Лабораторная работа № 1
Предел последовательности: определение, свойства

Необходимые понятия и теоремы: определение числовой последовательности, ограниченные и неограниченные последовательности, монотонные последовательности, определение предела последовательности, сходящиеся и расходящиеся последовательности, свойства сходящихся последовательностей.

Литература: [1] с. 81 – 87, [4] с. 87 – 111.

1 Напишите пять первых членов последовательности x_n:

№	x_n	№	x_n	№	x_n	№	x_n
1.1	$\frac{1}{2n+1}$	1.6	$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n$	1.11	$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} 2^n$	1.16	$\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n}$
1.2	$\frac{n+2}{n^3+1}$	1.7	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	1.12	$\frac{5^n+(-3)^n}{n^2}$	1.17	$\frac{\cos n}{n+1}$
1.3	$\frac{n}{2^{n+1}}$	1.8	$(-1)^n \frac{1}{n}$	1.13	$\frac{5^{n+1}+(-3)^n}{2^n}$	1.18	$((-1)^n-1)n$
1.4	$(-1)^n n$	1.9	$\cos n$	1.14	$\sin n$	1.19	$(-1)^n+6n$
1.5	$\frac{n+2}{n+3}$	1.10	$\frac{\ln n}{2^n}$	1.15	$\frac{\sin n}{n^2}$	1.20	$(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2}$

2 Найти формулу для общего члена последовательности, элементами которой являются:

2.1	числа $\{8; 14; 20; 26; 32; \dots\}$	2.11	числа $\{1/2; 1/2; 3/8; 1/4; 5/32; \dots\}$
2.2	корни уравнения $\cos\pi x = 0$	2.12	корни уравнения $\cos(\pi x/2) = 1$
2.3	числа $\{1; 3; 1; 3; 1; \dots\}$	2.13	числа $\{2; 3/2; 4/3; 5/4; 6/5; \dots\}$
2.4	корни уравнения $\sin\pi x = 0$	2.14	корни уравнения $\sin(\pi x/2) = 0$
2.5	числа $\{5; 7; 11; 19; 35; \dots\}$	2.15	числа $\{-0{,}5; 1{,}5; -4{,}5; 13{,}5; \dots\}$
2.6	корни уравнения $\cos\pi x = 1$	2.16	корни уравнения $\cos(\pi x/2) = 0$
2.7	числа $\{0{,}3; 0{,}33; 0{,}333; \dots\}$	2.17	числа $\{-2; -1/2; -4/3; -3/4; \dots\}$
2.8	корни уравнения $\sin\pi x = 1$	2.18	корни уравнения $\sin(\pi x/2) = 1$
2.9	числа $\{1; 2; 6; 24; 120; \dots\}$	2.19	числа $\{-1/10; 1/100; -1/1000; \dots\}$
2.10	корни уравнения $\cos\pi x = -1$	2.20	корни уравнения $\sin\pi x = -1$

3 Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентным способом:

№	x_1	x_{n+1}	№	x_1	x_{n+1}
3.1	1	x_n+2^n	3.11	1/3	$1/(1+x_n)$
3.2	0	$(x_n+1)/(n+1)$	3.12	1	$3\cdot x_n+5\cdot 2^n$
3.3	2	$x_n+3\cdot 2^n$	3.13	2	$x_n/(4+x_n)$
3.4	1	$(n+1)(x_n+1)$	3.14	1	$x_n/(1+x_n)$
3.5	1/2	$1/(2-x_n)$	3.15	3	$(n+1)(x_n+1)$
3.6	1	$3x_n+2^n$	3.16	0	$x_n+7\cdot 2^n$
3.7	3	$x_n/(1+x_n)$	3.17	1	$x_n/(5+x_n)$
3.8	1/2	$2/(3-x_n)$	3.18	2	$4x_n+2^n$
3.9	1	$2\cdot x_n+3\cdot 2^n$	3.19	3	$x_n/(6+x_n)$
3.10	5	$x_n/(5+x_n)$	3.20	1	$x_n+5\cdot 2^n$

4 Выяснить, является ли последовательность a_n ограниченной снизу, ограниченной сверху, ограниченной, монотонной.

№	a_n	№	a_n	№	a_n
4.1	$\dfrac{1}{n+1}$	4.8	$\dfrac{\arcsin(1/n)}{n}$	4.15	$\dfrac{\cos n}{n^2}$
4.2	$\dfrac{(-1)^n}{n^2}$	4.9	$\sin\dfrac{1}{n^2}$	4.16	$\dfrac{2^n+(-1)^n}{n}$
4.3	2^n	4.10	3^{-n}	4.17	$\sqrt{n+2}$
4.4	$\dfrac{2^n}{n!}$	4.11	$\dfrac{n+(-1)^n}{3n-1}$	4.18	$\dfrac{\operatorname{arctg} n}{n}$
4.5	$\lg(1+n)$	4.12	n^2-2n+4	4.19	$n^2-(-1)^n$
4.6	$\dfrac{n+(-1)^n}{n}$	4.13	$\dfrac{(-1)^n}{n!}$	4.20	$(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}$
4.7	$(-1)^n n$	4.14	$(-1)^n n+n$	4.21	$\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

5 Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Указать для $\varepsilon = 2; 0,01$ числа N_ε.

№	a_n	a	№	a_n	a
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
5.1	$(n+1)/(n+4)$	1	5.11	$(3n+1)/(n+6)$	3

1	2	3	4	5	6
5.2	$\frac{2n-2}{n+4}$	2	5.12	$\frac{3n+\sin 3n}{n-6}$	3
5.3	$\frac{n+\cos n}{n+3}$	1	5.13	$\frac{n-1}{n+5}$	1
5.4	$\frac{2n+1}{n-4}$	2	5.14	$\frac{4n+1}{2n+1}$	2
5.5	$\frac{n-3}{2n+1}$	$\frac{1}{2}$	5.15	$\frac{n+\sin n}{2n+4}$	$\frac{1}{2}$
5.6	$\frac{\cos n}{n-3}$	0	5.16	$\frac{2n-3}{2n+5}$	1
5.7	$\frac{2n+6}{2n+7}$	1	5.17	$\frac{2n-3}{n+4}$	2
5.8	$\frac{2n-1}{n+4}$	2	5.18	$\frac{2n+1}{n-6}$	2
5.9	$\frac{n-1}{2n+4}$	$\frac{1}{2}$	5.19	$\frac{3n+\cos n!}{3n+5}$	1
5.10	$\frac{n+1}{n+4}$	1	5.20	$\frac{n}{n+1}$	1

6 Пользуясь отрицанием определения предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$.

№	a_n	a	№	a_n	a
1	2	3	4	5	6
6.1	$\frac{3n+1}{n^2+6}$	1	6.11	$\frac{n+1}{n+4}$	3
6.2	$\frac{3n^2}{n-6}$	2	6.12	$\frac{2n-2}{n+4}$	3
6.3	$\frac{n-1}{n^2+5}$	1	6.13	$\frac{n^2}{n^3+3}$	1
6.4	$\frac{n+1}{2n+1}$	2	6.14	$\frac{2n+1}{6n-4}$	2
6.5	$\frac{n^2}{2n+4}$	$\frac{1}{2}$	6.15	$\frac{n-3}{2n^2+1}$	$\frac{1}{2}$
6.6	$\frac{2n-3}{2n+5}$	0	6.16	$\frac{n^2}{n-3}$	1
6.7	$\frac{2n-3}{n+4}$	1	6.17	$\frac{2n+6}{2n+7}$	2

1	2	3	4	5	6
6.8	$\frac{n+1}{n-6}$	2	6.18	$\frac{n-1}{n+4}$	2
6.9	$\frac{3n}{3n+5}$	$\frac{1}{2}$	6.19	$\frac{n-1}{2n+4}$	1
6.10	$\frac{n+3}{2n+4}$	1	6.20	$\frac{2n+1}{3n-1}$	$\frac{1}{2}$

