \subset X_b$, и тем самым (3.4) доказано.

Отождествим совпадающие классы и обозначим их через X_i ($i \in I$). Тогда множества X_i попарно не пересекаются, и их объединение совпадает со всем X. Теорема доказана. □

Задача 3.4. Доказать обратное утверждение: каждое разбиение множества на непересекающиеся классы порождает на нем некоторое отношение эквивалентности.

Определение 3.4. Пусть отношение эквивалентности $\sim$, определенное на множестве X, порождает разбиение (3.3). Тогда множество $\Sigma := \{X_i,\ i \in I\}$ называется *фактор-множеством множества X по отношению* $\sim$ и обозначается $\Sigma = X/\sim$.

Рассмотрим теперь более конкретную ситуацию. Пусть X — ЛП, а $L \subset X$ — его линейное подпространство. Зададим на X бинарное отношение:

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; x - y \in L.$$

Нетрудно проверить, что оно является отношением эквивалентности. В самом деле, $x \sim x$ эквивалентно тому, что $\vec{0} \in L$, а это выполнено для любого подпространства. Аналогично, если $x \sim y$, то $x - y \in L$. Так как L — подпространство, то тогда $-(x - y) = y - x \in L$, и значит, $y \sim x$. Транзитивность введенного отношения проверить самостоятельно.

Определение 3.5. Введенное отношение эквивалентности порождает фактор-множество, которое называют *фактор-пространством пространства X по подпространству* L. Обозначается оно через X/L.

Элементы фактор-пространства X/L имеют вполне определенный геометрический смысл: каждый из них является сдвигом подпространства L на некоторый элемент ЛП X. Действительно, если $\widetilde{x}$ — класс эквивалентности, порожденный элементом $x \in X$, то

$$\begin{aligned} \widetilde{x} &= \{y \in X\colon y \sim x\} = \{y \in X\colon y - x \in L\} \\ &= \{y \in X\colon y - x = u,\ u \in L\} \\ &= \{y\colon y = x + u, u \in L\} = x + L. \end{aligned}$$

Введем на множестве X/L линейные операции. Если $x \in X$, $y \in X$ и $\alpha \in \mathbb{K}$, то

$$\widetilde{x} + \widetilde{y} := \widetilde{x + y} \ \text{ и } \ \alpha \cdot \widetilde{x} := \widetilde{\alpha \cdot x}.$$

Докажем, что сложение определено корректно, т.е. сумма классов эквивалентности не зависит от выбора их "представителей т.е. элементов, им принадлежащих (справедливость аналогичного утверждения для умножения на число проверить самостоятельно).

Возьмем произвольно $x_1 \in \widetilde{x}$ и $y_1 \in \widetilde{y}$. По определению класса $\widetilde{x}$ имеем: $x_1 = x + u$ $(u \in L)$ и аналогично $y_1 = y + v$ $(v \in L)$. Таким образом,

$$x_1 + y_1 = x + u + y + v = (x + y) + (u + v) \in \widetilde{x + y},$$

так как $u + v \in L$ (L — подпространство). Поэтому ввиду теоремы 3.4 $\widetilde{x_1 + y_1} \subset \widetilde{x + y}$. Точно так же можно показать, что, наоборот, $\widetilde{x + y} \subset \widetilde{x_1 + y_1}$. Следовательно, $\widetilde{x_1 + y_1} = \widetilde{x + y}$, и корректность сложения установлена.

Так как X — ЛП, то непосредственная проверка показывает, что введенные в X/L операции удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства. В частности, нуль-вектором в X/L будет класс эквивалентности, порожденный нуль-вектором $\vec{0}$ пространства X, причем $\vec{0}_{X/L} = \widetilde{\vec{0}} = L$. Противоположный к $\widetilde{x}$ элемент порождается противоположным к x элементом, т.е. $-\widetilde{x} = \widetilde{-x}$ и т.д.

3.3 ЛНП p-абсолютно суммируемых по Лебегу функций.

Пусть, как и ранее, (X, Σ, μ) — полное пространство с мерой, а $L_p = L_p(X, \Sigma, \mu)$ $(p > 0)$ — ЛП (относительно поточечных операций) всех Σ-измеримых функций $f\colon X \to \mathbb{R}$, таких, что

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \infty.$$

Напомним, что множество $S_0 = S_0(X, \Sigma, \mu)$ всех функций, равных нулю на X п.в., является линейным подпространством L_p. Тем самым в соответствие с определением из предыдущего параграфа можно ввести фактор-пространство $\widetilde{L}_p := L_p/S_0$. Его элементы — классы функций, совпадающих между собой п.в., а именно, каждая функция $f \in L_p$ порождает класс

$$\widetilde{f} := \{g \in L_p\colon g = f + h, h = 0 \text{ п.в.}\} = \{g \in L_p\colon g = f \text{ п.в.}\}.$$

Кроме того, в $\widetilde{L}_p$ корректно определены линейные операции

$$\widetilde{f}+\widetilde{g}:=\widetilde{f+g} \text{ и } \alpha\cdot\widetilde{f}:=\widetilde{\alpha\cdot f},$$

превращающие $\widetilde{L}_p$ в ЛП.

Покажем, что в $\widetilde{L}_p$ можно ввести также следующие операции:

1. $\widetilde{f}\cdot\widetilde{g}:=\widetilde{f\cdot g}$ (умножение);
2. $|\widetilde{f}|:=\widetilde{|f|}$ (вычисление модуля);
3. $|\widetilde{f}|^\alpha:=\widetilde{|f|^\alpha}$ ($\alpha\in\mathbb{R}$) (возведение в степень);
4. $\int_X\widetilde{f}\,d\mu:=\int_X f\,d\mu$ (интегрирование).

Докажем корректность первой и последней из них (для остальных проверить самостоятельно).

1. Пусть $f_1\in\widetilde{f}$ и $g_1\in\widetilde{g}$ произвольны. Тогда $f_1=f+u$ а $g_1=g+v$, где $u=0$ и $v=0$ п.в. Представим

$$f_1g_1=fg+(fv+ug+vu) \tag{3.5}$$

и докажем, что $h:=fv+ug+vu=0$ п.в. Для этого достаточно показать, что аналогичное свойство выполнено для каждого из слагаемых, составляющих h. Рассмотрим, например, произведение fv. Так как

$$\{x\in X:\, f(x)v(x)\neq0\}\subset\{x\in X:\, v(x)\neq0\},$$

то ввиду неотрицательности и монотонности меры

$$0\leq\mu\{x\in X:\, f(x)v(x)\neq0\}\leq\mu\{x\in X:\, v(x)\neq0\}.$$

По предположению правая часть равна нулю, значит, равна нулю и левая часть, т.е. $fv=0$ п.в. Такие же рассуждения показывают, что $ug=0$ п.в. и $uv=0$ п.в., откуда $h=0$ п.в. Тогда из (3.5) следует, что $\widetilde{f_1\cdot g_1}\subset\widetilde{f\cdot g}$. Так как противоположное вложение получается точно так же, то в итоге $\widetilde{f_1\cdot g_1}=\widetilde{f\cdot g}$.

4. Если $f_1\in\widetilde{f}$, то $f_1=f+u$, где $u=0$ п.в., и тогда

$$\int_X f_1\,d\mu:=\int_X f\,d\mu+\int_X u\,d\mu=\int_X f\,d\mu.$$

Введенные на $\widetilde{L}_p$ операции позволяют определить на этом пространстве функционал

$$\|\widetilde{f}\|_p=\left(\int\limits_X|f(x)|^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Теорема 3.5. *Если $p\geqslant1$, то функционал $\|\cdot\|_p$ обладает всеми свойствами нормы, и, значит, $\widetilde{L}_p$ становится ЛНП.*

Доказательство. Прежде всего, по-предыдущему, $\widetilde{L}_p$ — ЛП и сразу же из определений получаем:

$$\|\widetilde{f}\|_p=\|f\|_p\geqslant0$$

и

$$\|\alpha\widetilde{f}\|_p=\|\widetilde{\alpha f}\|_p=\|\alpha f\|_p=|\alpha|\cdot\|\widetilde{f}\|_p.$$

Кроме того, из определений и интегрального неравенства Коши-Буняковского

$$\|\widetilde{f}+\widetilde{g}\|_p = \|\widetilde{f+g}\|_p = \|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p = \|\widetilde{f}\|_p + \|\widetilde{g}\|_p.$$

Таким образом, осталось доказать невырожденность функционала $\|\cdot\|_p$:

$$\|\widetilde{f}\|_p = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } f = 0 \text{ п.в.}$$

Для этого достаточно показать справедливость импликации:

$$\int\limits_X |f(t)|^p \, d\mu = 0 \;\Rightarrow\; f = 0 \text{ п.в.} \tag{3.6}$$

Предположим, что это неверно, т.е. если $E := \{x \in X\colon f(x) \neq 0\}$, то $\mu(E) > 0$. Легко проверить (?), что

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \text{ где } E_n := \{x \in X\colon |f(x)| > 1/n\} \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, ввиду счетной субаддитивности меры [2, гл. 5, § 2]

$$\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Так как по предположению $\mu(E) > 0$, то существует такое n_0, что $\mu(E_{n_0}) > 0$. Но тогда по определению множества E_{n_0}

$$\int_X |f(x)|^p \, d\mu \geqslant \int\limits_{E_{n_0}} |f(x)|^p \, d\mu \geqslant \frac{\mu(E_{n_0})}{n_0^p} > 0,$$

что противоречит условию импликации (3.6). Тем самым она, а значит, и теорема доказана. □

3.4 Полнота ЛНП p-абсолютно суммируемых по Лебегу функций.

Далее нам понадобятся некоторые результаты, связанные с возможностью предельного перехода под знаком интеграла, т.е. обеспечивающие выполнение равенства

$$\int\limits_X f(x) \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x) \, d\mu. \tag{3.7}$$

Первый из них (см. также последующее замечание) показывает, что сходимость почти всюду к предельной функции позволяет доказать лишь некоторое более слабое утверждение.

Теорема 3.6. *[Фату] Пусть (X, Σ, μ) — произвольное полное пространство с мерой, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных Σ-измеримых функций, определенных на X. Кроме того, предположим, что существует $C > 0$, для которого*

$$\int\limits_X f_n(x)\, d\mu \leqslant C \quad (n = 1, 2, \dots),$$

и что существует $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ п.в. на X. Тогда

$$\int\limits_X f(x)\, d\mu \leqslant C.$$

Доказательство. Для произвольного натурального N положим:

$$f_n^N(x) := \min(f_n(x), N) \ \text{ и } \ f^N(x) := \min(f(x), N).$$

Нетрудно проверить (?), что для каждого N $f_n^N(x) \to f^N(x)$ при $n \to \infty$ п.в. на X. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно, а N фиксировано. Обозначим

$$A_n(\varepsilon) := \{x \in X : |f_n^N(x) - f^N(x)| > \varepsilon\}.$$

Так как из сходимости п.в. вытекает сходимость по мере [1, гл. 4, теорема 3.1], то $\mu(A_n(\varepsilon)) < \varepsilon$ для всех достаточно больших n. Поэтому

$$\begin{aligned}
\int_X f^N(x)\, d\mu &\le \int_X f_n^N(x)\, d\mu + \int_{A_n(\varepsilon)} |f_n^N(x) - f^N(x)|\, d\mu \\
&+ \int_{X\setminus A_n(\varepsilon)} |f_n^N(x) - f^N(x)|\, d\mu \\
&\le C + 2N\mu(A_n(\varepsilon)) + \varepsilon\mu(X) \le C + \varepsilon(2N + \mu(X)).
\end{aligned}$$

По определению интеграла Лебега

$$\lim_{N\to\infty} \int_X f^N(x)\, d\mu = \int_X f(x)\, d\mu.$$

Поэтому, переходя в предыдущем неравенстве к пределу при $N \to \infty$, получаем

$$\int_X f(x)\, d\mu \le C + \varepsilon(2N + \mu(X)),$$

и нужное неравенство является следствием произвольности $\varepsilon > 0$. □

Замечание 3.3. Из условий теоремы 3.6 вообще говоря, не следует возможность предельного перехода под знаком интеграла (т.е. формула (3.9)). Приведем пример.

Рассмотрим отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега, а также функции

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0, & x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Так как

$$\int\limits_0^1 f_n(x)\, dx = 1 \ \text{ и } \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \ (0 < x \le 1),$$

то условия теоремы 3.6 в этом случае выполнены. В то же время,

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 0,$$

и значит, равенство (3.7) неверно.

Одним из дополнительных условий, обеспечивающих возможность предельного перехода под знаком интеграла, является монотонность сходимости последовательности.

Теорема 3.7. *[Б. Леви] Пусть (X, Σ, μ) — произвольное полное пространство с мерой, $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots$ — последовательность Σ-измеримых функций, определенных на X, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда выполнено соотношение* (3.7).

Доказательство. Прежде всего, заметим, что предел $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\,d\mu$ (конечный или бесконечный) существует и

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n(x)\,d\mu \le \int\limits_X f(x)\,d\mu.$$

Взяв в качестве C этот предел, ввиду теоремы 3.6 получаем противоположное неравенство. Тем самым (3.7) доказано. □

Сформулируем и докажем теперь главное утверждение этого параграфа.

Теорема 3.8. *[Рисс-Фишер] ЛНП $\widetilde{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ полно для каждого $p \ge 1$.*

Доказательство. Ввиду критерия полноты ЛНП, содержащегося в теореме 2.16, достаточно показать, что любой абсолютно сходящийся ряд сходится в пространстве $\widetilde{L}_p$.

Итак, пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\widetilde{f}_n\|_p < \infty$, где $\{\widetilde{f}_n\} \subset \widetilde{L}_p$. Тогда, если $f_n \in \widetilde{f}_n$ $(n \in \mathbb{N})$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty. \tag{3.8}$$

Так как по теореме 3.1 о вложении L_p-пространств

$$\|f_n\|_1 \leqslant (\mu(X))^{\frac{p-1}{p}} \|f_n\|_p,$$

то из соотношения (3.8), а также признака сравнения сходимости числовых рядов следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X |f_n(x)|\,d\mu < \infty. \tag{3.9}$$

Введем следующие обозначения:

$$S_k := \sum_{n=1}^{k} f_n,\ S_k^+ := \sum_{n=1}^{k} |f_n| \ \text{ и } \ S^+ := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|.$$

Так как последовательность $S_k^+(x)$ монотонно возрастает, то по теореме 3.7

$$\int\limits_X S_k^+(x)\,d\mu \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_X S^+(x)\,d\mu,$$

откуда ввиду линейности интеграла

$$\sum_{n=1}^{k} \int\limits_X |f_n(x)|\,d\mu \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_X S^+(x)\,d\mu,$$

и значит,

$$\int\limits_X S^+(x)\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X |f_n(x)|\,d\mu.$$

Отсюда и из (3.9) следует: $S^+ \in L_1$, и поэтому функция $S^+(x)$ конечна п.в. Последнее означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ абсолютно сходится п.в. на X. Следовательно, его сумма п.в. совпадает с функцией

$$S(x) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x), & \text{если ряд сходится,} \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Докажем, что $S \in L_p$ и $\|S_n - S\|_p \to 0$.

Прежде всего, опять ввиду (3.8) и числового критерия Коши

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N\colon \forall\, l > m \geqslant N\ \sum_{n=m}^{l} \|f_n\|_p < \varepsilon.$$

Тем самым по неравенству треугольника

$$\int\limits_X |S_l(x) - S_m(x)|^p\,d\mu \leqslant \varepsilon^p, \ \text{ если } \ l > m \geqslant N. \tag{3.10}$$

Зафиксируем $m \geq N$ и введем последовательность функций:

$$\varphi_l(x) = |S_l(x) - S_m(x)|^p, \ \ l > m.$$

Тогда $\varphi_l(x) \geqslant 0$ и $\lim\limits_{l\to\infty} \varphi_l(x) = |S(x) - S_m(x)|^p$ п.в. на X. Таким образом, для этой последовательности выполняются все условия теоремы 3.6, и поэтому из (3.10) следует:

$$\int\limits_X |S(x) - S_m(x)|^p\,d\mu \leqslant \varepsilon^p \ \ (m \geqslant N),$$

или иначе

$$\|S - S_m\|_p \leqslant \varepsilon \ \ (m \geqslant N). \tag{3.11}$$

Отсюда, в частности, $S - S_m \in L_p$ $(m \geq N)$, а тем самым $S = S_m + (S - S_m) \in L_p$. Кроме того, неравенство (3.11) и произвольность $\varepsilon > 0$ показывают, что $\|S_m - S\|_p \to 0$ при $m \to \infty$.

В заключение вернемся от индивидуальных функций к элементам пространства $\widetilde{L}_p$ (классам эквивалентности). Ввиду определений

$$\|\widetilde{S}\|_p = \|S\|_p \ \text{ и } \ \|\widetilde{S}_m - \widetilde{S}\|_p = \|\widetilde{S_m - S}\|_p = \|S_m - S\| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Так как

$$\widetilde{S}_m = \sum_{n=1}^{m} \widetilde{f}_n \ \text{ и } \ \widetilde{S} = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{f}_n,$$

то отсюда следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{f}_n$ сходится в $\widetilde{L}_p$. Теорема доказана. □

Замечание 3.4. В дальнейшем для простоты пространство классов $\widetilde{L}_p$ будет обозначаться через L_p, а его элементы $\widetilde{f}$ — через f. Тем не менее, по-прежнему надо иметь в виду, что элементы этого пространства — не индивидуальные измеримые функции, а классы функций, совпадающих между собой п.в. В частности, равенство $f = g$ и неравенство $f \leq g$ в этом случае выполняются, вообще говоря, не всюду, а только п.в.

3.5 Множества функций, всюду плотные в ЛНП L_p.

Напомним, что подмножество E ЛНП X всюду плотно в X, если для всякого шара S этого пространства выполнено: $S \cap E \neq \varnothing$, или, эквивалентно, для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ существует такой $y \in E$, что $\|x - y\| < \varepsilon$. В этом параграфе мы приведем несколько примеров множеств, всюду плотных в ЛНП $L_p[a, b]$ в случае, когда $p < \infty$.

Здесь нам будет нужна еще одна теорема о предельном переходе под знаком интеграла.

Теорема 3.9. *[Лебег] Пусть (X, Σ, μ) — произвольное полное пространство с мерой. Предположим, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ Σ-измеримых функций, определенных на X, обладает следующими свойствами:*

1) для п.в. $x \in X$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) := f(x)$;

2) существует функция $h(x) \in L_1$, $h(x) \geqslant 0$, такая, что $|f_n(x)| \leqslant h(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ п.в. на X.

Тогда

$$\int\limits_X f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\, d\mu.$$

Доказательство. Ввиду абсолютной непрерывности интеграла от суммируемой функции [1, гл. 6, теорема 2.8] для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $\mu(E) < \delta$ $(E \subset X)$ следует: $\int_E h(x)\, d\mu < \varepsilon$.

Далее, в очередной раз пользуясь тем, что из сходимости п.в. вытекает сходимость по мере [1, гл. 4, теорема 3.1], для достаточно больших n оценим меру множества $A_n(\varepsilon) := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} : \mu(A_n(\varepsilon)) < \delta$. Так как $|f(x)| \leqslant h(x)$ п.в. на

X, то отсюда

$$\Big|\int_X f_n(x)\,d\mu-\int_X f(x)\,d\mu\Big| \;\le\; \int_{A_n(\varepsilon)}|f_n(x)-f(x)|\,d\mu+\int_{X\setminus A_n(\varepsilon)}|f_n(x)-f(x)|\,d\mu$$
$$\le\; 2\int_{A_n(\varepsilon)}h(x)\,d\mu+\varepsilon\mu(X)\le\varepsilon(2+\mu(X)),$$

если n достаточно велико. Ввиду произвольности $\varepsilon>0$ теорема доказана. $\square$

Задача 3.5. Доказать свойство абсолютной непрерывности интеграла от суммируемой функции, примененное при доказательстве последней теоремы.

Теорема 3.10. *Пусть* (X,Σ,μ) *— произвольное полное пространство с мерой,* $p\in[1,\infty)$. *Тогда множество всех ограниченных измеримых функций всюлу плотно в пространстве* $L_p=L_p(X,\Sigma,\mu)$.

Доказательство. Возьмем произвольно $f\in L_p$ и лля любого $n\in\mathbb{N}$ определим функцию

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если}|f(x)|\leqslant n,\\ 0, & \text{в остальных точках.}\end{cases}$$

Тогда нетрудно проверить, что $f_n(x)$ Σ-измерима (?) и $|f_n(x)|\leqslant|f(x)|$ ($n\in\mathbb{N}$, $x\in X$). Кроме того, $f_n(x)\to f(x)$ ($x\in X$). Действительно, для любого $x\in X$ существует такой номер $n_0\in\mathbb{N}$, что $n_0>|f(x)|$. Но тогда, если $n\geqslant n_0$, то $f_n(x)=f(x)$.

Определим $g_n(x):=|f_n(x)-f(x)|^p$. Тогда по-предыдущему $g_n(x)\to 0$ ($x\in X$), и, кроме того,

$$|g_n(x)|\leqslant(|f_n(x)|+|f(x)|)^p\leqslant 2^p|f(x)|^p.$$

Так как $2^p|f(x)|^p\in L_1$, то по теореме 3.9

$$\int\limits_X g_n(x)\,d\mu\to 0,\quad \text{если}\;\; n\to\infty.$$

Это означает, что для каждого $\varepsilon>0$ найдется $n\in\mathbb{N}$, для которого

$$\int\limits_X g_n(x)\,d\mu=\int\limits_X|f_n(x)-f(x)|^p d\,\mu\leqslant\varepsilon^p,$$

или $\|f_n-f\|_p\le\varepsilon$. Так как $|f_n(x)|\le n$ ($n\in\mathbb{N}$), то теорема доказана. $\square$

С этого момента мы ограничимся рассмотрением пространства $L_p[a,b]$, состоящего из функций $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, измеримых по Лебегу и таких, что

$$\|f\|_p=\Big(\int_a^b|f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}<\infty.$$

Далее нам понадобится также следующий важный результат о структуре измеримых по Лебегу функций, называемый обычно теоремой об "исправлении" (доказательство см. в [1, гл. 4, § 4]).

Теорема 3.11. *[Лузин] Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — измеримая (по Лебегу) функция, такая, что $|f(t)| \leqslant K$ $(t \in [a,b])$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:*

1. $|g(t)| \leqslant K$ $(t \in [a,b])$;
2. $m\{t \in [a,b]\colon f(t) \neq g(t)\} < \varepsilon$.

Теорема 3.12. *Для любого $p \in [1,\infty)$ множество непрерывных функций всюду плотно в пространстве $L_p = L_p[a,b]$.*

Доказательство. Пусть $f \in L_p$ и $\varepsilon > 0$. По теореме 3.10 существует измеримая ограниченная функция h, для которой

$$\|f-h\|_p < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.12}$$

Так как h ограничена, то для некоторого $K > 0$ $|h(t)| \leqslant K$. Применяя теорему 3.11, найдем непрерывную функцию g, $|g(t)| \leq K$, для которой

$$m\{t \in [a,b]\colon g(t) \neq h(t)\} \leqslant \frac{\varepsilon^p}{2^{2p}K^p}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\|g-h\|_p^p &= \int\limits_a^b |g(t)-h(t)|^p\,dt = \int\limits_{\{g=h\}} |g(t)-h(t)|^p\,dt + \int\limits_{\{g\neq h\}} |g(t)-h(t)|^p\,dt \\
&= \int\limits_{\{g\neq h\}} |g(t)-h(t)|^p\,dt \leqslant (2K)^p m\{t \in [a,b]\colon g(t) \neq h(t)\} \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.
\end{aligned}$$

В итоге ввиду (3.12) и интегрального неравенства Минковского

$$\|f-g\|_p \leq \|f-h\|_p + \|g-h\|_p \leq \varepsilon.$$

□

Напомним следующий важный результат из математичесого анализа [4, § 12.4].

Теорема 3.13. *[Вейерштрасс] Для произвольной непрерывной функции $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $P(t)$, что*

$$\max_{t\in[a,b]} |f(t)-P(t)| < \varepsilon.$$

Замечание 3.5. Покажем, что многочлен $P(t)$ из предыдущей теоремы можно выбрать так, чтобы он имел рациональные коэффициенты.

Действительно, по этой теореме для произвольной непрерывной функции $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует многочлен

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \ \ (a_k \in \mathbb{R}),$$

для которого
$$\max_{t\in[a,b]} |f(t) - P(t)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.13}$$

Обозначим $\rho = \sum\limits_{k=0}^{n} \max(|a|^k, |b|^k)$. Тогда, так как множество рациональных чисел всюду плотно в $\mathbb{R}$, то для каждого $k = 0, 1, \ldots, n$ найдется такое рациональное q_k, что $|a_k - q_k| < \varepsilon/(2\rho)$.

Рассмотрим многочлен
$$Q(t) := \sum_{k=0}^{n} q_k t^k.$$

Так как $\sum\limits_{k=0}^{n} |t^k| \le \rho$ $(a \le t \le b)$, то для любого $t \in [a, b]$
$$|P(t) - Q(t)| = \Big| \sum_{k=0}^{n} (a_k - q_k) t^k \Big| \le \frac{\varepsilon}{2\rho} \cdot \sum_{k=0}^{n} |t^k| \le \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда
$$\max_{t\in[a,b]} |P(t) - Q(t)| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тем самым ввиду (3.13)
$$\max_{t\in[a,b]} |f(t) - Q(t)| \le \max_{t\in[a,b]} |f(t) - P(t)| + \max_{t\in[a,b]} |P(t) - Q(t)| < \varepsilon.$$

Теорема 3.14. *Для любого* $p \in [1, \infty)$ *множество всех многочленов с рациональными коэффициентами всюду плотно в пространстве* $L_p[a, b]$.

Доказательство. Во-первых, по теореме 3.12 для любых $f \in L_p$ и $\varepsilon > 0$ найдется такая непрерывная функция g, что
$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.14}$$

Далее, по теореме 3.13 и замечанию после нее существует многочлен Q с рациональными коэффициентами, для которого
$$\max_{t\in[a,b]} |g(t) - Q(t)| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)^{\frac{1}{p}}}.$$

Отсюда
$$\|g - Q\|_p^p = \int\limits_a^b |g(t) - Q(t)|^p \, dt \le \frac{\varepsilon^p}{2^p (b-a)} (b - a) = \frac{\varepsilon^p}{2^p},$$

и значит, $\|g - Q\|_p \le \frac{\varepsilon}{2}$. Используя последнее неравенство, (3.14) и неравенство Минковского в итоге получаем:
$$\|f - Q\|_p \le \|f - g\|_p + \|g - Q\|_p < \varepsilon.$$

□

Определение 3.6. ЛНП X называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

Следствие 3.1. *Для любого $p \in [1, \infty)$ пространство $L_p[a, b]$ сепарабельно.*

Доказательство. Ввиду теоремы 3.14 достаточно показать, что множество $\mathcal{P}_Q$ всех многочленов с рациональными коэффициентами счетно. Справедливо следующее представление:

$$\mathcal{P}_Q = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_Q^n,$$

где $\mathcal{P}_Q^n$ — множество всех многочленов с рациональными коэффициентами степени, не бóльшей n. Покажем, что $\mathcal{P}_Q^n$ счетно для каждого $n \in \mathbb{N}$. В самом деле, определим следующее отображение из $\mathcal{P}_Q^n$ в $n+1$-кратное произведение Q^{n+1} :

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} q_k t^k \in \mathcal{P}_Q^n \ \mapsto \ (q_0, q_1, ..., q_n) \in Q^{n+1}.$$

Легко видеть, что оно взаимно однозначно (?). Следовательно, так как Q^{n+1} счетно, то и $\mathcal{P}_Q^n$ счетно. В итоге множество $\mathcal{P}_Q$ счетно, как объединение счетного числа счетных множеств, и утверждение доказано. □

Напомним (см. определение 2.9), что Σ-измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ (здесь (X, Σ, μ) — произвольное полное пространство с мерой) называется существенно ограниченной, если существует такое $\alpha > 0$, что $\mu\{t \in X\colon |f(x)| > \alpha\} = 0$. Существенная верхняя грань в этом случае — это величина $\|f\|_\infty := \inf \alpha$, где нижняя грань берется по всем α, для которых выполняется предыдущее равенство.

Задача 3.6. Доказать, что $\|\cdot\|_\infty$ обладает всеми свойствами нормы, и тем самым множество $L_\infty = L_\infty(X, \Sigma, \mu)$, состоящее из всех существенно ограниченных функций, является ЛНП.

Задача 3.7. Доказать, что ЛНП L_∞ полно.

Задача 3.8. Доказать, что ЛНП $L_\infty([a, b], m)$, где, как и обычно, m — мера Лебега, не сепарабельно.

Определение 3.7. *Тригонометрическим полиномом степени* n будем называть функцию вида:

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=0}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \quad \text{где} \ \ a_n^2 + b_n^2 > 0.$$

Доказательство следующей теоремы см. также в [4, § 12.4].

Теорема 3.15. *[Вейерштрасс] Для произвольной непрерывной функции $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(0) = f(2\pi)$, и всякого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический полином $T(x)$, что*

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

Задача 3.9. Показать, что условие $f(0) = f(2\pi)$ в последней теореме существенно.

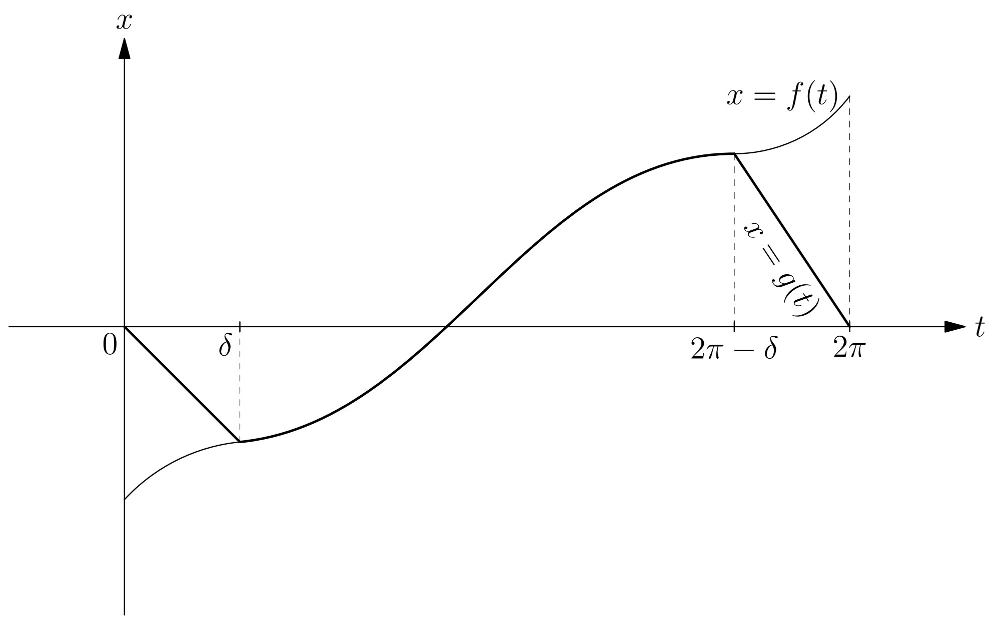
Лемма 3.1. *Пусть $p \in [1, \infty)$. Для произвольной непрерывной функции $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ и всякого $\varepsilon > 0$ найдется такая непрерывная функция $g\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, что $g(0) = g(2\pi) = 0$ и $\|f - g\|_p < \varepsilon$.*

Доказательство. Для заданных непрерывной функции f и $\varepsilon > 0$ определим:

$$K = \max_{t\in[0,2\pi]} |f(x)| \ , \ \ \delta := \frac{\varepsilon^p}{2(2K)^p}$$

и

$$g(t) = \begin{cases} f(t), \ t \in [\delta, 2\pi - \delta], \\ 0, \ t = 0 \text{ или } t = 2\pi, \\ \text{линейна и непрерывна на } [0, \delta] \text{ и на } [2\pi - \delta, 2\pi]. \end{cases}$$



Тогда

$$\|f - g\|_p^p = \int\limits_0^\delta |f(t) - g(t)|^p dt + \int\limits_{2\pi-\delta}^{2\pi} |f(t) - g(t)|^p dt \le 2 \cdot (2K)^p \cdot \delta = \varepsilon^p,$$

откуда $\|f - g\|_p \le \varepsilon$. □

Теорема 3.16. *Для любого $p \in [1, \infty)$ множество всех тригонометрических многочленов всюду плотно в пространстве $L_p[0, 2\pi]$.*

Доказательство. Прежде всего, для произвольных $f \in L_p[0, 2\pi]$ и $\varepsilon > 0$ по теореме 3.12 существует непрерывная функция g, для которой

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

По лемме 3.1 найдется непрерывная функция h, такая, что $h(0) = h(2\pi) = 0$ и

$$\|g - h\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

И наконец, по теореме 3.15 существует тригонометрический полином $T(x)$, для которого

$$\max_{x\in[0,2\pi]} |h(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{3(2\pi)^{\frac{1}{p}}},$$

откуда точно так же, как в доказательстве предыдущих теорем, получаем:

$$\|h - T\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

В итоге из полученных неравенств и интегрального неравенства Минковского следует:

$$\|f - T\|_p \leq \varepsilon.$$

□

Задача 3.10. Доказать, что множество всех тригонометрических полиномов с рациональными коэффициентами всюду плотно в пространстве $L_p[0, 2\pi]$.

Глава 4

Гильбертовы пространства и ортонормированные системы

4.1 Гильбертово пространство. Неравенство Коши-Буняковского.

Определение 4.1. ЛП H над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ называется *гильбертовым пространством (ГП)*, если каждой паре элементов $x, y \in H$ поставлено в соответствие комплексное число (x, y), называемое их *скалярным произведением*, так, что выполняются следующие свойства:
1) для любого $x \in H$ $(x, x) \geq 0$ и $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$;
2) для произвольных $x, y \in H$ $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
3) для любых $x, y \in H$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4) для произвольных $x, y, z \in H$ $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Замечание 4.1. Аналогичным образом определяется ГП над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, только в этом случае скалярное произведение вещественно, а аксиому 2) нужно заменить аксиомой $2')$ $(x, y) = (y, x)$.

Лемма 4.1. *Если (x, y) — скалярное произведение на ЛП H, то для произвольных $x, y, z \in H$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ верны равенства:*

$$(x, y + z) = (x, y) + (x, z) \ \text{ и } \ (x, \alpha y) = \overline{\alpha} \cdot (x, y).$$

Доказательство. Докажем лишь второе из этих соотношений (первое проверить самостоятельно). Ввиду свойств скалярного произведения

$$(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha} \cdot \overline{(y, x)} = \overline{\alpha} \cdot (x, y).$$

□

Введем на ГП H функционал $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ $(x \in H)$. Далее мы покажем, что он обладает всеми свойствами нормы. Фундаментальную роль в теории ГП играет следующее соотношение.

Теорема 4.1. *[неравенство Коши-Буняковского] Пусть H — произвольное ГП. Тогда для любых $x, y \in H$ справедливо следующее неравенство:*

$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|. \tag{4.1}$$

Доказательство. Для фиксированных $x, y \in H$ определим функцию:

$$\varphi(\lambda) := (x + \lambda y, x + \lambda y) \ \ (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Заметим, что $\varphi(\lambda) \geq 0$ и ввиду линейности скалярного произведения

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= (x,x) + \lambda(x,y) + \lambda(y,x) + \lambda^2(y,y) \\ &= \|x\|^2 + \lambda((x,y) + \overline{(x,y)}) + \lambda^2\|y\|^2 \\ &= \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda\Re(x,y) + \|x\|^2, \end{aligned}$$

где $\Re\alpha$ — вещественная часть комплексного числа α. Так как квадратичная функция $\varphi(\lambda)$ неотрицательна, то ее дискриминант не положителен, и значит,

$$|\Re(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|. \tag{4.2}$$

Осталось заменить в последнем неравенстве вещественную часть скалярного произведения на само скалярное произведение. Для этого представим комплексное число (x, y) в тригонометрической форме: $(x, y) = |(x, y)| \cdot e^{i\theta}$, где $\theta \in [0, 2\pi)$, и рассмотрим вектор $y_1 := e^{i\theta} \cdot y \in H$. Тогда ввиду (4.2) имеем:

$$|\Re(x, y_1)| \leqslant \|x\| \cdot \|y_1\|. \tag{4.3}$$

Кроме того, по свойствам скалярного произведения и определению функционала $\|\cdot\|$

$$\Re(x, y_1) = \Re(x, e^{i\theta} \cdot y) = \Re\big(e^{-i\theta} \cdot (x,y)\big) = |(x,y)|$$

и

$$\|y_1\|^2 = (y_1, y_1) = (e^{i\theta} \cdot y, e^{i\theta} \cdot y) = (y,y) = \|y\|^2.$$

В итоге (4.1) является непосредственным следствием (4.3) и последних двух равенств. Теорема доказана. □

Теорема 4.2. *Функционал $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ $(x \in H)$ задает норму на ГП H.*

Доказательство. Ввиду линейности скалярного произведения и неравенства Коши-Буняковского

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2\Re(x,y) + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей этого неравенства, получаем неравенство треугольника. Остальные свойства нормы — непосредственное следствие свойств скалярного призведения (?). □

Замечание 4.2. Ввиду предыдущей теоремы любое ГП является линейным нормированным пространством с нормой $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Как мы увидим далее, обратное утверждение, вообще говоря, неверно: далеко не во всех ЛНП можно задать скалярное произведение так, чтобы исходная норма выражалась бы через него согласно предыдущей формуле.

Теорема 4.3. *[Непрерывность скалярного произведения] Пусть H — ГП и $x_n, x, y_n, y \in H$ $(n = 1, 2, \dots)$. Если $x_n \to x$, а $y_n \to y$ по норме H, то $(x_n, y_n) \to (x, y)$.*

Доказательство. Так как сходящаяся по норме последовательность ограничена, то существует такое $M > 0$, что $\|x_n\| \le M$ $(n \in \mathbb{N})$. Поэтому ввиду неравенства Коши-Буняковского

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x, y)| &= |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)| \\ &\leqslant |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \\ &\leqslant M \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\|. \end{aligned}$$

По условию правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, теорема доказана. □

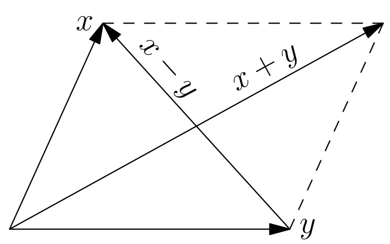
4.2 Гильбертовоподобные ЛНП.

Определение 4.2. ЛНП X над полем комплексных (или вещественных) чисел называется *гильбертовоподобным*, если на нем можно задать скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ так, что для всех $x, y \in X$ выполняется равенство:

$$\|x\|_X = \sqrt{(x, x)},$$

где $\|\cdot\|_X$ — исходная норма на X.

Для характеризации гильбертовоподобных ЛНП нам понадобится простое утверждение, которое обобщает следующую теорему из элементарной геометрии: сумма квадратов длин диагоналей параллелограма равна сумме квадратов длин всех его сторон.



Лемма 4.2. *[равенство параллелограмма] Если H — ГП, то для произвольных $x, y \in H$ выполнено:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{4.4}$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться линейностью скалярного произведения и определением нормы в ГП:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = (x + y, x + y) + (x - y, x - y) = 2 \cdot \|x\|^2 + 2 \cdot \|y\|^2.$$

□

Теорема 4.4. *ЛНП X гильбертовоподобно тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in X$ выполняется равенство (4.4).*

Доказательство. Если предположить, что X гильбертовоподобно, то по определению на X можно ввести скалярное произведение так, что $\|x\|_X = \sqrt{(x,x)}$. Но тогда по лемме 4.2 для любых $x, y \in X$ выполняется равенство (4.4).

Докажем обратное утверждение в случае вещественного ЛНП, предположив, что выполнено равенство (4.4). Положим

$$(x,y) := \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big) \tag{4.5}$$

и покажем, что функция (4.5) удовлетворяет всем свойствам скалярного произведения. Поскольку

$$(x,x) = \frac{1}{4}\big(\|2x\|^2 - \|x-x\|^2\big) = \|x\|^2,$$

это скалярное произведение порождает в X заданную там норму. Так как свойства 1) и 2') выполняются очевидным образом, то достаточно проверить свойства линейности 3) и 4).