7 Вычислить пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$:

№	a_n		
	А	Б	В
1	2	3	4
7.1	$\frac{n^2-n+3}{n^3+n^2-5}$	$\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$	$\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+1)!+(2n+3)!}$
7.2	$\frac{3n^2-5}{6n^2+n-2}$	$\frac{3+0{,}5^{n+1}}{0{,}3^n+5}$	$\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$
7.3	$\frac{n^3+n+2}{n^3+n\ \ -1}$	$\frac{(-1)^n\cdot 6^n-5^{n+1}}{5^n-(-1)^{n+1}\cdot 6^{n+1}}$	$\frac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!+(n+1)!}$
7.4	$\frac{n^3-4n^2+n-1}{2n^3+n^2-3}$	$\frac{5^{n+1}+3^{n+1}}{5^n+3^n}$	$\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!-(3n+1)!}$
7.5	$\frac{n^2-2n+4}{n^2-n\ \ +3}$	$\frac{2+0{,}7^{n+1}}{0{,}5^n+1}$	$\frac{(2n+2)!-(2n+1)!}{(2n+3)!+(2n+1)!}$
7.6	$\frac{4n^2-3n+1}{n^2+n-4}$	$\frac{(-1)^n\cdot 3^n-5^{n+1}}{5^n-(-1)^{n+1}\cdot 3^{n+1}}$	$\frac{(5n-1)!+(5n)!}{(5n+2)!+2(5n)!}$
7.7	$\frac{n^3+1}{n^3+n-4}$	$\frac{4^{n+1}+7^{n+1}}{4^n-7^n}$	$\frac{n!+(n+2)!}{n!(3n^2+5)}$
7.8	$\frac{2n^3-n+3}{n^3+n^2-1}$	$\frac{4+0{,}7^{n+1}}{0{,}5^n+5}$	$\frac{(2n-1)!+(2n+1)!}{(6n^2+5n)(2n-1)!}$
7.9	$\frac{2n^2+n+4}{n^2+n\ \ +1}$	$\frac{(-1)^n\cdot 5^n-3^{n+1}}{3^n-(-1)^{n+1}\cdot 5^{n+1}}$	$\frac{(4n+3)!+(4n+1)!}{(4n)!+2\cdot(4n+3)!}$
7.10	$\frac{4n^3-2n+3}{2n^3+n^2+5n+1}$	$\frac{2\cdot 4^{n+1}+3^{n+1}}{2\cdot 4^n-3^n}$	$\frac{(2n+1)!-(2n+2)!}{(2n+3)!+(2n+5)!}$
7.11	$\frac{4n^3-2n+7}{2n^3+n^2-3}$	$\frac{4\cdot 0{,}6^{n+1}}{0{,}5^n+1}$	$\frac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+1)!(3n+5)}$

1	2	3	4
7.12	$\frac{n^2-3n+4}{2n^2+n-3}$	$\frac{(-1)^n\cdot 5^{n+1}-3^{n+2}}{3^n-(-1)^n\cdot 5^n}$	$\frac{(7n+1)!+(7n+2)!}{(7n+3)!-3(7n+4)!}$
7.13	$\frac{5n^2-2n+1}{n^2+4n-8}$	$\frac{4^{n+1}+3\cdot 7^{n+1}}{2\cdot 4^n-7^n}$	$\frac{(4n-1)!-(4n+1)!}{(4n)!+(4n+1)!}$
7.14	$\frac{3n^2+7n+3}{n^3+5}$	$\frac{3+5\cdot 0{,}7^{n+1}}{0{,}5^n-7}$	$\frac{(3n-1)!-(3n+1)!}{(3n)!(n+2)}$
7.15	$\frac{5n^2+n+7}{n^2+2n-3}$	$\frac{(-1)^{n+1}\cdot 9^n-3^{n+1}}{3^n-(-1)^{n+1}\cdot 9^{n+1}}$	$\frac{(5n-1)!+(5n+1)!}{(6n^2+n-7)(5n-1)!}$
7.16	$\frac{n^3+5n-1}{2n^3+n^2-5}$	$\frac{11^{n+1}+9^n}{11^n-9^n}$	$\frac{2\cdot(4n)!+(4n+1)!}{(4n)!+2\cdot(4n+1)!}$
7.17	$\frac{n^2-3}{n^2+4n-2}$	$\frac{0{,}3^n+0{,}7^{n+2}}{0{,}5^n+5}$	$\frac{(8n+1)!-(8n+3)!}{(8n+5)!+6(8n+1)!}$
7.18	$\frac{n^2-n+3}{n^3+n^2-5}$	$\frac{100\cdot 5^n-3^{n+1}}{3^n-25\cdot 5^{n+1}}$	$\frac{3n!+(n+1)!}{n!(n^2+5)}$
7.19	$\frac{4n^2+3n-9}{2n^2+n-4}$	$\frac{3\cdot 5^{n+1}+8^{n+1}}{5^n-8^n}$	$\frac{9n!+(n+1)!}{n!(3n-1)}$
7.20	$\frac{8n-5}{2n+3}$	$\frac{11+0{,}9^{n+1}}{0{,}5^n+5}$	$\frac{(n+1)!+(n+2)!}{3(n+3)!+(n+1)!}$

8 Формулируя определение предела последовательности, студент вместо

8.1 «Выполняется неравенство $|x_n-a|\le\varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n-a\le\varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 5 является пределом последовательности 1, 1, …, 1… .

8.2 «Найдется такое N_ε, что при $n\ge N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n-a|\le\varepsilon$» сказал: «Найдется такое N_ε , что выполняется неравенство $|x_n-a|\le\varepsilon$». Приведите пример не сходящейся последовательности, которая имеет предел при таком определении?

8.3 «Найдется такое N_ε» сказал: «При всех N_ε». Какие последовательности будут иметь предел при таком определении?

8.4 «Для любого $\varepsilon>0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon>0$». Доказать, что при таком определении последовательность 2, 2, 2, … имеет предел 7.

8.5 «Для любого $\varepsilon>0$» сказал: «Для любого ε». Существуют ли последовательности, обладающие пределом при таком определении?

8.6 «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n - a \le \varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 6 является пределом последовательности 3, 3, …, 3… .

8.7 «Для любого $n \ge N_\varepsilon$» сказал: «Для любого n». Какие последовательности будут иметь предел при таком определении?

8.8 «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $|x_n - a| > \varepsilon$». Существуют ли последовательности, обладающие пределом при таком определении? Если возможно, привести пример.

8.9 «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность $(-1)^n$ имеет предел 0.

8.10 «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$». Какие последовательности будут иметь предел при таком определении?

8.11 «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n - a \le \varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 7 является пределом последовательности 4, 4, …, 4… .

8.12 «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность 4, 4, 4, … имеет предел 10.

8.13 «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n - a \le \varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 7 является пределом последовательности $\dfrac{1}{n}$.

8.14 «Для любого $n \ge N_\varepsilon$» сказал: «Для любого $n > N_\varepsilon$». Какие последовательности будут иметь предел при таком определении?

8.15 «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность $(-2)^n$ имеет предел 0.

8.16 «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Для любого $\varepsilon \ge 0$». Какие последовательности не будут иметь предел при таком определении? Привести пример.

8.17 «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n - a \le \varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 8 является пределом последовательности 5, 5, …, 5….

8.18 «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность $(-1)^n + 1$ имеет предел 0.

8.19 «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n - a \le \varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 10 является пределом последовательности 7, 7, …, 7….

8.20 «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность $(-1)^n - 1$ имеет предел 0.

Решение типовых примеров

1.20 Напишите пять первых членов последовательности

$$x_n = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2}$$

Решение. Для последовательности $x_n = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2}$ имеем $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{3}{4}$, $x_3 = \frac{4}{9}$, $x_4 = -\frac{5}{16}$, $x_5 = \frac{6}{25}$.