Рассмотрим функцию трех переменных

$$\Phi(x,y,z) := 4\big[(x+y,z) - (x,z) - (y,z)\big]. \tag{4.6}$$

Для доказательства 4) нужно показать, что эта функция тождественно равна нулю. Прежде всего, по определению

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,z) &= \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 - \|x+z\|^2 \\ &+ \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Так как ввиду (4.4)

$$\|x+y\pm z\|^2 = 2\|x\pm z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x\pm z-y\|^2,$$

то одновременно

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,z) &= -\|x+z-y\|^2 + \|x-y-z\|^2 + \|x+z\|^2 \\ &- \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Взяв полусумму (4.7) и (4.8) и применив два раза равенство (4.4), получим:

$$\Phi(x,y,z) = \frac{1}{2}\big(\|x+z+y\|^2 + \|x-y+z\|^2\big) - \frac{1}{2}\big(\|y-z+x\|^2 + \|y-z-x\|^2\big) -$$

$$-\|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 = \|y+z\|^2 + \|x\|^2 - \|y-z\|^2 - \|x\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 = 0.$$

В заключение установим свойство 3). Для этого достаточно доказать, что функция вещественного аргумента

$$\varphi(\lambda) := (\lambda x, y) - \lambda(x,y)$$

($x, y \in X$ фиксированы) тождественно равна нулю. Во-первых, из (4.5) следует:

$$\varphi(0) = \frac{1}{4}(\|y\|^2 - \|y\|^2) = 0,$$

а ввиду того, что $(-x, y) = -(x, y)$, получаем: $\varphi(-1) = 0$. Поэтому для любого целого n

$$\begin{aligned}(nx, y) = (\operatorname{sgn} n(x + \dots + x), y) &= \operatorname{sgn} n[(x, y) + \dots + (x, y)] \\ &= |n| \operatorname{sgn} n(x, y) = n(x, y),\end{aligned}$$

откуда $\varphi(n) = 0$. Так как при целых p и $q \neq 0$

$$\Big(\frac{p}{q}x, y\Big) = p\Big(\frac{1}{q}x, y\Big) = \frac{p}{q}q\Big(\frac{1}{q}x, y\Big) = \frac{p}{q}(x, y),$$

то $\varphi(\lambda) = 0$ для всех рациональных λ. Заметим, наконец, что ввиду непрерывности нормы функция φ непрерывна (?). Тем самым $\varphi(\lambda) = 0$ для всех вещественных λ, и теорема доказана. □

Рассмотрим примеры гильбертовоподобных ЛНП.

Пример 4.1. Пусть $\mathbb{C}_2^n$ — ЛНП, состоящее из наборов комплексных чисел $z = (z_1, ..., z_n)$, с нормой

$$\|z\|_2 := \Big(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\Big)^{1/2}.$$

Так как эта норма порождается скалярным произведением

$$(z, w) := \sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \overline{w_k}, \text{ где } z = (z_1, ..., z_n) \text{ и } w = (w_1, ..., w_n),$$

то пространство $\mathbb{C}_2^n$ гильбертовоподобно.

Пример 4.2. Обозначим через $l_2^{\mathbb{C}}$ ЛНП всех последовательностей комплексных чисел $z = (z_1, \dots, z_n, \dots)$, для которых конечна следующая норма

$$\|z\|_2 = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2\Big)^{1/2}.$$

Тогда она порождается скалярным произведением

$$(z, w) := \sum_{k=1}^{\infty} z_k \cdot \overline{w_k}, \text{ где } z = (z_1, \dots, z_n, \dots), w = (w_1, \dots, w_n, \dots) \in l_2^{\mathbb{C}}. \tag{4.9}$$

Заметим, что ввиду неравенства Коши–Буняковского этот ряд сходится абсолютно. Действительно, для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k \cdot \overline{w_k}| \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2)^{1/2} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\Big) \leqslant \|z\|_2 \cdot \|w\|_2,$$

и после перехода к пределу при $n \to \infty$ получаем нужный результат. Свойства скалярного произведения для функционала (4.9) проверить самостоятельно. Таким образом, пространство $l_2^{\mathbb{C}}$ гильбертовоподобно.

Пример 4.3. Пусть (X, Σ, μ) — произвольное полное пространство с мерой. Рассмотрим ЛНП $L_2^{\mathbb{C}} = L_2^{\mathbb{C}}(X, \Sigma, \mu)$, состоящее из всех Σ-измеримых функций $f : X \to \mathbb{C}$, таких, что

$$\|f\|_2 = \Big(\int\limits_X |f(x)|^2 \, d\mu \Big)^{1/2} < \infty.$$

Это пространство также гильбертовоподобно, так как норма в нем порождается скалярным произведением

$$(f, g) := \int\limits_X f(x) \cdot \overline{g(x)} \, d\mu.$$

В частности, конечность этого функционала для произвольных $f \in L_2^{\mathbb{C}}$ и $g \in L_2^{\mathbb{C}}$ следует из интегрального неравенства Коши–Буняковского:

$$\int\limits_X |f(x) \cdot \overline{g(x)}| \, d\mu \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

Свойства скалярного произведения проверить самостоятельно.

Замечание 4.3. Разумеется, соответствующие "вещественные" аналоги рассмотренных пространств также являются гильбертовоподобными ЛНП. Скалярное произведение задается в этом случае такой же формулой, только без комплексного сопряжения. Например, для ЛНП $L_2 = L_2(X, \Sigma, \mu)$, состоящего из всех Σ-измеримых функций $f : X \to \mathbb{R}$, таких, что

$$\|f\|_2 = \Big(\int\limits_X f(x)^2 \, d\mu \Big)^{1/2} < \infty,$$

оно определяется формулой:

$$(f, g) := \int\limits_X f(x) \cdot g(x) \, d\mu.$$

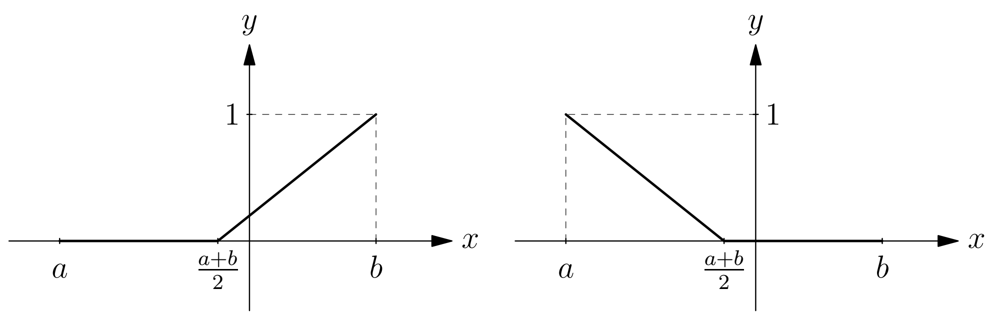
Приведем теперь пример не гильбертовоподобного ЛНП.

Пример 4.4. Покажем, что ЛНП $C[a, b]$, состоящее из непрерывных функций $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, с нормой

$$\|f\|_C := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

не гильбертовоподобно. Для этого согласно теореме 4.4 достаточно привести пример двух элементов $f, g \in C[a, b]$, для которых не выполняется равенство (4.4).

Пусть f и g — две непрерывные функции на $[a, b]$, удовлетворяющие следующим усдловиям: $0 \le f(x) \le 1$ и $0 \le g(x) \le 1$ $(a \le x \le b)$, $f(x) = 0$ $(a \le x \le (a + b)/2)$, $g(x) = 0$ $((a + b)/2 \le x \le b)$ и $f(b) = g(a) = 1$.



Легко видеть, что

$$\|f\|_C = \|g\|_C = \|f+g\|_C = \|f-g\|_C = 1,$$

и значит, равенство (4.4) неверно.

Задача 4.1. Доказать, что пространство $\mathbb{C}_p^n$ ($1 \leqslant p < \infty$), состоящее из наборов комплексных чисел $z = (z_1, \ldots, z_n)$, с нормой

$$\|z\|_p = \Big(\sum_{k=1}^n |z_k|^p\Big)^{1/p}$$

гильбертовоподобно тогда и только тогда, когда p=2.

Задача 4.2. Пусть (X, Σ, μ) — произвольное полное пространство с мерой, $1 \leqslant p < \infty$. Доказать, что ЛНП $L_p^{\mathbb{C}} = L_p^{\mathbb{C}}(X, \Sigma, \mu)$, состоящее из всех Σ-измеримых функций $f : X \to \mathbb{C}$, таких, что

$$\|f\|_p = \Big(\int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu\Big)^{1/p} < \infty,$$

гильбертовоподобно тогда и только тогда, когда p=2.

4.3 Ортонормированные системы векторов в ГП. Тотальность и полнота.

Определение 4.3. Пусть H — ГП над полем $\mathbb{C}$. Векторы $x, y \in H$ называются *ортогональными* ($x \perp y$), если $(x, y) = 0$. Говорят, что *вектор* $x \in H$ *ортогонален множеству* $M \subset H$ ($x \perp M$), если $x \perp y$ для любого $y \in M$.

Лемма 4.3. *Если H — ГП, $x \in H$, $M \subset H$ и $x \perp M$, то $x \perp \overline{\lambda(M)}$, где, как и ранее, $\overline{\lambda(M)}$ — замкнутая линейная оболочка множества M.*

Доказательство. Возьмем сначала $y \in \lambda(M)$. Тогда по определению линейной оболочки

$$y = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot x_k, \ \text{ где } \ n \in \mathbb{N}, \ x_k \in M \text{ и } \alpha_k \in \mathbb{C}.$$

Тогда ввиду линейности скалярного произведения

$$(y, x) = \Big(\sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot x_k, x\Big) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot (x_k, x) = 0,$$

т.е. $x \perp \lambda(M)$.

Пусть теперь $y \in \overline{\lambda(M)}$. В этом случае найдется последовательность $\{y_n\} \subset \lambda(M)$, такая, что $y_n \to y$. Так как скалярное произведение непрерывно (см. теорему 4.3), то отсюда $(x, y_n) \to (x, y)$. Но $(x, y_n) = 0$ ($n \in \mathbb{N}$), и значит, $x \perp M$. Лемма доказана. $\square$

Определение 4.4. Конечная или бесконечная система векторов $\{x_k\}$ из ГП H называется *нормированной*, если $\|x_k\| = 1$ для всех k; она называется *ортогональной*, если из того, что $i \neq j$, следует: $x_i \perp x_j$.

Система $\{x_k\} \subset H$ называется *ортонормированной (ОНС)*, если она одновременно и ортогональна, и нормирована. Иначе говоря, для такой системы $(x_k, x_k) = 1$ для всех k и $(x_i, x_j) = 0$, если $i \neq j$.

Определение 4.5. Конечная или бесконечная система $\{x_k\} \subset H$ называется *полной в ГП H*, если линейная оболочка этой системы всюду плотна в этом пространстве, т.е. если $\overline{\lambda(\{x_k\})} = H$.

Определение 4.6. Конечная или бесконечная система $\{x_k\} \subset H$ называется *тотальной в ГП H*, если из того, что $x \in H$ и $x \perp x_k$ для всех k, следует: $x = \vec{0}$.

Теорема 4.5. *Если система $\{x_k\} \subset H$ полна в ГП H, то она и тотальна в нем.*

Доказательство. Предположим, что $x \in H$ и $(x, x_k) = 0$ для любого k. По предыдущей лемме $x \perp \overline{\lambda(\{x_k\})}$. Так как по условию $\overline{\lambda(\{x_k\})} = H$, то отсюда, в частности, $x \perp x$, т.е. $(x, x) = 0$. Тем самым $x = \vec{0}$, и теорема доказана. □

Позднее мы докажем, что, по крайней мере, для ОНС в ГП верно и обратное утверждение: всякая тотальная система полна.

Пример 4.5. Рассмотрим ГП $\mathbb{C}_2^n$ со скалярным произведением

$$(z, w) := \sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \overline{w_k}, \quad \text{где} \quad z = (z_1, ..., z_n) \quad \text{и} \quad w = (w_1, ..., w_n).$$

Тогда стандартный базис этого пространства

$$e^1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e^n = (0, .., 0, 1)$$

является полной ОНС в этом пространстве. Действительно, ортонормированность очевидна, а полнота является следствием базисности: если $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}_2^n$, то

$$z = \sum_{k=1}^{n} z_k \cdot e^k \in \lambda(\{e^k\}_{k=1}^n).$$

Тем самым $\mathbb{C}_2^n = \lambda(\{e^k\}_{k=1}^n)$.

Пример 4.6. Пусть $l_2^{\mathbb{C}}$ — ГП всех последовательностей комплексных чисел $z = (z_1, \dots, z_n, \dots)$, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 < \infty,$$

со скалярным произведением

$$(z, w) := \sum_{k=1}^{\infty} z_k \cdot \overline{w_k}, \quad \text{где} \quad z = (z_1, \dots, z_n, \dots), w = (w_1, \dots, w_n, \dots) \in l_2^{\mathbb{C}}.$$

Легко видеть, что векторы $e^k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \dots)$ ($k \in \mathbb{N}$) образуют ОНС в этом пространстве. Проверим, что она полна. Если $z = (z_1, z_2, \dots) \in l_2^{\mathbb{C}}$ и $\varepsilon > 0$, то по критерию Коши существует такой $n \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |z_k|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Тогда, если $y := \sum_{k=1}^{n} z_k \cdot e^k$, то $y \in \lambda(\{e^k\})$ и

$$\|z - y\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |z_k|^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

откуда $\|z - y\|_2 \leqslant \varepsilon$. Так как $z \in l_2^{\mathbb{C}}$ и $\varepsilon > 0$ произвольны, то $l_2^{\mathbb{C}} = \overline{\lambda(\{e_k\}_{k=1}^{\infty})}$, и значит, система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна.

Задача 4.3. Пусть $v = (v_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел. Рассмотрим множество $l_2^{\mathbb{C}}(v)$ всех последовательностей комплексных чисел $z = (z_1, \dots, z_n, \dots)$, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k |z_k|^2 < \infty.$$

1) Проверить, что формула

$$(z, w) := \sum_{k=1}^{\infty} v_k \cdot z_k \cdot \overline{w_k}$$

определяет скалярное произведение в $l_2^{\mathbb{C}}(v)$.

2) Всегда ли пространство $l_2^{\mathbb{C}}(v)$ полно?

3) Рассмотрим систему векторов: $f^k = v_k^{-1/2} \cdot e^k$ ($k = 1, 2, \dots$), где $\{e^k\}$ — система из предыдущего примера. Доказать, что $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОНС в $l_2^{\mathbb{C}}(v)$. Всегда ли она будет полна в этом пространстве?

4.4 Тригонометрическая система в $L_2[0, 2\pi]$.

Напомним, что $L_2[0, 2\pi]$ — ГП над полем $\mathbb{R}$, состоящее из всех измеримых по Лебегу функций $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, таких, что

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx < \infty,$$

со скалярным произведением

$$(f, g) := \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) \, dx.$$

Рассмотрим в этом пространстве систему функций:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \dots,$$

которую будем называть *тригонометрической.* Непосредственные вычисления показывают, что это ОНС. Например, если $m \neq n$, то

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx &= \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\cos(m-n)x\,dx + \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\cos(m+n)x\,dx \\ &= \frac{\sin(m-n)x}{2\cdot(m-n)}\,\Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin(m+n)x}{2\cdot(m+n)}\,\Big|_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Теорема 4.6. *Тригонометрическая система полна в ГП* $L_2[0,2\pi]$.

Доказательство. По теореме 3.16 множество всех тригонометрических полиномов $\mathcal{T}$ всюду плотно в $L_2[0,2\pi]$. Тем самым ее замыкание $\overline{\mathcal{T}} = L_2[0,2\pi]$. Так как одновременно $\mathcal{T}$ совпадает с линейной оболочкой, натянутой на тригонометрическую систему, то теорема доказана. □

Задача 4.4. Рассмотрим "комплексный" вариант пространства $L_2[0,2\pi]$, пространство $L_2^{\mathbb{C}}[0,2\pi]$, состоящее из всех измеримых по Лебегу функций $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, таких, что

$$\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx < \infty,$$

со скалярным произведением

$$(f,g) := \int\limits_0^{2\pi} f(x)\cdot\overline{g(x)}\,dx.$$

Тогда соответствующим "комплексным" вариантом тригонометрической системы будет последовательность $\{(2\pi)^{-1/2}e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Доказать, что это полная ОНС в $L_2^{\mathbb{C}}[0,2\pi]$.

4.5 Критерий сходимости ортогонального ряда в ГП.

Всюду в этом параграфе H — ГП над полем $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$. Начнем со следующего простого утверждения, напоминающего самую популярную теорему из элементарной геометрии.

Теорема 4.7. *[Пифагор] Если* $\{x_k\}_{k=1}^n \subset H$ *— ортогональная система, то*

$$\Big\|\sum_{k=1}^n x_k\Big\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

Доказательство. Ввиду линейности скалярного произведения и ортогональности

$$\Big\|\sum_{k=1}^n x_k\Big\|^2 = \Big(\sum_{k=1}^n x_k, \sum_{j=1}^n x_j\Big) = \sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n (x_k,x_j) == \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

□

Основной результат параграфа — следующий критерий сходимости ортогонального ряда в ГП.

Теорема 4.8. *Пусть H — полное ГП, а $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОНС в нем. Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e_k \ \ (c_k \in \mathbb{K}) \tag{4.10}$$

сходится в H тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty. \tag{4.11}$$

Доказательство. Обозначим через

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot e_k \ \text{ и } \ \sigma_n := \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$$

частичные суммы рядов (4.10) и (4.11) соответственно. Для любых $m > n$ по теореме 4.7

$$\|S_m - S_n\|^2 = \Big\| \sum_{k=n+1}^{m} c_k \cdot e_k \Big\|^2 = \sum_{k=k+1}^{m} \|c_k \cdot e_k\|^2 = \sum_{k=k+1}^{m} |c_k|^2 = \sigma_m - \sigma_n.$$

Это равенство показывает, что последовательность $\{S_n\}$ фундаментальна в H тогда и только тогда, когда фундаментальна числовая последовательность $\{\sigma_n\}$. Так как пространство H полно, то фундаментальность последовательности $\{S_n\}$ эквивалентна ее сходимости. Таким образом, ряд (4.10) сходится в H тогда и только тогда, когда выполнено условие (4.11). □

Следствие 4.1. *Тригонометрический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \sin(nx) + b_n \cdot \cos(nx)) \tag{4.12}$$

сходится в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ (иногда говорят: сходится в среднем порядка два) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) < \infty. \tag{4.13}$$

Доказательство. Если умножить и разделить каждое из слагаемых ряда (4.12) на $\sqrt{\pi}$, то получится ряд по ортонормированной тригонометрической системе с коэффициентами $\sqrt{\pi} \cdot a_n$ и $\sqrt{\pi} \cdot b_n$ при синусах и косинусах соответственно (см. предыдущий параграф). Так как по теореме Рисса–Фишера 3.8 пространство $L_2[0, 2\pi]$ полное, то мы можем применить теорему 4.8. В результате сходимость ряда (4.12) в этом пространстве эквивалентна тому, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\pi \cdot |a_n|^2 + \pi \cdot |b_n|^2) < \infty.$$

Последнее условие, в свою очередь, эквивалентно (4.13). □

4.6 Ряд Фурье по ОНС в ГП. Теорема Гильберта.

Определение 4.7. Пусть H — ГП, $\{e_k\}$ — конечная или счетная ОНС в H. *Рядом Фурье вектора $x \in H$ по системе $\{e_k\}$* называют формальное выражение

$$\sum_k (x, e_k) \cdot e_k. \tag{4.14}$$

При этом числа (x, e_k) — *коэффициенты Фурье вектора $x \in H$ по этой системе.*

Замечание 4.4. В важном частном случае тригонометрической системы, рассматриваемой в ГП $L_2[0, 2\pi]$, ряд и коэффициенты Фурье удобно определить несколько иначе. А именно, это ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)),$$

где коэффициенты определяются по формулам:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\, dx \quad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

и

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\, dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Лемма 4.4. *Если $\{e_k\}_{k=1}^n$ — ОНС в ГП , $x \in H$, то*

$$x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \ \perp\ e_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Доказательство. Действительно, ввиду ортонормированности $\{e_k\}_{k=1}^n$ для любого $i = 1, \ldots, n$

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k, e_i\right) = (x, e_i) - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) \cdot (e_k, e_i) = (x, e_i) - (x, e_i) = 0.$$

$\square$

Теорема 4.9. *[неравенство Бесселя] Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОНС в ГП , то для произвольного $x \in H$ имеет место неравенство:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Доказательство. Для любого $n \in \mathbb{N}$ представим вектор x в виде суммы:

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i + v_n, \quad \text{где } \ v_n := x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i.$$

По лемме 4.4 векторы $(x, e_i)e_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и v_n попарно ортогональны. Следовательно, по теореме Пифагора 4.7

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2 \cdot \|e_i\|^2 + \|v_n\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2.$$

Если теперь в последнем неравенстве перейти к пределу при $n \to \infty$, то мы получим нужное нам неравенство. □

Задача 4.5. Показать на примере, что неравенство Бесселя не всегда обращается в равенство.

Теорема 4.10. *Пусть* $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — *ОНС в полном ГП* H. *Тогда для любого* $x \in H$ *его ряд Фурье* (4.14) *сходится в* H *к некоторому элементу* $z \in H$.

Доказательство. Ввиду неравенства Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 < \infty.$$

Так как пространство H — полное, то по критерию сходимости ортогонального ряда (см. теорему 4.8) ряд (4.14) сходится в H. □

Задача 4.6. Привести пример, когда ряд Фурье (4.14) вектора x полного ГП сходится к некоторому вектору $z \neq x$.

Следующее утверждение обобщает лемму 4.4 на бесконечные ОНС.

Лемма 4.5. *Пусть* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *бесконечная ОНС в полном ГП* , $x \in H$. *Тогда*

$$x - \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)e_k \perp e_i \ \ (i = 1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что по теореме 4.10 ряд Фурье из условия леммы сходится. Для произвольного фиксированного $i = 1, 2, \ldots$ и всех $n \geq i$ по лемме 4.4

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)e_k, e_i\right) = 0.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и пользуясь непрерывностью скалярного произведения (теорема 4.3), получаем нужное утверждение. □

Теорема 4.11. *Пусть* $\{e_i\}_{k=i}^{n}$ — *конечная тотальная ОНС в ГП* H. *Тогда* $\dim H = n$, *а система* $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ *является базисом в* H.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ — базис в H. В самом деле, по лемме 4.4

$$x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)e_i \perp e_k \ \ (k = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда ввиду тотальности этой системы

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)e_i.$$

Таким образом, любой вектор $x \in H$ представим как линейная комбинация векторов e_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Докажем единственность такого представления.

Предположим, что одновременно

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot e_i \ \text{ и } \ x = \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot e_i, \ \text{ где } \ c_i, d_i \in \mathbb{K}.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} (c_i - d_i) \cdot e_i = \vec{0},$$

откуда по теореме Пифагора

$$\sum_{i=1}^{n} |c_i - d_i|^2 = \|\vec{0}\|^2 = 0,$$

т.е. $c_i = d_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Теорема доказана. □

Теорема 4.12. *[Гильберт] Пусть H — полное ГП, $\{e_i\}_{i=i}^{\infty}$ — тотальная ОНС в H. Тогда любой вектор $x \in H$ совпадает с суммой своего ряда Фурье, т.е.*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i. \tag{4.15}$$

Доказательство. По теореме 4.10 ряд Фурье из правой части (4.15) сходится в H. Кроме того, по лемме 4.5

$$x \ - \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i \ \perp \ e_k \ \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, равенство (4.15) является следствием тотальности системы, и теорема доказана. □

Следствие 4.2. *Любая тотальная ОНС $\{e_i\}_{i=i}^{\infty}$ в полном ГП полна.*

Доказательство. По теореме 4.12 любой $x \in H$ является пределом в H частичных сумм своего ряда Фурье, которые, конечно, принадлежат линейной оболочке системы $\{e_i\}_{i=i}^{\infty}$. Поэтому $\overline{\lambda(\{e_i\})} = H$, а это и означает полноту системы. □

Следствие 4.3. *Для любой функции $f \in L_2(0, 2\pi)$ её ряд Фурье по тригонометрической системе сходится к f по норме этого пространства, т.е. в среднем порядка два. Иначе говоря, имеет место равенство (понимаемое в смысле этой сходимости):*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)).$$

Доказательство. Так как по теореме Рисса–Фишера L_2 — полное ГП, а по теореме 4.6 тригонометрическая система тотальна в нем, то достаточно применить теорему 4.12. □

4.7 Тотальная ОНС как базис Шаудера. Равенство Парсеваля.

Пусть (для определенности) в этом параграфе H — ГП над полем $\mathbb{C}$. Так как аналогичные результаты верны (с теми же доказательствами) также для вещественного ГП, мы будем их применять здесь для тригонометрического ряда в $L_2[0, 2\pi]$.

Лемма 4.6. *Пусть H — ГП, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОНС в нем. Если*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e_k \quad \textit{и} \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cdot e_k, \quad \textit{где} \quad c_k, d_k \in \mathbb{C},$$

то

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \overline{d_k}.$$

Доказательство. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ ввиду линейности скалярного произведения

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot e_k, \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot e_i\Big) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_k \overline{d_i}(e_k, e_i) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \overline{d_k}.$$

Нужное равенство получается теперь, если перейти к пределу при $n \to \infty$ и воспользоваться непрерывностью скалярного произведения. □

Следствие 4.4. *Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОНС в ГП H и*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e_k,$$

то

$$\|x\| = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2\Big)^{1/2}.$$

Доказательство. Достаточно в последней лемме положить $y = x$ и воспользоваться связью между нормой и скалярным произведением. □

Теорема 4.13. *[Равенство Парсеваля] Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — тотальная ОНС в полном ГП H, то для произвольного $x \in H$ выполнено равенство:*

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2\Big)^{1/2}.$$

Доказательство. Так как по теореме Гильберта 4.12

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i,$$

то остается воспользоваться предыдущим следствием. □

Следствие 4.5. *Если $f \in L_2[0, 2\pi]$, а a_n, b_n — ее коэффициенты Фурье по тригонометрической системе, то справедливо равенство:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\, dx.$$

Доказательство. Так как пространство L_2 — полное, а тригонометрическая система тотальна в нем, то достаточно применить предыдущую теорему, учтя при этом специфику формул коэффициентов Фурье для этой системы. □

Определение 4.8. Пусть X — ЛНП. Последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ называется *базисом Шаудера* пространства X, если для любого $x \in X$ имеет место единственное представление:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

Задача 4.7. Доказать, что любое ЛНП, имеющее базис, сепарабельно.

Теорема 4.14. *Счетная тотальная ОНС в полном ГП является базисом Шаудера.*

Доказательство. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — тотальная ОНС в ГП H. По теореме Гильберта 4.12 для любого $x \in H$ справедливо равенство:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k.$$

Проверим единственность такого представления. Обозначим: $c_k = (x, e_k)$ $(k = 1, 2, \dots)$. Пусть, кроме этого,

$$x = \sum_{1}^{\infty} d_k e_k, \quad d_k \in \mathbb{C}.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(d_k - c_k)e_k = \vec{0},$$

откуда по следствию 4.4

$$\sum_{k=1}^{\infty}|d_k - c_k|^2 = \|\vec{0}\|^2 = 0.$$

Следовательно, $c_k = d_k$ $(k = 1, 2, \dots)$. □

Теорема 4.15. *Пусть для функции $f \in L_2[0, 2\pi]$ справедливо представление:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)). \tag{4.16}$$

где a_n, b_n — вещественные числа, а равенство понимается в смысле сходимости по норме пространства L_2. Тогда тригонометрический ряд из правой части равенства (4.16) является рядом Фурье функции f.

Доказательство. По следствию 4.3 функция f является также суммой своего тригонометрического ряда Фурье. Так как тригонометрическая система функций тотальна в L_2, то по предыдущей теореме она является там базисом Шаудера. Значит, ряд из правой части (4.16) должен совпадать с тригонометрическим рядом Фурье функции f. □

4.8 Метод ортогонализации Гильберта–Шмидта.

Начнем с обозначения. Пусть H — ГП, $x \in H$. Тогда

$$\overline{x} = \frac{x}{\|x\|}, \text{ если } x \neq \vec{0}, \quad \text{и } \overline{x} = \vec{0}, \text{ если } x = \vec{0}.$$

Прежде, чем ввести общее определение, рассмотрим простой пример. Предположим, что x_1 и x_2 — два неколлинеарных вектора на плоскости. Мы хотим найти вектор y, такой, что $y \perp x_1$. Так как $\|\overline{x_1}\| = 1$, то

$$(x_2, \overline{x_1}) = \|x_2\| \cdot \|\overline{x_1}\| \cdot \cos\varphi = \|x_2\| \cdot \cos\varphi,$$

где φ — угол между векторами x_1 и x_2. Вектор $z := (x_2, \overline{x_1}) \cdot \overline{x_1}$ является проекцией x_2 на $\overline{x_1}$. Поэтому искомый вектор y определяется равенством:

$$y := x_2 - z = x_2 - (x_2, \overline{x_1})\overline{x_1}.$$

Заметим также, что $\lambda\{x_1, y\} = \lambda\{x_1, x_2\}$.

Следующее определение является естественным обобщением приведенных рассуждений.

Определение 4.9. Пусть H — ГП, $\{x_k\} \subset H$ — произвольная конечная или счетная система векторов. Положим:

$$y_1 := x_1\ ,\ y_n := x_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_n, \overline{y_k})\overline{y_k} \quad (n \geqslant 2). \tag{4.17}$$

Говорят, что система векторов $\{y_k\}$ получена *методом ортогонализации Гильберта–Шмидта* из системы $\{x_k\}$.

Теорема 4.16. *[Гильберт–Шмидт] Пусть H — ГП, $\{x_k\} \subset H$ — произвольная конечная или счетная система векторов. Если система $\{y_n\}$ получена из $\{x_n\}$ методом ортогонализации, то*

1) $y_i \perp y_j$, если $i \neq j$;

2) для всех $n = 1, 2, \ldots$

$$\lambda(\{y_k\}_{k=1}^n) = \lambda(\{x_k\}_{k=1}^n). \tag{4.18}$$

Доказательство. Используя метод математической индукции по n, докажем следующие утверждения: 1) $\{y_i\}_{i=1}^n$ — ортогональная система, 2) справедливо равенство (4.18).

Если $n = 1$, то оба утверждения очевидны. Предположим, что они верны для $n - 1$ и докажем их для n. Во-первых, ввиду (4.17)

$$y_n = x_n - \sum_{\overline{y_k} \neq \vec{0}} (x_n, \overline{y_k})\overline{y_k}.$$

Так как по предположению индукции система $\{\overline{y_k} : \overline{y_k} \neq \vec{0}, \ k = 1, \ldots, n-1\}$ ортонормирована, то предыдущее равенство показывает, что y_n — разность вектора x_n и его ряда Фурье по этой системе. Следовательно, по лемме 4.4 $y_n \perp y_k, k = 1, \ldots n-1$. Тем самым утверждение 1) доказано. Осталось проверить совпадение линейных оболочек.

По определению линейной оболочки и индуктивному предположению

$$\sum_{k=1}^{n-1} (x_n, \overline{y_k})\overline{y_k} \in \lambda(\{\overline{y_k}\}_{k=1}^{n-1}) = \lambda(\{y_k\}_{k=1}^{n-1}) = \lambda(\{x_k\}_{k=1}^{n-1}) \subset \lambda(\{x_k\}_{k=1}^{n}).$$

Тем самым ввиду (4.17)

$$y_n \in \lambda(\{x_k\}_{k=1}^{n}).$$

Так как, кроме того, опять по индуктивному предположению

$$y_k \in \lambda(\{x_k\}_{k=1}^{n}) \text{ для всех } k = 1, \ldots, n-1,$$

то

$$\lambda(\{y_k\}_{k=1}^{n}) \subset \lambda(\{x_k\}_{k=1}^{n}).$$

Обратное вложение доказывается аналогично: ввиду (4.17)

$$x_n \in \lambda(\{y_k\}_{k=1}^{n}),$$

а по предположению индукции

$$x_k \in \lambda(\{y_k\}_{k=1}^{n}), \text{ если } k = 1, \ldots, n-1.$$

Поэтому

$$\lambda(\{x_k\}_{k=1}^{n}) \subset \lambda(\{y_k\}_{k=1}^{n}).$$

Теорема доказана. □

Замечание 4.5. Если из системы $\{\overline{y_k}\}$, полученной в теореме 4.16, удалить все векторы, равные $\vec{0}$, то мы получим ортонормированную систему, про которую также будем говорить, что она получена методом ортогонализации Гильберта–Шмидта.

Задача 4.8. Предположим, что система $\{x_k\} \subset H$ линейно независима, а $\{y_k\}$ получена из нее методом ортогонализации. Показать, что $y_k \neq \vec{0}$ для любого k.

Задача 4.9. Доказать, что система $\{y_k\}$, полученная методом ортогонализации из системы $\{x_k\}$, единственна с точностью до умножения на константу. Иначе говоря, если $\{z_k\}$ — такая ортогональная система, что

$$\lambda(\{z_k\}_{k=1}^{n}) = \lambda(\{x_k\}_{k=1}^{n}) \text{ для всех } n = 1, 2 \ldots,$$

то $z_n = c_n y_n$ при некоторых $c_n \in \mathbb{K}$.

Указание. Воспользоваться методом математической индукции.

4.9 Полиномы Лежандра.

В качестве примера применим метод ортогонализации к системе функций $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$, рассматриваемой в вещественном ГП $L_2[-1,1]$ измеримых по Лебегу функций $f : [-1,1] \to \mathcal{R}$, со скалярным произведением:

$$(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

Заметим, что она линейно независима и полна по теореме Вейерштрасса 3.13. Поэтому в результате ее ортогонализации методом Гильберта–Шмидта мы получим ортонормированную систему полиномов $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$, которые называют *полиномами Лежандра.* Поставим перед собой задачу найти эти функции.

Рассмотрим вспомогательную систему функций:

$$R_n(x) := [(x^2-1)^n]^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Легко видеть (?), что для каждого $n \in \mathbb{N}$ $R_n(x)$ — полином n-ой степени; при этом для всех $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^n = 0, \quad \text{если } \; x = \pm 1.$$

Поэтому для всех $n \geq m$, интегрируя по частям n раз, получим:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} R_m(x)R_n(x)\,dx &= -\int_{-1}^{1} [(x^2-1)^m]^{(m+1)}[(x^2-1)^n]^{(n-1)}\,dx = \dots \\ \dots &= (-1)^n \int_{-1}^{1} [(x^2-1)^m]^{(m+n)}(x^2-1)^n\,dx. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Если $m < n$, то $m + n > 2m$, и значит, $[(x^2-1)^m]^{(m+n)} \equiv 0$. Таким образом, по формуле (4.19)

$$\int_{-1}^{1} R_m(x)R_n(x)\,dx = 0,$$

т.е. $\{R_n\}$ — ортогональная система. Кроме того, так как R_k — полином k-ой степени, а функции $1, x, x^2, \dots, x^n$ линейно независимы, то

$$\lambda(\{R_k\}_{k=0}^{n}) \subset \lambda(\{x^k\}_{k=0}^{n}).$$

В то же время, R_k $(k = 0, 1, \dots)$ попарно ортогональны, а значит, линейно независимы (?). Тем самым $\{R_k\}_{k=0}^{n}$ — базис в ЛП $\lambda(\{x^k\}_{k=0}^{n})$, но тогда справедливо также и обратное вложение. Таким образом,

$$\lambda(\{x^k\}_{k=0}^{n}) = \lambda(\{R_k\}_{k=0}^{n}).$$

Применим утверждение задачи 4.9: для каждого $n = 0, 1, \dots$ существует такая константа $c_n \in \mathbb{R}$, что $Q_n = c_n R_n$. Найдем c_n.

Прежде всего, так как Q_n и R_n — полиномы n-ой степени, у которых коэффициенты при старших степенях положительны, то $c_n > 0$. Следовательно, $\|Q_n\|_2 = c_n \cdot$

$\|R_n\|_2$. Кроме того, по условию $\|Q_n\|_2 = 1$ ($n \in \mathbb{N}$). Значит, $c_n = \|R_n\|_2^{-1}$. Для нахождения $\|R_n\|_2$ возьмем в равенстве (4.19) $n = m$ и с помощью метода математической индукции вычислим:

$$\begin{aligned} \|R_n\|_2^2 &= \int_{-1}^{1} R_n^2(x)\,dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} [(x^2-1)^n]^{(2n)}(x^2-1)^n\,dx \\ &= (-1)^n(2n)!(-1)^n \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx = (2n)! \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx = \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

В итоге полиномы Лежандра определяются формулой:

$$Q_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}[(x^2-1)^n]^{(n)} \ \ (n = 0, 1, \ldots).$$

4.10 Существование ортонормированного базиса в сепарабельном ГП.

Здесь мы убедимся в том, что при достаточно общих условиях в ГП существует ортонормированный базис Шаудера.

Теорема 4.17. *В любом конечномерном ГП существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Итак, пусть H — ГП, $\dim H = n$ и $\{x_k\}_{k=1}^n$ — произвольный базис этого пространства. Применяя к $\{x_k\}_{k=1}^n$ метод ортогонализации из предыдущего параграфа, получим систему $\{\overline{y_k}\}_{k=1}^n$. Удаление из нее векторов, равных $\vec{0}$, даст нам ОНС $\{e_k\}_{k=1}^m$, где $m \leqslant n$. Ясно, что

$$\lambda(\{e_k\}_{k=1}^m) = \lambda(\{\overline{y_k}\}_{k=1}^n) = \lambda(\{x_k\}_{k=1}^n) = H.$$

Поэтому $m = n$, и система $\{e_k\}_{k=1}^n$ является базисом в H. □

Теорема 4.18. *В любом бесконечномерном сепарабельном ГП существует тотальная ОНС, являющаяся базисом Шаудера.*

Доказательство. По условию H — ГП, $\dim H = \infty$. Ввиду сепарабельности существует последовательность $\{x_k\}_{k=1}^\infty$, всюду плотная в H. Применим к ней метод ортогонализации и получим систему $\{\overline{y_k}\}_{k=1}^\infty$. Так как по теореме 4.16

$$\lambda(\{\overline{y_k}\}_{k=1}^n) = \lambda(\{x_k\}_{k=1}^n) \ \text{ для произвольного } \ n \in \mathbb{N},$$

то

$$\lambda(\{\overline{y_k}\}_{k=1}^\infty) = \lambda(\{x_k\}_{k=1}^\infty).$$

Удаляя из $\{\overline{y_k}\}_{k=1}^\infty$ векторы, равные $\vec{0}$, получим ОНС $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ (ввиду того, что $\dim H = \infty$, она будет бесконечной), для которой

$$\lambda(\{e_k\}_{k=1}^\infty) = \lambda(\{x_k\}_{k=1}^\infty).$$

Таким образом,

$$H \supset \overline{\lambda(\{e_k\}_{k=1}^\infty)} = \overline{\lambda(\{x_k\}_{k=1}^\infty)} \supset \overline{\{x_k\}_{k=1}^\infty} = H,$$

откуда
$$\overline{\lambda(\{e_k\}_{k=1}^{\infty})} = H.$$
Итак, система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в H, а тем самым по теореме 4.5 и тотальна. Ввиду теоремы 4.14 она является в этом пространстве ортономированным базисом. □

Задача 4.10. Показать на примере, что условие сепарабельности в последней теореме существенно.

4.11 Изоморфизмы ГП.

Определение 4.10. Пусть H и H_1 — ГП. Отображение $\varphi:\ H \to H_1$ называется *гильбертовым изоморфизмом*, если:

1) φ — алгебраический изоморфизм;

2) φ сохраняет скалярное произведение, т.е. для произвольных $x, y \in H$ выполнено: $(x, y)_H = (\varphi(x), \varphi(y))_{H_1}$.

Задача 4.11. Доказать, что любой гильбертов изоморфизм $\varphi : H \to H_1$ является изометрией, т.е. для всех $x \in H$ $\|x\|_H = \|\varphi(x)\|_{H_1}$.

Определение 4.11. Два ГП H и H_1 называются *изоморфными (как ГП)*, если существует хотя бы один гильбертов изоморфизм $\varphi : H \to H_1$.

Задача 4.12. Доказать, что если одно из изоморфных ГП полно, то другое также полно.

Теорема 4.19. *Пусть H — конечномерное ГП над полем $\mathbb{C}$, $\dim H = n$. Тогда оно изоморфно (как ГП) пространству $\mathbb{C}_2^n$ всех наборов комплексных чисел $z = (z_1, ..., z_n)$ со скалярным произведением*
$$(z, w) := \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k, \quad \textit{где} \quad w = (w_1, ..., w_n).$$

Доказательство. Так как $\dim H = n$, то по теореме 4.17 в H существует ортонормированный базис $e_1, ..., e_n$. Определим отображение: $\varphi\colon\ H \to \mathbb{C}_n^2$ следующим образом: если $x \in H$ представим в виде: $x = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i e_i$, где $z_i \in \mathbb{C}$, то $\varphi(x) := (z_1, ..., z_n)$. Ранее было доказано, что φ — алгебраический изоморфизм (см. доказательство теоремы 1.5). Проверим, что это отображение сохраняет скалярное произведение. Если $y = \sum\limits_{k=1}^{n} w_k e_k$ ($w_k \in \mathbb{C}$), то
$$(x, y)_H = \Big(\sum_{i=1}^{n} z_i e_i, \sum_{k=1}^{n} w_k e_k\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} z_i \overline{w}_k (e_i, e_k) = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w}_i = (\varphi(x), \varphi(y))_{\mathbb{C}_2^n},$$
и теорема доказана. □

Замечание 4.6. Совершенно аналогичные рассуждения показывают, что любое конечномерное ГП над полем $\mathbb{R}$, $\dim H = n$, изоморфно (как ГП) пространству $\mathbb{R}_2^n$ всех наборов вещественных чисел $x = (x_1, ..., x_n)$ со скалярным произведением
$$(x, y) := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \quad \text{где} \quad y = (y_1, ..., y_n).$$

Следствие 4.6. *Любое конечномерное ГП полно.*

Доказательство. Если $\dim H = n$, то по теореме 4.19 H изоморфно ГП $\mathbb{C}_2^n$ (или $\mathbb{R}_2^n$), которое полно. Но тогда ввиду утверждения задачи 4.12 полным является и пространство H. $\square$

Следствие 4.7. *Любые два ГП одинаковой размерности изоморфны (как ГП) между собой.*

Доказательство. Пусть H и H_1 — ГП, $\dim H = \dim H_1 = n$. По теореме 4.19 существуют гильбертовы изоморфизмы $\varphi\colon H \to \mathbb{C}_2^n$ и $\psi\colon H_1 \to \mathbb{C}_2^n$.