2.20 Найти формулу для общего члена последовательности, элементами которой являются корни уравнения $\sin \pi x = -1$.

Решение. Решая уравнение $\sin \pi x = -1$, получаем

$$\pi x = -\pi/2 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда $x_n = -1/2 + 2n,\ n \in \mathbb{N}$.

3.20 Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентным способом: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 5\cdot 2^n$.

Решение. Подставляя в рекуррентную формулу вместо x_n его выражение через x_{n-1}, затем вместо x_{n-1} его выражение через x_{n-2} и так далее, получим

$$x_{n+1} = x_n + 5\cdot 2^n = (x_{n-1} + 5\cdot 2^{n-1}) + 5\cdot 2^n = x_{n-1} + 5\cdot(2^{n-1} + 2^n) =$$
$$= (x_{n-2} + 5\cdot 2^{n-2}) + 5\cdot(2^{n-1} + 2^n) = x_{n-2} + 5\cdot(2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^n) = \ldots$$
$$= 1 + 5\cdot(2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n) = 1 + 5\cdot\frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 1 + 10\cdot(2^n - 1).$$

Таким образом, формула общего члена последовательности имеет вид:

$$x_n = 1 + 10\cdot(2^{n-1} - 1).$$

4.20 Выяснить, является ли последовательность a_n ограниченной снизу, ограниченной сверху, ограниченной, монотонной.

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2}$$

Решение. Поскольку $|a_n| = \left|(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2}\right| = \frac{n+1}{n^2} \le 2$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то последовательность является ограниченной, а, значит, ограниченной сверху и снизу.

Так как $a_3 > a_4$ и $a_4 < a_5$, видно, что определение монотонности не выполняется. Значит, последовательность $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}$ не является монотонной.

5.20 Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$. Указать для $\varepsilon = 2;\, 0{,}01$ числа N_ε.

Решение. Приведем определение предела последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon>0\,\exists\, N_\varepsilon\in\mathbb{N}\;\; \forall n\ge N_\varepsilon : |a_n - a|\le\varepsilon .$$

Возьмем любое $\varepsilon>0$. Найдем номер N_ε.

Из неравенства $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|\le\varepsilon$ получим $\dfrac{1}{n+1}\le\varepsilon$. Отсюда $n\ge\dfrac{1}{\varepsilon}-1$.

Если взять $N_\varepsilon=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$ (так как при $\varepsilon\ge1$ получим $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]=0\notin\mathbb{N}$), то для всех номеров $n\ge N_\varepsilon$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|\le\varepsilon$.

Например, при $\varepsilon=0{,}01$ последнее неравенство справедливо для членов последовательности с номерами 99, 100, …, а при $\varepsilon=2$ неравенство верно $\forall n\in\mathbb{N}$.

6.20 Пользуясь отрицанием определения предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n-1}\ne\dfrac{1}{2}$.

Решение. Построим отрицание определения предела последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ne a \;\Leftrightarrow\; \exists\varepsilon>0\,\forall\, N\in\mathbb{N}\;\; \exists n\ge N : |a_n - a|>\varepsilon$$

Оценим $\left|\dfrac{2n+1}{3n-1}-\dfrac{1}{2}\right|$. Будем иметь:

$$\left|\frac{2n+1}{3n-1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{n+3}{2\cdot(3n-1)}\right|=\frac{n+3}{2\cdot(3n-1)}>\frac{n+3}{6n}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2n}>\frac{1}{6},\text{ для } \forall n\in\mathbb{N}.$$

Следовательно, при $\varepsilon=\dfrac{1}{6}$ имеем $\left|\dfrac{2n+1}{3n-1}-\dfrac{1}{2}\right|>\varepsilon\;\;\forall n\in\mathbb{N}$. Это означает, что число $1/2$ не является пределом данной последовательности.

7.20 Вычислить пределы:

А) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n-5}{2n+3}$; **Б)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{11+0{,}9^{n+1}}{0{,}5^n+5}$**;** **В)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{3\cdot(n+3)!}$**.**

Решение.

А) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n-5}{2n+3}=\left[\!\!\left[\begin{array}{c}\text{разделим}\\ \text{числитель}\\ \text{и знаменатель}\\ \text{на n}\end{array}\right]\!\!\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{8-\frac{5}{n}}{2+\frac{3}{n}}=\left[\!\!\left[\begin{array}{c}\text{по свойствам}\\ \text{пределов}\end{array}\right]\!\!\right]=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8-\frac{5}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)}=\left[\!\!\left[\begin{array}{c}\text{по свойствам}\\ \text{пределов}\end{array}\right]\!\!\right]=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}8-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{8-0}{2+0}=\frac{8}{2}=4;$$

Б) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{11+0{,}9^{n+1}}{0{,}5^n+5}=\text{ по свойствам пределов }=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(11+0{,}9^{n+1})}{\lim\limits_{n\to\infty}(0{,}5^n+5)}=$$

$$=\text{ по свойствам пределов }=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}11+\lim\limits_{n\to\infty}0{,}9^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}0{,}5^n+\lim\limits_{n\to\infty}5}=\frac{11+0}{0+5}=\frac{11}{5};$$

В) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+(n+2)!}{3\cdot(n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{(n+1)!}{(n+3)!}+\frac{(n+2)!}{(n+3)!}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+2)(n+3)}+\frac{(n+2)!}{(n+2)!(n+3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+3)}\right)=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+3)}=0.$$

8.20 «Для любого $\varepsilon>0$» – «хотя бы для одного $\varepsilon>0$». Доказать, что при таком определении последовательность $(-1)^n-1$ имеет предел 0.

Решение. Приведем определение предела последовательности.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\iff\forall\varepsilon>0\,\exists\,N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \ \forall n\geq N_\varepsilon:|x_n-a|\leq\varepsilon.$$

Заметим, что последовательность $(-1)^n-1$ не сходится, так как при $n=2k,\ k\in\mathbb{N},$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, а при $n=2k+1,\ k\in\mathbb{N},$ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-2$.

С другой стороны, согласно определению предела последовательности, данному студентом, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \exists\varepsilon>0\,\exists\, N_\varepsilon\in\mathbb{N}\;\; \forall n\ge N_\varepsilon : |x_n - a| \le \varepsilon .$$

Возьмем, например, $\varepsilon = 5$. При $n = 2k, k\in\mathbb{N}$, имеем $\left|(-1)^n - 1 - 0\right| = 0 < 5$. При $n = 2k+1, k\in\mathbb{N}$, получим $\left|(-1)^n - 1 - 0\right| = 2 < 5$. Тогда для $\varepsilon = 5$ и $N_\varepsilon = 1$ при $\forall n \ge N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - 0| \le \varepsilon$. Следовательно, последовательность $(-1)^n - 1$ имеет предел, равный нулю, при таком определении.

Лабораторная работа № 2
Предел и неравенства

Необходимые понятия и теоремы: фундаментальная последовательность, критерий Коши, теорема о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, число e, бесконечно малые последовательности, теорема о произведении бесконечно малой последовательности на ограниченную, теоремы о пределах, связанные с неравенствами, частичные пределы, верхний и нижний пределы последовательности.

Литература: [1] с. 90 – 95, 97 – 99, [4] с. 87 – 111, 136.

1 Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость или расходимость последовательности x_n:

№	x_n	№	x_n
1	*2*	*3*	*4*
1.1	$\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\ldots+\frac{\sin n}{2^n}$	1.11	$\frac{\sin 1}{3}+\frac{\sin 2}{3^2}+\ldots+\frac{\sin n}{3^n}$
1.2	$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$	1.12	$\frac{2}{3^2}+\frac{3}{4^2}\ldots+\frac{n+1}{(n+2)^2}$
1.3	$\frac{\cos 1}{2}+\frac{\cos 2}{2^2}+\ldots+\frac{\cos n}{2^n}$	1.13	$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$
1.4	$\frac{1}{2^3}+\frac{2^2}{3^3}+\ldots+\frac{n^2}{(n+1)^3}$	1.14	$\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{n}{(n+1)^2}$
1.5	$\frac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\frac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{\cos n!}{n\cdot(n+1)}$	1.15	$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$
1.6	$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$	1.16	$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}$
1.7	$\frac{\sin 1!}{1\cdot 2}+\frac{\sin 2!}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{\sin n!}{n\cdot(n+1)}$	1.17	$\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{1}{2^2}+\ldots+\arcsin\frac{1}{2^n}$

1	*2*	*3*	*4*
1.8	$\frac{\cos 1!}{5+1}+\frac{\cos 2!}{5^2+1}+\ldots+\frac{\cos n!}{5^n+1}$	1.18	$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$
1.9	$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$	1.19	$a_0+a_1q+\ldots+a_nq^n$, где $\lvert a_k\rvert<M$, $\lvert q\rvert<1$
1.10	$1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$	1.20	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\ \forall k=\overline{1,n}$

2 Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности x_n:

№	x_n	№	x_n
2.1	$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\ldots+\frac{1}{9^n}$	2.11	$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$
2.2	$\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+2}+\ldots+\frac{1}{2^n+n}$	2.12	$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n\ корней}$
2.3	$1+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}$	2.13	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}$
2.4	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n!}$	2.14	$\frac{1}{7+1}+\frac{1}{7^2+2}+\ldots+\frac{1}{7^n+n}$
2.5	$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$	2.15	$1+\frac{2}{10}+\frac{2}{10^2}+\ldots+\frac{2}{10^n}$
2.6	$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$	2.16	$\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}$
2.7	$\underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{3}}}}}_{n\ корней}$	2.17	$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{3^n}\right)$
2.8	$\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+9}{2n-1}$	2.18	$\frac{1}{4+1}+\frac{1}{4^2+2}+\ldots+\frac{1}{4^n+n}$
2.9	$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots+\frac{1}{10^n}$	2.19	$\underbrace{\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\ldots+\sqrt{5}}}}}_{n\ корней}$
2.10	$\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+2}+\ldots+\frac{1}{3^n+n}$	2.20	$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

3 Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$:

№	x_n		
	А	Б	В
1	*2*	*3*	*4*
3.1	$(\sqrt{2n^2-1}-2n)$	$\left(1+\frac{1}{8n}\right)^{8n+5}$	$\frac{(-1)^n+7}{7n^3+2}$
3.2	$(\sqrt{9n^2-5n}-3n)$	$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+7}$	$\frac{\sin n!}{\sqrt[3]{n+1}}$
3.3	$(\sqrt{n^2-4n-5}-n)$	$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+3}$	$\frac{\ln(5+1/n)}{n^2+1}$
3.4	$(\sqrt{n(n+5)}-n)$	$\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^{3n+3}$	$\frac{\arccos 1/n}{n^2+4}$
3.5	$(\sqrt{n^2+5}-n)$	$\left(\frac{5n+2}{5n}\right)^{5n/2+1}$	$\frac{\cos n!}{\sqrt{n+4}}$
3.6	$(n+\sqrt[3]{4-n^3})$	$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+3}$	$\frac{\operatorname{arctg} n^2}{2n^2+n}$
3.7	$(\sqrt{9n^2+4}-3n)$	$\left(\frac{1+11n}{11n}\right)^{11n+1}$	$\frac{(-1)^n+3}{4n^3+2}$
3.8	$(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^2})$	$\left(\frac{n+6}{n}\right)^{n/6+6}$	$\frac{\arcsin 1/n}{n^2+4}$
3.9	$(\sqrt{n^2-8n+5}-n)$	$\left(\frac{3+2n}{2n}\right)^{2n/3+1}$	$\frac{\cos n^2}{2n^2+n}$
3.10	$(\sqrt{4n^2-1}-2n)$	$\left(\frac{7n+1}{7n}\right)^{7n+7}$	$\frac{\sin n!}{\sqrt{n+1}}$
3.11	$(\sqrt{n^2+4n+8}-n)$	$\left(\frac{4+n}{n}\right)^{n/4+9}$	$\frac{\operatorname{arctg} n!}{3^n+5}$
3.12	$(\sqrt{2n^2-6}-\sqrt{2n^2-7n})$	$\left(\frac{1+9n}{9n}\right)^{9n+9}$	$\frac{\cos n!}{\sqrt[3]{7n^2-1}}$
3.13	$(\sqrt{n^2+1}-n)$	$\left(\frac{13n+1}{13n}\right)^{13n+13}$	$\frac{(-1)^n+8}{3^n+5^n}$
3.14	$(\sqrt{4n^2-6}-\sqrt{4n^2-5n})$	$\left(\frac{10n+1}{10n}\right)^{10n+10}$	$\frac{2n\sin 2n}{n^2+1}$

1	2	3	4
3.15	$(\sqrt{n^2+1}-n)$	$\left(\dfrac{0{,}1n+1}{0{,}1n}\right)^{0{,}1n+5}$	$\dfrac{(-1)^n\cos n}{7^n+2\cdot 5^n}$
3.16	$(\sqrt{16n^2-3n}-4n)$	$\left(\dfrac{25n+1}{25n}\right)^{25n+1}$	$\dfrac{(-1)^n+8}{3^n+5^n}$
3.17	$(\sqrt{n^2-7n+3}-n)$	$\left(\dfrac{0{,}3n+1}{0{,}3n}\right)^{0{,}3n+3}$	$\dfrac{\operatorname{arcctg} n^2}{e^{n+1}}$
3.18	$(\sqrt{9n^2-3}-3n)$	$\left(\dfrac{2n+9}{2n}\right)^{2n/9+7}$	$\dfrac{\ln(2+1/n)}{n^2}$
3.19	$(\sqrt{n^2-7n+3}-n)$	$\left(\dfrac{1+0{,}2n}{0{,}2n}\right)^{0{,}2n+3}$	$\dfrac{2n\cos n}{n^2+4}$
3.20	$\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n\ \ +1}\right)$	$\left(\dfrac{27n+1}{27n}\right)^{27n+1}$	$\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$

4 Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$:

№	x_n		
	А	Б	В
1	2	3	4
4.1	$\sqrt[5n]{5n+5}$	$\dfrac{3^n}{n!}$	$\sqrt[n]{\dfrac{n^2+4^n}{n+5^n}}$
4.2	$\sqrt[n]{n^2}$	$\dfrac{1}{0{,}3^n n!}$	$\dfrac{\log_5(n^2+1)}{n}$
4.3	$\sqrt[n]{\dfrac{3n+2}{n+5}}$	$\dfrac{n}{2^n}$	$\dfrac{4^n+n^2\cdot 2^n-1}{n^4+(n!)^2}$
4.4	$\sqrt[n]{5n}$	$\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n+3}$	$\dfrac{(-3)^{n^2-n}}{(n^3)!}$
4.5	$\sqrt[n^2]{6}$	$\dfrac{n^{20}}{20^n}$	$\sqrt[3n]{\dfrac{n^4-2n+3}{n^2+1}}$
4.6	$\sqrt[2n]{2n}$	$\dfrac{1}{0{,}8^n n!}$	$\dfrac{n-\lg n}{\log_2(4^n+1)}$
4.7	$\sqrt[n]{8^n+3^n}$	$\left(1+\dfrac{1}{5n}\right)^{n+1}$	$\sqrt[n]{\frac{10}{n}-\frac{1}{1{,}2^n}}$