Рассмотрим отображение $f = \psi^{-1}\varphi\colon H \to H_1$, где ψ^{-1} — отображение, обратное к ψ (оно существует, так как ψ — алгебраический изоморфизм). Нетрудно проверить, что f — алгебраический изоморфизм (?). Кроме того, если $x, y \in H$, то ввиду свойств φ и ψ

$$(f(x), f(y)) = (\psi^{-1}(\varphi(x)), \psi^{-1}(\varphi(y))) = (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y).$$

Тем самым f — гильбертов изоморфизм. Следовательно, H и H_1 изоморфны. $\square$

Напомним, что ГП $l_2^{\mathbb{C}}$ состоит из всех последовательностей $z = (z_1, z_2, ...)$ ($z_k \in \mathbb{C}$), таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 < \infty.$$

Скалярное произведение определяется здесь следующим образом:

$$(z, w) := \sum_{k=1}^{\infty} z_k \overline{w}_k, \quad \text{где } z = (z_1, z_2, ...)\,,\ w = (w_1, w_2, ...) \in l_2^{\mathbb{C}}.$$

Заметим, что $l_2^{\mathbb{C}}$ — полное ЛНП относительно нормы, порожденной скалярным произведением (доказательство то же, что и для пространства l_1 в примере 2.12).

Задача 4.13. Доказать сепарабельность пространства $l_2^{\mathbb{C}}$.

Указание. В качестве счётного всюду плотного множества в $l_2^{\mathbb{C}}$ можно взять множество всех финитных последовательностей $z = (z_1, z_2, ...)$ комплексно-рациональных чисел, т.е. таких, что $z_k = x_k + iy_k$, где x_k, y_k рациональны и для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и всех $k \geq n$ $z_k = 0$.

Теорема 4.20. *Любое бесконечномерное полное сепарабельное ГП над полем $\mathbb{C}$ изоморфно (как ГП) пространству $l_2^{\mathbb{C}}$.*

Доказательство. Пусть H — полное сепарабельное ГП над полем $\mathbb{C}$, $\dim H = \infty$. Тогда по теореме 4.18 в H существует полная ОНС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющаяся в H базисом Шаудера. Благодаря этому на H можно определить отображение следующим образом: если $x \in H$ имеет (единственное) представление

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} z_k e_k \ \ (z_k \in \mathbb{C}), \tag{4.20}$$

то $\varphi(x) := (z_1, z_2, ...)$. Так как по критерию сходимости ортогонального ряда (см. теорему 4.8) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 < \infty$, то $\varphi\colon H \to l_2^{\mathbb{C}}$. Нетрудно проверить, что отображение φ линейно (?). Покажем, что оно взаимнооднозначно.

Для этого достаточно доказать, что $\operatorname{Ker}\varphi = \{\vec{0}\}$ и $\operatorname{Im}\varphi = l_2^{\mathbb{C}}$. Предположим, что $\varphi(x) = \vec{0}$. Тогда $z_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, и значит, $x = \vec{0}$. Тривиальность ядра доказана. Пусть теперь $z = (z_1, z_2, ...) \in l_2^{\mathbb{C}}$. Так как по определению пространства $l_2^{\mathbb{C}}$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 < \infty$ и по условию H полно, то, применяя еще раз критерий сходимости ортогонального ряда, получаем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k e_k$ сходится в H. Тогда, если сумму этого ряда обозначить через x, то $\varphi(x) = z$, т.е. $l_2^{\mathbb{C}} \subset \operatorname{Im}\varphi$. Обратное вложение выполнено всегда, следовательно, $\operatorname{Im}\varphi = l_2^{\mathbb{C}}$.

Проверим, наконец„ что отображение φ сохраняет скалярное произведение. Действительно, если $x \in H$ определяется соотношением (4.20), а $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k e_k$, то по лемме 4.6

$$(x, y)_H = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \overline{w}_k = (\varphi(x), \varphi(y))_{l_2^{\mathbb{C}}}.$$

Теорема доказана. □

Доказательство следующего утверждения совершенно аналогично доказательству следствия 4.7.

Следствие 4.8. *Любые два бесконечномерных полных сепарабельных ГП изоморфны (как ГП) между собой.*

Так как пространство $L_2^{\mathbb{C}}[a, b]$ полно и сепарабельно (см. теорему 3.8 и следствие 3.1), то мы также получаем

Следствие 4.9. *ГП $L_2^{\mathbb{C}}[a, b]$ изоморфно (как ГП) пространству $l_2^{\mathbb{C}}$.*

Замечание 4.7. Аналогичные утверждения справедливы также для ГП над полем $\mathbb{R}$.

4.12 Теоремы о наилучшем приближении в ГП.

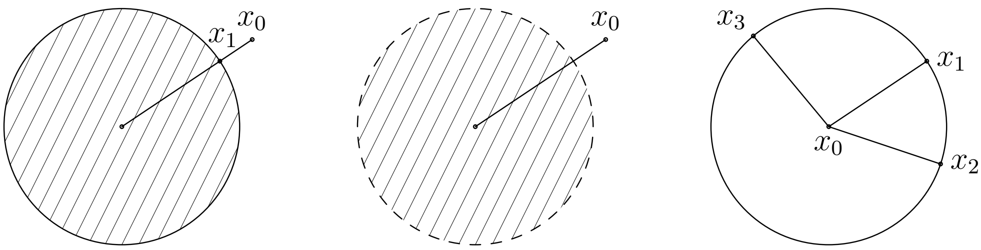
Определение 4.12. Пусть M — метрическое пространство, $A \subset M$, $x_0 \in M$. *Расстоянием от точки x_0 до множества A* называется величина

$$\rho(x_0, A) := \inf_{x \in A} \rho(x_0, x).$$

Очевидно, что всегда $\rho(x_0, A) \geq 0$.

Определение 4.13. Элемент $z \in A$ называется *элементом наилучшего приближения вектора $x_0 \in M$ элементами множества A*, если $\rho(x_0, A) = \rho(x_0, z)$.

Пример 4.7. Пусть M — плоскость с обычной метрикой, A — замкнутый круг, x_0 — точка, лежащая вне круга. Тогда элемент наилучшего приближения точки x_0 точками A существует и единственен. Если в качестве A взять открытый круг, то элемента наилучшего приближения не существует. Если A — окружность, а x_0 — ее центр, то элементом наилучшего приближения будет каждая точка множества A.



Определение 4.14. Пусть E — линейное пространство. Тогда множество $A \subset E$ называется *выпуклым*, если с любыми двумя точками A содержит соединяющий их отрезок. Иначе говоря, для любых $x, y \in A$ и произвольного $t \in [0,1]$ $(1-t)x + ty \in A$.

Лемма 4.7. *[Свойство медианы треугольника] Пусть H — ГП, $a, b, c \in H$. Тогда имеет место равенство:*

$$||a-c||^2 + ||b-c||^2 = 2\left\|\frac{b-a}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{a+b}{2} - c\right\|^2. \tag{4.21}$$

Доказательство. Обозначим: $x := \frac{b-a}{2}$ и $y := \frac{a+b}{2} - c$. Тогда $x + y = b - c$ и $x - y = c - a$. Ввиду равенства параллелограмма (см. лемму 4.2)

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

Подставляя вместо x и y их выражения через a, b, и c, получаем равенство (4.21).

□

Теорема 4.21. *Предположим, что H — ГП, $D \subset H$ — выпуклое множество, которое полно относительно метрики H (т.е. любая фундаментальная последовательность из D имеет предел, лежащий в D). Тогда для любого $x_0 \in H$ существует элемент наилучшего приближения $z \in D$.*

Доказательство. Обозначим $d := \rho(x_0, D)$. По определению расстояния от точки до множества существует такая последовательность $\{x_n\} \subset D$, что

$$\rho(x_0, x_n) = \|x_0 - x_n\| \to d. \tag{4.22}$$

Действительно, по определению точной нижней грани числового множества для любого $n \in \mathbb{N}$ существует элемент $x_n \in D$, для которого

$$d \leq \rho(x_n, x_0) < d + \frac{1}{n}.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $n \to \infty$, получаем (4.22). Докажем, что полученная последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в метрике H.

Ввиду только что доказанного свойства медианы треугольника (см. равенство (4.21))

$$||x_0 - x_n||^2 + ||x_0 - x_m||^2 = 2\left\|\frac{x_n - x_m}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{x_n + x_m}{2} - x_0\right\|^2.$$

Так как множество D выпукло, а $x_n, x_m \in D$, то $\frac{x_n + x_m}{2} \in D$. Поэтому по определению расстояния между точкой и множеством

$$\left\|\frac{x_n + x_m}{2} - x_0\right\| \geq d,$$

и значит, ввиду предыдущего неравенства

$$||x_0 - x_n||^2 + ||x_0 - x_m||^2 \geq 2\left|\left|\frac{x_n - x_m}{2}\right|\right|^2 + 2d^2$$

или

$$2\left|\left|\frac{x_n - x_m}{2}\right|\right|^2 \leq ||x_0 - x_n||^2 + ||x_0 - x_m||^2 - 2d^2.$$

Если теперь перейти к пределу при $n, m \to \infty$, то в силу (4.22) правая часть последнего соотношения стремится к 0. Следовательно, $||x_n - x_m|| \to 0$ при $n, m \to \infty$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна.

Далее, по условию множество D полно относительно метрики H. Поэтому существует $z := \lim_{n\to\infty} x_n$ и $z \in D$. Ввиду непрерывности нормы (напомним, что $\rho(x, y) = ||x - y||$) $\rho(x_n, x_0) \to \rho(z, x_0)$, откуда $\rho(z, x_0) = d$. □

Теорема 4.22. *Пусть H — ГП, $D \subset H$ — выпуклое множество, $x_0 \in H$. Тогда, если существует элемент наилучшего приближения вектора x_0 элементами D, то он единственен.*

Доказательство. Обозначим $d := \rho(x_0, D)$. Предположим, что существуют $x_1, x_2 \in D$, такие, что $\rho(x_1, x_0) = \rho(x_2, x_0) = d$. Если применить свойство медианы треугольника к векторам x_1, x_2, x_0, то получим:

$$||x_1 - x_0||^2 + ||x_2 - x_0||^2 = 2\left|\left|\frac{x_1 - x_2}{2}\right|\right|^2 + 2\left|\left|x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right|\right|^2.$$

Так как ввиду выпуклости D

$$\left|\left|x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right|\right|^2 \geq d^2,$$

то отсюда

$$2\left|\left|\frac{x_1 - x_2}{2}\right|\right|^2 \leq ||x_1 - x_0||^2 + ||x_2 - x_0||^2 - 2d^2.$$

По предположению правая часть последнего неравенства равна нулю. Следовательно, $\left|\left|\frac{x_1 - x_2}{2}\right|\right| = 0$, откуда $x_1 = x_2$, и теорема доказана. □

Следствие 4.10. *Если H — полное ГП, а $L \subset H$ — замкнутое линейное подпространство, то для произвольного $x_0 \in H$ существует единственный элемент $z \in L$, для которого $\rho(x_0, z) = \rho(x_0, L)$.*

Доказательство. Прежде всего, любое линейное подпространство — выпуклое множество (?). Так как пространство H полно, а L замкнуто в нём, то L также полно относительно метрики H. В самом деле, если последовательность $\{x_n\} \subset L$ фундаментальна, то существует $x := \lim_{n\to\infty} x_n$, $x \in H$. При этом ввиду замкнутости L в H $x \in L$. Таким образом, для L выполняются все условия теорем 4.21 и 4.22, применяя которые, получаем нужное утверждение. □

Следствие 4.11. *Пусть H — ГП, $L \subset H$ — его линейное подпространство, $\dim L < \infty$. Тогда для любого $x_0 \in H$ существует единственный $z \in L$, для которого $\rho(z, x_0) = \rho(x_0, L)$.*

Доказательство. Пространство L вместе со скалярным произведением из H является конечномерным ГП и поэтому ввиду следствия 4.6 полно. Значит, для L выполняются все условия теорем 4.21 и 4.22, и нужный результат является теперь их следствием. □

4.13 Теорема Гильберта о разложении ГП в прямую сумму подпространств.

В этом параграфе для определенности H — ГП над полем $\mathbb{C}$.

Определение 4.15. Пусть H — ГП, $M \subset H$. *Ортогональным дополнением* M в ГП H будет называться множество

$$M^{\perp} := \{y \in H : \ (y, x) = 0 \ \text{ для всех } \ x \in M\}.$$

Лемма 4.8. *Для любого подмножества M ГП H $M^{\perp}$ — замкнутое линейное подпространство пространства H.*

Доказательство. Если $x_1, x_2 \in M^{\perp}$, то для любого $u \in M$

$$(x_1 + x_2, u) = (x_1, u) + (x_2, u) = 0,$$

откуда $x_1 + x_2 \in M^{\perp}$. Точно так же, если $x \in M^{\perp}$, а $\alpha \in \mathbb{C}$, то для каждого $u \in M$

$$(\alpha x, u) = \alpha(x, u) = 0,$$

т.е. $\alpha x \in M^{\perp}$. Итак, $M^{\perp}$ — линейное подпространство H. Докажем его замкнутость.

Пусть $\{x_n\} \subset M^{\perp}$, $x_n \to x \in H$. Возьмём $u \in M$. Ввиду непрерывности скалярного произведения $(x_n, u) \to (x, u)$. Так как $(x_n, u) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то отсюда следует: $(x, u) = 0$. Значит, $x \in M^{\perp}$, и лемма доказана. □

Определение 4.16. Пусть E — линейное пространство, а E_1, E_2 — его линейные подпространства. Говорят, что E *раскладывается в прямую сумму* E_1 и E_2 ($E = E_1 \oplus E_2$), если для каждого $x \in E$ существует единственное представление:

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in E_1, \quad x_2 \in E_2.$$

Теорема 4.23. *[Гильберт] Пусть H — полное ГП, а $L \subset H$ — его замкнутое линейное подпространство. Тогда $H = L \oplus L^{\perp}$.*

Доказательство. Возьмём произвольный $x \in H$. По следствию 4.10 существует единственный элемент $x_1 \in L$, для которого

$$d := \rho(x, L) = \rho(x_1, x). \tag{4.23}$$

Обозначим $x_2 := x - x_1$ и докажем, что $x_2 \in L^{\perp}$. Предположим, что это не так, т.е. существует такой $u \in L$, что $(x_2, u) \neq 0$. Представим число (x_2, u) в тригонометрической форме: $(x_2, u) = re^{i\varphi}$, где $r > 0$, а $\varphi \in [0, 2\pi]$. Тогда вектор $v := e^{i\varphi}u$ также принадлежит подпространству L. Кроме того,

$$(x_2, v) = (x_2, e^{i\varphi}u) = e^{-i\varphi}(x_2, u) = e^{-i\varphi}re^{i\varphi} = r > 0.$$

Поэтому для пока произвольного $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} ||x-(x_1+\varepsilon v)||^2 &= ||(x-x_1)-\varepsilon v||^2 = ((x-x_1)-\varepsilon v,(x-x_1)-\varepsilon v) \\ &= (x-x_1,x-x_1)+\varepsilon^2(v,v)-\varepsilon[(x-x_1,v)+(v,x-x_1)] \\ &= \rho(x_1,x)^2+\varepsilon^2||v||^2-2\varepsilon\Re(x_2,v) = d^2+\varepsilon(\varepsilon||v||^2-2r). \end{aligned}$$

Выберем теперь $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\varepsilon < \frac{2r}{||v||^2}$. Тогда ввиду предыдущего равенства $||x-(x_1+\varepsilon v)||^2 < d^2$, т.е.

$$||x-(x_1+\varepsilon v)|| < d.$$

С другой стороны, так как L — подпространство, а $x_1, v \in L$, то и $x_1+\varepsilon v \in L$. Следовательно, ввиду определения расстояния от элемента до множества $||x-(x_1+\varepsilon v)|| \geq d$, что противоречит предыдущему неравенству. Таким образом, наше предположение неверно, и $x_2 \in L^\perp$.

Итак, мы доказали, что для произвольного $x \in H$ существует представление: $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L,\ x_2 \in L^\perp$. Покажем, что оно единственно.

Предположим, что существует ещё одно представление: $x = u_1 + u_2$, где $u_1 \in L,\ u_2 \in L^\perp$. Тогда $(x_1-u_1)+(x_2-u_2) = \vec{0}$ и, как легко проверить, $x_2-u_2 \perp x_1-u_1$. Поэтому по теореме Пифагора 4.7

$$||x_1-u_1||^2+||x_2-u_2||^2 = ||\vec{0}||^2 = 0,$$

откуда $x_1 = u_1$, а $x_2 = u_2$. Теорема доказана. □

Задача 4.14. Пусть M — замкнутое подпространство полного ГП H. Доказать, что $(M^\perp)^\perp = M$.

Задача 4.15. Пусть H — сепарабельное полное ГП. Доказать теорему 4.23, используя ряды Фурье.

Глава 5

Ограниченные линейные операторы и фунционалы. Сопряженное пространство

5.1 Норма линейного оператора. Равносильность непрерывности и ограниченности.

Определение 5.1. Напомним, что отображение $A\colon E \to F$ линейного пространства E в линейное пространство F называется *линейным оператором*, если 1) для любых $x_1, x_2 \in E$ $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$; 2) для любых $x \in E$ и $\alpha \in \mathbb{K}$ $A(\alpha x) = \alpha Ax$.

Определение 5.2. Отображение $A\colon X \to Y$ ЛНП X в ЛНП Y называется *непрерывным*, если из того, что $x_n \to x$ по норме в X, следует: $Ax_n \to Ax$ по норме в Y.

Задача 5.1. Доказать, что линейный оператор $A\colon X \to Y$ непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в $\vec{0}$, т.е. из того, что $||x_n|| \to 0$, следует: $||Ax_n|| \to 0$.

Задача 5.2. Доказать, что линейный оператор $A\colon X \to Y$, непрерывен, если и только если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из $||x|| < \delta$ следует: $||Ax|| < \varepsilon$.

Определение 5.3. *Нормой* линейного оператора $A\colon X \to Y$ называется величина

$$||A|| = ||A||_{X \to Y} := \sup_{x \in X : ||x||_X \leq 1} ||Ax||_Y .$$

Заметим, что $||A||$ всегда существует, но может быть как конечной, так и бесконечной. Если норма конечна, то оператор A называют *ограниченым.*

Теорема 5.1. *Линейный оператор $A\colon X \to Y$ ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\text{существует такое } M > 0, \quad \text{что для всех } x \in X \quad ||Ax|| \leq M||x||. \tag{5.1}$$

При этом $||A|| = \min M$, где минимум берется по всем M, для которых справедливо неравенство (5.1).

Доказательство. Предположим сначала, что оператор A ограничен, т.е. $||A|| < \infty$. Тогда по определению для всех $x \in X$, таких, что $||x|| \leq 1$,

$$||Ax|| \leq ||A||.$$

Пусть $x \in X$, $x \neq \vec{0}$. Обозначим: $\overline{x} := \frac{x}{||x||}$. Так как $||\overline{x}|| = 1$, то ввиду предыдущего неравенства $||A\overline{x}|| \leq ||A||$, откуда, пользуясь свойствами линейностью оператора и нормы, заключаем:

$$\frac{||Ax||}{||x||} \leq ||A||.$$

В итоге

$$||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||, \tag{5.2}$$

т.е. неравенство из условия (5.1) выполняется с $M = ||A||$.

Пусть теперь, наоборот, выполнено условие (5.1). В частности, тогда, если $||x|| \leq 1$, то $||Ax|| \leq M$. В левой части последнего неравенства перейдём к точной верхней грани по всем $x \in X$, таким, что $||x|| \leq 1$. Тогда получим:

$$||A|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||Ax|| \leq M.$$

Следовательно, оператор A ограничен. Кроме того, $||A|| = \min M$, где минимум берется по всем M, для которых выполнено (5.1). Тем самым теорема доказана. □

Теорема 5.2. *Линейный оператор $A \colon X \to Y$ ограничен тогда и только тогда, когда он непрерывен.*

Доказательство. Предположим сначала, что A ограничен. Если $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$, $||x_n - x|| \to 0$ при $n \to \infty$, то ввиду неравенства (5.2) и линейности оператора

$$0 \leq ||Ax_n - Ax|| = ||A(x_n - x)|| \leq ||A|| \cdot ||x_n - x||, \quad n = 1, 2, ...$$

Так как правая часть в последнем неравенстве стремится к нулю, то по теореме о сжатой переменной $||Ax_n - Ax|| \to 0$, и значит, оператор непрерывен.

Обратное утверждение докажем методом отпротивного. Пусть оператор A непрерывен, но не ограничен. Последнее означает, что $||A|| = \infty$, или иначе,

$$\sup_{||x|| \leq 1} ||Ax|| = \infty.$$

Тогда по определению точной верхней грани для каждого $n \in N$ найдется такой $x_n \in X$, что одновременно $||x_n|| \leq 1$ и $||Ax_n|| \geq n$. Рассмотрим векторы $u_n := \frac{x_n}{||Ax_n||}$ $(n = 1, 2, \dots)$. С одной стороны, ввиду предыдущего неравенства и линейности оператора

$$||u_n|| = \frac{||x_n||}{||Ax_n||} \leq \frac{1}{n},$$

откуда $||u_n|| \to 0$. Следовательно, так как оператор A непрерывен, $||Au_n|| \to .0$ при $n \to \infty$. С другой стороны,

$$||Au_n|| = \left|\left| A\left(\frac{x_n}{||Ax_n||}\right) \right|\right| = \frac{||Ax_n||}{||Ax_n||} = 1 \ \ (n = 1, 2, \dots).$$

Полученное противоречие говорит о том, что наше предположение неверно и оператор A ограничен. □

Задача 5.3. Доказать следующие формулы:

$$a)\ ||A|| = \sup_{x\neq\vec{0}} \frac{||Ax||}{||x||} \quad ; \quad b)\ ||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax||.$$

5.2 Пространство линейных ограниченных операторов. Сопряжённое пространство.

Определение 5.4. Пусть X и Y — произвольные ЛНП. Обозначим через $\mathbb{L}(X,Y)$ множество всех ограниченных линейных операторов $A\colon X \to Y$.

Множество $\mathbb{L}(X,Y)$ становится ЛП со следующими линейными операциями:
если $A, B \in \mathbb{L}(X,Y)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, то $(A+B)(x) := Ax + Bx$, и $(\lambda A)(x) := \lambda Ax$. Легко проверить, что все аксиомы линейного пространства выполняются. В частности, нулём в этом пространстве является нулевой оператор $\Theta x := \vec{0}\,(x \in X)$, а противоположным к элементу A будет оператор $(-A)x := -Ax$.

Покажем далее, что норма оператора, определенная в предыдущем параграфе, обладает всеми свойствами нормы. Докажем сначала импликацию $||A|| = 0 \Rightarrow A = \Theta$ (противоположная к ней очевидна). Если $||A|| = 0$, то по определению нормы

$$\sup_{||x||\leq 1} ||Ax|| = 0.$$

Это означает, что $||Ax|| = 0$ для каждого $x \in X$, $||x|| \leq 1$, откуда $Ax = \vec{0}$ для всех таких x. Пусть $x \in X$ произволен. Тогда, нормируя его, рассмотрим вектор $\overline{x} := \frac{x}{||x||}$. Так как $\|\overline{x}\| = 1$, то

$$\vec{0} = A(\overline{x}) = A\left(\frac{x}{||x||}\right) = \frac{Ax}{||x||},$$

и значит, $\|Ax\| = 0$ для всех $x \in X$. Таким образом, $A = \Theta$.

Докажем неравенство треугольника. По теореме 5.1 для каждого $x \in X$

$$||(A+B)x|| = ||Ax + Bx|| \leq ||Ax|| + ||Bx|| \leq (||A|| + ||B||)\|x\|,$$

откуда опять по той же самой теореме

$$||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$$

для любых $A, B \in \mathbb{L}(X,Y)$.

Положительную однородность нормы оператора, т.е. равенство

$$||\lambda A|| = |\lambda|||A||, \ \text{ где } \ A \in \mathbb{L}(X,Y), \lambda \in \mathbb{K},$$

доказать самостоятельно. В итоге множество $\mathbb{L}(X,Y)$ всех линейных операторов, ограниченно действующих из ЛНП X в ЛНП Y, является ЛНП.

Теорема 5.3. *Если X — ЛНП, а Y — банахово пространство, то $\mathbb{L}(X,Y)$ также банахово.*

Доказательство. Надо доказать, что любая фундаментальная последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{L}(X,Y)$ имеет предел в $\mathbb{L}(X,Y)$ относительно операторной нормы. По определению фундаментальности для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $m > n \geq N$ выполнено: $||A_m - A_n|| < \varepsilon$. Так как по теореме 5.1 для всех $x \in X$

$$||A_m x - A_n x|| = ||(A_m - A_n)x|| \leq ||A_m - A_n||\;||x|| \leq \varepsilon ||x||,$$

то отсюда для всех $m > n \geq N$ и каждого $x \in X$

$$||A_m x - A_n x|| \leq \varepsilon ||x||. \tag{5.3}$$

Тем самым, в частности, для каждого $x \in X$ последовательность $\{A_n x\}$ фундаментальна в Y. Так как Y полно, то существует предел

$$Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x. \tag{5.4}$$

Таким образом, определён оператор A, действующий из X в Y. Докажем, что $A \in \mathbb{L}(X,Y)$.

Если $x_1, x_2 \in X$, то ввиду свойств предела в ЛНП (см. теорему 2.1), а также линейности операторов A_n

$$A(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} A_n(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} (A_n x_1 + A_n x_2) = Ax_1 + Ax_2.$$

Аналогичным образом можно проверить, что

$$A(\lambda x) = \lambda A x,$$

где $x \in X$, а $\lambda \in \mathbb{K}$ (?). Покажем, что оператор A ограничен. Зафиксируем в соотношении (5.3) $x \in X$ и $n \geq N$. Если теперь перейти к пределу при $m \to \infty$, то ввиду (5.4), а также непрерывности нормы получим:

$$||(A - A_n)x|| = ||Ax - A_n x|| \leq \varepsilon ||x|| \ \text{ для всех } \ n \geq N \ \text{ и } \ x \in X.$$

Следовательно, по теореме 5.1 оператор $A - A_n$ ограничен и, кроме того, $||A - A_n|| \leq \varepsilon$ для каждого $n \geq N$. Так как $A = A_n + (A - A_n)$, то ограниченным является и оператор A. И наконец, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ последнее неравенство показывает, что $||A - A_n|| \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема доказана. □

Определение 5.5. Пусть X — произвольное ЛНП над полем $\mathbb{K}$. Пространство $X^* := \mathbb{L}(X, \mathbb{K})$ всех линейных операторов, ограниченно действующих из X в поле скаляров $\mathbb{K}$, называется пространством, *сопряжённым к пространству* X. Таким образом, пространство X^* состоит из всех линейных функционалов $f\colon X \to \mathbb{K}$, имеющих конечную норму

$$||f|| = \sup_{||x|| \leq 1} |f(x)|.$$

Следствие 5.1. *Для любого ЛНП X X^* — банахово пространство.*

Доказательство. Утверждение является непосредственным следствием теоремы 5.3, а также того, что поле $\mathbb{K}$ (вещественная прямая $\mathbb{R}$ или комплексная плоскость $\mathbb{C}$) полно. □

Задача 5.4. Пусть $A_n, A \in \mathbb{L}(X,Y)$ $(n = 1, 2, \dots)$ Доказать, что из сходимости по норме A_n к A следует поточечная сходимость, т.е. если $||A_n - A|| \to 0$, то для любого $x \in X$ $A_n x \to Ax$ в Y.

Привести пример, когда обратное неверно.

Задача 5.5. Предположим, что X — ЛНП, а Y — банахово пространство. Доказать, что пространство $\mathbb{L}(X,Y)$ полно относительно поточечной сходимости. Иначе говоря, если последовательность $\{A_n\} \subset \mathbb{L}(X,Y)$, такая, что для каждого $x \in X$ последовательность $\{A_n x\}$ фундаментальна в Y, то существует такой $A \in \mathbb{L}(X,Y)$, что $A_n x \to Ax$ для всех $x \in X$.

Указание. Использовать рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 5.3.

5.3 Принцип равномерной ограниченности Банаха-Штейнгауза.

Теорема 5.4. *Пусть X — банахово пространство, а Y — ЛНП. Предположим, что последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{L}(X,Y)$ поточечно ограничена, т.е. для каждого $x \in X$ существует константа $C_x > 0$, такая, что*

$$||A_n x|| \leq C_x \ \ (n = 1, 2, \dots). \tag{5.5}$$

Тогда последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ является равномерно ограниченной, т.е. существует такое $C > 0$, что

$$||A_n|| \leq C \ \ (n = 1, 2, \dots). \tag{5.6}$$

Доказательство. Для каждого $m = 1, 2, \dots$ определим множество

$$V_m = \{x \in X : \forall n = 1, 2, ... ||A_n x|| \leq m||x||\}. \tag{5.7}$$

Докажем, что

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m = X. \tag{5.8}$$

Вложение $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} V_m \subset X$ очевидно, так как $V_m \subset X$ для всех $m = 1, 2, \dots$ Пусть теперь $x \in X$. Так как $\vec{0} \in V_m$ для любого $m = 1, 2, \dots$, то можно считать, что $x \neq \vec{0}$. Ввиду (5.5) существует такое $C_x > 0$, что $||A_n x|| \leq C_x$ $(n = 1, 2, \dots)$. Если $m \geq \frac{C_x}{||x||}$, то $||A_n x|| \leq C_x \leq m||x||$, и значит, $x \in V_m$. Таким образом, равенство (5.8) доказано.

Так как X полно, то по теореме 2.18 оно является множеством второй категории в себе, т.е. не представимо в виде счетного объединения нигде не плотных множеств. Следовательно, ввиду (5.8) существует m_0, для которого множество V_{m_0} не нигде не плотно в X. Иначе говоря, V_{m_0} плотно в некотором шаре $\overline{S}_r(x_0)$ $(r > 0)$. Это означает, что

$$\overline{V}_{m_0} \supset \overline{S}_r(x_0). \tag{5.9}$$

Докажем, что множество V_m замкнуто для каждого $m = 1, 2, \dots$. Пусть $\{x_k\} \subset V_m$, $x_k \to x$. Тогда ввиду (5.7) для всех $n = 1, 2, \dots$ и $k = 1, 2, \dots$

$$||A_n x_k|| \leq m||x_k||.$$

Так как оператор A_n ограничен, то по теореме 5.2 он также непрерывен. Следовательно, $A_n x_k \to A_n x$ при $k \to \infty$. Поэтому, переходя в последнем неравенстве к пределу при $k \to \infty$, ввиду непрерывности нормы получим:

$$||A_n x|| \le m||x||,$$

откуда $x \in V_m$. Таким образом, множество V_m замкнуто, в частности, $\overline{V}_{m_0} = V_{m_0}$, и вложение (5.9) переходит в соотношение

$$V_{m_0} \supset \overline{S}_r(x_0).$$

Иначе говоря, для всех $n = 1, 2, \dots$ и каждого $x \in X$, такого, что $||x - x_0|| \le r$, справедливо неравенство:

$$||A_n x|| \le m_0 ||x||. \tag{5.10}$$

Пусть $z \in X$, $||z|| \le 1$. Тогда нетрудно проверить, что вектор $x := x_0 + rz \in \overline{S}_r(x_0)$(?). Поэтому для него верно неравенство (5.10), откуда ввиду линейности оператора A_n и неравенства треугольника

$$||A_n x_0 + rA_n z|| \le m_0(||x_0|| + r||z||) \le m_0(||x_0|| + r).$$

Применяя (5.10) для $x = x_0$, оценим левую часть последнего соотношения снизу:

$$||rA_n z + A_n x_0|| = ||rA_n z - (-A_n x_0)|| \ge r||A_n z|| - ||A_n x_0|| \ge r||A_n z|| - m_0||x_0||.$$

Из двух последних неравенств следует:

$$r||A_n z|| - m_0||x_0|| \le m_0||x_0|| + m_0 r$$

или

$$||A_n z|| \le C, \ \text{ где } \ C := \frac{2}{r} m_0 ||x_0|| + m_0.$$

Таким образом, для всех $n = 1, 2, \dots$ и любого $z \in X$, такого, что $||z|| \le 1$, выполнено: $||A_n z|| \le C$. Воспользовавшись определением нормы оператора, отсюда сразу получаем соотношение (5.6). Теорема доказана. □

Частным случаем только что доказанной теоремы является следующее утверждение.

Следствие 5.2. *Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ — последовательность функционалов, определенных на банаховом пространстве X, такая, что для каждого $x \in X$ найдется такое $C_x > 0$, что для всех $n = 1, 2, \dots$ $|f_n(x)| \le C_x$. Тогда существует $C > 0$, для которого $||f_n||_{X^*} \le C$ $(n = 1, 2, \dots)$.*

5.4 Линейные ограниченные функционалы в ГП. Теорема Ландау.

Пусть для определенности H — ГП над полем $\mathbb{R}$, (x, y) — скалярное произведение в H. Для произвольного $u \in H$ определим функционал

$$f_u(x) := (x, u) \ \ (x \in H).$$

Из свойств скалярного произведения вытекает линейность f_u (?). Покажем, что этот функционал ограничен и, кроме того,

$$||f_u||_{H^*} = ||u||. \tag{5.11}$$

Если $u = \vec{0}$, то это очевидно. Поэтому предположим, что $u \neq \vec{0}$. Во-первых,

$$|f_u(x)| = |(x, u)| \leq ||u|| \cdot ||x||,$$

и значит,

$$||f_u||_{X^*} \leq ||u||. \tag{5.12}$$

Докажем обратное неравенство. Обозначим $u_0 := \frac{u}{||u||}$. Тогда $||u_0|| = 1$ и

$$f_u(u_0) = \left(\frac{u}{||u||}, u\right) = \frac{1}{||u||}(u, u) = \frac{||u||^2}{||u||} = ||u||.$$

Следовательно,

$$||f_u||_{X^*} = \sup_{||x|| \leq 1} |f_u(x)| \geq f_u(u_0) = ||u||.$$

Отсюда и из (5.12) следует (5.11).

Пример 5.1. Пусть $H = l_2$. Напомним, что это пространство состоит из всех последовательностей $x = (x_1, x_2, ...)$ $(x_k \in \mathbb{R})$, таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty.$$

Скалярное произведение определяется здесь следующим образом:

$$(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \quad \text{где } x = (x_1, x_2, ...), y = (y_1, y_2, ...) \in l_2.$$

Для $a = (a_1, a_2, ...) \in l_2$ определим функционал

$$f_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k a_k.$$

Тогда, как только что было доказано, $f_a \in l_2^*$ и

$$||f_a|| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.13}$$

Теорема 5.5. *[Ландау] Числовая последовательность $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$ тогда и только тогда, когда для каждого $x = (x_1, x_2, ...) \in l_2$ сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k a_k. \tag{5.14}$$

Доказательство. Если $a \in l_2$, то ввиду неравенства Коши–Буняковского

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k a_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Значит, ряд (5.14) сходится абсолютно.

Предположим теперь, что, наоборот, ряд (5.14) сходится для каждого $x \in l_2$. Докажем, что тогда $a \in l_2$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ определим функционал

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} x_k a_k \quad (x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2).$$

Ввиду соотношения (5.13)

$$||f_n|| = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{5.15}$$

Докажем, что последовательность функционалов $\{f_n\}$ поточечно ограничена на пространстве l_2. В самом деле, по определению, $f_n(x)$ — частичная сумма ряда (5.14), который по условию сходится. Значит, последовательность $\{f_n(x)\}$ имеет конечный предел и, в частности, ограничена. Таким образом, найдется такая константа C_x, что $|f_n(x)| \leq C_x$ для всех $n = 1, 2, \dots$ Так как пространство l_2 — банахово, то применяя следствие 5.2, получаем, что $||f_n|| \leq C$ $(n = 1, 2, \dots)$ для некоторого $C > 0$. Иначе, ввиду (5.15)

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \quad (n = 1, 2, \dots)$$

или после перехода к пределу при $n \to \infty$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C.$$

Следовательно, $a \in l_2$, и теорема доказана. □

5.5 Линейные функционалы в пространстве $C[a, b]$. Норма интегрального функционала.

В этом параграфе речь будет идти о пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ с обычной нормой $||f|| = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Линейные ограниченные функционалы, определенные на $C[a, b]$, условно можно разделить на два класса: дискретные и интегральные. Типичным представителем первого является так называемый функционал Дирака

$$\varphi(f) := f(a) \quad (f \in C[a, b]).$$

Легко проверить, что этот функционал линеен (?). Покажем, что он ограничен и

$$||\varphi|| = 1. \tag{5.16}$$

Во-первых,

$$|\varphi(f)| = |f(a)| \leq \max_{x\in[a,b]} |f(x)| = ||f||,$$

откуда $||\varphi|| \leq 1$. Для доказательства обратного неравенства возьмем функцию $f_0(x) \equiv 1$. Так как $||f_0|| = 1$ и $\varphi(f_0) = f_0(a) = 1$, то

$$||\varphi|| = \sup_{||f||\leq 1} |\varphi(f)| \geq \varphi(f_0) = 1.$$

Поэтому $||\varphi|| \geq 1$, и равенство (5.16) доказано.

Задача 5.6. Пусть $a \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leq b$, $\lambda_k \geq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Определим функционал

$$\varphi(f) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(a_k).$$

Доказать, что он линеен и ограничен на $C[a, b]$, а также вычислить его норму.

Подробнее рассмотрим интегральные функционалы. Пусть $g(x) \in C[a, b]$ — фиксированная функция. Определим функционал

$$\varphi(f) := \int_a^b f(x)g(x)\,dx \quad (f(x) \in C[a, b]). \tag{5.17}$$

Его линейность является непосредственным следствием линейности интеграла. Найдем его норму.

Теорема 5.6. *Функционал φ, определенный соотношением* (5.17)*, ограничен, и его норма в пространстве $C[a, b]^*$ вычисляется по формуле:*

$$||\varphi|| = \int_a^b |g(x)|\,dx. \tag{5.18}$$

Доказательство. Прежде всего, для произвольной $f \in C[a, b]$

$$|\varphi(f)| = \int_a^b |f(x)||g(x)|\,dx \leq \int_a^b |g(x)|\,dx \cdot ||f||.$$

Следовательно, функционал φ ограничен на $C[a, b]$, и

$$||\varphi|| \leq \int_a^b |g(x)|\,dx. \tag{5.19}$$

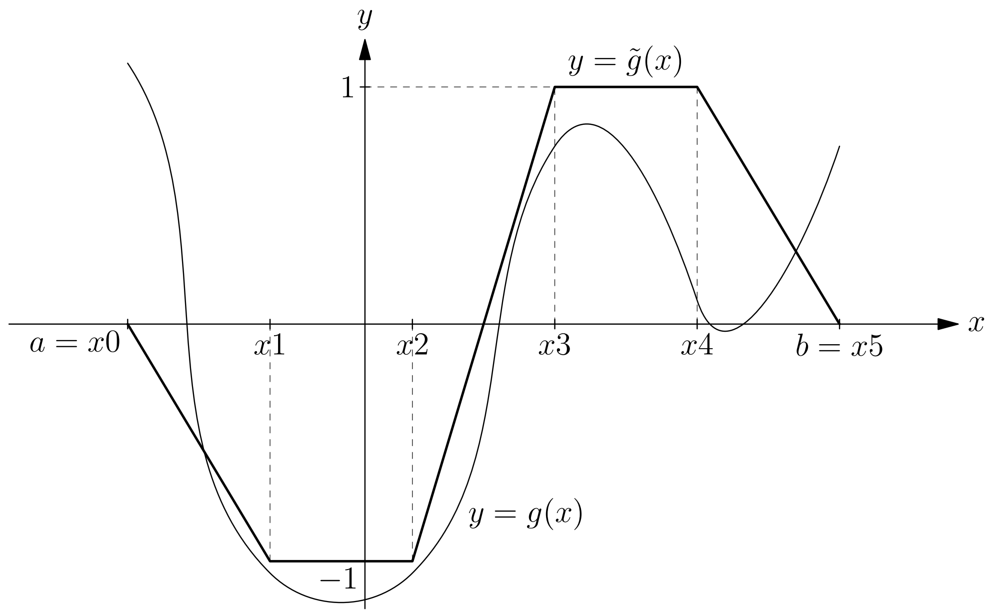
Докажем противоположное неравенство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. По теореме Кантора функция f равномерно непрерывна на $[a, b]$, и значит, существует такое разбиение отрезка $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, что

$$|g(u) - g(v)| \leq \varepsilon, \quad \text{если} \quad u, v \in [x_{k-1}, x_k] \quad \text{для некоторого} \quad k = 1, \ldots, n. \tag{5.20}$$

Разобьем отрезки разбиения $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ на две группы. В первую I_1 отнесем те, на которых функция g сохраняет знак, а во вторую I_2 — все остальные (очевидно, что функция g обращается в нуль хотя бы в одной точке каждого такого отрезка).