1	2	3	4
4.8	$\sqrt[n]{n+5}$	$\dfrac{200^n}{n!}$	$\left(\dfrac{7}{10}+\dfrac{29}{100}+\ldots+\dfrac{2^n+5^n}{10^n}\right)$
4.9	$\sqrt[n]{\dfrac{5n+1}{n+5}}$	$\left(\dfrac{1+3n}{3n}\right)^{n-3}$	$n\left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^n$
4.10	$\sqrt[n]{2n+4}$	$\dfrac{100^n}{n!}$	$\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{1}{2n}}$
4.11	$\sqrt[n]{2^n+5^n}$	$\left(\dfrac{1+9n}{9n}\right)^{n-1}$	$\dfrac{10^n+n!}{2^n+(n+1)!}$
4.12	$\sqrt[2n]{0{,}5}$	$n^3/3^n$	$n^{1/\sqrt{n}}$
4.13	$\sqrt[13n]{13n+13}$	$\left(\dfrac{1+7n}{7n}\right)^{n+2}$	$\left(\dfrac{3}{1-\sqrt[n]{8}}-\dfrac{5}{1-\sqrt[n]{32}}\right)$
4.14	$\sqrt[n^2]{9}$	$\dfrac{n^2}{5^n}$	$\dfrac{\ln(n^2-n+1)}{\ln(n^{10}+n+1)}$
4.15	$\sqrt[n^2]{2n^2+8}$	$\dfrac{n}{5^n}$	$\dfrac{2^{n/2}+(n+1)!}{n(3^n+n!)}$
4.16	$\sqrt[n^3]{5}$	$\dfrac{(-2)^n}{(n+2)!}$	$\left(\sqrt[n^2]{\dfrac{n-1}{n+1}}+\sqrt[n]{3^n n^3+2}\right)$
4.17	$\sqrt[3n]{125}$	$\dfrac{n^{10}}{10^n}$	$\dfrac{(2+n)^{100}-n^{100}-200n^{99}}{n^{98}-10n^2+1}$
4.18	$\sqrt[n]{\dfrac{n+2}{n+5}}$	$\left(1+\dfrac{1}{25n}\right)^{n-25}$	$n^2\left(\left(1+\dfrac{10}{n}\right)^{20}-\left(1+\dfrac{20}{n}\right)^{10}\right)$
4.19	$\sqrt[n]{n^3+3n}$	$\dfrac{n}{7^n}$	$\dfrac{\ln(n^3-n+1)}{\ln(n^6+n+1)}$
4.20	$\sqrt[3n]{8}$	$2^n/n!$	$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}$

5 Для последовательности x_n найти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$:

№	x_n	№	x_n
1	2	3	4
5.1	$\dfrac{n^2\sin(\pi n/2)+1}{n+1}\qquad\cos(\pi n/3)$	5.11	$n\cos(\pi n/2)$

5.2	$\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}n^{(-1)^n}$	5.12	$\frac{(-1)^n}{n+1}-\frac{1+(-1)^n}{2}$
1	*2*	*3*	*4*
5.3	$n^{(-1)^n}$	5.13	$3^{(-1)^n n}$
5.4		5.14	$\frac{n^2\cos(\pi n/2)+3}{n+2}$
5.5	$\cos(\pi n/4)+(-1)^n$	5.15	$\sin(\pi n/4)-(-1)^n$
5.6	$5^{(-1)^{n+1}}$	5.16	$(n+1)^{(-1)^n}$
5.7	$\sin(\pi n/3)$	5.17	$n\sin(\pi n/4)$
5.8	$\frac{(-1)^n(n+1)}{n}+\frac{2+(-1)^n\cdot 3}{7}$	5.18	$\frac{(-1)^n(1-n^3)}{1+n^3}+\frac{1+(-1)^n}{3}$
5.9	$(2n)^{(-1)^n}$	5.19	$e^{(-1)^n n}$
5.10	$\frac{((-1)^n-1)n^2+n+1}{n}$	5.20	$\frac{(3\cos(\pi n/2)-1)n+1}{n}$

Решение типовых примеров

1.19 Пользуясь критерием Коши, установить сходимость или расходимость последовательности

$$x_n=a_0+a_1q+\ldots+a_nq^n,\ \text{где}\ |a_k|<M\quad \forall k=\overline{1,n},\ |q|<1.$$

Решение. Согласно критерию Коши, последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна, то есть

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N_\varepsilon\ \ \forall n\ge N_\varepsilon\ \ \forall p\in\mathbb{N}:\ \left|x_{n+p}-x_n\right|\le\varepsilon.$$

Возьмем любое $\varepsilon>0$ и рассмотрим разность

$$\left|x_n-x_{n+p}\right|=\left|a_{n+p}q^{n+p}+a_{n+p-1}q^{n+p-1}+\ldots+a_{n+1}q^{n+1}\right|\le$$
$$\le M\left|q^{n+p}\right|+\ldots+M\left|q^{n+1}\right|=M\left(|q|^{n+1}+\ldots+|q|^{n+p}\right)=$$
$$=M\frac{|q|^{n+1}\left(1-|q|^p\right)}{1-|q|}<M\frac{|q|^{n+1}}{1-|q|}.$$

Найдем теперь t из неравенства $M\frac{|q|^{t+1}}{1-|q|}\le\varepsilon$. Имеем $|q|^{t+1}\le\frac{\varepsilon\left(1-|q|\right)}{M}$.

Следовательно, $t\ge\log_{|q|}\frac{\varepsilon\left(1-|q|\right)}{M}-1$. Полагая теперь $N_\varepsilon=\left[\log_{|q|}\frac{\varepsilon\left(1-|q|\right)}{M}\right]$, получим, что при $\forall n\ge N_\varepsilon$ и $\forall p\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство $\left|x_n-x_{n+p}\right|\le\varepsilon$.

Таким образом, последовательность x_n является фундаментальной и, согласно критерию Коши, сходится.

1.20 Пользуясь критерием Коши, установить сходимость или расходимость последовательности $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$.

Решение. Покажем, что данная последовательность не сходится. Для этого достаточно показать, что она не удовлетворяет критерию Коши, то есть

$$\exists\varepsilon_0>0\ \ \forall N\ \ \exists n\ge N\ \ \exists p\in\mathbb{N}:\left|x_{n+p}-x_n\right|>\varepsilon_0.$$

В нашем случае

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|=\left|\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+p-1}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right|\ge p\cdot\frac{1}{n+p}.$$

Пусть $p=n$. Тогда получим $\left|x_{2n}-x_n\right|\ge\frac{1}{2}$. Рассмотрим $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$. В этом случае $\forall N\ \exists n=p,\ p\in\mathbb{N}, p\ge N:\ \left|x_{2n}-x_n\right|>\varepsilon_0$, т.е. последовательность не является фундаментальной, а значит, и не сходится.

2.20 Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

Решение. Так как

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=1+\frac{1}{2^{n+1}}>1,$$

то x_n – возрастает.

Покажем, что последовательность ограничена. Учитывая неравенство $\ln(x+1)\le x,\ x\ge0$, имеем:

$$\ln x_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<$$

$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1,$$

т.е. $\ln x_n < 1$. Откуда $x_n < e$. Значит, x_n – монотонна и ограничена. Тогда по теореме о сходимости монотонной и ограниченной последовательности x_n сходится.

3.20 Вычислить пределы:

А) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n+1}\right)$, Б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{27n+1}{27n}\right)^{27n+1}$, В). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

Решение.

А) Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)=$$

$$=\left[\!\left[\begin{array}{l}\textit{Имеем неопределенность вида}\\ (\infty-\infty).\textit{Умножим и разделим}\\ \textit{на } \sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}\end{array}\right]\!\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}=\frac{1}{2}.$$

Б) Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$, то будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{27n+1}{27n}\right)^{27n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{27n}\right)^{27n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{27n}\right)^{27n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{27n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{27n}\right)^{27n}=\left[\!\left[\begin{array}{c}\textit{сделаем замену}\\ k=27n\end{array}\right]\!\right]=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=e.$$

В) Поскольку $-1\le\sin n\le 1, \forall n\in\mathbb{N}$, а последовательность $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ является бесконечно малой, то произведение $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin n$ также будет бесконечно малой последовательностью, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin n=0.$$

4.20 Вычислить пределы:

А) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3n]{8}$, Б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}$, В) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2})$.

Решение.

А) Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, то будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3n]{8}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3n]{2^3}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1.$$

Б) Если $k\geq 4$, то $2/k\leq 1/2$. Поэтому при $n\geq 4$

$$0<\frac{2^n}{n!}=\frac{8}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{2\ldots2}{4\ldots n}\leq\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}=\frac{32}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{32}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$, то по теореме о предельном переходе в неравенствах $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.

В) Так как $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}=\dfrac{2}{2^{\frac{1}{2^n}}}$ и при $n>2$

$$2=\left(2^{\frac{1}{2^n}}\right)^{2^n}=\left(1+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)\right)^{2^n}>\left(1+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)\right)^{n}=$$

$$=\left[\!\left[(1+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k b^k\right]\!\right]=$$

$$=1+n\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)+\ldots+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)^n>n\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right),$$

т.е. $0<2^{\frac{1}{2^n}}-1<\dfrac{2}{n}$, то по теореме о предельном переходе в неравенствах $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^{1/2^n}-1\right)=0$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}2^{1/2^n}=1$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2})=2\,.$$

5.20 Для последовательности $x_n=\dfrac{(3\cos(\pi n/2)-1)n+1}{n}$ найти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Р е ш е н и е .

При $n=4k$ имеем $x_n=\dfrac{2n+1}{n}=2+\dfrac{1}{n}$, и, значит, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k}=2$, $2<x_{4k}\le 2+1/4$, причем $x_4=9/4$.

При $n=4k+1$ или $n=4k+3$ имеем $x_n=\dfrac{-n+1}{n}=-1+\dfrac{1}{n}$, и, значит, $-1<x_n<0$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k+1}=\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k+3}=-1$.

При $n=4k+2$ имеем $x_n=\dfrac{-4n+1}{n}=-4+\dfrac{1}{n}$, значит, $-4<x_n<0$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k+2}=-4$.

Таким образом, числа $2,-1,-4$ являются частичными пределами данной последовательности. Рассмотренные четыре подпоследовательности $\{x_{4k}\}$, $\{x_{4k+1}\}$, $\{x_{4k+2}\}$, $\{x_{4k+3}\}$ составляют вместе всю данную последовательность. Отсюда следует, что других частичных пределов данная последовательность не имеет.

Очевидно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=2$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n-4$.

Лабораторная работа № 7
Предел функции

Необходимые понятия и теоремы: различные определения предела функции, общие свойства предела функции, предел и неравенства, предел и арифметические операции, предел композиции, критерий Коши существования предела, односторонние пределы, бесконечные пределы, частичные пределы.

Литература: [1] с. 163 – 180, [5] с. 47 – 72.

1 Для функции $y = f(x)$, $x \in D(f)$, заданных a, A и $\varepsilon = \varepsilon_i$ найти такое δ, чтобы для любых $x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполнялось неравенство $|f(x) - A| < \delta$

№	$f(x)$	$D(f)$	a	A	ε_1	ε_2
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1.1	$2x+1$	$\mathbb{R}$	0	1	0,1	0,001
1.2	x^2	$\mathbb{R}$	1		0,01	0,001
1.3	$2x^2-1$	$\mathbb{R}$	1	1	0,1	0,002
1.4	$\sin x$	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	1	0,01	0,001
1.5	$\cos x$	$(0, \pi)$	0	1	0,1	0,01
1.6	$\frac{1}{x}$	$(0, 2)$	1	1	0,01	0,001
1.7	$\frac{x^2-9}{x-3}$	$(3, 10]$	3	6	0,1	0,001
1.8	$\frac{x-1}{x+1}$	$(-1, 1)$	0	–1	0,02	0,002
1.9	$3x^2-2$	$\mathbb{R}$	1	1	0,3	0,003
1.10	x^3	$\mathbb{R}$	1	1	0,1	0,01
1.11	$3x+1$	$\mathbb{R}$	0	1	0,2	0,01
1.12	x^2-1	$\mathbb{R}$	1	0	1	0,001

1	2	3	4	5	6	7
1.13	$\sin 2x$	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	1	0,01	0,001
1.14	$\cos 2x$	$(0, \pi)$	$\frac{\pi}{2}$	-1	0,1	0,002
1.15	$\frac{1}{3}x^2+1$	$\mathbb{R}$	3	4	1	0,0001
1.16	$100x+1$	$\mathbb{R}$	0	1	0,1	0,001
1.17	$\frac{x^2}{100}+1$	$(0, 1)$	0	1	0,1	0,01
1.18	$1000x$	$\mathbb{R}$	0	0	0,1	0,001
1.19	$\frac{x^2-1}{x-1}$	$(1, 5]$	1	2	0,2	0,01
1.20	$\frac{x^3-1}{x-1}$	$(1, 4)$	1	3	0,1	0,001

2 Пользуясь определением предела по Коши (на «языке $\varepsilon-\delta$»), доказать, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

№	$f(x)$	$D(f)$	a	A
1	2	3	4	5
2.1	x^2	$\mathbb{R}$	3	9
2.2	$2x+1$	$(1, 2)$	1	3
2.3	$3x$	$(1, 4)$	2	6
2.4	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\frac{\pi}{2}$	1
2.5	$\cos x$	$(0, \pi)$	π	–1
2.6	$\frac{x^2-1}{x+1}$	$(-1, 1)$	–1	–2
2.7	x^2-1	$\mathbb{R}$	0	–1
2.8	x^3	$\mathbb{R}$	1	1

1	2	3	4	5
2.9	$\frac{x^2}{100}-1$	$(0,2)$	0	–1
2.10	$100x+1$	$\mathbb{R}$	0	1
2.11	$3x+1$	$(-1,5)$	5	16
2.12	$\frac{x}{100}+100$	$\mathbb{R}$	100	100
2.13	$100x^2-100$	$(1,4)$	1	0
2.14	$\sin 2x$	$(0,\pi)$	$\frac{\pi}{4}$	1
2.15	$\cos 2x$	$\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$	$\frac{\pi}{4}$	0
2.16	$\frac{x^2-1}{x-1}$	$(1,2)$	1	2
2.17	$\frac{x^3-1}{x-1}$	$(1,3)$	1	3
2.18	$4x^2-1$	$\mathbb{R}$	1	3
2.19	$\frac{1}{x}$	$(0,+\infty)$	1	1
2.20	$3x^2-1$	$\mathbb{R}$	1	2

3 Используя определение предела функции по Гейне (на языке последовательностей), доказать, что не существует предела $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

№	$f(x)$	a	№	$f(x)$	a
1	2	3	4	5	6
3.1	$\begin{cases}2x, x\le 1\\ x, x>1\end{cases}$	1	3.10	$ctg\ x$	∞
3.2	$\sin x$	$+\infty$	3.11	$sign\ x$	0
3.3	$\cos x$	$+\infty$	3.12	$\sin\frac{1}{x}$	0
3.4	$\begin{cases}2x, x\le 1\\ 2-x, x>1\end{cases}$	1	3.13	$\begin{cases}x^2+2, x\le 0\\ x+1, x>0\end{cases}$	0

1	2	3	4	5	6
3.5	$\begin{cases} x^2, x<0 \\ x+2, x\ge 0 \end{cases}$	0	3.14	$\begin{cases} 2x, x<0 \\ 2x^2+1, x\ge 0 \end{cases}$	0
3.6	$\begin{cases} -x+1, x\le 2 \\ x+1, x>2 \end{cases}$	2	3.15	$\dfrac{\lvert x\rvert}{x}$	0
3.7	$\begin{cases} x^2, x\le 0 \\ x+1, x>0 \end{cases}$	0	3.16	$\dfrac{x-1}{\lvert x-1\rvert}$	1
3.8	$\begin{cases} -x+1, x\le 0 \\ 2+x, x>0 \end{cases}$	0	3.17	$\cos\dfrac{1}{x}$	0
3.9	$\begin{cases} -2, x<1 \\ x+2, x\ge 1 \end{cases}$	1	3.18	$\sin\dfrac{1}{x-1}$	1

4 Используя логические символы (на языке «$\varepsilon-\delta$») сформулировать утверждение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и привести соответствующие примеры.