Определим функцию

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} \text{sign } g(x), \quad \text{для } \ x \in \Delta_k \in I_1 \\ 0, \quad \text{при } \ x = a, b, \ \text{если } \ a, b \notin \Delta_k \in I_1 \\ \text{линейна и непрерывна на } \ \Delta_k \in I_2 \end{cases}$$



Ясно, что $|\widetilde{f}(x)| \le 1$, и значит,

$$||\widetilde{f}|| \le 1. \tag{5.21}$$

Обозначим

$$A := \bigcup_{\Delta_k \in I_1} \Delta_k \ \text{ и } \ B := \bigcup_{\Delta_k \in I_2} \Delta_k.$$

Тогда $A \bigcup B = [a, b]$, а $A \bigcap B$ состоит из конечного числа точек. Поэтому ввиду аддитивности интеграла и определения функции $\widetilde{f}$ на промежутках первой группы

$$\begin{aligned} \varphi(\widetilde{f}) &= \int\limits_a^b g(x)\widetilde{f}(x)\,dx = \int\limits_A g(x)\widetilde{f}(x)\,dx + \int\limits_B g(x)\widetilde{f}(x)\,dx \\ &= \sum_{\Delta_k \in I_1} \int\limits_{\Delta_k} g(x)\widetilde{f}(x)\,dx + \int\limits_B g(x)\widetilde{f}(x)\,dx \\ &\ge \int\limits_A |g(x)|\,dx - \int\limits_B |g(x)\widetilde{f}(x)|\,dx. \end{aligned}$$

Как уже отмечалось, если $\Delta_k \in I_2$, то найдется такая точка $u_k \in \Delta_k$, что $g(u_k) = 0$. Но тогда ввиду (5.20) для $x \in \Delta_k$

$$|g(x)| = |g(x) - g(u_k)| \le \varepsilon,$$

т.е. если $x \in B$, то $|g(x)| \le \varepsilon$. Тем самым из предыдущего неравенства и соотношения (5.21) следует:

$$\varphi(\widetilde{f}) \ge \int\limits_a^b |g(x)|\,dx - 2\varepsilon m(B) \ge \int\limits_a^b |g(x)|\,dx - 2\varepsilon(b-a).$$

Таким образом, учитывая (5.21), по определению нормы функционала

$$||\varphi|| \ge \varphi(\widetilde{f}) \ge \int\limits_a^b |g(x)|\,dx - 2\varepsilon(b-a),$$

откуда ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ получаем:

$$||\varphi|| \ge \int\limits_a^b |g(x)|\,dx.$$

Отсюда и из (5.19) следует равенство (5.18). Теорема доказана. $\square$

5.6 Норма оператора в конечномерном пространстве.

В этом параграфе будут рассматриваться линейные операторы $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. По теореме 1.4 любой такой оператор определяется прямоугольной матрицей $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ ($a_{ij} \in \mathbb{R}$) следующим образом: если $x = (x_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$, то $Ax = (y_i)_{i=1}^m$, где $y_i = \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Норма оператора A будет, конечно, зависеть от того, какие нормы берутся в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$. Найдем, например, норму матричного оператора $A : \mathbb{R}_1^n \to \mathbb{R}_1^m$, т.е. в случае, когда в обоих пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ рассматривается норма

$$||x||_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|.$$

Во-первых, для произвольного $x = (x_j)_{j=1}^n$

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^m \Big|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\Big| \leqslant \sum_{j=1}^n \Big(\sum_{i=1}^m |a_{ij}|\Big)|x_j| \le M\sum_{j=1}^n |x_j| = M\|x\|_1,$$

где $M := \max_{j=1,\ldots,n} \sum\limits_{i=1}^m |a_{ij}|$. Докажем, что число M является нормой оператора. Во-первых, из предыдущего неравенства следует, что $\|A\|_{1,1} \leqslant M$. Докажем противоположное неравенство.

По определению числа M существует такое j_0, что $M = \sum\limits_{i=1}^m |a_{ij_0}|$. Если $x^0 := (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j_0}, 0, \ldots, 0)$, то $\|x^0\|_1 = 1$ и

$$\|Ax^0\|_1 = \sum_{i=1}^m \Big|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^0\Big| = \sum_{i=1}^m |a_{ij_0}| = M.$$

Поэтому $\|A\|_{1,1} \geqslant \|Ax^0\|_1 = M$. В итоге мы доказали, что

$$\|A\|_{1,1} = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

Напомним, что $\mathbb{R}^n_\infty$ — ЛНП $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, где $||x||_\infty = \max\limits_{j=1,\dots,n} |x_j|$.

Задача 5.7. Найти норму линейного оператора *a*) $A : \mathbb{R}^n_\infty \to \mathbb{R}^m_\infty$; *b*) $A : \mathbb{R}^n_1 \to \mathbb{R}^m_\infty$, заданного матрицей $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ $(a_{ij} \in \mathbb{R})$.

5.7 Интегральный оператор Фредгольма в $C[a, b]$ и его норма.

Пусть $K(s,t)$ — функция, непрерывная по совокупности переменных на квадрате $[a,b] \times [a,b]$. Определим отображение

$$Af(s) := \int\limits_a^b K(s,t) f(t)\, dt, \tag{5.22}$$

где $f(t) \in C[a,b]$. Заметим, что по теореме о непрерывной зависимости интеграла от параметра [5, гл. 14, § 1] функция $Af(s)$ непрерывна на $[a,b]$. Таким образом, $A : C[a,b] \to C[a,b]$. Отображение (5.22) называется *оператором Фредгольма,* функция $K(s,t)$ — его *ядром.*

Теорема 5.7. *Оператор* $A : C[a,b] \to C[a,b]$*, заданный соотношением* (5.22)*, линеен и ограничен, а его норма определяется по формуле:*

$$\|A\| = \max_{s \in [a,b]} \int\limits_a^b |K(s,t)|\, dt. \tag{5.23}$$

Доказательство. Линейность оператора является следствием линейности интеграла, а ограниченность будет доказана, как только мы проверим справедливость соотношения (5.23).

Обозначим через M правую часть (5.23). Тогда, если $f \in C[a,b]$, то для любого $s \in [a,b]$

$$|Af(s)| \leqslant \int\limits_a^b |K(s,t)| \cdot |f(t)|\, dt \leqslant M \cdot \|f\|,$$

откуда по определению нормы в $C[a,b]$ и нормы оператора $\|A\| \leqslant M$. Докажем противоположное неравенство.

По определению M существует такое $s_0 \in [a,b]$, что

$$M = \int\limits_a^b |K(s_0,t)|\, dt.$$

Введем на пространстве $C[a,b]$ функционал:

$$\varphi(f) := \int\limits_a^b K(s_0,t)\cdot f(t)\,dt.$$

Так как по теореме 5.6

$$\|\varphi\| = \int\limits_a^b |K(s_0,t)|\,dt,$$

то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $\tilde{f} \in C[a,b]$, что $\|\tilde{f}\| \leqslant 1$ и $|\varphi(\tilde{f})| \geqslant M - \varepsilon$. Поэтому

$$\|A\tilde{f}\| \geqslant |A\tilde{f}(s_0)| = |\varphi(\tilde{f})| \geqslant M - \varepsilon,$$

откуда по определению нормы оператора

$$\|A\| \geqslant \|A\tilde{f}\| \geqslant M - \varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получаем: $\|A\| \geqslant M$, и соотношение (5.23) доказано. □

5.8 Теорема Банаха об открытом отображении.

Определение 5.6. Пусть X и Y — метрические пространства. Отображение $A : X \to Y$ называется *открытым,* если любое открытое множество оно переводит в открытое, т.е. $A(U)$ открыто, если $U \subset X$ открыто.

Пример 5.2. Тождественное отображение $I : X \to X$, т.е. $Ix = x$ $(x \in X)$, открыто для любого метрического пространства X.

Пример 5.3. Пусть X — ЛНП, $\dim X \geq 2$, $x_0 \in X$ и $f \in X^*$. Тогда отображение $Tx := f(x)\cdot x_0$ $(x \in X)$ не открыто, так как его образ $\operatorname{Im} T = \{\lambda x_0,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ одномерен и не содержит ни одного шара в пространстве X.

Задача 5.8. Пусть X и Y — ЛНП, а линейный оператор $A : X \to Y$ является открытым отображением. Доказать, что $A(X) = Y$.

Следующая фундаментальная теорема показывает, что верно также утверждение, обратное к утверждению последней задачи (которое уже весьма нетривиально).

Теорема 5.8. *Пусть X и Y — банаховы пространства, $A : X \to Y$ — такой линейный оператор, что $A(X) = Y$. Тогда A — открытое отображение.*

Для доказательства этой важной теоремы нам понадобится целый ряд вспомогательных утверждений. Через S_r (соответственно S_R) в этом параграфе будет обозначаться открытый шар с центром в $\vec{0}$ в пространстве X (соответственно в Y) При этом радиус шара в X будет обозначаться строчной, а в Y — прописной буквой. Таким образом,

$$S_r = \{x \in X : \|x\| \leqslant r\}, \ \text{ а } \ S_R = \{y \in Y : \|y\| \leqslant R\}.$$

Определение 5.7. Подмножество V ЛП E называется *центрально-симметричным,* если из того, что $x \in V$ следует: $-x \in V$.

Лемма 5.1. *Пусть X и Y — два ЛНП.*

1. Для каждого $r > 0$ S_r — выпуклое центрально-симметричное множество в пространстве X.

2. Если $A : X \to Y$ — линейный оператор, то образ $A(S_r)$ — выпуклое центрально-симметричное множество в Y.

Доказательство. Докажем лишь второе утверждение, так как первое доказывается совершенно аналогично (и несколько проще).

Чтобы доказать центральную симметричность множества $A(S_r)$ возьмем $y \in A(S_r)$. По определению образа найдется $x \in S_r$, такой, что $y = Ax$, причем ввиду линейности оператора $-y = -Ax = A(-x)$. Так как $-x \in S_r$, то отсюда $-y \in A(S_r)$.

Покажем теперь, что множество $A(S_r)$ выпукло. Если $y_1, y_2 \in A(S_r)$, то $y_i = Ax_i,\ x_i \in S_r\ (i = 1, 2)$. Для каждого $t \in [0, 1]$

$$(1-t)y_1 + ty_2 = (1-t)Ax_1 + tAx_2 = A((1-t)x_1 + tx_2).$$

Так как $(1-t)x_1+tx_2 \in S_r$, то отсюда $(1-t)y_1+ty_2 \in A(S_r)$, и лемма доказана. □

Лемма 5.2. *Пусть $M \subset X$ — выпуклое центрально-симметричное множество. Тогда его замыкание $\bar{M}$ обладает теми же свойствами.*

Доказательство. Если $x_1, x_2 \in \bar{M}$, $t \in [0, 1]$, то по определению замыкания существуют последовательности $\{x_n^1\} \subset M$ и $\{x_n^2\} \subset M$, такие, что $x_n^1 \to x_1$ и $x_n^2 \to x_2$. Тогда ввиду непрерывности линейных операций в ЛНП (см. теорему 2.1)

$$x_n := (1-t)x_n^1 + tx_n^2 \to (1-t)x_1 + tx_2,$$

и значит, $(1-t)x_1 + tx_2 \in \bar{M}$. Тем самым выпуклость множества $\bar{M}$ доказана. Центральную симметричность проверить самостоятельно. □

Лемма 5.3. *Если $M \subset X$ — выпуклое центрально-симметричное множество, $M \supset S_r(x_0)$ $(x_0 \in X)$, то $M \supset S_r$.*

Доказательство. Прежде всего, для любого $x \in X$

$$x = \frac{1}{2}(x - x_0) + \frac{1}{2}(x + x_0). \tag{5.24}$$

Если $x \in S_r$, то $x + x_0 \in S_r(x_0)$, и значит, $x + x_0 \in M$. Совершенно аналогично $x_0 - x \in M$, откуда ввиду центральной симметричности множества M получаем: $x - x_0 \in M$. Таким образом соотношение (5.24) показывает, что x — выпуклая комбинация двух векторов из M. Так как M выпукло, то $x \in M$. Лемма доказана. □

Лемма 5.4. *Пусть $A : X \to Y$ — линейный оператор, $\lambda > 0$. Тогда*

1) если $A(S_r) \supset S_R$, то $A(S_{\lambda r}) \supset S_{\lambda R}$;

2) если $\overline{A(S_r)} \supset S_R$, то $\overline{A(S_{\lambda r})} \supset S_{\lambda R}$.

Доказательство. Опять докажем лишь второе утверждение, так как первое доказывается совершенно аналогично (и несколько проще).

Если $y \in S_{\lambda R}$, то по определению шара $\frac{y}{\lambda} \in S_R$. Тем самым по условию $\frac{y}{\lambda} \in \overline{A(S_r)}$. Следовательно, существует такая последовательность $\{y_n\} \subset A(S_r)$, что $y_n \to \frac{y}{\lambda}$, откуда $\lambda y_n \to y$. В то же время $y_n = A(x_n)$ $(x_n \in S_r)$. Поэтому $\lambda y_n = A(\lambda x_n)$, т.е. $\lambda y_n \in A(S_{\lambda r})$. Так как $\lambda y_n \to y$, то в итоге $y \in \overline{A(S_{\lambda r})}$. □

Последние две леммы будут играть центральную роль в доказательстве теоремы 5.8.

Лемма 5.5. *Пусть X — ЛНП, Y — банахово пространство, $A: X \to Y$ — такой линейный ограниченный оператор, что $A(X) = Y$. Тогда существует $R > 0$, для которого $\overline{A(S_1)} \supset S_R$.*

Доказательство. Начнем с проверки равенства

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(S_n). \tag{5.25}$$

Конечно, достаточно доказать лишь вложение $Y \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A(S_n)$. Так как по условию $A(X) = Y$, то для каждого $y \in Y$ найдется такой $x \in X$, что $Ax = y$. Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$ настолько велико, что $\|x\| < n_0$. Тогда $y \in A(S_{n_0})$, и равенство (5.25) доказано.

Далее, так как пространство Y банахово, то по теореме Бэра-Хаусдорфа 2.18 оно является множеством второй категории. Поэтому (5.25) показывает, что существует $n_1 \in \mathbb{N}$, для которого образ $A(S_{n_1})$ всюду плотен в некотором шаре $S_L(y_0)$, т.е. при некоторых $L > 0$ и $y_0 \in Y$

$$\overline{A(S_{n_1})} \supset S_L(y_0). \tag{5.26}$$

Ввиду лемм 5.1 и 5.2 $\overline{A(S_{n_1})}$ — выпуклое центрально-симметричное множество. Тем самым вложение (5.26) и лемма 5.3 позволяют утверждать, что $\overline{A(S_{n_1})} \supset S_L$. Но тогда, применяя лемму 5.4, в итоге заключаем: $\overline{A(S_1)} \supset S_R$, где $R := \frac{L}{n_1}$. □

Лемма 5.6. *Пусть Y — ЛНП, X — банахово пространство, а линейный ограниченный оператор $A: X \to Y$ обладает следующим свойством: существует такое $R > 0$, что*

$$\overline{A(S_1)} \supset S_R. \tag{5.27}$$

Тогда справедливо вложение:

$$A(S_1) \supset S_{\frac{R}{2}}. \tag{5.28}$$

Доказательство. В основе доказательства вложенипя (5.28) будет лежать метод последовательных приближений произвольного $y \in S_R$ элементами образа $A(X)$.

Прежде всего, ввиду (5.27) $y \in \overline{A(S_1)}$, и значит, существует такой $y_1 \in A(S_1)$, что $\|y - y_1\| < \frac{R}{2}$. Таким образом, $y_1 = Ax_1$, где $x_1 \in S_1$ и

$$\|y - Ax_1\| < \frac{R}{2},$$

т.е. $y - Ax_1 \in S_{\frac{R}{2}}$. По лемме 5.4 из условия (5.27) следует: $\overline{A(S_{\frac{1}{2}})} \supset S_{\frac{R}{2}}$. Поэтому $y - Ax_1 \in \overline{A(S_{\frac{1}{2}})}$, и точно так же, как и в первый раз, найдется $x_2 \in S_{\frac{1}{2}}$, для которого

$$\|y - Ax_1 - Ax_2\| < \frac{R}{2^2}.$$

Продолжая начатый процесс, выделим такую последовательность $\{x_n\} \subset X$, что

$$\|x_n\| < 2^{1-n} \ \ (n = 1, 2, \dots) \tag{5.29}$$

и
$$\|y - A(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\| < \frac{R}{2^n}. \tag{5.30}$$

Рассмотрим ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k. \tag{5.31}$$

Ввиду (5.29) он сходится абсолютно (?). Следовательно, так как X полно, то по теореме 2.16 этот ряд сходится в обычном смысле к некоторому элементу $x \in X$. Из соотношения (5.30) следует, что $A(S_n) \to y$, где S_n — частичная сумма ряда (5.31). С другой стороны, так как ограниченный линейный оператор непрерывен (см. теорему 5.2), то $A(S_n) \to Ax$. Поэтому $y = Ax$. В заключение заметим, что ввиду (5.29) $\|S_n\| \leqslant 2$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а значит, $\|x\| \leqslant 2$. Таким образом, $x \in S_2$, и доказано вложение: $A(S_2) \supset S_R$. Применяя лемму 5.4, тем самым получаем (5.28). Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 5.8. Предположим, что множество $U \subset X$ открыто. Докажем, что тогда открытым будет и его образ, т.е. множество $A(U)$. Ввиду лемм 5.5 и 5.6 существует такое $R > 0$, что $A(S_1) \supset S_R$. Тем самым, применяя лемму 5.4, получаем:
$$A(S_r) \supset S_L, \quad L = rR, \tag{5.32}$$
где $r > 0$ пока произвольно. Покажем, что тогда для каждого $x_0 \in U$ выполнено вложение:
$$A(S_r(x_0)) \supset S_L(Ax_0) \tag{5.33}$$
Действительно, если $y \in S_L(Ax_0)$, то $\|y - Ax_0\| < L$ или эквивалентно $y - Ax_0 \in S_L$. Отсюда ввиду (5.32) $y - Ax_0 \in A(S_r)$. Иначе говоря, найдется $x \in S_r$, для которого $y - Ax_0 = Ax$. В итоге $y = A(x_0 + x)$, где $x + x_0 \in S_r(x_0)$, откуда $y \in A(S_r(x_0))$, и вложение (5.33) доказано.

Пусть теперь $y_0 \in A(U)$ произволен. Тогда $y_0 = Ax_0$, где $x_0 \in U$. Так как U открыто, то можно взять такое $r > 0$, что $S_r(x_0) \subset U$. Тогда $A(S_r(x_0)) \subset A(U)$, откуда ввиду (5.33)
$$A(U) \supset A(S_r(x_0)) \supset S_L(Ax_0) = S_L(y_0),$$
т.е. $y_0 \in A(U)$ — внутренняя точка этого множества. Таким образом, $A(U)$ открыто, и теорема доказана.

□

5.9 Теорема Банаха об обратном операторе.

Следующий фундаментальный факт, по существу, является непосредственным следствием теоремы об открытом отображении, доказанной в предыдущем параграфе.

Теорема 5.9. *[Банах] Пусть X и Y — банаховы пространства, $A : X \to Y$ — линейный ограниченный оператор, взаимнооднозначно отображающий X на Y. Тогда обратный оператор A^{-1} также линеен и ограничен.*

Доказательство. Прежде всего, обратный оператор $A^{-1} : Y \to X$ существует и по лемме 1.1 линеен. Докажем его ограниченность.

Применяя в очередной раз леммы 5.5 и 5.6, найдем такое $R > 0$, что $A(S_1) \supset S_R$. Отсюда по лемме 5.4 $A(S_{2/R}) \supset S_2$. Последнее означает, что для каждого $y \in Y$, $\|y\| < 2$, существует такой $x \in X$, что одновременно $\|x\| < 2/R$ и $Ax = y$. Тогда по определению обратного оператора $x = A^{-1}y$ и, следовательно,

$$\|A^{-1}\| = \sup_{\|y\|\leqslant 1} \|A^{-1}y\| \leqslant \sup_{\|y\|<2} \|x\| \leqslant \frac{2}{R} < \infty.$$

Тем самым оператор A^{-1} ограничен, и теорема доказана. □

Замечание 5.1. Приведем пример, показывающий, что полнота пространств в последней теореме существенна. Определим на пространстве l_2, состоящем из последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, таких, что

$$\|x\|_2 := \Big(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\Big)^{1/2} < \infty,$$

диагональный оператор

$$Ax := (x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots).$$

Легко видеть, что он линеен и ограничен, так как $\|Ax\|_2 \leq \|x\|_2$ (?). Его образ $A(l_2)$ — линейное подпространство l_2. Поэтому это ЛНП с нормой из l_2. Проверим, что оператор $A : l_2 \to A(l_2)$ взаимооднозначен.

Ясно, что A сюръективен. Кроме того, если $Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, \dots) = \vec{0}$, то $x_1 = x_2 = \dots = 0$, откуда $x = \vec{0}$. Таким образом, $\operatorname{Ker} A = \{\vec{0}\}$ и оператор $A : l_2 \to A(l_2)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 5.9, кроме, может быть, полноты пространства $Y := A(l_2)$.

Покажем, что вместе с тем обратный оператор не ограничен. Действительно, во-первых, как легко видеть, $A^{-1}(y_1, y_2, \dots) = (y_1, 2y_2, \dots, ny_n, \dots)$. Если, как обычно, $e_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \dots)$, то $A^{-1}e_n = ne_n$, и значит, $\|A^{-1}e_n\|_2 = n$. Таким образом,

$$\|A^{-1}\| = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|Ax\|_2 \geq n \text{ для всех } n \in \mathbb{N},$$

откуда $\|A^{-1}\| = \infty$.

Задача 5.9. Пусть A — оператор из предыдущего примера. Доказать непосредственно (без привлечения теоремы Банаха 5.9), что пространство $A(l_2)$ не полно.

5.10 Описание линейных ограниченных функционалов в ГП.

Если H — произвольное ГП, то, как мы уже знаем (см. §5.4), любой элемент $a \in H$ порождает линейный ограниченный функционал:

$$\varphi(x) := (x, a) \ \ (x \in H), \quad \text{причем} \quad \|\varphi\|_{H^*} = \|a\|_H. \tag{5.34}$$

Следующая теорема показывает, что это, на самом деле, универсальный способ задания функционалов из H^*.

Теорема 5.10. *[Рисс] Пусть H — полное ГП над полем $\mathbb{R}$. Тогда для каждого $\varphi \in H^*$ существует единственный элемент $a \in H$, для которого справедливы оба равенства из* (5.34).

Доказательство. Если $\varphi(x) \equiv 0$, то можно взять $a = \vec{0}$, и все доказано.

Предположим поэтому, что $\varphi(x_0) \neq 0$ для некоторого $x_0 \in H$. По теореме 1.2 множество $M := \ker\varphi = \{x : \varphi(x) = 0\}$ — линейное подпространство ГП H. Так как φ непрерывен, то оно замкнуто. Действительно, если $x_n \in M$, $x_n \to x$, то $\varphi(x_n) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ и ввиду непрерывности $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$.. Отсюда $\varphi(x) = 0$, т.е. $x \in M$.

По теореме Гильберта о разложении ГП в прямую сумму подпространств (см. теорему 4.23) справедливо представление:

$$H = M \oplus M^{\perp}, \tag{5.35}$$

где, как и ранее, $M^{\perp} = \{y \in H : (y, x) = 0, \forall x \in M\}$. При этом

$$M \cap M^{\perp} = \{\vec{0}\}, \tag{5.36}$$

так как если $x \in M \cap M^{\perp}$, то $(x, x) = 0$, и значит, $x = \vec{0}$. Докажем, что $M^{\perp}$ одномерно, т.е. что для некоторого $e \in H$

$$M^{\perp} = \{\lambda e, \lambda \in \mathbb{R}\}. \tag{5.37}$$

Так как $M^{\perp} \neq \{\vec{0}\}$, то существует ненулевой вектор $x_0 \in M^{\perp}$. Тогда $\varphi(x_0) \neq 0$, и мы можем определить $e := \frac{x_0}{\varphi(x_0)}$. Заметим, что $\varphi(e) = 1$. Для любого $x \in M^{\perp}$ положим: $y := x - \varphi(x)e$. Так как $M^{\perp}$ — линейное подпространство ГП H, то $y \in M^{\perp}$. Кроме того, из равенства

$$\varphi(y) = \varphi(x) - \varphi(x)\varphi(e) = 0$$

следует: $y \in M$. Таким образом, $y \in M \cap M^{\perp}$, откуда ввиду (5.36) $y = \vec{0}$. Следовательно, $x = \varphi(x)e$, т.е. для каждого $x \in M^{\perp}$ найдется такое $\lambda = \lambda(x)$, что $x = \lambda e$. Итак, соотношение (5.37) доказано.

Пусть $a = e/\|e\|^2$. Если $x \in H$ произволен, то применяя (5.35), получаем:

$$x = y + u, \ \text{ где } \ y \in M, u \in M^{\perp}.$$

Кроме того, ввиду (5.37) $u = \lambda e$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. Поэтому, учитывая линейность функционала φ, а также скалярного произведения, вычисляем:

$$\varphi(x) = \varphi(y) + \varphi(u) = \varphi(u) = \varphi(e)\lambda = \lambda,$$

и, так как $a \in M^{\perp}$,

$$(x, a) = (y + \lambda e, a) = (y, a) + \lambda\frac{(e, e)}{\|e\|^2} = \lambda.$$

Таким образом, (5.34) выполнено. Докажем, что a — единственный элемент с таким свойством.

Предположим, что наряду с (5.34) справедливо равенство:

$$\varphi(x) = (x, a_1) \ \ (x \in H).$$

Тогда подставляя в соотношение

$$(x, a) - (x, a_1) = (x, a - a_1) = 0 \quad (x \in H)$$

вектор $x = a - a_1$, получим:

$$(a - a_1, a - a_1) = 0,$$

откуда $a = a_1$, и теорема доказана. □

Определение 5.8. Отображение $\psi : X \to Y$ ЛНП X в ЛНП Y называется *изометрией,* если оно линейно, взаимнооднозначно и сохраняет норму, т.е. $\|\psi(x)\| = \|x\|$ для всех $x \in X$. ЛНП X и Y называются *изометричными,* если существует хотя бы одна изометрия $\psi : X \to Y$.

Замечание 5.2. Изометричные ЛНП обычно отождествляются (считаются "копиями" одного и того же ЛНП), так как их линейные топологичесие свойства совершенно одинаковы не только с качественной, но и с количественной точки зрения.

Задача 5.10. Проверить, что любая изометрия является одновременно изоморфизмом ЛНП.

Задача 5.11. Доказать, что если $\psi : X \to Y$ — изометрия, то обратное отображение $\psi^{-1} : Y \to X$ также является изометрией.

Теорема 5.11. *Любое полное ГП H над полем $\mathbb{R}$ изометрично своему сопряженному пространству H^*.*

Доказательство. Определим отображение $\varphi : H \to H^*$ следующим образом: если $a \in H$, то $\varphi(a)(x) := (x, a)$. Ввиду 5.34 φ сохраняет норму. Кроме того, для произвольных $a_1, a_2 \in H$ и $x \in H$

$$\varphi(a_1 + a_2)(x) = (x, a_1 + a_2) = (x, a_1) + (x, a_2) = \varphi(a_1)(x) + \varphi(a_2)(x),$$

откуда $\varphi(a_1 + a_2) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$. Совершенно аналогичные рассуждения показывают, что $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$ для любых $a \in H$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ (проверить самостоятельно). Таким образом, φ линейно. Наконец, по теореме 5.10 это отображение взаимнооднозначно. В итоге φ — изометрия, и теорема доказана. □

Замечание 5.3. Учитывая замечание 5.2, результат последней теоремы можно записать в виде (символического) равенства: $H^* = H$. В дальнейшем в подобных ситуациях мы именно так и будем делать.

Замечание 5.4. Аналогичное утверждение верно и в том случае, когда ГП H рассматривается над полем $\mathbb{C}$. Единственное отличие: то же самое отображение φ является тогда не изометрией, а *сопряженной изометрией.* Точнее, φ имеет все те же свойства за исключением однородности; вместо нее выполняется равенство: $\varphi(\lambda a) = \bar{\lambda}\varphi(a)$ $(a \in H, \lambda \in \mathbb{C})$ (сопряженная однородность). Действительно, для каждого $x \in H$ $\varphi(\lambda a) = (x, \lambda a) = \bar{\lambda}\varphi(a)(x)$.

Следствие 5.3. *Если $n \in \mathbb{N}$, то $(\mathbb{R}_2^n)^* = \mathbb{R}_2^n$, т.е. для каждого $x^* \in (\mathbb{R}_2^n)^*$ существует такой $a = (a_k)_{k=1}^n$, что $x^*(x) = \sum_{k=1}^n a_k x_k$ $(x = (x_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}_2^n)$.*

Следствие 5.4. *$l_2^* = l_2$, т.е. для каждого $x^* \in l_2^*$ существует такая последовательность $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in l_2$, что $x^*(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k x_k$ $(x = (x_k)_{k=1}^\infty \in l_2)$.*

Следствие 5.5. *Если (X, Σ, μ) — произвольное пространство с мерой, то $L_2(X, \Sigma, \mu)^* = L_2(X, \Sigma, \mu)$, т.е. для каждого $f^* \in L_2^*$ существует такая функция $a = a(x) \in L_2$, что $f^*(f) = \int_X a(x) f(x)\, d\mu$ $(f \in L_2)$.*

5.11 Описание пространства, сопряженного к пространству l_p $(1 \leqslant p < \infty)$.

Пространство l_p не является гильбертовым, если $p \neq 2$. Поэтому результаты предыдущего параграфа к нему не применимы. Тем не менее, эффективное описание пространства линейных ограниченных функционалов возможно и в этом случае.

Теорема 5.12. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, *а* q *— число, сопряженное к* p, *т.е.*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Для произвольного $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q$ *соотношение*

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k a_k \quad (x = (x_k) \in l_p) \tag{5.38}$$

определяет линейный ограниченный функционал на l_p, *и кроме того,*

$$\|\varphi\|_{l_p^*} = \|a\|_q. \tag{5.39}$$

Наоборот, для каждого $\varphi \in l_p^*$ *существует последовательность* $a = (a_k) \in l_q$, *для которой справедливо* (5.38).

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай: $1 < p < \infty$. Тогда и $1 < q < \infty$.

Пусть сначала $a = (a_k) \in l_q$ и функционал φ задается соотношением (5.38). Так как ввиду неравенства Гельдера

$$|\varphi(x)| = \Big|\sum_{k=1}^{\infty} x_k a_k\Big| \leqslant \|a\|_q \|x\|_p \quad (x = (x_k) \in l_p),$$

то

$$\|\varphi\|_{l_p^*} \leqslant \|a\|_q. \tag{5.40}$$

Линейность функционала φ очевидна, и поэтому для доказательства первой части теоремы достаточно проверить справедливость противоположного неравенства:

$$\|\varphi\|_{l_p^*} \geqslant \|a\|_q. \tag{5.41}$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим последовательность $x^n = (x_k^n)_{k=1}^{\infty}$, где

$$x_k^n := \begin{cases} sign(a_k)|a_k|^{q-1}, & \text{если } k \leqslant n \\ 0, & \text{если } k > n. \end{cases}$$

Тогда ввиду равенства $p(q-1) = q$

$$\|x^n\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^n|^p\Big)^{1/p} = \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^q\Big)^{1/p}$$

и

$$\varphi(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sign} a_k |a_k|^{q-1} a_k = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^q.$$

Так как по определению нормы функционала
$$|\varphi(x^n)| \leqslant \|\varphi\|_{l_p^*}\|x^n\|_p,$$
то из предыдущих соотношений получаем:
$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q \le \|\varphi\|_{l_p^*}\Big(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q\Big)^{1/p}.$$
Отсюда
$$\Big(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q\Big)^{1/q} \le \|\varphi\|_{l_p^*},$$
и после перехода к пределу при $n \to \infty$ получаем (5.41). Это вместе с ранее полученным неравенством (5.40) дает (5.39).

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Покажем, что произвольный функционал $\varphi \in l_p^*$ представим в виде (5.38). Пусть, как обычно,
$$e_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \dots\,) \ \ (k = 1, 2, \dots).$$
Если $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p$, то смысле сходимости в l_p
$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k. \tag{5.42}$$
Действительно, если $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ $(n \in \mathbb{N})$, то
$$\|x - S_n\|_p^p = \sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^p.$$
Так как $x \in l_p$, то правая часть в последнем неравенстве стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, $S_n \to x$ при $n \to \infty$, и (5.42) доказано. Отсюда ввиду непрерывности φ при $n \to \infty$
$$\varphi(S_n) \to \varphi(x). \tag{5.43}$$
Кроме того, так как φ линеен, то обозначая $a_k := \varphi(e_k)$ $(k \in \mathbb{N})$, получаем
$$\varphi(S_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k a_k.$$
Отсюда и из (5.43) следует соотношение (5.38). При этом ввиду (5.41) $a = (a_k) \in l_q$. □

Задача 5.12. Доказать эту теорему в случае $p = 1$.

Указание. Воспользоваться приведенным доказательством.

Следствие 5.6. *Пространства l_p^* и l_q, где $1/p + 1/q = 1$, изометричны для каждого $1 \le p < \infty$ (или короче: $l_p^* = l_q$). Изометрия при этом задается соотношением* (5.38).

Замечание 5.5. Первое утверждение теоремы 5.12 справедливо также в случае $p = \infty$ (проверить самостоятельно). Что касается второго, то это не так. Точнее, существует $\varphi \in l_\infty^*$, для которого ни при каком $a = (a_k) \in l_1$ не выполнено соотношение (5.38) или, то же самое, $l_1 \overset{\neq}{\subset} l_\infty^*$. Это будет доказано нами несколько позднее.

5.12 Описание пространства, сопряженного к пространству $L_p(X, \Sigma, \mu)(1 \leqslant p < \infty)$.

Напомним, что ЛНП $L_p = L_p(X, \Sigma, \mu)$ состоит изо всех таких Σ-измеримых функций $f : X \to \mathbb{R}$, что

$$\|f\|_p = \Big(\int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu \Big)^{1/p} < \infty.$$

Заметим, что в случае $p \neq 2$, оно не является гильбертовым, и поэтому теорема Рисса об описании ограниченных линейных функционалов к нему не применима.

Теорема 5.13. *Пусть* $1 \le p < \infty$ *и* $1/p + 1/q = 1$. *Тогда для любой функции* $a = a(x) \in L_q$ *определён линейный ограниченный функционал*

$$\varphi(f) := \int\limits_X f(x) \cdot a(x) \, d\mu \ \ (f \in L_p). \tag{5.44}$$

При этом

$$\|\varphi\|_{L_p^*} = \|a\|_q. \tag{5.45}$$

Наоборот, для каждого функционала $\varphi \in L_p^*$ *существует функция* $a = a(x) \in L_q$, *для которой справедливо равенство* (5.44).

Доказательство. Опять ограничимся рассмотрением случая, когда $1 < p < \infty$ (и значит, $1 < q < \infty$). Пусть сначала $a \in L_q$. Применяя интегральное неравенство Гёльдера из теоремы 2.9, получим:

$$|\varphi(f)| = \Big| \int\limits_X f(x) \cdot a(x) \, d\mu \Big| \leqslant \|a\|_q \cdot \|f\|_p,$$

откуда $\varphi \in L_p^*$ и $\|\varphi\|_{L_p^*} \leqslant \|a\|_q$. Докажем противоположное неравенство:

$$\|\varphi\|_{L_p^*} \geqslant \|a\|_q. \tag{5.46}$$

Пусть $f(x) := sign(a(x)) \cdot |a(x)|^{q-1}$ (считаем: $sign(0) = 0$). Легко проверить, что $\|f\|_p = \|a\|_q^{q/p}$ и $\varphi(f) = \|a\|_q^q$ (?). После подстановки этих соотношений в неравенство

$$|\varphi(f)| \leqslant \|\varphi\|_{L_p^*} \cdot \|f\|_p$$

получим:

$$\|a\|_q^q \leqslant \|\varphi\|_{L_p^*} \cdot \|a\|_q^{q/p},$$

откуда следует (5.46), а значит, и (5.45). Так как линейность функционала φ очевидна, то первая часть теоремы доказана. Доказательство второй части теоремы см. в [6, гл. 4, § 3]. □

Следствие 5.7. *Если* $1 \leqslant p < \infty$, *то* $L_p^* = L_q$, *где* $1/p + 1/q = 1$.

Следствие 5.8 (Точность неравенства Гёльдера)**.** *Для любого* $g \in L_q$ *(*$1 < q < \infty$*) справедливо соотношение*

$$\|g\|_q = \sup_{\|f\|_p \leqslant 1} \Big| \int\limits_X f(x) \cdot g(x) \, d\mu \Big|,$$

где $1/p + 1/q = 1$.

Глава 6

Сопряженные операторы. Проекторы и компактные операторы

6.1 Определение и свойства сопряжённого оператора.

Пусть X и Y — ЛНП, $A : X \to Y$ — линейный ограниченный оператор. Для любого $g \in Y^*$ определим на пространстве X функционал f следующим образом:

$$f(x) := g(Ax) \ \ (x \in X). \tag{6.1}$$

Так как A и g линейны, то

$$f(x_1 + x_2) = g(A(x_1 + x_2)) = g(Ax_1 + Ax_2) = g(Ax_1) + g(Ax_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

и

$$f(\lambda x) = g(A(\lambda x)) = g(\lambda A(x)) = \lambda g(Ax) = \lambda f(x).$$

Кроме того, ввиду одного из определений нормы оператора

$$|f(x)| = |g(Ax)| \le \|g\|_{Y^*} \cdot \|Ax\|_Y \le \|g\|_{Y^*} \cdot \|A\|_{X\to Y} \cdot \|x\|,$$

откуда следует ограниченность функционала f, а также оценка

$$\|f\|_{X^*} \leqslant \|A\| \cdot \|g\|_{Y^*}. \tag{6.2}$$

Таким образом, каждому функционалу $g \in Y^*$ поставлен в соответствие функционал $f \in X^*$, заданный формулой (6.1). Иначе говоря, определен оператор $A^* : Y^* \to X^*$:

$$A^* g(x) = g(Ax) \ \ (g \in Y^*). \tag{6.3}$$

Оператор A^* называется *сопряженным* к оператору A.

Теорема 6.1. *Сопряженный оператор $A^* : Y^* \to X^*$, определённый соотношением* (6.3)*, линеен, ограничен и, кроме того, справедливо равенство:*

$$\|A\| = \|A^*\|. \tag{6.4}$$

Доказательство. Так как ввиду определений для произвольных $g_1, g_2 \in Y^*$ и $x \in X$

$$\begin{aligned} A^*(g_1 + g_2)(x) &= (g_1 + g_2)(Ax) = g_1(Ax) + g_2(Ax) \\ &= A^*g_1(x) + A^*g_2(x) = (A^*g_1 + A^*g_2)(x), \end{aligned}$$

то $A^*(g_1 + g_2) = A^*g_1 + A^*g_2$. Совершенно аналогичные рассуждения показывают, что для любых $g \in Y^*$ и $\lambda \in \mathbb{K}$ $A^*(\lambda g) = \lambda A^* g$. Тем самым A^* линеен.

Для доказательства ограниченности достаточно доказать равенство (6.4). Прежде всего, из (6.3) в (6.2) сразу следует, что

$$\|A^*g\|_{X^*} \leqslant \|A\| \cdot \|g\|_{Y^*},$$

т.е. $\|A^*\| \leqslant \|A\|$.

Докажем противоположное неравенство. Пусть сначала $x \in X$ такой, что $Ax \neq \vec{0}$. Тогда, если $y = \frac{Ax}{\|Ax\|}$, то $\|y\|_Y = 1$. По одному из следствий теоремы Хана-Банаха (см. теорему 7.3, которая будет доказана позднее) существует такой $g \in Y^*$ что $\|g\|_{Y^*} = 1$ и $g(y) = \|y\| = 1$. Вспоминая определение y, из последнего равенства получаем

$$g\left(\frac{Ax}{\|Ax\|}\right) = 1,$$

откуда $g(Ax) = \|Ax\|$. Таким образом, ввиду (6.3)

$$\|Ax\| = g(Ax) = A^*g(x) \leq \|A^*g\|_{X^*} \cdot \|x\|_X \leqslant \|A^*\| \cdot \|g\|_{Y^*} \cdot \|x\|_X.$$

Заметим, что это неравенство справедливо и в случае, если $Ax = \vec{0}$. Поэтому по определению нормы оператора

$$\|A\| \leqslant \|A^*\| \cdot \|g\|_{Y^*} = \|A^*\|,$$

и теорема доказана. □

6.2 Эрмитово-сопряжённый оператор в ГП.

Пусть H — ГП над полем $\mathbb{C}$, $A : H \to H$ — линейный ограниченный оператор, $A^* : H^* \to H^*$ — сопряженный к нему. По теореме 5.11 пространство H^* изометрично самому ГП H. Точнее, отображение $\varphi : H \to H^*$, определенное соотношением $\varphi(a)(x) = (x, a)$ $(x \in H)$, изометрично переводит H в H^*. Тем самым мы получаем следующую диаграмму:

$$H \xrightarrow{\varphi} H^* \xrightarrow{A^*} H^* \xrightarrow{\varphi^{-1}} H,$$

ввиду которой естественно ввести оператор

$$\tilde{A}^* : H \to H \ , \ \tilde{A}^* := \varphi^{-1} A^* \varphi. \tag{6.5}$$

Оператор $\tilde{A}^*$ называется *эрмитово-сопряжённым* к оператору A. Его преимущество по сравнения с обычным сопряженным состоит в том, что он действует в самом ГП H.

Задача 6.1. Предположим, что X, Y, Z — ЛНП, $A : X \to Y$, $B : Y \to Z$ — линейные ограниченные операторы. Доказать, что оператор $BA(x) := B(Ax)$ также линеен и ограничен и, кроме того, $\|BA\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\|$.

Задача 6.2. Пусть $\varphi : X \to Y$ — линейная изометрия. Доказать, что обратное отображение $\varphi^{-1} : Y \to X$ также изометрично и $\|\varphi\| = \|\varphi^{-1}\| = 1$.

Теорема 6.2. *Эрмитово-сопряженный оператор $\tilde{A}^*$, определённый формулой* (6.5), *является линейным ограниченным и*

$$\|\tilde{A}^*\| = \|A\|. \tag{6.6}$$

Кроме того, для произвольных $x, y \in H$ имеет место равенство:

$$(Ax, y) = (x, \tilde{A}^* y). \tag{6.7}$$

Доказательство. Линейность оператора $\tilde{A}^*$ — следствие упражнения 6.1. Для доказательства ограниченности достаточно доказать равенство (6.6). Ввиду упражнений 6.1 и 6.2, а также теоремы 6.1

$$\|\tilde{A}^*\| = \|\varphi^{-1} A^* \varphi\| \leqslant \|\varphi^{-1}\| \cdot \|A^*\| \cdot \|\varphi\| = \|A^*\| = \|A\|,$$

откуда $\|\tilde{A}^*\| \leqslant \|A\|$. Чтобы доказать противоположное неравенство, выразим из (6.5) A^* через $\tilde{A}^*$, умножив это равенство слева на φ и справа на φ^{-1} :

$$A^* = \varphi \tilde{A}^* \varphi^{-1}.$$

Тогда точно так же, как ранее,

$$\|A\| = \|A^*\| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|\tilde{A}^*\| \cdot \|\varphi^{-1}\| = \|\tilde{A}^*\|,$$

и значит, $\|A\| \leqslant \|\tilde{A}^*\|$. В итоге равенство (6.6) получено. Осталось доказать (6.7).

Возьмем произвольные $x, y \in H$ и, зафиксировав y, рассмотрим функционал

$$\psi(x) := (Ax, y) \quad (x \in H).$$

Легко проверить, что $\psi \in H^*$(?). Поэтому по теореме Рисса о представлении линейных ограниченных функционалов на ГП существует $a \in H$, для которого

$$\psi(x) = (Ax, y) = \varphi(a)(x) = (x, a) \quad (x \in H). \tag{6.8}$$

С другой стороны, по определению изометрии φ

$$(Ax, y) = \varphi(y)(Ax) \quad (x \in H).$$

Из последних двух равенств и определения A^* следует, что $A^*\varphi(y) = \varphi(a)$. Умножая слева это равенство на φ^{-1}, получаем: $a = \varphi^{-1} A^* \varphi(y) = \tilde{A}^* y$. Если теперь подставить найденное выражение для a в (6.8), мы получим равенство (6.7). □

Задача 6.3. Предположим, что $A : H \to H$ и $B : H \to H$ — два линейных ограниченных оператора в ГП H, для которых при любых $x, y \in H$ выполнено равенство $(Ax, y) = (x, By)$. Доказать, что $B = \tilde{A}^*$.

6.3 Самосопряженные операторы и их свойства.

Всюду в этом параграфе H — ГП над полем $\mathbb{C}$.

Определение 6.1. Линейный ограниченный оператор $A\colon H \to H$ называется *самосопряженным,* если $\tilde{A}^* = A$. Ввиду теоремы 6.2 и упражнения 6.2 это эквивалентно тому, что $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всех $x, y \in H$.

Задача 6.4. Пусть A, B — самосопряженные операторы, действующие в одном и том же ГП. Доказать, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ оператор $\alpha A + \beta B$ также самосопряжен.

Как мы увидим далее, многие свойства самосопряженного оператора определяются его квадратичной формой (Ax, x) $(x \in H)$.

Лемма 6.1. *Если A — самосопряженный оператор, то для любого $x \in H$ $(Ax, x) \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Ввиду самосопряженности и свойств скалярного произведения

$$(Ax, x) = \overline{(x, Ax)} = \overline{(Ax, x)},$$

что возможно лишь в случае, когда $(Ax, x) \in \mathbb{R}$. □

Теорема 6.3. *Если $A\colon H \to H$ — самосопряженный линейный ограниченный оператор, то его норма может быть найдена по формуле:*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|. \tag{6.9}$$

Доказательство. Обозначим $C_A := \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$ и докажем, что для всех $x \in H$

$$|(Ax, x)| \leqslant C_A \|x\|^2. \tag{6.10}$$

Пусть $x \in H$ — произвольный ненулевой вектор. Как обычно, пронормируем его, т.е. положим: $\overline{x} = \frac{x}{\|x\|}$. Тогда $\|\overline{x}\| = 1$, и поэтому по определению C_A $\|(A\overline{x}, \overline{x})\| \leqslant C_A$ по определению C_A. Тем самым ввиду линейности оператора и скалярного произведения

$$\frac{(Ax, x)}{\|x\|^2} \leqslant C_A,$$

откуда после умножения на $\|x\|^2$, получаем (6.10). Так как в случае $x = \vec{0}$ это неравенство очевидно, то (6.10) выполнено для всех $x \in H$.

Далее, пусть $x, y \in H$. Пользуясь линейностью и самосопряженностью A, преобразуем:

$$\begin{aligned} (A(x+y), (x+y)) &= (Ax, x) + (Ay, y) + (Ax, y) + (Ay, x) \\ &= (Ax, x) + (Ay, y) + 2\Re(Ax, y). \end{aligned}$$

Аналогично

$$(A(x-y), (x-y)) = (Ax, x) + (Ay, y) - 2\Re(Ax, y).$$

Вычитая из первого равенства второе, получим:

$$4\Re(Ax, y) = (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y),$$

откуда ввиду (6.10)

$$\begin{aligned} 4\Re(Ax, y) &\leqslant \|(A(x+y), x+y)\| + \|(A(x-y), x-y)\| \leqslant \\ &\leqslant C_A(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2C_A(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Если теперь $\|x\| \leqslant 1$ и $\|y\| \leqslant 1$, то отсюда

$$|\Re(Ax, y)| \leqslant C_A. \tag{6.11}$$

Предположим, что $\|x\| \leqslant 1$ и $Ax \neq \vec{0}$. Тогда, если $y := \frac{Ax}{\|Ax\|}$, то $\|y\| = 1$, и поэтому, подставляя в (6.11), получаем:

$$\left|\Re\Big(Ax, \frac{Ax}{\|Ax\|}\Big)\right| \leqslant C_A$$

или после умножения на $\|Ax\|$ и сокращений

$$\|Ax\| \leqslant C_A.$$

Заметим, что последнее неравенство выполняется и в случае, когда $Ax = \vec{0}$. Переходя к точной верхней грани слева по всем $x \in X$, таким, что $\|x\| \leq 1$, и учитывая определение нормы оператора, получаем: $\|A\| \leq C_A$.

Для доказательства противоположного неравенства возьмем такой, $x \in X$, что $\|x\| = 1$. Тогда по неравенству Коши–Буняковского

$$\|(Ax, x)\| \leqslant \|Ax\| \cdot \|x\| \leqslant \|A\|,$$

откуда по определению C_A получаем, что $C_A \leq \|A\|$. Теорема доказана. □

Следствие 6.1. *Предположим, что выполнены все условия предыдущей теоремы. Если* $(Ax, x) = 0$ *для всех* $x \in H$, *то* $A = \Theta$.

Доказательство. По формуле (6.9) $\|A\| = 0$, откуда $A = \Theta$. □

Задача 6.5. Показать, что в вещественном ГП утверждение последнего следствия, вообще говоря, неверно.

6.4 Проекторы, ортопроекторы и их свойства.

Определение 6.2. Пусть X — ЛНП. Линейный ограниченный оператор $P : X \to X$ называется *проектором,* если $P^2 = P$.

Пусть H – полное ГП, $M \subset H$ — его замкнутое подпространство. По теореме 4.23

$$H = M \oplus M^{\perp},$$

где $M^{\perp} = \{y \in H : (y, x) = 0, \ \forall\ x \in M\}$. Последнее означает, что для каждого $x \in H$ существует единственное представление

$$x = u + v, \ u \in M, \ v \in M^{\perp}. \tag{6.12}$$

Определим оператор $P_M : H \to H$ следующим образом: если $x \in H$, то $P_M x := u$. Оператор P_M называется *оператором ортогонального проектирования (ортопроектором)* ГП H на подпространство M.

Теорема 6.4. *Оператор $P_M : H \to H$ — самосопряженный ограниченный линейный проектор, такой, что $\|P_M x\| \leqslant \|x\|$ $(x \in H)$. Кроме того, $\|P_M\| = 1$, если $M \neq \{\vec{0}\}$.*

Доказательство. Для краткости обозначим: $P := P_M$. Начнем с доказательства линейности. Ввиду (6.12) произвольные $x_1, x_2 \in H$ представимы в виде:

$$x_i = u_i + v_i,\ u_i \in M,\ v_i \in M^{\perp}\ \ (i = 1, 2),$$

откуда

$$x_1 + x_2 = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2),\ u_1 + u_2 \in M,\ v_1 + v_2 \in M^{\perp}.$$

Следовательно, по определению $P(x_1 + x_2) = u_1 + u_2 = Px_1 + Px_2$. Равенство $P(\alpha x) = \alpha Px$ $(x \in H,\ \alpha \in \mathbb{C})$ проверить самостоятельно.

Покажем, что

$$\|Px\| \leq \|x\|\ \ (x \in H). \tag{6.13}$$

Если x представим в виде (6.12), то, с одной стороны, $\|Px\| = \|u\|$. С другой стороны, по теореме Пифагора

$$\|x\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \geqslant \|u\|^2,$$

откуда $\|x\| \geqslant \|u\|$. Тем самым неравенство (6.13) доказано. Таким образом, из определения нормы оператора следует, что $\|P\| \leqslant 1$. Кроме того, если $M \neq \{\vec{0}\}$, то существует такой $x_0 \in M$, что $\|x_0\| = 1(?)$, и поэтому разложение (6.12) будет иметь вид: $x_0 = x_0 + \vec{0}$. Отсюда $Px_0 = x_0$, и значит, $\|Px_0\| = \|x_0\| = 1$. В итоге $\|P\| \geqslant \|Px_0\| = 1$. Объединяя это с ранее полученным неравенством, получаем: $\|P\| = 1$.

Покажем теперь, что P — проектор, т.е. $P^2 = P$. Для любого $x \in H$ $Px \in M$. Следовательно, по определению $P^2x = P(Px) = Px$.

Чтобы доказать самосопряженность P, возьмем произвольные $x \in H,\ y \in H$ и предположим, что для x выполнено (6.12), а $y = u_1 + v_1$, где $u_1 \in M,\ v_1 \in M^{\perp}$. Тогда по определению ортогонального дополнения

$$\begin{aligned}(Px, y) &= (u, u_1 + v_1) = (u, u_1) + (u, v_1)\\ &= (u, u_1) + (v, u_1) = (u + v, u_1) = (x, Py),\end{aligned}$$

и теорема доказана. □

Теорема 6.5. *Пусть $Q\colon H \to H$ — самосопряженный проектор в ГП H. Тогда Q является ортопроектором на некоторое замкнутое подпространство $M \subset H$.*

Доказательство. Обозначим: $M := \{x \in H\colon Qx = x\}$. Нетрудно показать, что M — замкнутое подпространство $H(?)$. Поэтому по теореме 4.23

$$H = M \oplus M^{\perp}. \tag{6.14}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$Q = P_M, \tag{6.15}$$

где P_M — ортопроектор на M. Любой $x \in H$ представим в виде: $x = Qx + (x - Qx)$. Прежде всего, так как Q — проектор, то $Q(Qx) = Q^2x = Qx$, откуда $Qx \in M$. Кроме того, ввиду самосопряженности Q для произвольного $y \in M$

$$(x - Qx, y) = (x, y) - (Qx, y) = (x, y) - (x, Qy) = (x, y) - (x, y) = 0,$$

и значит, $x - Qx \in M^{\perp}$. Тем самым по определению ортопроектора $P_M x = Qx$. Так как $x \in H$ произволен, то равенство (6.15) доказано. □

6.5 Компактные, предкомпактные и ограниченные множества в метрическом пространстве.

Компактность — свойство, сближающее бесконечномерные пространства с конечномерными. Это проявляется в том, что топологически компактные "участки" бесконечномерных пространств устроены примерно так же, как в конечномерном случае. В то же время, понятие компактности может быть определено и для общих метрических (и даже топологических) пространств.

Всюду в этом параграфе M — метрическое пространство с метрикой ρ.

Определение 6.3. Множество $E \subset M$ называется *предкомпактным (компактным)*, если из любой его последовательности можно выделить фундаментальную подпоследовательность (подпоследовательность, сходящуюся к элементу из E).

Так как по теореме 2.13 любая сходящаяся последовательность фундаментальна, то любое компактное множество предкомпактно. При определенных условиях верно и обратное.

Теорема 6.6. *Если M — полное метрическое пространство, то $E \subset M$ компактно тогда и только тогда, когда оно предкомпактно и замкнуто.*

Доказательство. Пусть сначала E компактно. Так как оно предкомпактно, то достаточно доказать его замкнутость. Предположим, что $\{x_n\} \subset E$ и $x_n \to x \in M$. Ввиду компактности E существует такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, что $x_{n_k} \to y \in E$. Так как одновременно $x_{n_k} \to x$, то $x = y \in E$. Замкнутость E доказана.

Пусть, наоборот, E предкомпакно и замкнуто. Тогда из любой последовательности $\{x_n\} \subset E$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, которая ввиду полноты пространства M имеет там предел, т.е. $x_{n_k} \to x \in M$. Так как E замкнуто, то $x \in E$, и теорема доказана. □

Определение 6.4. Множество $E \subset M$ называется *ограниченным*, если оно содержится внутри некоторого шара, т.е. существуют $x_0 \in M$ и $r > 0$, такие, что $E \subset S_r(x_0)$.

Теорема 6.7. *Если множество $E \subset M$ предкомпактно, то оно ограничено.*

Доказательство. Предположим, что утверждение не верно: E — предкомпактно, но не ограничено. В частности, тогда $E \not\subset S_1(x_0)$, где $x_0 \in M$ произвольна. Тем самым существует такая точка $x_1 \in E$, что $x_1 \notin S_1(x_0)$, т.е. $\rho(x_1, x_0) \geq 1$. Далее опять ввиду неограниченности множества E существует $x_2 \in E$, такая, что $x_2 \notin$

$S_{1+\rho(x_1,x_0)}(x_0)$, откуда $\rho(x_2,x_0) \geq 1+\rho(x_1,x_0)$. Действуя аналогичным образом, построим последовательность $\{x_n\} \subset E$, для которой

$$\rho(x_n,x_0) \geq 1+\rho(x_{n-1},x_0) \ \ (n=1.2.\dots).$$

Тогда для любых $m>n$

$$\rho(x_m,x_0) \geq 1+\rho(x_{m-1},x_0) \geq 2+\rho(x_{m-2},x_0) \geq \dots \geq (m-n)+\rho(x_n,x_0),$$

откуда

$$\rho(x_m,x_0)-\rho(x_n,x_0) \geqslant m-n \geqslant 1.$$

Тем самым ввиду неравенства треугольника

$$\rho(x_m,x_n) \geq |\rho(x_m,x_0)-\rho(x_n,x_0)| \geq 1 \ \ (m>n).$$

Очевидно, что из последовательности $\{x_n\}$ нельзя выделить фундаментальной подпоследовательности, что противоречит предкомпактности множества E. Теорема доказана. □

Замечание 6.1. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Рассмотрим ЛНП l_2 и последовательность стандартных ортов $e_n = (0,\dots,0,\underbrace{1}_{n},0,\dots)$ $(n=1,2,\dots)$ в нем. Так как $\|e_n\|_2 = 1$ $(n \in \mathbb{N})$, то множество $E=\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничено. В то же время, $\|e_n-e_m\|_2 = \sqrt{2}$ $(n \neq m)$, и поэтому из последовательности $\{e_n\}$ нельзя выделить фундаментальную подпоследовательность. Следовательно, множество E не предкомпактно.

Рассмотрим теперь несколько более сильное, нежели ограниченность, свойство множества, с помощью которого уже можно охарактеризовать предкомпактность.

Определение 6.5. Пусть $\varepsilon>0$. Множество $F \subset M$ называется ε-сетью множества $E \subset M$, если для любого $x \in E$ существует $y \in F$, для которого $\rho(x,y) \leqslant \varepsilon$.

Пример 6.1. 1) Интервал (a,b) является ε-сетью отрезка $[a,b]$ для любого $\varepsilon>0$.

2) Пусть $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b]$ точками вида: $x_i := a+(b-a)i/n$ $(i=0,1,2,\dots,n)$. Множество $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ — ε-сеть отрезка $[a,b]$ для $\varepsilon = \frac{b-a}{2n}$.

Следующее утверждение является наиболее полезным критерием свойств компактности и предкомпактности.

Теорема 6.8. *[Хаусдорф]*

1. *Подмножество $E \subset M$ предкомпактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует конечная ε-сеть множества E.*

2. *Пусть M — полное метрическое пространство. Множество $E \subset M$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и для любого $\varepsilon>0$ существует конечная ε-сеть множества E.*

Доказательство. Достаточно доказать первое утверждение теоремы, так как второе будет тогда непосредственным следствием его и теоремы 6.6.

Предположим, что подмножество E метрического пространства M предкомпактно, но для некоторого $\varepsilon>0$ для него не существует конечной ε-сети. Тогда, начиная с произвольной точки $x_1 \in E$, для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно найти точку $x_n \in E$, расстояние которой до всех предыдущих $x_1, \dots, x_{n-1}$ больше ε. Таким образом, мы приходим к такой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$, что $\rho(x_n, x_m) > \varepsilon$ для всех $n \neq m$. Ясно, что она не содержит фундаментальных подпоследовательностей, что противоречит предкомпактности E.

Для доказательства обратного утверждения возьмем любую последовательность $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_n > 0$. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ произвольна. По условию существует конечная ε_1-сеть, которую мы обозначим через $U(\varepsilon_1)$. Так как по определению ε-сети множество E содержится в объединении шаров $S_{\varepsilon_1}(z)$, $z \in U(\varepsilon_1)$, число которых конечно, то какой-то из них, скажем, S_1 содержит "хвост" (бесконечное число элементов) последовательности $\{x_n\}$. Далее, рассмотрим конечную ε_2-сеть $U(\varepsilon_2)$. По аналогичной причине среди шаров $S_{\varepsilon_2}(z)$, $z \in U(\varepsilon_2)$, найдется шар S_2, содержащий бесконечно много элементов $\{x_n\}$, из тех, что содержатся в S_1. Продолжение этого процесса приводит к построению убывающей последовательности множеств $B_k := S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_k$ $(k = 1, 2, \dots)$, диаметры которых стремятся к нулю и каждое из которых содержит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Выбрав по одному элементу из каждого B_k, получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, которая, как легко видеть, фундаментальна. □

6.6 Предкомпактные и компактные множества в конечномерном ЛНП.

Напомним, что $\mathbb{R}^n_\infty$ — пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} |x_k|$ $(x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$. Покажем, что в этом случае предкомпактность множества есть не что иное как ограниченность.

Теорема 6.9. *Множество $E \subset \mathbb{R}^n_\infty$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено.*

Доказательство. Так как по теореме 6.7 предкомпактное множество ограничено в любом метрическом пространстве, то достаточно доказать лишь обратную импликацию.

Итак, предположим, что E ограничено. Покажем, что из произвольной последовательности $\{x^m\}_{m=1}^{\infty} \subset E$, $x^m = (x^m_k)_{k=1}^n$, можно выделить фундаментальную подпоследовательность. Заметим, что ввиду определения нормы $\|\cdot\|_\infty$, а также ограниченности E существует такое $C > 0$, что для всех $m \in \mathbb{N}$ и $k = 1, \dots, n$

$$|x^m_k| \leqslant \|x^m\|_\infty \leqslant C. \tag{6.16}$$

Кроме того, напомним принцип Больцано–Вейерштрасса, согласно которому из любой ограниченной числовой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, так как ввиду (6.16) последовательность первых компонент $\{x^m_1\}$ ограничена, найдется такая подпоследовательность $\{x^{m_k}_1\} \subset \{x^m_1\}$, что $x^{m_k}_1 \to x_1$. Точно так же соотношение (6.16) показывает, что ограничена последовательность $\{x^{m_k}_2\}_{k=1}^{\infty}$ и тем самым опять ввиду принципа Больцано–Вейерштрасса существует подпоследовательность $\{x^{m_{k_i}}_2\} \subset \{x^{m_k}_2\}$, $x^{m_{k_i}}_2 \to x_2$. Заметим, что при этом, как подпоследовательность сходящейся последовательности, по-прежнему $x^{m_{k_i}}_1 \to x_1$. Продолжая подобным образом процесс прореживания, получим такую подпоследовательность $\{\overline{x}^m\} \subset \{x^m\}$, что $\overline{x}^m_k \to x_k$ для произвольного $k = 1, \ldots, n$. По теореме 2.2 сходимость в пространстве $\mathbb{R}^n_\infty$ эквивалентна покоординатной сходимости. Следовательно, $\|\overline{x}^m - x\|_\infty \to 0$. В частности, выделенная подпоследовательность $\{\overline{x}^m\}$ фундаментальна, и значит, предкомпактность E доказана. $\square$

Следствие 6.2. *Множество $E \subset \mathbb{R}^n_\infty$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Так как ЛНП $\mathbb{R}^n_\infty$ полно, то достаточно применить предыдущую теорему и теорему 6.6 из предыдущего параграфа. $\square$

Задача 6.6. Доказать, что утверждения теоремы 6.9 и следствия 6.2 справедливы для любого конечномерного ЛНП.

Указание: Использовать то, что любое n-мерное ЛНП изоморфно пространству $\mathbb{R}^n_\infty$ (см. теорему 2.12).

В заключение параграфа покажем, что свойство конечномерных ЛНП, доказанное в теореме 6.9, является их характеристическим свойством.

Теорема 6.10. *ЛНП X конечномерно тогда и только тогда, когда каждое ограниченное подмножество X предкомпактно.*

Для доказательства нам потребуется следующее интересное само по себе утверждение.

Лемма 6.2 (о "почти перпендикуляре")**.** *Пусть X — произвольное ЛНП, а Y — его замкнутое линейное подпространство, $Y \neq X$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x \in X$, $\|x\| = 1$, такой, что его расстояние до Y $\rho(x, Y)$ больше, чем $1 - \varepsilon$.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $x_1 \in X \setminus Y$. Так как Y замкнуто в X, то

$$d := \rho(x_1, Y) = \inf_{y \in Y} \|x_1 - y\| > 0.$$

Поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ существует $y_1 \in Y$, для которого выполнено:

$$d \leq \|x_1 - y_1\| \leq d(1 + \varepsilon). \tag{6.17}$$

Покажем, что элемент $x := \frac{x_1 - y_1}{\|x_1 - y_1\|}$ удовлетворяет нужным условиям. Действительно, для любого $y \in Y$ имеем:

$$\|x - y\| = \left\| \frac{x_1 - y_1 - \|x_1 - y_1\| y}{\|x_1 - y_1\|} \right\| = \frac{\|x_1 - y_1 - \|x_1 - y_1\| y\|}{\|x_1 - y_1\|}.$$

Так как $y_1 + \|x_1 - y_1\| y \in Y$, то $\|x_1 - y_1 - \|x_1 - y_1\| y\| \geq d$, и значит, ввиду (6.17), мы получаем

$$\|x - y\| \geq \frac{d}{d(1 + \varepsilon)} > 1 - \varepsilon.$$

Кроме того, очевидно, $\|x\| = 1$. $\square$

Доказательство теоремы 6.10. Если X конечномерно, то по теореме 6.9 (см. также задачу 6.6) всякое ограниченное подмножество X предкомпактно.

Для доказательства обратного утверждения достаточно показать, что в любом бесконечномерном ЛНП существует ограниченное, но не предкомпактное множество. Итак, пусть $\dim X = \infty$. Возьмем произвольный $x_1 \in X$, $\|x_1\| = 1$. Если $Y_1 = \lambda(\{x_1\})$ — линейная оболочка, им порожденная, то Y_1 одномерно и замкнуто, $X \neq Y_1$ и по лемме 6.2 существует $x_2 \in X$, $\|x_2\| = 1$, такой, что $\|x_2 - x_1\| \geq 1/2$. Подпространство $Y_2 = \lambda(\{x_1, x_2\})$ замкнуто, $\dim Y_2 \leq 2$, и опять по той же лемме найдется $x_3 \in X$, $\|x_3\| = 1$, для которого $\|x_3 - x_1\| \geq 1/2$ и $\|x_3 - x_2\| \geq 1/2$. Действуя и далее аналогичным образом, построим такую последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, $\|x_k\| = 1$ $(k = 1, 2, \dots)$, что для произвольных $i \neq j$ справедливо неравенство: $\|x_i - x_j\| \geq 1/2$. Так как из нее нельзя выделить фундаментальную подпоследовательность, то множество $E := \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничено, но не предкомпактно в X. $\square$

Следствие 6.3. *Замкнутый единичный шар $\bar{S}_1(\vec{0})$ в любом бесконечномерном ЛНП не предкомпактен.*

Задача 6.7. Показать, что в случае конечномерных ЛНП, а также гильбертовых пространств лемма 6.2 справедлива также для $\varepsilon = 0$ (превращаясь тем самым из леммы о "почти перпендикуляре"в лемму о "перпендикуляре").

Задача 6.8. Привести пример, показывающий, что в случае ЛНП утверждение леммы 6.2 при $\varepsilon = 0$, вообще говоря, неверно.

6.7 Теорема Арцела о компактности в пространстве $C[a, b]$.

Здесь речь пойдет о компактности множеств в ЛНП $C[a, b]$, состоящем из непрерывных вещественнозначных функций $x = x(t)$, определенных на $[a, b]$, с нормой $\|x\| := \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$.

Определение 6.6. Множество $E \subset C[a, b]$ называется *равномерно ограниченным,* если существует такое $C > 0$, что для всех $x(t) \in E$ и $t \in [a, b]$ выполнено: $|x(t)| \leqslant C$.

Задача 6.9. Показать, что множество $E \subset C[a, b]$ равномерно ограничено тогда и только тогда, когда E ограничено в метрическом пространстве $C[a, b]$.

Определение 6.7. Будем говорить, что множество $E \subset C[a, b]$ *равностепенно непрерывно,* если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x(t) \in E$ и любых $t_1, t_2 \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|t_1 - t_2| < \delta$, выполнено: $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$.

Задача 6.10. Доказать, что любое конечное множество в $C[a, b]$ равностепенно непрерывно.

Теорема 6.11. *[Арцела] Множество $E \subset C[a, b]$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Предположим сначала, что E предкомпактно в $C[a,b]$. По теореме 6.7 E ограничено в этом пространстве, и значит, ввиду утверждения упражнения 6.9 оно равномерно ограничено. Докажем равностепенную непрерывность множества E.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. По теореме 6.8 можно найти конечную $\varepsilon/3$-сеть множества E. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ функции, ее составляющие. Так как для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ функция x_i непрерывна на отрезке, то по теореме Кантора [3, гл. 5, § 1] она равномерно непрерывна, и значит, существует такое $\delta_i > 0$, что

$$|x_i(t_1) - x_i(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ как только } |t_1 - t_2| < \delta_i. \tag{6.18}$$

Возьмем $\delta := \min_{i=1,\ldots,n} \delta_i > 0$. Тогда, если $|t_1 - t_2| < \delta$, то неравенство (6.18) выполняется для всех $i = 1, ..., n$.

Если теперь $x \in E$, то по определению ε-сети для некоторого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеем: $\|x - x_i\| \leqslant \varepsilon/3$. Отсюда и из неравенства (6.18) следует, что для произвольных точек $t_1, t_2 \in [a,b]$, таких, что $|t_1 - t_2| < \delta$, выполнено:

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant |x(t_1) - x_i(t_1)| + |x_i(t_1) - x_i(t_2)| + |x_i(t_2) - x(t_2)| \leqslant$$
$$\leqslant \|x - x_i\| + \varepsilon/3 + \|x - x_i\| \leqslant \varepsilon$$

Докажем обратное утверждение. Предположим, что E равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Ввиду критерия Хаусдорфа (теорема 6.8) предкомпактность E будет доказана, если для каждого $\varepsilon > 0$ построить конечную ε-сеть этого множества.

Итак, пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Так как E равностепенно непрерывно, то существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in E$ и любых t_1, $t_2 \in [a,b]$, $|t_1 - t_2| < \delta$, выполнено:

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \frac{\varepsilon}{5}. \tag{6.19}$$

Кроме того, ввиду равномерной ограниченности для некоторого $K > 0$ и всех $x \in E$ и $t \in [a,b]$ имеем: $|x(t)| \leqslant K$. Тем самым графики всех функций из E попадают в прямоугольник $[a,b] \times [-K,K]$.

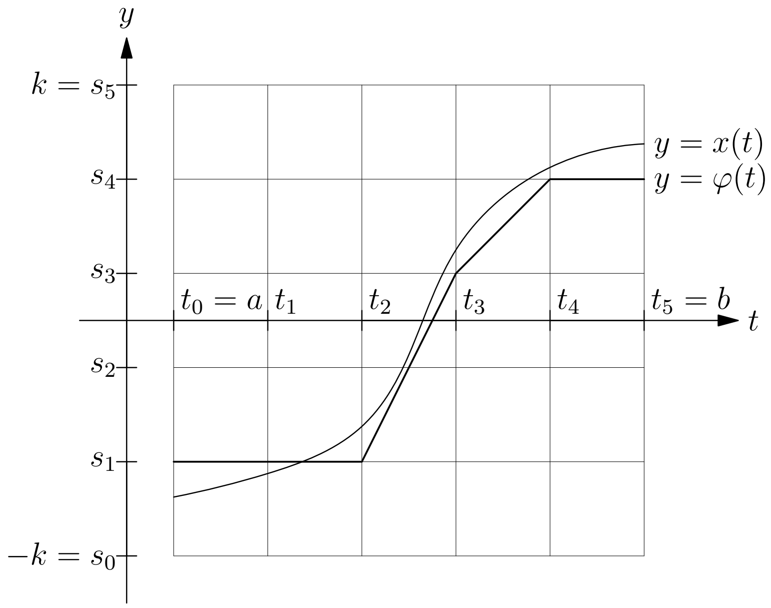
Рассмотрим разбиения $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ отрезка $[a,b]$ и $-K = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = K$ отрезка $[-K,K]$, такие, что $t_i - t_{i-1} < \delta$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $s_i - s_{i-1} < \frac{\varepsilon}{5}$ $(i = 1, \ldots, m)$. Обозначим через Φ множество всех кусочно-линейных функций с точками излома (t_i, s_j) $(i = 0, 1, \ldots, n; j = 0, 1, \ldots, m)$. Ясно, что Φ конечно. Покажем, что Φ — ε-сеть множества E.

Прежде всего, заметим, что ввиду (6.19), а также выбора δ и разбиения отрезка $[a,b]$ для всех $x \in E$ и $i = 1, \ldots, n$

$$|x(t_i) - x(t_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{5}. \tag{6.20}$$

Легко видеть (см. рис.), что для произвольной функции $x \in E$ можно выбрать $\varphi \in \Phi$ так, чтобы для всех $i = 1, \ldots, n$ выполнялось неравенство

$$|\varphi(t_i) - x(t_i)| < \frac{\varepsilon}{5}. \tag{6.21}$$



Ввиду неравенств (6.20) и (6.21) для каждого $i = 1, \ldots, n$

$$|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \leqslant |\varphi(t_i) - x(t_i)| + |x(t_i) - x(t_{i-1})| + |x(t_{i-1}) - \varphi(t_i))| < \frac{3\varepsilon}{5}.$$

Так как функция φ линейна на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$, то она принимает минимальное и максимальное значения на концах этого отрезка. Поэтому из предыдущего неравенства следует, что

$$|\varphi(t) - \varphi(t_i)| < \frac{3\varepsilon}{5}, \text{ если } t \in [t_{i-1}, t_i]. \tag{6.22}$$

Если $t \in [a, b]$, то $t \in [t_{i-1}, t_i]$ для некоторого $i = 1, \ldots, n$. Применяя соотношения (6.19), (6.21) и (6.22), получим:

$$|x(t) - \varphi(t)| \leqslant |x(t) - x(t_i)| + |x(t_i) - \varphi(t_i)| + |\varphi(t_i) - \varphi(t)| < \varepsilon.$$

Если слева перейти к максимуму по $t \in [a, b]$, то отсюда $\|x - \varphi\| < \varepsilon$. Таким образом, Φ, действительно, является ε-сетью множества E, и по ранее упоминавшемуся критерию Хаусдорфа это множество предкомпактно. □

Следствие 6.4. *Множество $E \subset C[a, b]$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто, равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Так как ЛНП $C[a, b]$ полно, то утверждение вытекает из предыдущей теоремы и теоремы 6.6. □

Задача 6.11. Предположим, что K — компактное метрическое пространство, а $C(K)$ — линейное пространство всех непрерывных функций $f: K \to \mathbb{R}$. Введем на $C(K)$ норму $\|f\| = \max_{x \in K} |f(x)|$. Естественным образом на этот случай обобщаются понятия равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности (см. определения 6.6 и 6.7). Сформулировать и доказать обобщенную теорему Арцела для подмножеств ЛНП $C(K)$.

Задача 6.12. Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $E \subset l_p$. Доказать, что множество E компактно, если и только если выполняются следующие условия:

1. Существует такое $C > 0$, что для всех $x \in E$ $\|x\|_p \leqslant C$.

2. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in E$

$$\sum_{k=N}^{\infty} |x_k|^p < \varepsilon.$$

3. E замкнуто.

6.8 Компактные операторы.

Определение 6.8. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *компактным (вполне ограниченным),* если для любого ограниченного множества $V \subset X$ его образ $A(V)$ — предкомпактное множество в Y.

Теорема 6.12. *Линейный оператор $A : X \to Y$ компактен тогда и только тогда, когда образ $A(S_1)$ единичного шара $S_1 \subset X$ предкомпактен в ЛНП Y.*

Доказательство. Так как единичный шар S_1 — ограниченное множество в X, то для доказательства теоремы достаточно проверить, что оператор A компактен, если только множество $A(S_1)$ предкомпактно в Y.

Предположим, что E ограничено. Тогда существует такое $C > 0$, что $E \subset S_C(\vec{0})$, т.е.

$$\|x\| \le C \ \ (x \in E). \tag{6.23}$$

Пусть последовательность $\{y_n\} \subset A(E)$ произвольна. По определению образа $y_n = Ax_n$, где $x_n \in E$ $(n \in \mathbb{N})$. Так как ввиду (6.23) $\|x_n\| \le C$ $(n \in \mathbb{N})$, то $\|x_n/C\| \le 1$. Отсюда

$$A\Big(\frac{x_n}{C}\Big) = \frac{1}{C}Ax_n \in A(S_1).$$

По условию найдется такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, что последовательность $\{\frac{1}{C}Ax_{n_k}\}$ фундаментальна. Но тогда последовательность $\{Ax_{n_k}\}$ также фундаментальна, так как

$$\|Ax_{n_k} - Ax_{n_m}\| = C \cdot \Big\|\frac{1}{C}Ax_{n_k} - \frac{1}{C}Ax_{n_m}\Big\| \ \ (k, m \in \mathbb{N}).$$

В итоге множество $A(E)$ предкомпактно, и теорема доказана. □

Следствие 6.5. *Любой компактный оператор ограничен.*

Доказательство. По теореме 6.12 множество $A(S_1)$ предкомпактно, а поэтому по теореме 6.7 ограничено. Это означает, что для некоторого $C > 0$ $\|Ax\| \le C$ для всех $x \in S_1$. После взятия точной верхней грани по всем $x \in S_1$ получим: $\|A\| \le C < \infty$. □

Задача 6.13. Доказать, что линейный оператор ограничен тогда и только тогда, когда его образ любого ограниченного множества ограничен.

Определение 6.9. Оператор $A : X \to Y$ называется *конечномерным,* если существуют $n \in \mathbb{N}$, $y_1, \ldots, y_n \in Y$ и $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$, такие, что для всех $x \in X$ справедливо равенство

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} x_k^*(x) y_k. \tag{6.24}$$

Теорема 6.13. *Любой конечномерный оператор линеен и компактен.*

Доказательство. Линейность вытекает из соотношения (6.24) и линейности функционалов x_k^* $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Докажем компактность, предположив, что оператор A задан равенством (6.24). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$Y_n := \{y \in Y :\ y = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k, \ \ c_k \in \mathbb{R}\}.$$

Легко проверить, что Y_n — линейное подпространство пространства Y, причем $\dim Y_n \leq n$(?). Если на Y_n рассматривать норму из Y, то оно само становится ЛНП. При этом ввиду равенства (6.24) $A\colon X \to Y_n$. Далее, оценим:

$$\|Ax\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k^*(x)| \cdot \|y_k\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|x_k^*\| \cdot \|y_k\| \cdot \|x\| = C\|x\|,$$

где $C := \sum_{k=1}^{n} \|x_k^*\| \cdot \|y_k\|$. Отсюда следует, что оператор A ограничен, и значит, $A(S_1)$ — ограниченное множество в Y_n. Так как Y_n конечномерно, то по теореме 6.9 $A(S_1)$ предкомпактно в Y_n, а тем самым и в Y. В итоге ввиду теоремы 6.12 оператор A компактен. □

Важным примером компактного оператора является интегральный оператор Фредгольма, рассматривавшийся в § 5.7. Напомним его определение. Пусть функция $K(s,t)$ непрерывна по совокупности переменных на квадрате $[a,b] \times [a,b]$. Для любой функции $x = x(t) \in C[a,b]$ положим:

$$Ax(s) := \int_a^b K(s,t) x(t)\, dt. \tag{6.25}$$

По теореме 5.7 A — линейный ограниченный оператор.

Теорема 6.14. *Интегральный оператор Фредгольма* $A :\ C[a,b] \to C[a,b]$*, определенный соотношением (6.25), компактен.*

Доказательство. Достаточно показать, что образ $A(S_1)$ единичного шара S_1 в $C[a,b]$ — предкомпактное множество. Для этого согласно теореме Арцела 6.11 нужно проверить, что $A(S_1)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Первое свойство является непосредственным следствием ограниченности оператора, так как для всех $x \in S_1$ и $t \in [a,b]$

$$|Ax(t)| \leqslant \|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\| \leqslant \|A\|.$$

Далее, так как функция $K(s,t)$ непрерывна по совокупности переменных на квадрате, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна, и значит, для любого $\varepsilon >$

0 найдется такое $\delta > 0$, что для произвольных $t_1, t_2, s_1, s_2 \in [a,b]$, таких, что $|t_1 - t_2| < \delta$ и $|s_1 - s_2| < \delta$, выполнено:

$$|K(s_1,t_1) - K(s_2,t_2)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}.$$

Если теперь $x \in S_1$ и $|s_1 - s_2| < \delta$, то

$$\begin{aligned} |Ax(s_1) - Ax(s_2)| &= \left| \int_a^b (K(s_1,t) - K(s_2,t))x(t)\,dt \right| \\ &\leq \int_a^b |K(s_1,t) - K(s_2,t)||x(t)|\,dt \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для произвольной функции $x(s) \in S_1$ из неравенства $|s_1 - s_2| < \delta$ ($s_1, s_2 \in [a,b]$) следует: $|Ax(s_1) - Ax(s_2)| < \varepsilon$. Это означает, что множество $A(S_1)$ равностепенно непрерывно, и теорема доказана. □

В заключение приведем примеры некомпактных операторов.

Теорема 6.15. *Пусть X — бесконечномерное ЛНП. Тогда тождественный оператор $I : X \to X$, $Ix = x$, не компактен.*

Доказательство. Так как $I(\bar{S}_1(\vec{0})) = \bar{S}_1(\vec{0})$, то достаточно применить следствие 6.3. □

Следствие 6.6. *Тождественный оператор $I\colon l_p \to l_p$ не компактен для произвольного $1 \leq p \leq \infty$.*

6.9 Пространство компактных операторов и его свойства.

Для произвольных ЛНП X и Y обозначим через $\mathbb{L}_c = \mathbb{L}_c(X,Y)$ множество всей компактных линейных операторов $A\colon X \to Y$. Ясно, что $\mathbb{L}_c(X,Y)$ — подмножество пространства $\mathbb{L}(X,Y)$ всех линейных операторов, ограниченных из X в Y.

Теорема 6.16. *Для произвольных ЛНП X, Y и Z справедливо следующее:*

1. *$\mathbb{L}_c(X,Y)$ — замкнутое линейное подпространство пространства $\mathbb{L}(X,Y)$;*
2. *$\mathbb{L}_c(X,Y)$ — двусторонний идеал $\mathbb{L}(X,Y)$ по умножению в том смысле, что произведение $T_1 \cdot T_2 \in \mathbb{L}_c(X,Y)$ при условии, что хотя бы один из операторов $T_1 : Z \to Y$ и $T_2 : X \to Z$ компактен.*

Доказательство. 1. Пусть $T_1, T_2 \in \mathbb{L}_c$. Так как множество $T_1(S_1)$ предкомпактно, то для любой последовательности $\{x_n\} \subset S_1$ существует такая подпоследовательность $x_n^{(1)} \subset \{x_n\}$, что $\{T_1 x_n^{(1)}\}$ — фундаментальная последовательность. Точно так же существует $\{x_n^{(2)}\} \subset \{x_n^{(1)}\}$, для которой $\{T_2 x_n^{(2)}\}$ фундаментальна. Так как подпоследовательность фундаментальной последовательности тоже фундаментальна (?), то $T_1 x_n^{(2)}$ фундаментальна. Но тогда последовательность $\{(T_1+T_2)(x_n^{(2)})\}$ фундаментальна как сумма фундаментальных последовательностей (?). В итоге ввиду произвольности $\{x_n\} \subset S_1$ множество $(T_1+T_2)(S_1)$ предкомпактно, т.е. оператор T_1+T_2 компактен. Аналогично проверяется, что из $T \in \mathbb{L}_c$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ следует: $\lambda T \in \mathbb{L}_c$ (проверить самостоятельно).