№	x_0	A	№	x_0	A	№	x_0	A	№	x_0	A
4.1	∞	b	4.6	a	∞	4.11	$a+0$	$-\infty$	4.16	$+\infty$	$-\infty$
4.2	$-\infty$	b	4.7	$a-0$	$+\infty$	4.12	$a+0$	$+\infty$	4.17	$+\infty$	$+\infty$
4.3	$+\infty$	b	4.8	$a-0$	$-\infty$	4.13	$-\infty$	$-\infty$	4.18	$+\infty$	∞
4.4	a	$+\infty$	4.9	$a-0$	∞	4.14	$-\infty$	$+\infty$	4.19	$a-0$	b
4.5	a	$-\infty$	4.10	$a+0$	∞	4.15	$-\infty$	∞	4.20	$a+0$	b

5 Найти односторонние пределы $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)$ или показать, что эти пределы не существуют. Если существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, найти его.

№	$f(x)$	a	№	$f(x)$	a
1	2	3	4	5	6
5.1	$\sin\dfrac{1}{x}$	0	5.10	$\begin{cases} \sin x, x<0 \\ \cos x, x\ge 0 \end{cases}$	0
5.2	$\cos\dfrac{1}{x}$	0	5.11	$tg\ x$	$\dfrac{\pi}{2}$

1	2	3	4	5	6
5.3	$\begin{cases} 1, x \le 0 \\ -1, x > 0 \end{cases}$	0	5.12	$ctg\ x$	π
5.4	$\begin{cases} 2x^2, x \le 1 \\ 1-x, x > 1 \end{cases}$	1	5.13	$\frac{x}{\lvert x\rvert}$	0
5.5	$e^{\frac{1}{x}}$	0	5.14	$\sin^2 \frac{1}{x}$	0
5.6	$\sin\frac{1}{x-1}$	1	5.15	$\begin{cases} x^2, x \le 1 \\ 2x-1, x > 1 \end{cases}$	1
5.7	$\frac{\lvert x-2\rvert}{x-2}$	2	5.16	$\begin{cases} x^2, x \le 1 \\ 2x+1, x > 1 \end{cases}$	1
5.8	$\lvert x\rvert$	0	5.17	$[x]$*\	1
5.9	$\begin{cases} x+1, x \le 1 \\ 1-x, x > 1 \end{cases}$	1	5.18	$\sin\frac{1}{\lvert x-2\rvert}$	2

*\ $[x]$ – целая часть x.

6 Пользуясь определение предела по Коши, доказать, что число A не является $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

№	$f(x)$	$D(f)$	a	A
1	2	3	4	5
6.1	x^2-1	$(0,1)$	1	1
6.2	$3x^2-1$	$\mathbb{R}$	0	2
6.3	$\frac{x^2-1}{x+1}$	$(-1,1)$	-1	1
6.4	$\frac{x^2-1}{x-1}$	$\mathbb{R}$	1	0
6.5	$\frac{x}{100}-1$	$\mathbb{R}$	0	4
6.6	x^3-x	$(0,10)$	1	1

1	2	3	4	5
6.7	$\frac{\lvert x\rvert}{x}-x$	$(-1,0)$	0	2
6.8	$100x+1$	$\mathbb{R}$	0	–1
6.9	$2\lvert x\rvert-1$	$(-1,1)$	1	0
6.10	$\frac{x^3-1}{x-1}$	$(1,10)$	1	2
6.11	$2x-1$	$(0,1)$	0	2
6.12	x^3+1	$(0,2)$	0	2
6.13	$100x^2-100$	$\mathbb{R}$	1	1
6.14	$\frac{1}{x}$	$(0,10]$	1	4
6.15	$\lvert x\rvert\cdot x$	$(0,4)$	1	3
6.16	$\frac{\lvert x\rvert}{x}+x$	$(0,1)$	0	2
6.17	$\sin\lvert x\rvert$	$(0,1)$	0	1
6.18	$\frac{x^2}{100}+x$	$\mathbb{R}$	10	1
6.19	$-x^2+1$	$\mathbb{R}$	0	2
6.20	$\frac{1}{x}+x$	$(1,3)$	1	0

7 Если для некоторой последовательности $x_n \to a$ $\left(x_n \neq a\right)$ имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, то число (или символ ∞) A называют частичным пределом функции $f(x)$ в точке a. Наименьший и наибольший из этих частичных пределов обозначают $\varliminf\limits_{x\to a} f(x)$ и $\varlimsup\limits_{x\to a} f(x)$ и называют соответственно нижним и верхним пределами $f(x)$ в точке a. Найти $\varliminf\limits_{x\to a} f(x)$ и $\varlimsup\limits_{x\to a} f(x)$.

№	$f(x)$	$D(f)$	a	№	$f(x)$	$D(f)$	a
7.1	$\sin\frac{1}{x}$	(0, 1)	0	7.10	$\sin^2 x$	$\mathbb{R}$	$-\infty$
7.2	$\sin^2\frac{1}{x}$	(0, 1)	0	7.11	$\sin^2\frac{1}{\lvert x\rvert}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	0
7.3	$x\cos\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	0	7.12	$\cos^2\frac{1}{\lvert x\rvert}$	(0, 2)	0
7.4	$\cos^2\frac{1}{x}$	$(1, +\infty)$	0	7.13	$\sin\frac{1}{x-1}$	(1, 3)	1
7.5	$x\sin\frac{1}{x}$	(0, 1)	0	7.14	$\cos\frac{1}{x-1}$	$(-1, 1)$	1
7.6	$x^2\cos\frac{1}{x-1}$	(1, 2)	1	7.15	$x\cos\frac{1}{x-2}$	$\mathbb{R}\setminus\{2\}$	2
7.7	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$+\infty$	7.16	$\frac{x}{1+x^2\sin^2 x}$	$\mathbb{R}$	$+\infty$
7.8	$2^{\sin x^2}$	$\mathbb{R}$	$+\infty$	7.17	$2^{\sin\frac{1}{x}}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	0
7.9	$x^2\cos^2 x$	$\mathbb{R}$	$+\infty$	7.18	$2^{\cos\frac{1}{x-1}}$	$(1, +\infty)$	1

Решение типовых примеров

1.20. Для функции $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$, $x\in(1,4)$, $a=1$, $A=3$ и $\varepsilon_1=0{,}1$, $\varepsilon_2=0{,}001$ найти δ, чтобы для любых $x\in(1,4)$, удовлетворяющих условию $0<\lvert x-a\rvert<\delta$, выполнялось неравенство $\lvert f(x)-A\rvert<\delta$.

Решение. Так как $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$, $x\in(1,4)$, $a=1$, $A=3$, то

$$\lvert f(x)-A\rvert=\left|\frac{x^3-1}{x-1}-3\right|=\lvert x^2+x+1-3\rvert\le$$

$$\le\lvert(x-1)(x+1)\rvert+\lvert x-1\rvert=\lvert x-1\rvert\cdot(\lvert x+1\rvert+1).$$

Будем искать нужное δ среди $\{\delta : \delta \le 1\}$. Для $x \in (1,4)$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-1| \le \delta \le 1$, имеем $0 < x \le 2$ и $|x+1| + 1 \le 4$. Поэтому

$$|f(x) - A| < 4\delta .$$

Теперь если $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0{,}1$, то для него δ найдем из равенства $4\delta = 0{,}1$, т.е. $\delta_1 = \dfrac{1}{40}$. Если же $\varepsilon = \varepsilon_2 = 0{,}001$, то полагаем $4\delta = 0{,}001$, т.е. $\delta_2 = \dfrac{1}{4000}$. Заметим, что найденные $\delta_i \le 1$.