Замкнутость B_c в $B(X,Y)$ доказывается несколько сложнее. Пусть $\{T_n\} \subset \mathbb{L}_c$ и $\|T_n - T\| \to 0$, где $T \in \mathbb{L}(X,Y)$. Надо показать, что $T \in \mathbb{L}_c$.

Если $\{x_n\} \in S_1$ произвольна, то ввиду компактности оператора T_1 существует такая $\{x_n^{(1)}\} \subset \{x_n\}$ что последовательность $T_1 x_n^{(1)}$ фундаментальна. Далее, используя компактность T_2, найдем подпоследовательность $\{x_n^{(2)}\} \subset \{x_n^{(1)}\}$, для которой последовательность $\{T_2 x_n^{(2)}\}$ фундаментальна. Как и ранее, тем же свойством обладает и последовательность $\{T_1 x_n^{(2)}\}$. Продолжая этот процесс, придем ко вложенной системе все более редких последовательностей $\{x_n^{(1)}\} \supset \{x_n^{(2)}\} \supset \dots$, таких, что для каждого $l = 1, 2, \dots$ последовательности $\{T_i x_n^{(l)}\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальны для всех $1 \le i \leqslant l$.

Докажем, что оператор T переводит диагональную последовательность $\{x_k^{(k)}\}$ в фундаментальную, т.е. последовательность $\{T x_k^{(k)}\}$ фундаментальна. Прежде всего, по условию для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что

$$\|T - T_n\| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.26}$$

Так как для произвольного $k \geqslant n$ последовательность $\{T_n x_i^{(k)}\}_{i=1}^{\infty}$ фундаментальна, а $\{x_k^{(k)}\}_{k \ge i} \subset \{x_i^{(k)}\}_{i=1}^{\infty}$, то последовательность $T_n x_k^{(k)}$ — тоже фундаментальная последовательность. Поэтому найдется такой номер k_0, что для всех $k, m \geqslant k_0$

$$\|T_n x_k^{(k)} - T_n x_m^{(m)}\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда и из (6.26) для $k, m \geqslant k_0$

$$\begin{aligned} \|T x_k^{(k)} - T x_m^{(m)}\| &\leqslant \|T x_k^{(k)} - T_n x_k^{(k)}\| + \|T_n x_k^{(k)} - T_n x_m^{(m)}\| + \|T_n x_m^{(m)} - T x_m^{(m)}\| \\ &\leqslant \|(T - T_n)(x_k^k)\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|(T_n - T)(x_m^{(m)})\| \leqslant 2\|T - T_n\| + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\{T x_k^{(k)}\}$ фундаментальна. Ввиду произвольности $\{x_n\} \subset S_1$ множество $T(S_1)$ предкомпактно, т.е. оператор T компактен.

2. Предположим сначала, что T_1 компактен, а T_2 ограничен. Если, как и ранее, S_1 — единичный шар в X, то множество $T_2(S_1)$ ограничено (см. задачу 6.13). Но тогда по определению компактного оператора множество $T_1(T_2(S_1)) = T_1 T_2(S_1)$ предкомпактно, и значит, оператор $T_1 T_2$ компактен.

Пусть теперь, наоборот, T_1 ограничен, а T_2 компактен. Тогда для произвольной $\{x_n\} \subset S_1$ существует такая $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, что последовательность $\{T_2 x_{n_k}\}$ фундаментальна. Но тогда ввиду неравенства

$$\begin{aligned} \|T_1 T_2 x_{n_k} - T_1 T_2 x_{n_m}\| &= \|T_1(T_2 x_{n_k} - T_2 x_{n_m})\| \\ &\leqslant \|T_1\| \cdot \|T_2 x_{n_k} - T_2 x_{n_m}\|, \end{aligned}$$

где $k, m \in \mathbb{N}$, то же самое можно сказать и о последовательности $\{T_1 T_2 x_{n_k}\}$. Тем самым множество $T_1 T_2(S_1)$ опять предкомпактно, и теорема доказана. □

Теорема 6.17. *Пусть X и Y — произвольные банаховы пространства, а линейный оператор $A : X \to Y$ компактен. Тогда сопряженный оператор $A^* : Y^* \to X^*$ также компактен.*

Доказательство. Обозначим через S и S^* замкнутые единичные шары пространств X и Y^* соответственно. Нам нужно показать, что образ $A^*(S^*)$ предкомпактен в X^*.

По условию множество $\overline{A(S)}$ (замыкание образа единичного шара при отображении A в Y) является компактом в Y. Рассмотрим ЛНП $C(\overline{A(S)})$, состоящее из всех непрерывных на $\overline{A(S)}$ функций $f : \overline{A(S)} \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\| = \max_{y\in\overline{A(S)}} |f(y)|$. Если функционалы из Y^* рассматривать как функции, определенные на $\overline{A(S)}$, то они будут элементами $C(\overline{A(S)})$. При этом множество Φ функций, соответствующих функционалам из S^*, будет равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Действительно, если $\varphi \in \Phi$ и $\|\varphi\|_{Y^*} \le 1$, то

$$\|\varphi\|_{C(\overline{A(S)})} = \sup_{y\in A(S)} |\varphi(y)| \le \|\varphi\|_{Y^*} \sup_{x\in S} \|Ax\|_Y \le \|A\|$$

и для произвольных $y_1, y_2 \in \overline{A(S)}$

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| \le \|\varphi\|_{Y^*} \|y_1 - y_2\|_Y \le \|y_1 - y_2\|_Y.$$

Следовательно, оогласно обобщенной теореме Арцела (см. задачу 6.11) множество Φ предкомпактно в пространстве $C(\overline{A(S)})$. Но Φ с метрикой из $C(\overline{A(S)})$ изометрично множеству $A^*(S^*)$ с метрикой, индуцированной нормой пространства X^*. В самом деле, если $\varphi_1, \varphi_2 \in S^*$, то по определению нормы линейного функционала и сопряженного оператора

$$\begin{aligned}
\|A^*\varphi_1 - A^*\varphi_2\|_{X^*} &= \sup_{x\in S} |(A^*\varphi_1 - A^*\varphi_2)(x)| \\
&= \sup_{x\in S} |(\varphi_1 - \varphi_2)(Ax)| \\
&= \sup_{z\in A(S)} |(\varphi_1 - \varphi_2)(z)| \\
&= \sup_{z\in \overline{A(S)}} |(\varphi_1 - \varphi_2)(z)| = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C(\overline{A(S)})}.
\end{aligned}$$

Поэтому множество $A^*(S^*)$ также предкомпактно в пространстве X^*, и теорема доказана. □

Из определения эрмитово–сопряженного оператора, а также теорем 6.16 и 6.17 вытекает

Следствие 6.7. *Пусть $A\colon H \to H$ — компактный линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда эрмитово–сопряженный к нему оператор $\tilde{A}^*$ также компактен.*

Следующая теорема понадобится нам при изучении спектральных свойств компактных операторов.

Теорема 6.18. *Пусть линейный оператор $A : X \to X$ компактен в банаховом пространстве X, а $I : X \to X$ — тождественный оператор, т.е. $Ix = x$. Тогда, если оператор $T := I - A$ инъективен (эквивалентно: ядро $\operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}$), то его образ $\operatorname{Im} T$ замкнут в X.*

Доказательство. По определению,

$$\operatorname{Im} T := \{y \in X : \ Tx = y \ \text{ для некоторого } \ x \in X\}.$$

Предположим, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ и

$$Tx_n = x_n - Ax_n \to y. \tag{6.27}$$

Если $\{x_n\}$ ограничена, то ввиду компактности A существуют $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ и $z \in X$, такие, что $Ax_{n_k} \to z$. Тогда $x_{n_k} = Tx_{n_k} + Ax_{n_k} \to y + z$, и так как A непрерывен, то $Ax_{n_k} \to A(y+z)$. Тем самым $z = A(y+z)$, откуда $y = (I-A)(y+z) = T(y+z) \in \operatorname{Im} T$.

Пусть теперь последовательность $\{x_n\}$ не ограничена. Не огшраничивая общности, можно считать, что $\|x_n\| \to 0$ (иначе нужно перейти к подпоследовательности). Тогда из (6.27) следует: $Tx_n' \to \vec{0}$, где $x_n' := x_n/\|x_n\|$. Повторяя дословно предыдущее рассуждение для $y = \vec{0}$, получаем, что $z = Az$, т.е. $z \in \operatorname{Ker} T$. Так как $z \neq \vec{0}$, то последнее противоречит условию теоремы. $\square$

Закончим параграф следующим простым результатом, который далее нам понадобится.

Теорема 6.19. *Пусть X — бесконечномерное ЛНП. Если линейный оператор $A\colon X \to X$ компактен, то он не имеет ограниченного обратного.*

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно, и оператор $A^{-1}\colon X \to X$ существует и ограничен. Так как по определению обратного оператора $A \cdot A^{-1} = I$, то отсюда по только что доказанной теореме следует, что I компактен. Но последнее противоречит утверждению теоремы 6.15 из предыдущего параграфа. $\square$

Следствие 6.8. *Если линейный ограниченный оператор, действующий в бесконечномерном ЛНП, имеет ограниченный обратный, то он не компактен.*

Глава 7

Теорема Хана–Банаха и слабая сходимость

7.1 Частично и линейно упорядоченные пространства. Лемма Цорна.

Материал этого параграфа имеет вспомогательный характер. Вскоре он будет использован при доказательстве одного из важнейших результатов теории ЛНП — теоремы Хана–Банаха.

Определение 7.1. Пусть M — произвольное множество. Бинарное отношение $x \leqslant y$ $(x, y \in M)$ называется *отношением частичного порядка*, если оно имеет следующие свойства:

1. Для произвольного $x \in M$ выполнено: $x \leqslant x$ (рефлексивность);

2. Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$ (антисимметричность);

3. Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$ (транзитивность).

Множество вместе с заданным на нем частичным порядком называется *частично упорядоченным пространством.*

Определение 7.2. Частично упорядоченное пространство M называется *линейно упорядоченным* или *цепью*, если любые два элемента этого множества сравнимы, т.е. для произвольных $x, y \in M$ выполнено одно из соотношений: $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$.

Пример 7.1. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с обычным отношением порядка является цепью.

Пример 7.2. Введем на множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$ отношение порядка следующим образом:

$$z_1 = x_1 + iy_1 \leqslant z_2 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow \; x_1 \leqslant x_2,\; y_1 \leqslant y_2.$$

Легко проверить, что это частично упорядоченное пространство, но не цепь.

Пример 7.3. Рассмотрим на $\mathbb{R}^n$ покоординатный порядок, т.е.

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \leqslant y = (y_1, \ldots, y_n) \ \Leftrightarrow \ x_i \leqslant y_i \ (i = 1, \ldots, n).$$

Как и в предыдущем примере, $\mathbb{R}^n$ — частично упорядоченное пространство, но не цепь.

Пример 7.4. Пусть S — произвольное множество, Σ — множество всех его подмножеств. Роль порядка будет играть отношение вложения: если $A, B \in \Sigma$, то $A \leqslant B \ \Leftrightarrow$ $A \subset B$. Тогда Σ — частично упорядоченное пространство, которое является цепью тогда и только тогда, когда S состоит из одного элемента (?).

Определение 7.3. Пусть M — частично упорядоченное пространство. Элемент $x_0 \in M$ называют *максимальным*, если из того, что $y \in M$ и $x_0 \leq y$, следует: $y = x_0$.

Определение 7.4. Подмножество E частично упорядоченного пространства M называется *ограниченным сверху*, если существует такой $z \in M$, что $x \leq z$ для всех $x \in E$.

Следующее утверждение, эквивалентное аксиоме выбора, является теоретическим обоснованием трансфинитной индукции.

Теорема 7.1 (Лемма Цорна). *Если в частично упорядоченном множестве M любая цепь ограничена сверху, то в M существует максимальный элемент.*

7.2 Продолжении линейных ограниченных функционалов в ЛНП.

Пусть X — ЛНП, а $L \subset X$ — его линейное подпространство. Предположим, что на L определен линейный функционал f, который к тому же ограничен, т.е.

$$\|f\|_{L^*} = \sup_{\substack{x \in L \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| < \infty. \tag{7.1}$$

Определение 7.5. Функционал $F \in X^*$ будем называть *продолжением* f на X, если

1. Для любого $x \in L$ $F(x) = f(x)$;
2. $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{L^*}$.

Пример 7.5. Рассмотрим в ЛНП $C[0,1]$ линейное подпространство $L = \{x = x(t) \in C[0,1] : x(0) = 0\}$ и определим на нем функционал $f(x) := x(1)$. Нетрудно проверить, что он линеен и ограничен, так как $\|f\|_{L^*} = 1$. Ясно, что функционал $F(x) := x(1)$ определен и ограничен на всем пространстве $C[0,1]$ и $\|F\|_{C[0,1]^*} = \|f\|_{L^*}$, т.е. он является продолжением f. В то же время, функционал $F_1(x) := x(1) - x(0)$ хотя и обладает тем свойством, что $F_1(x) = f(x)$ для всех $x \in L$, но, как легко видеть (?), $\|F_1\|_{C[0,1]^*} = 2$, и поэтому F_1 не является продолжением f на $C[0,1]$ в смысле предыдущего определения.

Следующее утверждение является одним из центральных в теории ЛНП.

Теорема 7.2 (Хан–Банах)**.** *Для произвольных ЛНП X, подпространства $L \subset X$ и линейного функционала $f : L \longrightarrow \mathbb{R}$, такого, что $\|f\|_{L^*} < \infty$, существует продолжение $F \in X^*$.*

Сначала мы докажем это утверждение в одном важном, но частном случае, когда размерность подпространства L меньше размерности пространства всего лишь на 1. Напомним, что через $\lambda(E)$ обозначается линейная оболочка множества E.

Лемма 7.1. *Утверждение теоремы 7.2 верно, если существует такой вектор $x_0 \in X$, что $X = \lambda(\{x_0\} \cup L)$.*

Доказательство. Мы можем (и будем) предполагать, что $L \neq X$. По условию для произвольного $x \in X$

$$x = \alpha x_0 + u, \ \text{ где } \ \alpha \in \mathbb{R}, \ u \in L. \tag{7.2}$$

Покажем, что представление (7.2) единственно. Предположим, что существует еще одно представление такого вида: $x = \alpha_0' x_0 + u'$, где $\alpha' \in \mathbb{R}, \ u' \in L$. Вычитая из (7.2) последнее равенство, получим: $(\alpha - \alpha')x_0 = u' - u$. Если $\alpha \neq \alpha'$, то после деления на разность $\alpha - \alpha'$ приходим к равенству: $x_0 = \frac{1}{\alpha - \alpha'}(u - u')$, откуда следует, что $x_0 \in L$. Но тогда, так как L — линейное подпространство, то $\lambda(\{x_0\} \cup L) = L$, и значит, $L = X$, что противоречит условию. Тем самым $\alpha = \alpha'$. Но тогда $u = u'$, и единственность представления (7.2) доказана.

Определим теперь функционал F на X следующим образом: если $x \in X$ представим в виде (7.2), то

$$F(x) = \alpha \cdot c + f(u), \tag{7.3}$$

где константа c будет выбрана позднее. Ввиду единственности представления это определение корректно. В частности, если $x \in L$, то $\alpha = 0, \ u = x$, и поэтому из (7.3) следует: $F(x) = f(x)$, т.е. на L функционалы F и f совпадают.

Осталось показать, что константа c может быть выбрана так, что $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{L^*}$. Иначе говоря, нужно доказать, что при некотором c выполнено: $|F(x)| \leq \|f\|_{L^*} \cdot \|x\|$, если $x \in X$, или ввиду соотношений (7.2) и (7.3), что

$$|\alpha c + f(u)| \leq \|f\|_{L^*} \cdot \|\alpha x_0 + u\|.$$

Заметим, что для $\alpha = 0$ последнее неравенство переходит в неравенство: $|f(u)| \leq \|f\|_{L^*} \cdot \|u\|$, которое является следствием (7.1). Поэтому будем считать, что $\alpha > 0$ (случай $\alpha < 0$ совершенно аналогичен). После элементарных преобразований получим

$$-f(u) - \|f\|_{L^*} \cdot \|\alpha x_0 + u\| \leq \alpha c \leq \|f\|_{L^*} \cdot \|\alpha x_0 + u\| - f(u).$$

Разделим все части этого неравенства на α и воспользуемся линейностью функционала и нормы:

$$-f(\frac{u}{\alpha}) - \|f\|_{L^*} \cdot \|x_0 + \frac{u}{\alpha}\| \leq c \leq \|f\|_{L^*} \cdot \|x_0 + \frac{u}{\alpha}\| - f(\frac{u}{\alpha})$$

или
$$-f(z) - \|f\|_{L^*} \cdot \|x_0 + z\| \le c \le \|f\|_{L^*} \cdot \|x_0 + z\| - f(z), \tag{7.4}$$
где $z := \frac{u}{\alpha} \in L$. Пусть $m(z)$ и $M(z)$ — соответственно левая и правая части последнего неравенства, а также
$$m := \sup_{z\in L} m(z)\ ,\ M := \inf_{z\in L} M(z).$$
Существование c, для которого выполнено (7.4), будет доказано, если показать, что
$$m \le M. \tag{7.5}$$
Действительно, в этом случае в качестве c можно взять любое число из отрезка $[m, M]$, так как тогда $m(z) \le m \le c \le M \le M(z)$ $(z \in L)$.

В свою очередь, (7.5) является следствием неравенства
$$-f(u) - \|f\|_{L^*} \cdot \|x_0 + u\| \le -f(v) + \|f\|_{L^*} \cdot \|x_0 + v\|, \tag{7.6}$$
где $u, v \in L$ произвольны (?). Для доказательства последнего соотношения достаточно воспользоваться линейностью функционала f, а также определением нормы $\|f\|_{L^*}$:
$$\begin{aligned} f(v) - f(u) &= f(v-u) \le \|f\|_{L^*} \cdot \|v - u\| \\ &= \|f\|_{L^*} \cdot \|(x_0 + v) + (-x_0 - u)\| \\ &\le \|f\|_{L^*} \cdot \|x_0 + v\| + \|f\|_{L^*} \cdot \|x_0 + u\|. \end{aligned}$$
Таким образом, (7.6) выполнено при подходящем выборе константы c (она определяется, вообще говоря, неоднозначно), и тогда, как уже говорилось, $\|F\|_{X^*} \le \|f\|_{L^*}$. Заметим, что противоположное неравенство выполняется всегда. Действительно, так как $F(x) = f(x)$ для $x \in L$, то
$$\|f\|_{L^*} = \sup_{\substack{x\in L\\ \|x\|\le 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x\in L\\ \|x\|\le 1}} |F(x)| \le \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\le 1}} |F(x)| = \|F\|.$$
Тем самым лемма доказана. □

Доказательство теоремы 7.2. По условию на линейном подпространстве $L \subset X$ определен линейный функционал f, такой, что $\|f\|_{L^*} < \infty$. Обозначим через Σ множество всех пар (M, g), где M — линейное подпространство X, $M \supset L$, а $g : M \to \mathbb{R}$ — линейный функционал, являющийся продолжением f на M, т.е. $g(x) = f(x)$ для всех $x \in L$ и $\|g\|_{M^*} = \|f\|_{L^*}$. Так как $(L, f) \in \Sigma$, то $\Sigma \ne \varnothing$. Введём на Σ отношение частичного порядка: по определению $(M, g) \le (N, h)$, если $M \subset N$, а h является продолжением g на N. Нетрудно проверить, что это отношение обладает всеми необходимыми свойствами (?). Докажем, что в частично упорядоченном множестве Σ любая цепь $\Sigma_0 \subset \Sigma$ ограничена сверху. Положим $\widetilde{M} := \bigcup_{(M,g)\in\Sigma_0} M$. Проверим, что $\widetilde{M}$ — линейное подпространство X. Если $x, y \in \widetilde{M}$, то по определению $x \in M_x$, а $y \in M_y$, где $(M_x, g_x), (M_y, g_y) \in \Sigma_0$. Так как Σ_0 — цепь, то любые ее два элемента сравнимы. Предположим, например, что $(M_x, g_x) \le (M_y, g_y)$. Тогда, в частности, $M_x \subset M_y$. Поэтому $x, y \in M_y$ и, так как M_y — линейное подпространство X, то $x+y \in M_y$. Следовательно, $x+y \in \widetilde{M}$. Аналогично проверяется, что $\lambda x \in \widetilde{M}$, если $\lambda \in \mathbb{R}$, а $x \in \widetilde{M}$. Определим теперь на

$\widetilde{M}$ функционал. Если $x \in \widetilde{M}$, то опять $x \in M_x$ для некоторой пары $(M_x, g_x) \in \Sigma_0$. Положим: $\widetilde{g}(x) := g_x(x)$. Проверим корректность этого определения. Пусть пара $(M_1, g_1) \in \Sigma_0$ также обладает тем свойством, что $x \in M_1$. Тогда пары (M_x, g_x) и (M_1, g_1) сравнимы; пусть, например, $(M_x, g_x) \le (M_1, g_1)$. Так как в этом случае функционал g_1 является продолжением g_x, то $g_1(x) = g_x(x)$. Таким образом, определение значения $\widetilde{g}(x)$ не зависит от выбора элемента $(M_x, g_x) \in \Sigma_0$, такого, что $x \in M_x$, и определение корректно. С помощью совершенно аналогичных рассуждений можно проверить, что функционал $\widetilde{g}$ линеен и $\widetilde{g}(x) = f(x)$ для всех $x \in L$. Покажем, что $\|\widetilde{g}\|_{\widetilde{M}^*} = \|f\|_{L^*}$. Действительно, если $x \in \widetilde{M}$, то $x \in M_x$, где $(M_x, g_x) \in \Sigma_0$. Тогда, так как $\|g_x\|_{M_x^*} = \|f\|_{L^*}$, то

$$|\widetilde{g}(x)| = |g_x(x)| \le \|g_x\|_{M_x^*}\|x\| = \|f\|_{L^*}\|x\|,$$

откуда $\|\widetilde{g}\|_{\widetilde{M}^*} \le \|f\|_{L^*}$. Противоположное неравенство очевидно.

Итак, $(\widetilde{M}, \widetilde{g}) \in \Sigma$. Из определения этого элемента следует, что $(M, g) \le (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ для всех $(M, g) \in \Sigma_0$, т.е. цепь Σ_0 ограничена сверху. Тем самым для частично упорядоченного множества Σ выполнены условия леммы Цорна, которая гарантирует существование в Σ максимального элемента $(\overline{M}, \overline{g})$. Докажем, что

$$\overline{M} = X. \tag{7.7}$$

Предположим, что (7.7) не верно. Тогда существует $x_0 \in X \setminus \overline{M}$. Рассмотрим на линейном пространстве $Y := \lambda(\{x_0\} \cup \overline{M})$ норму из X. Для ЛНП Y и его линейного подпространства $\overline{M}$ выполняются все условия леммы 7.1. Поэтому существует линейный функционал $h : Y \to \mathbb{R}$, являющийся продолжением функционала $\overline{g}$ на Y. Ясно, что пара $(Y, h) \in \Sigma$, $(Y, h) \ge (\overline{M}, \overline{g})$ и $(Y, h) \ne (\overline{M}, \overline{g})$. Последнее, очевидно, противоречит максимальности $(\overline{M}, \overline{g})$ в Σ. Таким образом, равенство (7.7) верно, и мы можем в качестве F взять фунционал $\overline{g}$. Теорема доказана. □

7.3 Следствия из теоремы Хана–Банаха.

Начнем с утверждения, которое уже применялось ранее при доказательстве теоремы 6.1.

Теорема 7.3. *Если X — произвольное ЛНП, то для любого $x_0 \in X$, $x_0 \ne \vec{0}$, существует такой функционал $x^* \in X^*$, что $\|x^*\|_{X^*} = 1$ и $x^*(x_0) = \|x_0\|$.*

Доказательство. Рассмотрим множестао

$$L := \{x \in X : x = \alpha x_0, \;\text{ где }\; \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Легко проверить (?), что L — линейное подпространство X (это прямая, проведённая через $\vec{0}$ и x_0). Определим на L функционал φ следующим образом: если $x \in L$ предстпвим в виде $x = \alpha x_0$, то $\varphi(x) := \alpha\|x_0\|$. Тогда φ линеен (?), а также

$$\|\varphi\|_{L^*} = \sup_{\substack{x \in L \\ \|x\| \le 1}} |\varphi(x)| = \sup_{\alpha : |\alpha|\|x_0\| \le 1} (|\alpha| \cdot \|x_0\|) = \|x_0\| \sup_{|\alpha| \le \frac{1}{\|x_0\|}} |\alpha| = \|x_0\| \cdot \frac{1}{\|x_0\|} = 1.$$

Следовательно, по теореме Хана–Банаха 7.2 существует такой $x^* \in X^*$ что $x^*(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in L$ и $\|x^*\| = 1$. В частности, $x^*(x_0) = \varphi(x_0) = \|x_0\|$. □

Следствие 7.1. *Если X — ЛНП, то для любого $x \in X$ имеет место равенство:*

$$\|x\| = \max_{\|x^*\| \leq 1} |x^*(x)|. \tag{7.8}$$

Доказательство. Прежде всего, если $x_0 = \vec{0}$, то равенство (7.8) очевидно. Пусть теперь $x_0 \neq \vec{0}$. С одной стороны, по определению нормы функционала для произвольного $x^* \in X^*$, такого, что $\|x^*\| \leq 1$, выполнено:

$$|x^*(x)| \leq \|x^*\| \cdot \|x\| \leq \|x\|. \tag{7.9}$$

С другой, по теореме 7.3 существует функционал $x_0^* \in X^*$, для которого $\|x_0^*\| = 1$ и $x_0^*(x) = \|x\|$. В итоге отсюда и из (7.9) получаем (7.8). □

Следствие 7.2. *[о разделении векторов] Пусть X — произвольное ЛНП, $x_1 \neq x_2$. Тогда существует такой функционал $x^* \in X^*$, что $x^*(x_1) \neq x^*(x_2)$.*

Доказательство. Применим к вектору $x :=x_1 - x_2$ теорему 7.3 и найдем $x^* \in X^*$, для которого $x^*(x) = \|x\|$. Так как по условию $x_1 \neq x_2$, то

$$x^*(x_1 - x_2) = x^*(x_1) - x^*(x_2) = \|x_1 - x_2\| > 0.$$

Значит, $x^*(x_1) \neq x^*(x_2)$. □

Следствие 7.3 (о нетривиальности сопряжённого пространства)**.** *Если ЛНП $X \neq \{\vec{0}\}$, то и $X^* \neq \{\vec{0}\}$.*

Доказательство. Так как по условию существует енулевой вектор $x \in X$, то достаточно применить теорему 7.3. □

Теорема 7.4. *[об отделении вектора от подпространства] Пусть Y — замкнутое линейное подпространство ЛНП X, $x_0 \in X \backslash Y$. Тогда существует такой $x^* \in X^*$, что одновременно $x^*(x) = 0$ для всех $x \in Y$ и $x^*(x_0) = 1$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $L := \lambda(Y \cup \{x_0\})$. Как и в доказательстве леммы 7.1, можно показать, что для каждого $x \in L$ существует единственное представление:

$$x = \alpha x_0 + y, \quad \text{где } \; y \in Y, \alpha \in \mathbb{R} \tag{7.10}$$

(единственность вытекает из того, что $x_0 \in X \backslash Y$). Так как L — линейное подпространство пространства X, то с нормой из X оно само становится ЛНП, а $Y \neq L$ будет его линейным подпространством. Определим на L функционал φ: если $x \in L$ и для него выполнено (7.10), то $\varphi(x) \; : =\alpha$. Легко проверить, что φ линеен. Действительно, если $x_1 = \beta x_0 + y_1$, где $y_1 \in Y$, а $\beta \in \mathbb{R}$, то $x + x_1 = (\alpha+\beta)x_0 + (y_1 + y)$. Так как $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$, а $y + y_1 \in Y$, то это представление вида (7.10). Следовательно, по определению

$$\varphi(x_1 + x) = \alpha + \beta = \varphi(x) + \varphi(x_1).$$

Аналогично проверяется равенство: $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, а $x \in L$ (?). Из определения функционала сразу следует:

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = 1, \\ \varphi(x) = 0 \; \text{ для всех } \; x \in Y \end{cases} \tag{7.11}$$

Докажем ограниченность φ на L. Предположим, что это не так. Тогда

$$\|\varphi\|_{L^*} = \sup_{\substack{x\in L\\ \|x\|\le 1}} |\varphi(x)| = \infty,$$

т.е. для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется $x_n \in L$, для которого выполнено: $\|x_n\| \le 1$ и $|\varphi(x_n)| \ge n$. Согласно (7.10)

$$x_n = \alpha_n x_0 + y_n, \quad \text{где} \quad \alpha_n \in \mathbb{R}, y_n \in Y.$$

Поэтому по определению функционала $|\varphi(x_n)| = |\alpha_n|$, откуда, с одной стороны, $\|\alpha_n x_0 + y_n\| \le 1$, а, с другой, $|\alpha_n| \ge n$ или $1/|\alpha_n| \le 1/n$. Перемножая два последних неравенства, получим:

$$\left\|x_0 - (-\frac{y_n}{\alpha_n})\right\| = \left\|\frac{\alpha_n x_0 + y_n}{\alpha_n}\right\| \le \frac{1}{n},$$

откуда

$$\left\|x_0 - (-\frac{y_n}{\alpha_n})\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Последнее означает, что x_0 — предельная точка замкнутого множества Y. Следовательно, $x_0 \in Y$, что противоречит условию. Таким образом, наше предположение неверно, и $\|\varphi\|_{L^*} < \infty$. Поэтому, применяя теорему Хана–Банаха 7.2, можно найти такой функционал $x^* \in X^*$, что $x^*(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in L$. Отсюда и из соотношений (7.11) следует, что $x^*(x) = 0$ для всех $x \in Y$ и $x^*(x_0) = \varphi(x_0) = 1$. □

Замечание 7.1. Условие замкнутости Y в последней теореме существенно. Действительно, иначе найдется предельная точка Y, скажем, x_0, такая, что $x_0 \notin Y$. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset Y$, $x_n \to x_0$. Если теперь $x^* \in X^*$ и $x^*(x) = 0$ $(x \in Y)$, то ввиду его непрерывности $x^*(x_n) \to x^*(x_0)$, откуда $x^*(x_0) = 0$.

Пример 7.6. Пусть $X = \mathbb{R}^3_2$, вектора x^1, x^2, x^3 из X линейно независимы. Предположим, что нужно найти линейный ограниченный функционал, разделяющий плоскость Y, натянутую на x^1 и x^2, и вектор x^3 (в смысле утверждения теоремы 7.4).

Ввиду следствия 5.3 любой $x^* \in (\mathbb{R}^3_2)^*$ представим в виде:

$$x^*(x) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \tag{7.12}$$

для некоторых $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Найдем x^* из условий: $x^*(x^1) = x^*(x^2) = 0$ и $x^*(x^3) = 1$. Если $x^k = (x^k_1, x^k_2, x^k_3)$ $(k = 1, 2, 3)$, то отсюда получаем:

$$\begin{cases} \alpha x^1_1 + \beta x^1_2 + \gamma x^1_3 = 0 \\ \alpha x^2_1 + \beta x^2_2 + \gamma x^2_3 = 0 \\ \alpha x^3_1 + \beta x^3_2 + \gamma x^3_3 = 1 \end{cases}$$

Так как вектора x^1, x^2, x^3 линейно независимы, то определитель этой системы не равен нулю, и, следовательно, она имеет единственное решение $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$. Эти числа и будут задавать искомый функционал (7.12).

7.4 Второе сопряжённое пространство X^{**}. Каноническое вложение ЛНП X в X^{**}.

Напомним, что (первое) сопряженное пространство X^* к ЛНП X состоит из всех таких линейных функционалов $x^* : X \to \mathbb{R}$, что

$$\|x^*\| = \sup_{\|x\| \le 1} |x^*(x)| < \infty.$$

Ранее было доказано, что X^* само является банаховым пространством относительно нормы $\|x^*\|$. Поэтому можно определить пространство, сопряженное к пространству X^*, а именно, $(X^*)^* := X^{**}$, которое называется *вторым сопряжённым пространством* к X. Оно состоит из всех линейных функционалов $x^{**} : X^* \to \mathbb{R}$, для которых

$$\|x^{**}\| = \sup_{\|x^*\| \le 1} |x^{**}(x^*)| < \infty.$$

Следующее определение вводит важную идею двойственности, связанную с относительностью понятий аргумента и функции.

Определение 7.6. Пусть X — произвольное ЛНП. Для любого $x \in X$ определим функционал $\pi(x) : X^* \to \mathbb{R}$ следующим образом: $\pi(x)(x^*) : = x^*(x)$.

Теорема 7.5. *Для каждого $x \in X$ $\pi(x) \in X^{**}$ и*

$$\|\pi(x)\|_{X^{**}} = \|x\|_X. \tag{7.13}$$

Доказательство. Сначала проверим линейность. Если $x_1^*, x_2^* \in X^*$, то

$$\pi(x)(x_1^* + x_2^*) = (x_1^* + x_2^*)(x) = x_1^*(x) + x_2^*(x) = \pi(x)(x_1^*) + \pi(x)(x_2^*).$$

Так же легко показать, что $\pi(x)(\lambda x^*) = \lambda \pi(x)(x^*)$ для $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x^* \in X^*$ (?).

Для доказательства ограниченности $\pi(x)$ достаточно установить справедливость равенства (7.13). Действительно, по следствию 7.8 из предыдущего параграфа

$$\|x\| = \max_{\|x^*\| \le 1} |x^*(x)| = \max_{\|x^*\| \le 1} |\pi(x)(x^*)| = \|\pi(x)\|_{X^{**}}.$$

□

Теорема 7.6. *Отображение $\pi : X \to X^{**}$ является линейной изометрией между ЛНП X и множеством $\pi(X) : = \{x^{**} \in X^{**} : \ x^{**} = \pi(x), x \in X\}$. Отсюда, в частности, следует, что $\pi(X)$ — линейное подпространство второго сопряженного пространства X^{**}.*

Доказательство. Прежде всего, по теореме 7.5 $\pi(x) \in X^{**}$. Докажем линейность отображения π. Покажем, что

$$\pi(x_1 + x_2) = \pi(x_1) + \pi(x_2) \tag{7.14}$$

для произвольных $x_1, x_2 \in X$. Действительно, так как для каждого $x^* \in X^*$

$$\begin{aligned} \pi(x_1 + x_2)(x^*) &= x^*(x_1 + x_2) = x^*(x_1) + x^*(x_2) = \pi(x_1)(x^*) + \\ &+ \pi(x_2)(x^*) = (\pi(x_1) + \pi(x_2))(x^*), \end{aligned}$$

то равенство (7.14) выполнено. Аналогичная проверка показывает, что $\pi(\lambda x) = \lambda\pi(x)$, если $\lambda \in \mathbb{R}$, а $x \in X$ (?). Ввиду равенства (7.13) отображение π сохраняет норму. Отсюда, в частности, следует, что оно инъективно (?). Сюръективность же очевидна, так как в качестве множества значений этого отображения рассматривается его образ. $\square$

Задача 7.1. Доказать, что для произвольного банахова пространства X подпространство $\pi(X)$ замкнуто в X^{**}.

Определение 7.7. Отображение π называется *каноническим вложением ЛНП X в его второе сопряжённое X^{**}.*

7.5 Понятие о рефлексивном ЛНП. Примеры.

Определение 7.8. Пусть π — каноническое вложение ЛНП X в его второе сопряжённое X^{**}. Тогда X называется *рефлексивным,* если $\pi(X) = X^{**}$, т.е. для любого $x^{**} \in X^{**}$ существует такой элемент $x \in X$, что для каждого $x^* \in X^*$ выполняется равенство: $x^{**}(x^*) = x^*(x)$.

Начнем с примеров рефлексивных пространств.

Пример 7.7. Любое полное гильбертово пространство H рефлексивно. Для определенности рассмотрим случай вещественного пространства. Напомним, что по теореме Рисса 5.10 отбражение $\varphi : H \to H^*$, определенное формулой $\varphi(a)(x) = (x, a)$ является изометрией на все H^*. Поэтому, так как для любого $x^{**} \in H^{**}$ функционал $\psi(a) := x^{**}(\varphi(a))$ линеен и ограничен на H, то существует $b \in H$, для которого

$$x^{**}(\varphi(a)) = \varphi(b)(a) = (a, b) = (b, a).$$

Если теперь $\varphi(a) = x^*$, то отсюда следует: $x^{**}(x^*) = x^*(b) = \pi(b)(x^*)$, и значит, $x^{**} = \pi(b)$.

Пример 7.8. Пространство l_p рефлексивно, если $1 < p < \infty$. Действительно, ранее было доказано, что l_p^* изометрично пространству l_q, где $1/p + 1/q = 1$. Точнее, каждый $x^* \in l_p^*$ единственным образом представим в виде:

$$x^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \quad (x = (x_k) \in l_p)$$

для некоторого $a = (a_k) \in l_q$, причем $\|x^*\|_{l_p^*} = \|a\|_{l_q}$. Тем самым пространство $l_p^{**} = (l_p^*)^*$ будет изометрично пространству l_q^* или ввиду только что сформулированного утверждения пространству l_p. Более формально $l_p^{**} = (l_p^*)^* = l_q^* = l_p$. Совершенно аналогичные соображения показывают рефлексивность пространств $L_p = L_p(X, \Sigma, \mu)$ в случае $1 < p < \infty$.

Наиболее простыми примерами нерефлексивных пространств являются "крайние" представители только что рассмотренных шкал.

Пример 7.9. Пространства $L_1[a, b]$, $L_\infty[a, b]$, $C[a, b]$, l_1, l_∞ не рефлексивны. Докажем это в случае l_1. Так как $l_1^* = l_\infty$ (см. теорему 5.12 и задачу 5.12), то соотношение $l_1^{**} \neq l_1$ эквивалентно следующему:

$$l_\infty^* \neq l_1. \tag{7.15}$$

Иначе говоря, нам нужно найти функционал $\varphi \in l_\infty^*$, который нельзя представить в виде

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \quad x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_\infty, \tag{7.16}$$

где $y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in l_1$.

Рассмотрим множество $M \subset l_\infty$, состоящее из всех таких $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$, что существует предел $\lim_{n\to\infty} \psi_n(x)$, где

$$\psi_n(x) := \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Заметим, что M, в частности, содержит все последовательности, имеющие конечный предел (но не только их; проверить, что, например, $(1, -1, 1, -1, \ldots) \in M$). Нетрудно показать, что M — линейное подпространство l_∞ (?). Зададим на M функционал $\psi(x) := \lim_{n\to\infty} \psi_n(x)$. Из свойств предела, а также равенств $\psi_n(x+y) = \psi_n(x) + \psi_n(y)$ и $\psi_n(\alpha x) = \alpha\psi_n(x)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ вытекает его линейность. Покажем его ограниченность:

$$\begin{aligned} |\psi(x)| &= |\lim_{n\to\infty} \psi_n(x)| \le \sup_{n=1,2,\ldots} |\psi_n(x)| = \sup_n \left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right| \\ &\le \sup_n \frac{|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|}{n} \le \sup_n \frac{n\|x\|_\infty}{n} = \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|\psi\|_{M^*} \le 1$. Применяя теорему Хана–Банаха 7.2, найдем такой функционал $\varphi \in l_\infty^*$, что $\varphi(x) = \psi(x)$ для всех $x \in M$.

Предположим, что равенство (7.16) выполнено для φ при некотором $y \in l_1$ и всех $x \in l_\infty$. Тогда, если в качестве x брать обычные орты $e_k = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \ldots)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то из (7.16) следует: $\varphi(e_k) = y_k$. С другой стороны, так как $e_k \in M$ (?), то

$$\varphi(e_k) = \psi(e_k) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(e_k) = 0,$$

и значит, $y_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Следовательно, ввиду (7.16) $\varphi(x) = 0$ для всех $x \in l_\infty$. В то же время, так как $x_0 := (1, 1, \ldots) \in M$, то

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x_0) = 1.$$

Полученное в итоге противоречие показывает, что равенство (7.16) не выполнено ни при каком $y \in l_1$. Тем самым имеет место соотношение (7.15), и пространство l_1 не рефлексивно.

Задача 7.2. Пусть ЛНП X рефлексивно. Доказать, что для каждого $x^* \in X^*$ имеет место равенство

$$\|x^*\|_{X^*} = \max_{\|x\|\le 1} |x^*(x)|.$$

Задача 7.3. Показать нерефлексивность пространств l_1 и c_0, рассмотрев функционалы

$$x_1^*(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) x_k \ \ (x = (x_k) \in l_1) \ \text{ и } \ x_2^*(x) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} x_k \ \ (x = (x_k) \in c_0)$$

соответственно и применив утверждение предыдущей задачи.

7.6 Слабая сходимость и ее свойства.

Определение 7.9. Пусть X — произвольное ЛНП, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x \in X$. Говорят, что $\{x_n\}$ *слабо* сходится к x ($x_n \xrightarrow{w} x$), если для каждого $f \in X^*$ $f(x_n) \to f(x)$.

Задача 7.4. Доказать, что "слабый" предел единственен, т.е. если $x_n \xrightarrow{w} x$ и $x_n \xrightarrow{w} y$, то $x = y$.

Указание. Применить одно из следствий теоремы Хана–Банаха.

Прежде всего, сравним слабую сходимость со сходимостью по норме.

Теорема 7.7. *Если* $\|x_n - x\| \to 0$, *то* $x_n \xrightarrow{w} x$.

Доказательство. Для любого $f \in X^*$

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\| \cdot \|x_n - x\|,$$

откуда $|f(x_n) - f(x)| \to 0$. Тем самым по определению $x_n \xrightarrow{w} x$. □

Следующий достаточно общий пример показывает, что обратное утверждение не верно.

Пример 7.10. Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство. С помощью метода ортогонализации (см. теорему 4.16) в нем можно построить счётную ортонормированную систему $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Так как ввиду неравенства Бесселя (теорема 4.9)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(a, e_k)|^2 \leq \|a\|^2,$$

то для любого $a \in H$ $(a, e_k) \to 0$ при $k \to \infty$. По теореме Рисса 5.10 для каждого функционала $f \in H^*$ существует такой вектор $a \in H$, что $f(x) = (x, a)$ $(x \in H)$. Поэтому ввиду предыдущего соотношения $e_k \xrightarrow{w} 0$. Покажем, что одновременно последовательность $\{e_k\}$ не имеет предела по норме. Действительно, если предположить, что $\|e_k - y\| \to 0$ для некоторого $y \in H$, то по теореме 7.7 $e_k \xrightarrow{w} y$. Значит, ввиду единственности слабого предела (см. задачу 7.4) $y = \vec{0}$, и $\|e_k\| \to 0$. Но это противоречит равенству $\|e_k\| = 1$ $(k \in \mathbb{N})$.

Для более детального изучения слабой сходимости полезно сначала рассмотреть ее аналог в сопряженном пространстве.

Определение 7.10. Пусть X — произвольное ЛНП, а X^* — его сопряжённое. Говорят, что последовательность $\{f_n\} \subset X^*$ *слабо** сходится к $f \in X^*$, если для любого $x \in X$ $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$. Слабая* сходимость будет обозначаться следующим образом: $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

Замечание 7.2. В X^*, как и во всяком ЛНП, можно определить слабую сходимость: $f_n \xrightarrow{w} f$ $(f_n, f \in X^*)$, если для любого $x^{**} \in X^{**}$ имеем: $x^{**}(f_n) \to x^{**}(f)$ $(n \to \infty)$. Так как любое ЛНП X изометрически вложено в свое второе сопряженное, то из слабой сходимости функционалов всегда следует слабая* сходимость. Кроме того, ясно, что для рефлексивного X верно и обратное, т.е. в этом случае понятия слабой и слабой* сходимости в X^* совпадают.

Следующее простое утверждение является непосредственным следствием рассуждений из последнего замечания и теоремы 7.7.

Теорема 7.8. *Если* $\|f_n - f\| \to 0$, *то* $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

Как и в случае слабой сходимости, обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Приведем пример, являющийся фактически частным случаем примера 7.10.

Пример 7.11. В пространстве l_2 рассмотрим последовательность "координатных" функционалов $f_n(x) := x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где $x = (x_1, x_2, \ldots)$. По теореме 5.12 (это легко проверить и непосредственно) $f_n \in l_2^*$. Из определения l_2 следует, что для каждого $x \in l_2$ $f_n(x) \to 0$. Следовательно, $f_n \xrightarrow{w^*} \vec{0}$. В то же время, эта последовательность не сходится по норме. Действительно, предположим, что $\|f_n - f\| \to 0$ для некоторого $f \in l_2^*$. Тогда по теореме 7.8 $f_n \xrightarrow{w^*} f$. Так как слабый предел единственен (?), то $f = \vec{0}$, откуда $\|f_n\| \to 0$. Но, как легко проверить, $\|f_n\| = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Сначала найдем условия, характеризующие слабую* сходимость.

Определение 7.11. Подмножество E ЛНП X называется *глобальным* в X, если $\overline{\lambda(E)} = X$ (замыкание линейной оболочки E совпадает со всем пространством X).

Приведем модельный пример такой ситуации.

Пример 7.12. Пусть $\{e_\iota\}_{\iota=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве H. Тогда из определений следует, что множество $E = \{e_\iota\}_{\iota=1}^{\infty}$ глобально в H. В частности, тригонометрическая система глобальна в пространстве $L_2[0, 2\pi]$.

Теорема 7.9. *Пусть X — банахово пространство, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$. Тогда $f_n \xrightarrow{w^*} f$ для некоторого $f \in X^*$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие свойства:*

1. *Существует такое $C > 0$, что для любого $n = 1, 2, \ldots$ $\|f_n\| \le C$ (последовательность норм функционалов равномерно ограничена);*

2. *Существует такое глобальное в X множество E, что для каждого $x \in E$ последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна.*

Доказательство. Предположим сначала, что $f_n \xrightarrow{w^*} f$. Тогда по определению $f_n(x) \to f(x)$ для любого $x \in X$, и, значит, условие 2) выполнено для $E = X$. Кроме того, так как сходящаяся числовая последовательность ограничена, то для каждого $x \in X$ существует такая константа $C_x > 0$, что $|f_n(x)| \le C_x$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Иначе говоря, последовательность $\{f_n(x)\}$ поточечно ограничена. Так как X полно, то по следствию 5.2 из теоремы Банаха-Штейнгауза эта последовательность равномерно ограничена, т.е. для некоторого $C > 0$ справедливо неравенство: $\|f_n\| \le C$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тем самым условие 1) также выполнено.

Докажем обратное утверждение. Покажем, что условия 1) и 2) позволяют найти такой $f \in X^*$, что $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

Пусть $x \in \lambda(E)$, где E — множество из условия 2). Тогда по определению линейной оболочки $x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$ $(x_k \in E,\ \alpha_k \in \mathbb{R})$. Ввиду линейности функционалов $f_n(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k f_n(x_k)$. Так как по условию последовательность $\{f_n(x_k)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна для каждого $k = 1, 2, \ldots, m$, а линейная комбинация фундаментальных последовательностей фундаментальна (?), то $\{f_n(x)\}$ также фундаментальна.

Далее, если $x \in X$, то ввиду условия $\overline{\lambda(E)} = X$ существует такая последовательность $\{y_k\} \in \lambda(E)$, что $y_k \to x$ по норме пространства X. Тем самым для любого $\varepsilon > 0$ существует k_0, для которого

$$\|y_{k_0} - x\| < \varepsilon. \qquad (7.17)$$

Так как, по-доказанному, последовательность $\{f_n(y_{k_0})\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, то существует такой номер N, что для любых $n, m \geq N$

$$|f_n(y_{k_0}) - f_m(y_{k_0})| < \varepsilon. \qquad (7.18)$$

Из (7.17) и (7.18), а также условия 1) теоремы для произвольных $n, m \geq N$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(y_{k_0})| + |f_n(y_{k_0}) - f_m(y_{k_0})| + |f_m(y_{k_0}) - f_m(x)| \\ &\leq |f_n(x - y_{k_0})| + \varepsilon + |f_m(y_{k_0} - x)| \\ &\leq \|f_n\| \cdot \|x - y_{k_0}\| + \varepsilon + \|f_m\| \cdot \|y_{k_0} - x\| \leq (2C+1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Так как правая часть последнего неравенства сколь-угодно мала, то тем самым последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна для каждого $x \in X$. Но любая фундаментальная числовая последовательность имеет предел. Значит, можно определить функционал

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ \ (x \in X).$$

Линейность f является следствием линейности функционалов f_n (?). Кроме того, так как

$$|f(x)| \leq \sup_n |f_n(x)| \leq \sup_n \|f_n\| \cdot \|x\| \leq C \cdot \|x\|,$$

то f ограничен. Сходимость $f_n \xrightarrow{w^*} f$ — непосредственное следствие определения функционала f. Тем самым теорема доказана. □

В случае рефлексивного пространства аналогичное утверждение может быть доказано и для слабой сходимости.

Теорема 7.10. *Пусть X — рефлексивное ЛНП, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Для того, чтобы $x_n \xrightarrow{w} x$ для некоторого $x \in X$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1. *Существует такое $C > 0$, что для любого $n = 1, 2, \ldots$ $\|x_n\| \leq C$;*
2. *Существует такое глобальное в X^* множество F, что для каждого $f \in F$ последовательность $\{f(x_n)\}$ фундаментальна.*

Доказательство. Как и ранее, пусть π — каноническое вложение X в X^{**} (см. определение 7.6). Произвольной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ поставим в соответствие последовательность $\{\pi(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset X^{**}$. Справедливо следующее:

$$x_n \xrightarrow{w} x \qquad \text{тогда и только тогда, когда} \qquad \pi(x_n) \xrightarrow{w^*} \pi(x). \qquad (7.19)$$

Действительно, соотношение $x_n \xrightarrow{w} x$ означает, что $x^*(x_n) \to x^*(x)$, или, то же самое, $\pi(x_n)(x^*) \to \pi(x)(x^*)$ для каждого $x^* \in X^*$. Но последнее по определению слабой* сходимости эквивалентно тому, что $\pi(x_n) \xrightarrow{w^*} \pi(x)$.

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы. Предположим сначала, что $x_n \xrightarrow{w} x$ для некоторого $x \in X$. Тогда ввиду (7.19) $\pi(x_n) \xrightarrow{w^*} \pi(x)$ (как функционалы), и поэтому по теореме 7.9 $\|\pi(x_n)\|_{X^{**}} = \|x_n\|_X \le C$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Таким образом, 1) доказано. Условие 2) выполняется для $F = X^*$.

Докажем обратное утверждение. Заметим, что для последовательности $\{\pi(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset X^{**}$ выполняются свойства 1) и 2) теоремы 7.9. Действительно, во-первых, по свойству 1) данной теоремы $\|\pi(x_n)\|_{X^{**}} = \|x_n\|_X \le C$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Кроме того, ввиду условия 2) последовательность $\{\pi(x_n)\}$ фундаментальна на F. Следовательно, по теореме 7.9 существует такой элемент $x^{**} \in X^{**}$, что $\pi(x_n) \xrightarrow{w^*} x^{**}$. Так как пространство X рефлексивно, то найдется $x \in X$, для которого $x^{**} = \pi(x)$. Тем самым опять ввиду (7.19) $x_n \xrightarrow{w} x$, и теорема доказана. □

В качестве иллюстрации применения общих теорем докажем критерий слабой сходимости в пространстве l_p $(1 < p < \infty)$.

Теорема 7.11. *Пусть $1 < p < \infty$. Последовательность $\{x^n\}_{n=1}^{\infty} \subset l_p$ слабо сходится к некоторому $x \in l_p$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие свойства:*

1. *Существует такое $C > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ $\|x^n\|_p \le C$;*
2. *$x^n \to x$ при $n \to \infty$ покоординатно.*

Доказательство. Пусть $x^n = (x_k^n)_{k=1}^{\infty}$, $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$. Тогда $x^n \to x$ покоординатно, если $x_k^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Заметим, что последнее эквивалентно тому, что $\varphi_k(x^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_k(x)$ $(k \in \mathbb{N})$, где $\varphi_k(x) := x_k$. Отсюда, в частности, следует, что из слабой сходимости вытекает покоординатная. Так как в случае $1 < p < \infty$ пространство l_p рефлексивно (см. § 7.5), то необходимость условий 1) и 2) вытекает из теоремы 7.10. Для доказательства достаточности опять же ввиду этой теоремы нужно проверить лишь глобальность в пространстве $l_q = l_p{}^*$ $(1/p + 1/q = 1)$ множества $F = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, где, как обычно, e_k — стандартные орты.

Для любого $y \in l_q$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$, рассмотрим последовательность $\{y^n\}_{n=1}^{\infty} \in \lambda(F)$, определенную следующим образом: $y^n = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$. Так как по определению пространства l_q

$$\|y\|_q^q = \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q < \infty,$$

то по критерию Коши правая часть следующего неравенства:

$$\|y^n - y\|_q^q = \sum_{i=n+1}^{\infty} |y_i|^q$$

стремится к 0 при $n \to \infty$. Следовательно, $\|y^n - y\|_q \to 0$. Таким образом, $\overline{\lambda(F)} = l_q$, т.е. F глобально в l_q. □

7.7 Слабая сходимость в гильбертовом пространстве. Слабая компактность ограниченных множеств.

Пусть H — полное гильбертово пространство над $\mathbb{R}$. Так как по теореме Рисса 5.10 $H^* = H$, то понятия слабой и слабой* сходимости в этом случае совпадают. А именно, $x_n \xrightarrow{w} x$, если и только если для любого $u \in H$

$$(x_n, u) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, u).$$

Теорема 7.12. *Пусть $x_n, x \in H$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда $\|x_n - x\| \to 0$ тогда и только тогда, когда выполняются два свойства: 1) $x_n \xrightarrow{w} x$; 2) $\|x_n\| \to \|x\|$.*

Доказательство. Если $\|x_n - x\| \to 0$, то 2) выполняется ввиду непрерывности нормы (см. последнее утверждение теоремы 2.1), а 1) — по теореме 7.7.

Докажем обратное. По определению нормы в гильбертовом пространстве

$$\|x_n - x\|^2 = (x_n - x, x_n - x) = \|x_n\|^2 - 2(x_n, x) + \|x\|^2.$$

Так как по условию правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$, то $\|x_n - x\| \to 0$, и теорема доказана. $\square$

Задача 7.5. Привести пример ЛНП X, в котором утверждение последней теоремы не верно.

Мы уже видели раньше, что в отличие от конечномерного пространства, единичный шар в бесконечномерном ЛНП не предкомпактен относительно сходимости по норме (см. следствие 6.3). Тем самым следующий результат показывает существенное отличие (и важное преимущество) слабой сходимости по сравнению со сходимостью по норме.

Теорема 7.13. *[о слабой компактности ограниченных множеств] Предположим, что H — полное сепарабельное гильбертово пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$, $\|x_n\| \leq C$ для некоторого $C > 0$ и любого $n = 1, 2, \ldots$. Тогда существует такой вектор $x \in H$, что $\|x\| \leq C$ и $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$ для некоторой подпоследовательности $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$.*

Доказательство. По теореме 4.18 в H существует тотальная ОНС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Применяя неравенство Коши–Буняковского и условие теоремы, получим, что для всех $n, k = 1, 2, \ldots$

$$|(x_n, e_k)| \leq \|x_n\| \cdot \|e_k\| \leq C. \tag{7.20}$$

Отсюда, в частности, следует, что числовая последовательность $\{(x_n, e_1)\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Поэтому по теореме Больцано–Вейерштрасса она содержит сходящуюся подпоследовательность, т.е. для некоторой $\{x_n^1\} \subset \{x_n\}$ существует $\lim_{n\to\infty}(x_n^1, e_1)$. Применяя затем (7.20) для произведений (x_n^1, e_2) еще раз, мы опять можем выделить $\{x_n^2\} \subset \{x_n^1\}$, такую, что существует $\lim_{n\to\infty}(x_n^2, e_2)$. Продолжая этот процесс, построим систему вложенных последовательностей $\{x_n\} \supset \{x_n^1\} \supset \{x_n^2\} \supset \ldots$, обладающую тем свойством, что для любого $k \in \mathbb{N}$ и всех $1 \leq j \leq k$ существует $\lim_{n\to\infty}(x_n^k, e_j)$. Рассмотрим диагональную подпоследовательность $x_{n_i} : =x_i^i$ $(i \in \mathbb{N})$. Так как по определению $\{x_{n_i}\}_{i \geq k} \subset \{x_n^k\}_{n=1}^{\infty}$, то $\lim_{i\to\infty}(x_{n_i}, e_j)$ существует для каждого $j = 1, 2, \ldots$.

Далее, для любого $i = 1, 2, \ldots$ введём линейный функционал $f_i(x) :=(x, x_{n_i})$. Тогда по условию $\|f_i\|_{H^*} = \|x_{n_i}\| \le C$ и по построению последовательности $\{x_{n_i}\}$ для каждого $k = 1, 2, \ldots$ существует $\lim_{i\to\infty} f_i(e_k)$. Так как система $\{e_k\}$ полна в H, то множество $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ тотально в этом пространстве (см. пример 7.12). Тогда по теореме 7.9 существует такой функционал $f \in H^*$, что $f_i \xrightarrow{w} f$. Ввиду теоремы Рисса 5.10 для некоторого $x \in H$ справедливо равенство: $f(y) = (y, x)$ $(y \in H)$. Таким образом, $(x_{n_i}, y) \to (x, y)$ при $i \to \infty$ для всех $y \in H$, а это и означает, что $x_{n_i} \xrightarrow{w} x$. Применяя в очередной раз неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$(x, x) = \|x\|^2 \le \sup_i |(x_{n_i}, x)| \le \sup_i \|x_{n_i}\| \cdot \|x\| \le C \cdot \|x\|,$$

откуда $\|x\| \le C$. □

Задача 7.6. Показать, что утверждение теоремы 7.13 справедливо также для сепарабельных ЛНП.

Указание. Использовать ту же идею, что и в доказательстве теоремы 7.13, заменив ортонормированную систему на счетное всюду плотное множество.

Теорема 7.14. *Пусть H — полное гильбертово пространство, $A : H \to H$ — линейный ограниченный оператор. Тогда, если $x_n \xrightarrow{w} x$, то $Ax_n \xrightarrow{w} Ax$.*

Доказательство. Так как для любого $y \in H$

$$(Ax_n - Ax, y) = (A(x_n - x), y) = (x_n - x, A^*y),$$

где A^* — сопряженный оператор, то по условию $Ax_n - Ax \xrightarrow{w} \vec{0}$ или $Ax_n \xrightarrow{w} Ax$. □

Теорема 7.15. *Пусть H — полное сепарабельное гильбертово пространство. Тогда линейный ограниченный оператор $A : H \to H$ компактен тогда и только тогда, когда из того, что $x_n \xrightarrow{w} \vec{0}$, следует: $\|Ax_n\| \to 0$.*

Доказательство. Предположим сначала, что A компактен. Если утверждение теоремы неверно, то для некоторой последовательности $\{x_n\} \subset H$ имеем: $x_n \xrightarrow{w} \vec{0}$ и $\|Ax_n\| \not\to 0$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, такие, что

$$\|Ax_{n_k}\| \ge \varepsilon \ \ (k = 1, 2, \ldots). \tag{7.21}$$

Одновременно $x_{n_k} \xrightarrow{w} 0$, и значит, по теореме 7.14

$$Ax_{n_k} \xrightarrow{w} A(\vec{0}) = \vec{0} \ \text{ при } \ k \to \infty. \tag{7.22}$$

Кроме того, так как по теореме 7.10 $\|x_{n_k}\| \le C$ $(k = 1, 2, \ldots)$ для некоторого $C > 0$, то ввиду компактности A найдутся $\{x_{n_{k_i}}\} \subset \{x_{n_k}\}$ и $z \in H$, такие, что $Ax_{n_{k_i}} \to z$ по норме. Но тогда $Ax_{n_{k_i}} \xrightarrow{w} z$ (теорема 7.7). Тем самым, учитывая (7.22), получаем: $z = 0$. Следовательно, $\|Ax_{n_{k_i}}\| \to 0$, что противоречит соотношению (7.21).

Докажем обратное утверждение. Покажем, что множество $A(\overline{S_1}(\vec{0}))$ предкомпактно. Пусть $\|x_n\| \le 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. По теореме 7.13 существуют вектор $x \in H$, $\|x\| \le 1$, и подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, такие, что $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$. Но тогда по условию $Ax_{n_k} \to Ax$ по норме H, откуда, в частности, следует, что последовательность $\{Ax_{n_k}\}$ фундаментальна. Тем самым ввиду произвольности $\{x_n\}$, $\|x_n\| \le 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, множество $A(\overline{S_1}(\vec{0}))$ предкомпактно, а оператор A компактен. □

Глава 8

Теорема Рисса–Шаудера и альтернатива Фредгольма

8.1 Свойства разности тождественного и компактного операторов.

Всюду в этом параграфе H — полное гильбертово пространство над полем вещественных чисел, I — тождественный оператор в H, т.е. $Ix = x$, и $A : H \to H$ — произвольный компактный оператор. Мы покажем, что ядро и образ оператора $T := I - A$ обладают некоторыми важными свойствами.

Теорема 8.1. *Ядро* $\operatorname{Ker} T$ *оператора* T *конечномерно.*

Доказательство. Обозначим $H_1 := \operatorname{Ker} T = \{x \in H : Tx = \vec{0}\}$. Нам нужно доказать, что $\dim(\operatorname{Ker} T) < \infty$. Так как оператор T ограничен, то H_1 замкнуто (?), и, следовательно, оно само является полным гильбертовым пространством со скалярным произведением, индуцированным из H. Кроме того, для любого $x \in H_1$ выполнено: $Tx = x - Ax = \vec{0}$, и таким образом, сужение оператора A на H_1 является тождественным оператором. В частности, если $S_1^{H_1}(\vec{0})$ — единичный шар пространства H_1, то $A(S_1^{H_1}(\vec{0})) = S_1^{H_1}(\vec{0})$. С другой стороны, так как H_1 — линейное подпространство H, а оператор A компактен на H, то он компактен и как оператор, определенный на H_1. Тем самым множество $S_1^{H_1}(\vec{0})$ предкомпактно. Напомним, что в бесконечномерном гильбертовом пространстве существует бесконечная ортонормированная последовательность. Так как она лежит в единичном шаре этого пространства и из нее нельзя выделить фундаментальной подпоследовательности, то мы заключаем, что пространство H_1 конечномерно. □

Теорема 8.2. *Образ* $\operatorname{Im} T$ *оператора* T *замкнут в* H.

Доказательство. Прежде всего, напомним, что

$$\operatorname{Im} T := \{y \in H : \; Tx = y \; \text{ для некоторого } \; x \in H\}.$$

Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ такова, что

$$Tx_n = x_n - Ax_n \to y_0. \tag{8.1}$$

Надо показать, что $Tx_0 = y_0$ для некоторого $x_0 \in H$.

Так как ядро $\operatorname{Ker} T$ — замкнутое линейное подпространство H, то по следствию 4.10 для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует элемент $z_n \in \operatorname{Ker} T$, реализующий расстояние $\rho(x_n, \operatorname{Ker} T)$, т. е. такой, что $\rho(x_n, \operatorname{Ker} T) = \|x_n - z_n\|$. Обозначив $h_n := x_n - z_n$ и воспользовавшись соотношением (8.1), получим:

$$Th_n = T(x_n - z_n) = Tx_n - Tz_n = Tx_n = x_n - Ax_n \to y_0. \tag{8.2}$$

Предположим на время, что последовательность $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена в пространстве H, т.е. для некоторого $C > 0$

$$\|Th_n\| \le C \ \ (n = 1, 2, \ldots). \tag{8.3}$$

Тогда, так как оператор A компактен, существуют $\{h_{n_k}\} \subset \{h_n\}$ и $z \in H$, такие, что $Ah_{n_k} \to z$. Но тогда ввиду (8.2) $h_{n_k} = Th_{n_k} + Ah_{n_k} \to y_0 + z$. Оператор T непрерывен, и значит, $Th_{n_k} \to T(y_0 + z)$. Отсюда и из (8.2) в силу единственности предела $T(y_0 + z) = y_0$, и тем самым $y_0 \in \operatorname{Im} T$.

Приведенные рассуждения показывают, что доказательство теоремы будет завершено, как только мы докажем соотношение (8.3). Для этого нам понадобится следующее вспомогательное утверждение. $\square$

Лемма 8.1. *Пусть H — гильбертово пространство, M — его замкнутое подпространство, $x \in X$.*

Тогда $x \perp M$, если и только, если для всех $y \in M$

$$\|x\| \le \|x + y\|. \tag{8.4}$$

Доказательство. Для произвольного $y \in H$ справедливо равенство (напомним, что мы рассматриваем вещественное гильбертово пространство):

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x, y). \tag{8.5}$$

Если предположить, что $x \perp M$, то отсюда для любого $y \in M$ следует: $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \ge \|x\|^2$, и, значит, соотношение (8.4) выполнено.

Пусть теперь, наоборот, имеем (8.4). Если $x \not\perp M$, то существует такой $y_0 \in M$, что $(x, y_0) \ne 0$. Предположим, например, что $(x, y_0) < 0$. Для пока произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим равенство (8.5) в случае $y = \varepsilon y_0$. Тогда

$$\|x + \varepsilon y_0\|^2 = \|x\|^2 + \varepsilon(2(x, y_0) + \varepsilon\|y_0\|^2). \tag{8.6}$$

Так как $(x, y_0) < 0$, то $\varepsilon > 0$ может быть выбрано так, что $2(x, y_0) + \varepsilon\|y_0\|^2 < 0$. Из равенства (8.6) тогда следует: $\|x + \varepsilon y_0\|^2 < \|x\|^2$. Ввиду того, что $\varepsilon y_0 \in M$, последнее противоречит условию (8.4). $\square$

Продолжение доказательства теоремы 8.2. Покажем сначала, что

$$h_n \perp \operatorname{Ker} T \ \ (n = 1, 2, \ldots). \tag{8.7}$$

По лемме 8.1 это будет доказано, если проверить, что для произвольного $y \in \operatorname{Ker} T$ выполнено: $\|h_n\| \le \|h_n + y\|$. Действительно, по определению расстояния от элемента до множества

$$\|h_n + y\| = \|x_n - (z_n - y)\| \ge \rho(x_n, \operatorname{Ker} T) = \|x_n - z_n\| = \|h_n\|.$$

Предположим, что неравенство (8.3) не выполнено ни при каком $C > 0$; иначе говоря, существует такая подпоследовательность $\{h_{n_k}\} \subset \{h_n\}$, что $\|h_{n_k}\| \to \infty$. Пусть $e_k := \frac{h_{n_k}}{\|h_{n_k}\|}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Тогда $\|e_k\| = 1$ и $Te_k = \frac{Th_{n_k}}{\|h_{n_k}\|}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Поэтому, во-первых, ввиду компактности оператора A существует $\{e_{k_i}\} \subset \{e_k\}$, для которой $Ae_{k_i} \to s \in H$. Во-вторых (см. (8.2)), $Te_k \to \vec{0}$. Тем самым

$$e_{k_i} = Ae_{k_i} + Te_{k_i} \to s. \tag{8.8}$$

Так как A непрерывен, то отсюда $Ae_{k_i} \to As$, и, значит, $As = s$. Таким образом, $Ts = s - As = \vec{0}$, т.е. $s \in \operatorname{Ker} T$. Учитывая (8.7), отсюда получаем: $(h_n, s) = 0$, а, значит, $(e_{k_i}, s) = 0$ $(i = 1, 2, \dots)$. Но тогда ввиду непрерывности скалярного произведения, а также соотношения (8.8) $s = \vec{0}$. С другой стороны, из (8.8) и непрерывности нормы получаем: $\|s\| = 1$. Это противоречие показывает, что наше предположение о неограниченности $\{h_n\}$ в H неверно, т.е. соотношение (8.3) выполнено для некоторого $C > 0$, и теорема доказана.

□

8.2 Теорема Рисса–Шаудера.

Предположим, что дана система линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных и уравнений. Из курса линейной алгебры известно, что она имеет решение при любых правых частях тогда и только тогда, когда соответствующая однородная система имеет единственное решение. Нетрудно привести примеры, показывающие, что в бесконечномерном случае аналогичное утверждение, вообще говоря, неверно. Тем не менее, если T — отображение, являющееся разностью тождественного и компактного операторов, то для уравнений $Tx = y$ и $Tx = \vec{0}$ выполнено в точности то же самое, что и в конечномерной ситуации. Соответствующее утверждение эквивалентно следующему фундаментальному результату.

Теорема 8.3. *[Рисс–Шаудер] Пусть H — полное гильбертово пространство, $T = I - A$, где $I : H \to H$ — тождественный, а $A : H \to H$ — компактный оператор.*

Тогда оператор T инъективен тогда и только тогда, когда он сюръективен.

Для доказательства нам потребуется две леммы.

Лемма 8.2. *Пусть T — линейный оператор, определенный на линейном пространстве E, который инъективен, но не сюръективен (т.е. $\operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}$, а $T(E) \neq E$). Тогда $T(T(E)) \overset{\neq}{\subset} T(E)$.*

Доказательство. Так как $T(E) \neq E$, то найдется $x_0 \in E \setminus T(E)$. Тогда $y_0 := Tx_0 \in T(E)$. Если предположить, что утверждение леммы неверно, т.е. $T(T(E)) = T(E)$, то одновременно $y_0 \in T(T(E))$. Следовательно, для некоторого $x_1 \in T(E)$ имеем: $Tx_1 = y_0$. В итоге $Tx_0 = Tx_1 = y_0$, но $x_0 \neq x_1$ (так как $x_0 \notin T(E)$, а $x_1 \in T(E)$). Последнее противоречит инъективности оператора T. □

Далее через T^* (а не через $\tilde{T}^*$, как ранее) будем обозначать эрмитово–сопряженный оператор к оператору $T : H \to H$. В дальнейшем используются следующие простые соотношения.

Задача 8.1. Доказать что a) $(T_1 \pm T_2)^* = T_1^* \pm T_2^*$, b) $(T^*)^* = T$, c) $I^* = I$ (I — тождественный оператор).

Лемма 8.3. *Пусть H — полное гильбертово пространство, $T = I - A$, где $I : H \to H$ — тождественный, а $A : H \to H$ — компактный оператор.*

Тогда $\operatorname{Im} T = (\operatorname{Ker} T^*)^{\perp}$.

Доказательство. Если $y \in \operatorname{Im} T$, то $y = Tx$ для некоторого $x \in H$. Так как для произвольного $z \in \operatorname{Ker} T^*$

$$(y, z) = (Tx, z) = (x, T^* z) = 0,$$

то $y \in (\operatorname{Ker} T^*)^{\perp}$, и вложение $\operatorname{Im} T \subset (\operatorname{Ker} T^*)^{\perp}$ доказано.

Покажем теперь, что

$$(\operatorname{Im} T)^{\perp} \subset \operatorname{Ker} T^*. \tag{8.9}$$

Действительно, если $z \in (\operatorname{Im} T)^{\perp}$, то по определению ортогонального дополнения и образа оператора $(T^* z, u) = (z, Tu) = 0$ для каждого $u \in H$. В частности, $(T^* z, T^* z) = 0$, откуда $T^* z = \vec{0}$, т.е. $z \in \operatorname{Ker} T^*$. Тем самым вложение (8.9) доказано. Применив операцию ортогонального дополнения к обеим частям (8.9), получим:

$$(\operatorname{Ker} T^*)^{\perp} \subset (\operatorname{Im} T)^{\perp\perp}.$$

Так как по теореме 8.2 образ $\operatorname{Im} T$ замкнут, то $(\operatorname{Im} T)^{\perp\perp} = \operatorname{Im} T$ (см. упражнение 4.14). Следовательно, $(\operatorname{Ker} T^*)^{\perp} \subset \operatorname{Im} T$, и утверждение доказано. □

Доказательство теоремы 8.3. Предположим сначала, что оператор T инъективен. Если допустить, что утверждение теоремы неверно, т.е. $H_1 := T(H) \overset{\neq}{\subset} H$, то по лемме 8.2 $H_2 := T(H_1) \overset{\neq}{\subset} H_1$. Применяя аналогичные рассуждения по индукции, получим последовательность подпространств $H_k := T(H_{k-1})$ $(k \geq 2)$, такую, что $H_k \overset{\neq}{\subset} H_{k-1}$. По теореме 8.2 H_k является замкнутым линейным подпространством полного гильбертова пространства H_{k-1} для каждого $k = 1, 2, \dots$, где $H_0 := H$ (разумеется, относительно скалярного произведения, индуцированного из H). Следовательно, по теореме Гильберта 4.23 $H_{k-1} = H_k \oplus H_k^{\perp}$, где $H_k^{\perp}$ — ортогональное дополнение к H_k в H_{k-1} $(k = 1, 2, \dots)$.

Так как $H_k \overset{\neq}{\subset} H_{k-1}$, то существует такой вектор $x_k \in H_k^{\perp}$, что $x_k \neq \vec{0}$. Тогда $e_k := \frac{x_k}{\|x_k\|} \in H_k^{\perp}$ и $\|e_k\| = 1$. Покажем, что для всех $k = 1, 2, \dots$

$$\rho(e_k, H_k) = 1. \tag{8.10}$$

Во-первых, так как $e_k \perp H_k$, то по лемме 8.1

$$\rho(e_k, H_k) = \inf_{z \in H_k} \|e_k - z\| \geq \|e_k\| = 1.$$

С другой стороны, $\rho(e_k, H_k) \leq \|e_k - \vec{0}\| = 1$.

Далее, так как оператор A компактен, то найдется такая подпоследовательность $\{e_{k_i}\} \subset \{e_k\}$, что последовательность $\{Ae_{k_i}\}$ фундаментальна, откуда, в частности,

$$\|Ae_{k_{i+1}} - Ae_{k_i}\| \to 0 \ \text{ при } \ i \to \infty. \tag{8.11}$$

В то же время, $e_{k_i} \in H_{k_i}^{\perp}$ и, как легко видеть, ввиду определений $e_{k_{i+1}} - Te_{k_{i+1}} + Te_{k_i} \in H_{k_i}$. Поэтому из (8.10) следует:

$$\|Ae_{k_{i+1}} - Ae_{k_i}\| = \|e_{k_i} - (e_{k_{i+1}} - Te_{k_{i+1}} + Te_{k_i})\| \geq \rho(e_{k_i}, H_{k_i}) = 1.$$

Последнее неравенство противоречит соотношению (8.11), и, значит, $T(H) = H$, т.е. оператор T сюръективен.

Докажем обратное. Если $\operatorname{Im} T = H$, то ввиду леммы 8.3 $(\operatorname{Ker} T^*)^{\perp} = H$, откуда $\operatorname{Ker} T^* = \{\vec{0}\}$. Так как $T^* = I - A^*$ (см. упражнение 8.1), а оператор A^* по следствию 6.19 компактен, то, применяя уже доказанную часть этой теоремы к T^*, получим: $\operatorname{Im} T^* = H$. Но тогда опять по лемме 8.3 $(\operatorname{Ker} T^{**})^{\perp} = H$, откуда ввиду равенства $T^{**} = T$ следует: $\operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}$, и теорема доказана. □

8.3 Интегральный оператор Фредгольма в пространстве $L_2[a, b]$.

Пусть $a < b$ и $P := [a, b] \times [a, b]$. Основным инструментом в доказательствах этого параграфа будет следующая теорема Фубини об изменении порядка интегрирования в повторном интеграле Лебега (доказательство см. в курсе "Интеграл Лебега" или в [1, гл. 12, § 3]).

Теорема 8.4. *[Фубини] Пусть функция $f(s,t)$ измерима по Лебегу на квадрате P. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. Функция $f(s,t) \in L_1(P)$, т.е. $\iint_P |f(s,t)|\, dsdt < \infty$.

2. Для п.в. $t \in [a,b]$ $f(\cdot, t) \in L_1[a,b]$ и, кроме того, $\int_a^b |f(s,t)|\, ds \in L_1[a,b]$ как функция от s.

При выполнении каждого из этих условий выполнено равенство:

$$\iint_P f(s,t)\, dsdt = \int_a^b \int_a^b f(s,t)\, ds\, dt = \int_a^b \int_a^b f(s,t)\, dt\, ds. \tag{8.12}$$

Определение 8.1. Пусть функция $K(s,t) \in L_2(P)$. Определим на пространстве $L_2[a,b]$ оператор

$$Ax(s) := \int_a^b K(s,t)x(t)\, dt. \tag{8.13}$$

Как и в том случае, когда он определен на множестве непрерывных функций (см. § 5.7), мы будем называть его *интегральным оператором Фредгольма с ядром* $K(s,t)$.

Теорема 8.5. *Соотношение* (8.13) *определяет линейный и ограниченный оператор, действующий из $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$. Кроме того, справедливо неравенство:*

$$\|A\|_{L_2 \to L_2} \leq \|K\|_{L_2(P)}. \tag{8.14}$$

Доказательство. Так как по условию функция $K(s,t)$ измерима на P, то по теореме 8.4 для п.в. $s \in [a,b]$ функция $K(s,\cdot)x(\cdot)$ измерима на $[a,b]$, как произведение измеримых функций, для каждой $x \in L_2[a,b]$ [1, гл. 4, § 2]. Покажем, что, более того, для п.в. $s \in [a,b]$ функция $K(s,\cdot)x(\cdot) \in L_1[a,b]$. Действительно, ввиду неравенства Коши–Буняковского

$$\int_a^b |K(s,t)x(t)|\,dt \le \Big(\int_a^b K(s,t)^2\,dt\Big)^{1/2} \cdot \Big(\int_a^b x(t)^2\,dt\Big)^{1/2}. \tag{8.15}$$

Так как по теореме 8.4 правая часть этого неравенства при п.в. $s \in [a,b]$ конечна, то же самое можно сказать и о его правой части. Тем самым оператор (8.13) определен корректно. Линейность этого оператора — непосредственное следствие лигейности интеграла, а ограниченность будет доказана, как только будет получено неравенство (8.14).

Для произвольной $x \in L_2[a,b]$ ввиду оценки (8.15) и опять теоремы 8.4

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2^2 &= \int_a^b (Ax(s))^2\,ds \le \int_a^b \Big(\int_a^b |K(s,t)x(t)|\,dt\Big)^2 ds \\ &\le \int_a^b \int_a^b K(s,t)^2\,dt\,ds \cdot \|x\|_2^2 = \iint_P K(s,t)^2\,dtds \cdot \|x\|_2^2 = \|K\|_{L_2(P)}^2 \cdot \|x\|_2^2. \end{aligned}$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего неравенства, приходим к соотношению (8.14). □

Пусть, как и в предыдущем параграфе, A^* — эрмитово–сопряженный оператор к оператору A, ограниченному в гильбертовом пространстве.

Теорема 8.6. *Эрмитово–сопряженный к оператору A, определенному соотношением* (8.13)*, является также интегральным оператором Фредгольма с транспонированным ядром, т.е.*

$$A^*x(s) = \int_a^b K(t,s)x(t)\,dt.$$

Доказательство. Нам нужно доказать, что для произвольных функций $x, y \in L_2[a,b]$ выполнено равенство

$$(Ax,y) = (x, A^*y). \tag{8.16}$$

Так как

$$(Ax,y) = \int_a^b Ax(s)y(s)\,ds = \int_a^b \int_a^b K(s,t)x(t)y(s)\,dt\,ds, \tag{8.17}$$

а

$$(x,A^*y) = \int_a^b \int_a^b K(t,s)x(s)y(t)\,dt\,ds = \int_a^b \int_a^b K(s,t)x(t)y(s)\,ds\,dt, \tag{8.18}$$

то для этого достаточно в одном из этих повторных интегралов изменить порядок интегрирования.

Заметим, прежде всего, что функция $f(s,t) := K(s,t)x(t)y(s)$ измерима на P как произведение измеримых функций. Кроме того, она суммируема, так как ввиду неравенства Коши–Буняковского и теоремы 8.4

$$\iint_P |f(s,t)|\,dsdt \le \|K\|_{L_2(P)} \cdot \Big(\iint_P x(s)^2y(t)^2\,dsdt\Big)^{1/2} = \|K\|_{L_2(P)} \cdot \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 < \infty.$$

Таким образом, применяя в очередной раз теорему Фубини, получаем равенство интегралов (8.17) и (8.18). Тем самым (8.16) доказано. □

Следствие 8.1. *Если $K(s,t) = K(t,s)$ для всех $s \in [a,b]$ и $t \in [a,b]$, то интегральный оператор Фредгольма является самосопряженным, т.е. $A^* = A$.*

Теорема 8.7. *Оператор $A : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$, определенный соотношением* (8.13)*, компактен.*

Доказательство. Так как $L_2[a,b]$ — полное сепарабельное гильбертово пространство, то по теореме 7.15 достаточно доказать импликацию:

$$\text{из } \ x_n \in L_2[a,b], \ \ x_n \xrightarrow{w} 0 \ \text{ следует: } \ \|Ax_n\|_2 \to 0. \tag{8.19}$$

Если $x_n \xrightarrow{w} 0$, то по определению скалярного произведения в $L_2[a,b]$ для любой функции $y \in L_2[a,b]$

$$(x_n, y) = \int_a^b x_n(t)y(t)\,dt \to 0.$$

Так как по теореме 8.4 функция $K(s,\cdot) \in L_2[a,b]$ при п.в. $s \in [a,b]$, то отсюда, в частности,

$$z_n(s) := \int_a^b K(s,t)x_n(t)\,dt \to 0 \ \text{ при п.в. } \ s \in [a,b].$$

Последнее означает, что

$$z_n \to 0 \ \text{ п.в. на } \ [a,b]. \tag{8.20}$$

Кроме того, так как $x_n \xrightarrow{w} 0$, то по теореме 7.10 существует такое $C > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ $\|x_n\|_2 \le C$. Поэтому ввиду неравенства Коши–Буняковского для п.в. $s \in [a,b]$

$$z_n(s)^2 = \Big(\int_a^b K(s,t)x_n(t)\,dt\Big)^2 \le \int_a^b K(s,t)^2\,dt \cdot \|x_n\|_2^2 \le CF(s),$$

где $F(s) := \int_a^b K(s,t)^2\,dt$. По теореме 8.4

$$\int_a^b F(s)\,ds = \int_a^b \int_a^b K(s,t)^2\,dtds = \|K\|^2_{L_2(P)} < \infty,$$

т.е. $F \in L_1[a,b]$. Так как ввиду (8.20) $z_n^2 \to 0$ п.в. на $[a,b]$, то для последовательности измеримых функций $\{z_n^2\}_{n=1}^\infty$ выполнены условия теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см. теорему 3.9). В итоге

$$\|Ax_n\|_2^2 = \int_a^b z_n^2(s)\,ds \to 0,$$

и импликация (8.19) доказана. □

8.4 Интегральные уравнения Фредгольма 2-ого рода и свойства их решений.

Здесь мы применим результаты, полученные в предыдущих параграфах, к решению интегральных уравнений.

Пусть $K(s,t) \in L_2(P)$, где $P = [a,b] \times [a,b]$. Предположим, что функция $f \in L_2[a,b]$ и число $\lambda \in \mathbb{R}$ фиксированы. Следующее равенство называют *интегральным уравнением Фредгольма 2–ого рода*:

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt = f(s). \tag{8.21}$$

Его решением называют любую функцию $x \in L_2[a,b]$, при подстановке которой оно обращается при п.в. $s \in [a,b]$ в верное равенство. Соответствующее однородное и пара сопряженных уравнений имеют вид:

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt = 0, \tag{8.22}$$

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(t,s)x(t)\,dt = f(s), \tag{8.23}$$

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(t,s)x(t)\,dt = 0. \tag{8.24}$$

Если теперь, как и в предыдущем параграфе,

$$Ax(s) := \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt,$$

$Ix(t) = x(t)$, $T = I - \lambda A$, то $T^* = I - \lambda A^*$, и уравнения (8.21) — (8.24) принимают операторный вид: $Tx(s) = f(s)$, $Tx(s) = 0$, $T^*x(s) = f(s)$ и $T^*x(s) = 0$ соответственно.

Сформулируем и докажем основные свойства решений этих уравнений.

Теорема 8.8. *Уравнение* (8.21) *имеет решение с "правой частью" $f \in L_2[a,b]$ тогда и только тогда, когда функция f ортогональна ко всем решениям уравнения* (8.24).

Доказательство. Прежде всего, очевидно, что уравнение (8.21) имеет решение с "правой частью" $f \in L_2[a,b]$, если и только, если $f \in \operatorname{Im} T$. Так как ввиду леммы 8.3 $\operatorname{Im} T = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp$, то последнее эквивалентно тому, что $f \in (\operatorname{Ker} T^*)^\perp$. Так как $\operatorname{Ker} T^*$ — это в точности множество решений сопряженного однородного уравнения (8.24), то теорема доказана. □

Теорема 8.9. *[Альтернатива Фредгольма.]*

Для того, чтобы уравнение (8.21) *имело решение с произвольной "правой частью" $f \in L_2[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение* (8.22) *имело лишь тривиальное (нулевое) решение.*

При этом решение уравнения (8.21) *для любой "правой части" единственно.*

Доказательство. Так как по теореме 8.7 оператор A компактен, то аналогичным свойством обладает и оператор λA. Следовательно, ввиду теоремы 8.3 $\operatorname{Im} T = L_2[a,b]$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}$. Осталось заметить, что первое из этих равенств эквивалентно тому, что уравнение (8.21) имеет решение с произвольной "правой частью" , а второе — тому, что уравнение (8.22) имеет лишь тривиальное решение.

Единственность решения уравнения (8.21) проверить самостоятельно. □

Рассмотрим случай, в котором интегральное уравнение Фредгольма 2-ого рода решается наиболее просто.

Пример 8.1. Предположим, что ядро $K(s,t)$ интегрального уравнения (8.21) является вырожденным, т.е.

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s)Q_i(t), \quad P_i, Q_i \in L_2[a,b] \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Подставив $K(s,t)$ в (8.21), получим:

$$x(s) - \lambda \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t)x(t)\,dt = f(s).$$

Обозначим $q_i(x) := \int_a^b Q_i(t)x(t)\,dt$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (линейные ограниченные функционалы на пространстве $L_2[a,b]$). Умножив затем обе части последнего равенства на $Q_j(s)$ и проинтегрировав по отрезку $[a,b]$, придем к равенству:

$$q_j(x) - \lambda q_i(x) \sum_{i=1}^{n} \int_a^b P_i(s)Q_j(s)\,ds = \int_a^b f(s)Q_j(s)\,ds$$

или к системе линейных уравнений относительно $q_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$

$$q_j(x) - \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ij} q_i(x) = b_j,$$

где $a_{ij} := \int_a^b P_i(s)Q_j(s)\,ds$, а $b_j := \int_a^b f(s)Q_j(s)\,ds$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Если последняя система имеет решение $(q_j(x))_{j=1}^n$, то функция $x(s) := \lambda \sum_{i=1}^n q_i(x)P_i(s) + f(s)$ будет решением уравнения (8.21).

Глава 9

Элементы спектральной теории

9.1 Множество обратимых операторов и его свойства.

Всюду в этой главе X — произвольное банахово пространство над полем $\mathbb{C}$, а $\mathbb{L}(X) := \mathbb{L}(X, X)$ — банахово пространство всех линейных ограниченных операторов $T : X \to X$ с нормой $\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|$. В дальнейшем неоднократно будет применяться следующее простое утверждение.

Лемма 9.1. *Умножение слева и справа в $\mathbb{L}(X)$ непрерывно относительно операторной нормы, т.е. если $\|A_n - A\| \to 0$ и $C \in \mathbb{L}(X)$, то $\|CA_n - CA\| \to 0$ и $\|A_nC - AC\| \to 0$.*

Доказательство. Действительно, так как

$$\|A_nC - AC\| = \|(A_n - A)C\| \leq \|A_n - A\| \cdot \|C\|,$$

то из условия следует: $\|A_nC - AC\| \to 0$. Точно так же доказывается и непрерывность слева. □

Теорема 9.1. *Пусть X — банахово пространство, $A \in \mathbb{L}(X)$, $\|A\| < 1$, $Ix = x$. Тогда оператор $I - A$ обратим, и обратный к нему оператор определяется соотношением:*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n, \tag{9.1}$$

где $A^0 := I$, а $A^n := \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Доказательство. Покажем сначала, что последовательность частичных сумм

$$S_k := \sum_{n=0}^{k} A^n \ \ (k = 1, 2, \dots)$$

ряда из правой части (9.1) фундаментальна. Для произвольных $k, m \in \mathbb{N}$ оценим

$$\|S_{m+k} - S_k\| = \Big\| \sum_{n=k+1}^{m+k} A^n \Big\| \leq \sum_{n=k+1}^{m+k} \|A\|^n = \frac{\|A\|^{k+1}(1 - \|A\|^m)}{1 - \|A\|} \leq \|A\|^{k+1}.$$

Так как $\|A\| < 1$, то правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $k \to \infty$. Следовательно, последовательность $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна и поэтому имеет предел в банаховом пространстве $\mathbb{L}(X)$ (см. теорему 5.3). Обозначим его через S. Осталось показать, что $S = (I - A)^{-1}$.

С одной стороны, так как $\|A\|^k \to 0$ при $k \to \infty$, то

$$(I - A)S_k = \sum_{n=0}^{k} A^n - \sum_{n=1}^{k+1} A^n = I - A^{k+1} \to I.$$

С другой стороны, по лемме 9.1 $(I-A)S_k \to (I-A)S$. Таким образом, $(I-A)S = I$. Совершенно аналогично можно показать, что $S(I - A) = I$. Тем самым теорема доказана. $\square$

Следствие 9.1. *Если $A \in \mathbb{L}(X)$, то для всех достаточно малых $t \in \mathbb{C}$ существует обратный оператор $(I - tA)^{-1}$, и, кроме того, $(I - tA)^{-1} \to I$ при $t \to 0$.*

Доказательство. Если $A = \Theta$ (нулевой оператор), утверждение очевидно. Поэтому можно предположить, что $A \neq \Theta$.

Пусть $|t| < 1/\|A\|$. Тогда $\|tA\| < 1$, и, значит, по теореме 9.2 оператор $(I-tA)^{-1}$ существует. Кроме того, если $z(t) := (I - tA)^{-1}$, то опять ввиду теоремы 9.2

$$z(t) = I + \sum_{n=1}^{\infty} (tA)^n.$$

Так как

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} (tA)^n \Big\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|t|\|A\|)^n = \frac{|t|\|A\|}{1 - |t|\|A\|} \to 0 \text{ при } t \to 0,$$

то второе слагаемое в предыдущем равенстве стремится к нулю в операторной норме. Следовательно, $z(t) \to I$. $\square$

Следствие 9.2. *Пусть оператор $A_0 \in \mathbb{L}(X)$ обратим, а оператор $A \in \mathbb{L}(X)$ такой, что $\|A\| < \frac{1}{\|A_0^{-1}\|}$. Тогда оператор $A_1 := A_0 + A$ также обратим и $A_1^{-1} = (I + A_0^{-1}A)^{-1} \cdot A_0^{-1}$.*

Отсюда, в частности, следует, что множество $\mathcal{U}$ всех обратимых операторов в X открыто в $\mathbb{L}(X)$, а множество $\mathcal{F}$ всех необратимых операторов замкнуто.

Доказательство. Обозначим $C := -A_0^{-1}A$. Тогда по условию $\|C\| \leq \|A\|\|A_0^{-1}\| < 1$, и значит, по теореме 9.2 существует $(I - C)^{-1}$. Так как

$$A_1 = A_0 + A = A_0(I + A_0^{-1}A) = A_0(I - C),$$

а произведение обратимых операторов — обратимый оператор, то A_1 также обратим, и

$$A_1^{-1} = (A_0(I - C))^{-1} = (I - C)^{-1}A_0^{-1} = (I + A_0^{-1}A)^{-1} \cdot A_0^{-1}.$$

Таким образом, для каждого $A_0 \in \mathcal{U}$ существует такое $r > 0$, что шар (относительно операторной нормы) $S_r(A_0) \subset \mathcal{U}$. Следовательно, множество $\mathcal{U}$ открыто. Множество $\mathcal{F}$ замкнуто в $\mathbb{L}(X)$, как дополнение открытого множества. $\square$

9.2 Спектр и резольвента линейного ограниченного оператора в ЛНП и их свойства.

Пусть X —- ЛНП над полем $\mathbb{C}$, $A : X \to X$ — линейный ограниченный оператор и, как и ранее, $I : X \to X$ — тождественный оператор.

Определение 9.1. *Спектром* оператора A называется множество

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad \text{оператор } \ \lambda I - A \ \text{ не обратим}\}.$$

Дополнение $\sigma(A)$ в комплексной плоскости, т.е. множество $\rho(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$, называется *резольвентным множеством* оператора A. Иначе говоря, $\rho(A)$ — это множество всех таких $\lambda \in \mathbb{C}$, что существует оператор $A(\lambda) := (\lambda I - A)^{-1}$. Тем самым на $\rho(A)$ определено операторно-значное отображение $\lambda \mapsto A(\lambda) \in \mathbb{L}(X)$, которое называется *резольвентой* оператора A.

Предположим, что $\lambda \in \sigma(A)$, т.е. оператор $\lambda I - A$ не обратим. Для этого есть две возможности: либо этот оператор не инъективен, либо инъективен, но не сюръективен. В зависимости от этого получают две части спектра.

Определение 9.2. *Точечным спектром* оператора A называют множество

$$\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Ker}(\lambda I - A) \neq \{\vec{0}\}\}.$$

Иначе, $\lambda \in \sigma_p(A)$, если найдется такой ненулевой вектор $x \in X$, что $Ax = \lambda x$. Любой такой вектор называется *собственным вектором*, соответствующим *собственному значению* λ.

Определение 9.3. *Остаточным спектром* оператора A называют множество

$$\sigma_r(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Ker}(\lambda I - A) = \{\vec{0}\} \ \text{ и } \ \operatorname{Im}(\lambda I - A) \neq X\}.$$

Из определений ясно, что вся комплексная плоскость разбивается на три непересекающиеся части: резольвентное множество, точечный и остаточный спектры.

Лемма 9.2. *Для любого $A \in \mathbb{L}(X)$ резольвентное множество $\rho(A)$ открыто, а резольвента $A(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ непрерывна на $\rho(A)$. Последнее означает следующее: если $\lambda_0, \lambda \in \rho(A)$ и $\lambda \to \lambda_0$, то $\|A(\lambda) - A(\lambda_0)\|_{\mathbb{L}(X)} \to 0$.*

Доказательство. Если $\lambda_0 \in \rho(A)$, то по определению существует оператор $A(\lambda_0) = (\lambda_0 I - A)^{-1}$. Предположим, что $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|A(\lambda_0)\|}$. Тогда

$$\|(\lambda I - A) - (\lambda_0 I - A)\| = |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|A(\lambda_0)\|},$$

и, значит, ввиду следствия 9.2 оператор $\lambda I - A$ обратим, т.е. $\lambda \in \rho(A)$. Тем самым $\rho(A)$ открыто. Кроме того, если $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$, то

$$A(\lambda) = ((\lambda_0 I - A) + \Delta\lambda I)^{-1} = ((\lambda_0 I - A)(I + \Delta\lambda A(\lambda_0)))^{-1} = (I - \Delta\lambda(-A(\lambda_0)))^{-1} A(\lambda_0).$$

По следствию 9.1 $(I - \Delta\lambda(-A(\lambda_0)))^{-1} \to I$ при $\Delta\lambda \to 0$. Следовательно, из предыдущего равенства ввиду леммы 9.1 получаем, что $A(\lambda) \to I \cdot A(\lambda_0) = A(\lambda_0)$. ☐

Лемма 9.3. *Пусть $\lambda, \mu \in \rho(A)$. Тогда*

1) $A(\lambda) \cdot A(\mu) = A(\mu) \cdot A(\lambda)$;

2) $A(\lambda) - A(\mu) = (\mu - \lambda) A(\lambda) \cdot A(\mu)$.

Доказательство. Первое равенство получается следующим образом:

$$\begin{aligned} A(\lambda) \cdot A(\mu) &= (\lambda I - A)^{-1} (\mu I - A)^{-1} = ((\mu I - A)(\lambda I - A))^{-!} \\ &= ((\lambda I - A)(\mu I - A))^{-!} = A(\mu) \cdot A(\lambda). \end{aligned}$$

Для доказательства второго заметим, что, с одной стороны, ввиду уже доказанного равенства

$$A(\lambda) = A(\lambda) \cdot A(\mu) \cdot (\mu I - A) = A(\mu) \cdot A(\lambda) \cdot (\mu I - A),$$

а с другой,

$$A(\mu) = A(\mu) \cdot A(\lambda) \cdot (\lambda I - A).$$

Тем самым

$$A(\lambda) - A(\mu) = A(\mu) \cdot A(\lambda) \cdot (\mu I - A) - A(\mu) \cdot A(\lambda) \cdot (\lambda I - A) = (\mu - \lambda) A(\mu) \cdot A(\lambda).$$

□

Определение 9.4. Пусть $f : \Omega \to X$, где $\Omega \subset \mathbb{C}$ открыто, а X — ЛНП. Если в точке $\lambda_0 \in \Omega$ существует предел

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}$$

(в смысле сходимости по норме X), то он называется *производной* функции f в точке λ_0 и обозначается $f'(\lambda_0)$.

Теорема 9.2. *Резольвента $A(\lambda)$ как отображение из $\rho(A)$ в $\mathbb{L}(X)$ имеет производную в каждой точке $\lambda_0 \in \rho(A)$, и, кроме того, $A'(\lambda_0) = -A(\lambda_0)^2$.*

Доказательство. Действительно, ввиду лемм 9.3, 9.2 и 9.1 имеем:

$$\begin{aligned} A'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{A(\lambda) - A(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} &= -\lim_{\lambda \to \lambda_0} \big(A(\lambda) A(\lambda_0) \big) \\ &= -\lim_{\lambda \to \lambda_0} A(\lambda) \cdot A(\lambda_0) = -A(\lambda_0)^2. \end{aligned}$$

□

Теорема 9.3. *Для любого линейного ограниченного функционала $f \in \mathbb{L}(X)^*$ функция $F(\lambda) := f(A(\lambda))$ аналитична на $\rho(A)$, и, кроме того,* $\lim_{|\lambda| \to \infty} F(\lambda) = 0$.

Доказательство. Так как ограниченный линейный функционал непрерывен, то ввиду предыдущей теоремы для любой точки $\lambda_0 \in \rho(A)$

$$F'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{F(\lambda) - F(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \to \lambda_0} f\left(\frac{A(\lambda) - A(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right) = -f(A(\lambda_0)^2).$$

Тем самым функция $F(\lambda)$ аналитична на $\rho(A)$.

Далее, оценим

$$|F(\lambda)| = |f(A(\lambda))| \le \|f\|_{\mathbb{L}(X)^*} \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathbb{L}(X)}.$$

Так как ввиду следствия 9.1

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathbb{L}(X)} = \frac{1}{|\lambda|} \Big\| \Big(I - \frac{1}{\lambda} A\Big)^{-1} \Big\|_{\mathbb{L}(X)} \to 0,$$

если $|\lambda| \to \infty$, то правая часть предыдущего неравенства стремится тоже к нулю. В итоге $\lim_{|\lambda|\to\infty} F(\lambda) = 0$, и теорема доказана. □

Теорема 9.4. *Для произвольного $A \in \mathbb{L}(X)$ его спектр $\sigma(A)$ является непустым компактным множеством в $\mathbb{C}$. При этом*

$$\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \le \|A\|. \tag{9.2}$$

Доказательство. Начнем с доказательства того, что $\sigma(A) \neq \varnothing$. Если предположить, что $\sigma(A) = \varnothing$, то резольвента $A(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ будет определена на всей комплексной плоскости, а по теореме 9.3 скалярная функция $F(\lambda) := f(A(\lambda))$ будет аналитична на $\mathbb{C}$, т.е. будет целой функцией для каждого $f \in \mathbb{L}(X)^*$. Кроме того, по той же теореме $\lim_{|\lambda|\to\infty} F(\lambda) = 0$. Но тогда ввиду теоремы Лиувилля из курса теории функций комплексной переменной [7, гл. 2, § 6] $F(\lambda) \equiv 0$, или иначе $f(A(\lambda)) \equiv 0$ для всех $f \in \mathbb{L}(X)^*$. Следовательно, по следствию 7.2 из теоремы Хана–Банаха $A(\lambda) \equiv \Theta$, что противоречит определению обратного оператора.

Для доказательства компактности $\sigma(A)$ достаточно показать, что это множество ограничено и замкнуто. Ограниченность, в свою очередь, является очевидным следствием неравенства (9.2). Чтобы доказать (9.2), возьмем такое $\lambda \in \mathbb{C}$, что $|\lambda| > \|A\|$. Если $C := \frac{1}{\lambda} A$, то $\|C\| < 1$, и, значит, по теореме 9.2 оператор $\lambda I - A = \lambda(I - C)$ обратим. Таким образом, $\lambda \notin \sigma(A)$, если $|\lambda| > \|A\|$, и тем самым неравенство (9.2) доказано. Замкнутость $\sigma(A)$ является следствием равенства $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ и того, что по лемме 9.2 резольвентное множество $\rho(A)$ открыто. □

9.3 Спектральный радиус оператора и его вычисление.

Определение 9.5. *Спектральным радиусом* оператора $A \in \mathbb{L}(X)$ называют величину

$$r(A) := \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Иначе говоря, $r(A)$ — радиус наименьшего круга с центром в начале координат на комплексной плоскости, содержащего множество $\sigma(A)$.

Заметим, что предыдущее определение корректно, так как по теореме 9.4 спектр $\sigma(A)$ компактен. Кроме того, из неравенства (9.2), доказанного в той же теореме, следует:

$$r(A) \le \|A\|. \tag{9.3}$$

Получим точную формулу для спектрального радиуса.

Теорема 9.5. *Для произвольного банахова пространства X и любого $A \in \mathbb{L}(X)$ справедлива следующая формула:*

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}. \tag{9.4}$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ таково, что $|\lambda| > \|A\|$. Тогда по теореме 9.2 оператор $\lambda I - A$ обратим и, кроме того, он представим в виде:

$$A(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} = \lambda^{-1}\big(I - \frac{1}{\lambda}A\big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Пусть $f \in \mathbb{L}(X)^*$ произволен. Тогда, так как f линеен и непрерывен, то из предыдущего равенства следует:

$$F(\lambda) := f(A(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(A^n)}{\lambda^{n+1}} \ \ (|\lambda| > \|A\|). \tag{9.5}$$

Функции из левой и правой частей равенства (9.5) аналитичны на множестве $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|A\|\}$. С другой стороны, по определению спектра и теореме 9.3 функция $F(\lambda)$ аналитична на бо́льшем множестве $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(A)\}$. Следовательно, она здесь разлагается в ряд Лорана, который по теореме единственности из курса теории функций комплексной переменной [7, гл. 2, § 6] должен совпадать с рядом, стоящим справа в (9.5). Таким образом, равенство (9.5) справедливо, а соответствующий ряд сходится, если $|\lambda| > r(A)$. В частности, тогда ввиду необходимого признака сходимости ряда

$$\sup_{n=0,1,2,\dots} \frac{|f(A^n)|}{|\lambda|^{n+1}} < \infty. \tag{9.6}$$

Рассмотрим на банаховом пространстве $\mathbb{L}(X)^*$ последовательность функционалов $\varphi_n \in \mathbb{L}(X)^{**}$:

$$\varphi_n(f) := \frac{f(A^n)}{\lambda^{n+1}} \ \ (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Соотношение (9.6) означает, что последовательность $\{\varphi_n\}$ поточечно ограничена. Но тогда по следствию 5.2 она равномерно ограничена, т.е.

$$\sup_{n=0,1,2,\dots} \|\varphi_n\|_{\mathbb{L}(X)^{**}} < \infty.$$

Заметим, что функционал φ_n порождается оператором $A^n/\lambda^{n+1} \in \mathbb{L}(X)$. Ввиду теоремы 7.5 $\mathbb{L}(X)$ изометрически вложено в $\mathbb{L}(X)^{**}$. Следовательно,

$$\|\varphi_n\|_{\mathbb{L}(X)^{**}} = \Big\|\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}\Big\|_{\mathbb{L}(X)} \ \ (n = 0, 1, 2, \dots),$$

откуда

$$C(\lambda) := \sup_{n=0,1,2,\dots} \frac{\|A^n\|_{\mathbb{L}(X)}}{|\lambda|^{n+1}} < \infty.$$

Последнее соотношение можно переписать следующим образом:

$$\|A^n\| \le C(\lambda)|\lambda|^{n+1} \ \ (n = 0, 1, 2, \dots)$$

или после извлечения корня n-ой степени

$$\|A^n\|^{1/n} \le C(\lambda)^{1/n}|\lambda|^{1/n}|\lambda| \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Переходя к верхнему пределу, получим

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \le |\lambda| \limsup_{n\to\infty} C(\lambda)^{1/n}|\lambda|^{1/n} = |\lambda|.$$

Последнее неравенство выполнено при условии, если $|\lambda| > r(A)$. Но тогда из определения спектрального радиуса следует:

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \le r(A). \tag{9.7}$$

Для доказательства противоположного неравенства нам будет нужна лемма. □

Лемма 9.4. *Если $\lambda \in \sigma(A)$, то $\lambda^n \in \sigma(A^n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Легко видеть, что для произвольного $A \in \mathbb{L}(X)$ справедливо следующее операторное равенство:

$$\lambda^n I - A^n = (\lambda I - A)B, \quad \text{где } B := \lambda^{n-1}I + \lambda^{n-2}A + \dots + A^{n-1}. \tag{9.8}$$

Предположим, что утверждение леммы не верно, т.е. существует оператор $(\lambda^n I - A^n)^{-1}$. Умножим равенство (9.8) на этот оператор справа:

$$I = (\lambda I - A) \cdot B \cdot (\lambda^n I - A^n)^{-1}.$$

Отсюда следует, что оператор $C := B \cdot (\lambda^n I - A^n)^{-1}$ является правым обратным к оператору $\lambda I - A$, и значит, последний сюръективен (?). Так как операторы из правой части (9.8) коммутируют, их можно переставить. Если после этого умножить это равенство на $(\lambda^n I - A^n)^{-1}$ слева, то получим:

$$I = (\lambda^n I - A^n)^{-1} \cdot B \cdot (\lambda I - A),$$

т.е. оператор $\lambda I - A$ имеет левый обратный. Тем самым он инъективен (?). В итоге существует обратный оператор $(\lambda I - A)^{-1}$, который по теореме Банаха 5.9 ограничен. Таким образом, $\lambda \notin \sigma(A)$, что противоречит условию. □

Окончание доказательства теоремы 9.5. Пусть $\lambda \in \sigma(A)$. Тогда по лемме 9.4 для всех $n \in \mathbb{N}$ ммеем: $\lambda^n \in \sigma(A^n)$, и, значит, ввиду неравенства (9.2) $|\lambda|^n \le \|A^n\|$. Отсюда

$$|\lambda| \le \liminf_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Так как последнее неравенство выполнено для всех $\lambda \in \sigma(A)$, то по определению спектрального радиуса получаем:

$$r(A) \le \liminf_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Отсюда и из (9.7) вытекает (9.4), и теорема доказана. □

Пример 9.1. Найдем спектральный радиус, спектр и резольвенту оператора $A : C[0,1] \to C[0,1]$, определяемого равенством:

$$Ax(t) := \int_0^t x(s)\,ds.$$

Прежде всего, "вычислим" степень этого оператора. Меняя порядок интегрирования, получим:

$$A^2x(t) = \int_0^t Ax(s)\,ds = \int_0^t \int_0^s x(u)\,du\,ds = \int_0^t \int_u^t x(u)\,ds\,du = \int_0^t x(u)(t-u)\,du.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} A^3x(t) &= \int_0^t \int_0^s x(u)(s-u)\,du\,ds = \int_0^t \int_u^t x(u)(s-u)\,ds\,du \\ &= \int_0^t x(u) \int_u^t (s-u)\,ds\,du = \int_0^t x(u)\frac{(t-u)^2}{2}\,du. \end{aligned}$$

В итоге нетрудно догадаться, что

$$A^nx(t) = \int_0^t x(u)\frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,du \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Оценим норму оператора A^n. Так как $\|x\|_C = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$, то для произвольных $x \in C[0,1]$ и $t \in [0,1]$

$$|A^nx(t)| \le \int_0^t |x(u)|\frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,du \le \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-u)^{n-1}\,du \cdot \|x\| = \frac{t^n}{n!}\cdot\|x\|,$$

откуда $\|A^nx\| \le 1/(n!)\cdot\|x\|$. Тем самым по определению нормы оператора $\|A^n\| \le 1/(n!)$ или

$$\|A^n\|^{1/n} \le (n!)^{-1/n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Так как $\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n} = \infty$ (?), то в итоге

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = 0.$$

Отсюда, в частности, ввиду определения спектрального радиуса и теоремы 9.4 следует, чтл $\sigma(A) = \{0\}$. Так как после дифференцирования равенства $\int_0^t x(s)\,ds = 0$ мы получаем: $x(t) = 0$ п.в., то $\lambda = 0$ — не собственное значение. Следовательно, $\sigma_r(A) = \sigma(A) = \{0\}$.

Для того, чтобы найти резольвенту оператора A, воспользуемся теоремой 9.2, а также ранее найденным выражением для степеней этого оператора: если $\lambda \ne 0$, то для произвольной функции $y(t) \in C[0,1]$

$$\begin{aligned} A(\lambda)y(t) &= (\lambda I - A)^{-1}y(t) = \frac{1}{\lambda}y(t) + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^t y(s)\,ds + \dots + \frac{1}{\lambda^{n+1}}\int_0^t y(s)\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,ds + \dots \\ &= \frac{1}{\lambda}y(t) + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^t y(s)\Big(1 + \frac{t-s}{\lambda} + \dots + \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!\lambda^{n-1}} + \dots\Big)\,ds \\ &= \frac{1}{\lambda}y(t) + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^t y(s)\exp\Big(\frac{t-s}{\lambda}\Big)\,ds. \end{aligned}$$

9.4 Спектральные свойства компактных и самосопряженных операторов.

Всюду в этом параграфе H — полное сепарабельное гильбертово пространство над полем комплексных чисел.

Теорема 9.6. *Спектр $\sigma(A)$ любого линейного компактного оператора $A: H \to H$ — не более чем счетное множество, не имеющее предельных точек, отли чных от нуля. Все ненулевые $\lambda \in \sigma(A)$ являются собственными значениями оператора A конечной кратности (т.е. ядро $\operatorname{Ker}(\lambda I - A)$ конечномерно).*

Доказательство. Покажем сначала, что любая точка $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq 0$, является собственным значением оператора A. Действительно, если $\lambda \notin \sigma_p(A)$ и $\lambda \neq 0$, то по теореме 8.3 $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = H$. Следовательно, оператор $\lambda I - A$ инъективен и сюръективен, т.е. $\lambda \in \rho(A)$.

Покажем теперь, что точки $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq 0$, изолированы. Предположим противное: $\lambda_n \in \sigma(A)$ и $\lambda_n \to \lambda \neq 0$. Тогда, как уже доказано, $\lambda_n \in \sigma_p(A)$. Пусть x_n — собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_n. Обозначим через L_n подпространство $\lambda(\{x_1, \ldots, x_n\})$. Так как множество $\{x_1, \ldots, x_n\}$ линейно независимо (?), то $L_{n-1} \subset L_n$ и $L_{n-1} \neq L_n$. Поэтому по лемме 6.2 (см. также задачу 6.7) существует $y_n \in L_n$, $\|y_n\| = 1$, такой, что $\rho(y_n, L_{n-1}) = 1$. Рассмотрим последовательность $x_n := y_n/\lambda_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Так как $\|y_n\| = 1$ и $\lambda_n \to \lambda \neq 0$, то она ограничена. Далее, при любых $k < n$ имеем:

$$\frac{Ay_n}{\lambda_n} - \frac{Ay_k}{\lambda_k} = y_n - \Big[\frac{Ay_k}{\lambda_k} - \frac{(A - \lambda_n)y_n}{\lambda_n}\Big].$$

Заметим, что $Ay_k \in L_{n-1}$. Кроме того, из равенства $Ax_n = \lambda_n x_n$ следует: $(A - \lambda_n)x_n \in L_{n-1}$. Значит, элемент в квадратных скобках из правой части предыдущего соотношения принадлежит пространству l_{n-1}. Тем самым по определению расстояния $\rho(y_n, L_{n-1})$

$$\Big\|\frac{Ay_n}{\lambda_n} - \frac{Ay_k}{\lambda_k}\Big\| \geq 1.$$

В итоге мы получаем, что из последовательности $\{Ax_n\}$, где $\{x_n\}$ ограничена, нельзя выделить фундаменткльной подпоследоваельности. Это противорецит компактности оператора A.

Осталось доказать конечную кратность собственных значений, отличных от нуля. Действительно, пусть $\lambda \in \sigma_p(A)$ и $\lambda \neq 0$. Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \operatorname{Ker}(\lambda I - A)$ — произвольная ограниченная последовательность, то ввиду компактности A из последовательности $\{Ax_n\}$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность. Равенство $x_n = \lambda^{-1}Ax_n$ показывает, что аналогичное утверждение справедливо и для $\{x_n\}$. Тем самым в ЛНП $\operatorname{Ker}(\lambda I - A)$ любое ограниченное подмножество предкомпактно. Следовательно, по теореме 6.10 подпространство $\operatorname{Ker}(\lambda I - A)$ конечномерно. □

Теорема 9.7. *Все собственные значения самосопряженного оператора вещественны, а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Пусть $A : H \to H$ — самосопряженный оператор. Если λ — его собственное значение, то умножая равенство $Ax = \lambda x$ скалярно на x, получим: $(Ax, x) = \lambda(x, x)$. Так как $(x, x) > 0$ по одному из свойств скалярного произведения, а (Ax, x) вещественно по лемме 6.1, то и число λ вещественно.

Если λ и μ — собственные значения оператора A, $\lambda \neq \mu$, а x и y — отвечающие им собственные векторы, то по-доказанному

$$(Ax, y) = \lambda(x, y) \ \text{ и } \ (Ax, y) = \lambda(x, A^* y) = \lambda(x, Ay) = \bar{\mu}(x, y) = \mu(x, y),$$

откуда $\lambda(x, y) = \mu(x, y)$. Так как $\lambda \neq \mu$, то $(x, y) = 0$, и теорема доказана. $\square$

Литература

[1] *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974. — 480 с.

[2] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 542 с.

[3] *Шилов Г. Е.* Математический анализ (функции одной переменной), части 1–2. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

[4] *Шилов Г. Е.* Математический анализ (функции одной переменной), часть 3. — М.: Наука, 1970. — 352 с.

[5] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 2. — М.: Наука, 1969. — 800 с.

[6] *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Кратеий курс функцирнального анализа. — М.: Высшая школа, 1982. — 271 с.

[7] *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч.1. Функции одного переменного. — М.: Наука, 1976. — 320 с.

[8] *Банах С.* Теория линейных операций. — Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2001. — 272 с.

[9] *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975. — 443 с.

[10] *Дэй М. М.* Нормированные линейные пространства. — М.: Издательство иностранной литературы, 1961. — 232 с.

[11] *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1969. — 1071 с.

[12] *Рисс Ф, Секефальви–Надь Б* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979. — 587 с.

[13] *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функцирнального анализа. — М.: Наука, 1979. — 380 с.

[14] *Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В.* Задачи и упражнения по функцирнальному анализу. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 208 с.

[15] *Босс В.* Лекции по математике. Т.5. Функциональный анализ. — М.: КомКнига, 2005. — 216 с.

[16] *Хелемский А. Я.* Лекции по функциональному анализу. — М.: МЦНМО, 2004. — 552 с.

[17] *Луговая Г. Д., Шестнев А. Н.* Функцирнальный анализ: Специальные курсы: Учебное пособие. — Издательство ЛКИ, 2008. — 256 с.

[18] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды, т.1. — М.: Мир, 1965. — 615 с.

[19] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды, т.2. — М.: Мир, 1965. — 537 с.

[20] *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 742 с.

[21] *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966. — 499 с.

Сокращения и обозначения

(?) — проверить или доказать сформулированное до этого утверждение в качестве упражнения

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел

$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел

$\operatorname{sign} a$ — знак числа $a \in \mathbb{R}$ ($\operatorname{sign} 0 = 0$)

$\bar{\alpha}$ — комплексно-сопряженное число к числу $\alpha \in \mathbb{C}$

$\Re\alpha$ — вещественная часть числа $\alpha \in \mathbb{C}$

ЛП — линейное пространство

$\vec{0}$ — нуль-вектор в ЛП

$\dim E$ — размерность ЛП E

$\lambda(F)$ — линейная оболочка множества F в ЛП

$\operatorname{Ker} A$ — ядро линейного оператора A

$\operatorname{Im} A$ — образ линейного оператора A

A^{-1} — оператор, обратный к оператору (отображению) A

BA — произведение (суперпозиция) операторов A и B

$\rho(x, y)$ — метрика (расстояние) в метрическом пространстве

ЛНП — линейное нормированное пространство

$\|x\|$ — норма элемента x в ЛНП

$\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) — множество всех упорядоченных наборов вещественных (комплексных) чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\mathbb{R}^n_p$ ($\mathbb{C}^n_p$) — ЛНП всех упорядоченных наборов вещественных (комплексных) чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с нормой $\|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \Big)^{1/p}$ $(1 \le p < \infty)$

$\mathbb{R}^n_\infty$ ($\mathbb{C}^n_\infty$) — ЛНП всех упорядоченных наборов вещественных (комплексных) чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с нормой $\|x\|_\infty = \max_{k=1,2,\dots,n} |x_k|$

l_∞ ($l^{\mathbb{C}}_\infty$) — пространство всех ограниченных последовательностей вещественных (комплексных) чисел $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ с нормой $\|x\|_\infty = \sup_{k=1,2,\dots} |x_k|$

l_p ($l_p^{\mathbb{C}}$) — пространство всех последовательностей вещественных (комплексных) чисел $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$, таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, с нормой $\|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{1/p}$ $(1 \le p < \infty)$

$C[a, b]$ — пространство всех непрерывных вещественнозначных функций, определенных на $[a, b]$, с нормой $\|x\|_C = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$

$x_n \to x$ — сходимость по норме (по метрике) в линейном нормированном (метрическом) пространстве

$S_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$ и $\bar{S}_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| \le r\}$ — открытый и замкнутый шары в ЛНП с центром x_0 и радиусом r

$L_p(X, \Sigma, \mu)$ ($L_p^{\mathbb{C}}(X, \Sigma, \mu)$) — пространство всех p-суммирумых на пространстве с мерой (X, Σ, μ) вещественнозначных функций (классов эквивалентности) $(1 \le p < \infty)$

$\|f\|_p = \Big(\int_X |f(x)|^p \, d\mu\Big)^{1/p}$ $(1 \le p < \infty)$ — норма в пространстве $L_p(X, \Sigma, \mu)$ ($L_p^{\mathbb{C}}(X, \Sigma, \mu)$)

$L_\infty = L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ — пространство существенно ограниченных на пространстве с мерой (X, Σ, μ) вещественнозначных функций (классов эквивалентности)

$\|f\|_\infty = \operatorname{esssup}_{x\in X} |f(x)| = \inf\{\alpha > 0 : \mu\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = 0\}$ — существенная верхняя грань функции $|f|$

$L_p[a, b]$ $(1 \le p < \infty)$ и $L_\infty[a, b]$ — пространства всех p-суммирумых и соответственно существенно ограниченных относительно меры Лебега функций $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$\| \cdot \|_1 \sim \| \cdot \|_2$ — эквивалентность норм $\| \cdot \|_1$ и $\| \cdot \|_2$

$\tilde{C}_2[a, b]$ — ЛНП всех кусочно-непрерывных функций $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_2 = \Big(\int_a^b f(x)^2 \, dx\Big)^{1/2}$

$C_2[a, b]$ — ЛНП всех непрерывных функций $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_2 = \Big(\int_a^b f(x)^2 \, dx\Big)^{1/2}$

$S_0 = S_0(X, \Sigma, \mu)$ — пространство всех измеримых функций $f : X \to \mathbb{R}$, равных нулю почти всюду относительно меры μ

$\bar{F}$ — замыкание множества F в метрическом пространстве

$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ — декартово произведение множеств X и Y

$x \sim y$ — эквивалентность элементов x и y относительно заданного отношения эквивалентности

$X/\sim$ — фактор-множество множества X относительно заданного на нем отношения эквивалентности $\sim$

X/L — фактор-пространство ЛП X по подпространству L

$\tilde{x}$ — класс эквивалентности, порожденный вектором x ЛП X (элемент фактор-пространства X/L)

ГП — гильбертово пространство

(x, y) — скалярное произведение в ГП

$x \perp y$ — ортогональность векторов x и y (т.е. $(x, y) = 0$)

$x \perp M$ — ортогональность вектора x и множества M (т.е. $(x, y) = 0$ для всех $y \in M$)

$M^{\perp}$ — ортогональное дополнение множества M в ГП

ОНС — ортонормированная система векторов в ГП

$\rho(x_0, E) = \inf_{x \in E} \rho(x_0, x)$ — расстояние от точки x_0 до множества E в метрическом пространстве

$E_1 \oplus E_2$ — прямая сумма линейных подпространств E_1 и E_2

$||A|| = ||A||_{X \to Y} = \sup\limits_{x \in X: ||x||_X \leq 1} ||Ax||_Y$ — норма линейного оператора $A\colon X \to Y$

$\mathbb{L}(X, Y)$ — пространство всех ограниченных линейных операторов $A\colon X \to Y$

X^* — пространство всех линейных ограниченных функционалов $f\colon X \to \mathbb{R}$ (пространство, сопряженное к ЛНП X)

$||f||_{X^*} = \sup\limits_{x \in X: ||x||_X \leq 1} |f(x)|$ — норма функционала $f\colon X \to \mathbb{R}$

A^* — оператор, сопряженный к оператору A

$\tilde{A}^*$ — эрмитово-сопряженный оператор к оператору A в ГП

P_M — проектор ортогонального проектирования в ГП на линейное подпространство M

$\mathbb{L}_c(X, Y)$ — пространство всех компактных линейных операторов $A\colon X \to Y$

X^{**} — второе сопряженное пространство к ЛНП X

$\pi = \pi(x)$ — каноническое вложение ЛНП в его второе сопряженное

$x_n \xrightarrow{w} x$ — слабая сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x

$f_n \xrightarrow{w^*} f$ — слабая* сходимость последовательности линейных ограниченных функционалов $\{f_n\}$ к f

I — тождественный оператор в ЛНП X, т.е. $Ix = x$ $(x \in X)$

$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n}$ $(A^0 = I)$ — степень оператора A

$\sigma(A)$ — спектр оператора A

$\sigma_p(A)$ — точечный спектр (множество собственных значений) оператора A

$\sigma_r(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$ — остаточный спектр оператора A

$\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ — резольвентное множество оператора A

$A(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ $(\lambda \in \rho(A))$ — резольвента оператора A

$r(A)$ — спектральный радиус оператора A