2.20. Пользуясь определением предела по Коши (на «языке $\varepsilon - \delta$»), доказать, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Решение. Так как $f(x) = 3x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R},\ a = 1,\ A = 2$, то

$$|f(x) - A| = |3x^2 - 3| = 3|x-1| \cdot |x+1|.$$

Возьмем $\forall \varepsilon > 0$ и будем искать нужное δ среди $\{\delta : \delta \le 1\}$. Тогда $0 < |x-1| < \delta \le 1 \Rightarrow 0 < x \le 2$. Поэтому $3|x+1| \le 9$ и

$$|f(x) - A| < 9\delta .$$

Тогда, если $9\delta = \varepsilon$, то $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех $x \in D(f)$ и $0 < |x-1| < \delta$. Поэтому, положив $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{9}\right\}$, будем иметь, что $\forall \varepsilon > 0$ при $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{9}\right\}$ для $\forall x \in D(f)$ и $0 < |x-1| < \delta$ справедливо неравенство

$$|f(x) - 2| < \varepsilon .$$

Итак, показано, что $\lim\limits_{x \to 1}(3x^2 - 1) = 2$.

3.18. Используя определение предела функции по Гейне (на языке последовательностей), доказать, что не существует предела $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, если $f(x) = \sin \dfrac{1}{x-1}$, $a = 1$.

Решение. Для последовательности

$$x_n' = 1 + \frac{1}{n\pi} \to 1,\ f(x_n') = \sin n\pi \to 0 .$$

С другой стороны,

$$x_n'' = 1 + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 1, \text{ а } f(x_n'') = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) \to 1.$$

Из определения предела по Гейне следует, что предел $\lim\limits_{x \to 1} \sin \frac{1}{x-1}$ не существует.

4.20. Используя логические символы (на языке « $\varepsilon - \delta$») сформулировать утверждение $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и привести соответствующие примеры, если $x_0 = a + 0$, $A = b$.

Решение. На языке «$\varepsilon - \delta$» $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что $\forall x \in D(f) \ 0 < x - a < \delta \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon$.

Пример: $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $a = 0$, $b = 1$ $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{x}{x} = 1$.

5.18. Найти односторонние пределы $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x)$, где $f(x) = \sin \frac{1}{|x-2|}$, $a = 2$, или показать, что эти пределы не существуют. Если существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, найти его.

Решение. Покажем, что не существует $\lim\limits_{x \to 2+0} \sin \frac{1}{|x-2|}$. Для доказательства воспользуемся определением предела по Гейне: при $n \to \infty$

$$x_n' = 2 + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 2 + 0, \qquad f\left(x_n'\right) = \sin \frac{\pi}{2} \to 1;$$

$$x_n'' = 2 + \frac{1}{n\pi} \to 2 + 0, \qquad f\left(x_n''\right) = \sin n\pi \to 0.$$

Итак, показано, что не существует $\lim\limits_{x \to 2+0} \sin \frac{1}{|x-2|}$. Аналогично показывается, что не существует $\lim\limits_{x \to 2-0} \sin \frac{1}{|x-2|}$. Таким образом, показано, что не существует $\lim\limits_{x \to 2} \sin \frac{1}{|x-2|}$.

6.20 Пользуясь определение предела по Коши, доказать, что число A не является $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, если $f(x)=\dfrac{1}{x}+x$, $x\in(1,3)$, $a=1$, $A=0$.

Решение. Нужно показать, что $\exists\varepsilon>0$ такое, что $\forall\delta>0$ $\exists x'\in D(f)$, удовлетворяющее условию $0<|x'-1|<\delta$, для которого $|f(x')-0|\geq\varepsilon$. Возьмем $\varepsilon=1$. Для любого $0<\delta<1$ положим $x'=1+\dfrac{\delta}{2}$. Тогда $x'\in(1,3)$

$$0<|x'-1|=\frac{\delta}{2}<\delta \text{ и } |f(x')-0|=1+\frac{\delta}{2}+\frac{1}{1+\frac{\delta}{2}}\geq 1=\varepsilon.$$

Нужное утверждение доказано.

7.18 Найти $\underline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$ и $\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$, если $f(x)=2^{\cos\frac{1}{x-1}}$, $x\in\left(1,+\infty\right)$, $a=1$.

Решение. Так как $-1\leq\cos t\leq 1$, то $\dfrac{1}{2}\leq f(x)\leq 2$. Поэтому если A – частичный предел $f(x)$ в точке $a=1$, то $\dfrac{1}{2}\leq A\leq 2$. С другой стороны, имеем: при $n\to\infty$

$$x_n'=1+\frac{1}{\pi+2n\pi}\to 1, \quad \text{а} \quad f\left(x_n'\right)=2^{\cos\pi}=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2};$$

$$x_n''=1+\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\to 1, \quad \text{а} \quad f\left(x_n''\right)=2^{\cos\frac{\pi}{2}}=2\to 2.$$

Следовательно, $\underline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)=\dfrac{1}{2}$, а $\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)=2$.

Лабораторная работа № 8
Замечательные пределы. Вычисление пределов.

Необходимые понятия и теоремы: первый и второй замечательные пределы, предел и арифметические операции, пределы монотонной функции, предел композиции, критерии Коши существования предела.

Литература: [1] с. 170 – 180; [2] с. 56 – 66; [6] с. 98 – 102, 128–137.

1 Используя свойства пределов и известные пределы, вычислить $\lim\limits_{x \to a} f(x)$:

№	A		B		C	
	a	$f(x)$	a	$f(x)$	a	$f(x)$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1.1	0	$\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$	4	$\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$	0	$\frac{x^2}{\lvert x\rvert}$
1.2	1	$\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$	16	$\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$	1	$\frac{\lvert x-1\rvert^3}{x^2-1}$
1.3	$+\infty$	$\frac{x^2+1}{2x^2+x+1}$	8	$\frac{\sqrt{2x+9}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$	–2	$\frac{\lvert x+2\rvert}{\lvert x-1\rvert}$
1.4	–1	$\frac{x^3+1}{x+1}$	2	$\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$	0	$x\sin\frac{1}{\lvert x\rvert}$
1.5	1	$(2+x)^5$	1	$\frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x}-1}$	0	$\lvert x\rvert\sin\frac{1}{x}$
1.6	2	$\frac{x^2-4}{x-2}$	1	$\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$	1	$\lvert x-1\rvert\cdot\cos\frac{1}{\lvert x-1\rvert}$
1.7	1	$\frac{x+x^2+x^3-3}{x-1}$	0	$\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$	0	$x\cdot signx$
1.8	3	$\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$	–8	$\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$	1	$\lvert x-1\rvert\cdot sign(x-1)$
1.9	1	$\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$	1	$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$	–3	$\lvert x+3\rvert\cdot sign(\sin x)$
1.10	–1	$\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x-6}$	1	$\frac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[6]{x}-1}$	$+\infty$	$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

1	2	3	4	5	6	7
1.11	–1	$\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$	–2	$\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$	$+\infty$	$\sqrt{(x+1)(x+2)}-x$
1.12	1	$\dfrac{x^5-1}{x^3-1}$	1	$\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{4x}-2}$	1	$x\lvert x\rvert-\dfrac{1}{\lvert x\rvert}$
1.13	0	$\dfrac{(1+x)(1-2x)-1}{x}$	0	$\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}$	$+\infty$	$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$
1.14	1	$\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}$	1	$\dfrac{\sqrt{x^2}-1}{\sqrt{x}-4}$	$+\infty$	$\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$
1.15	1	$\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$	16	$\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$	$+\infty$	$\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}$
1.16	–1	$\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$	1	$\dfrac{\sqrt{x^3}-1}{x-1}$	$+\infty$	$\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x}$
1.17	–1	$\dfrac{x^5+1}{x+1}$	4	$\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$	$+\infty$	$\dfrac{\lvert x\rvert}{x}$
1.18	1	$\dfrac{x^3+2x-3}{x-1}$	1	$\dfrac{\sqrt{4x^2}-2}{\sqrt{x}-1}$	–1	$\dfrac{\sqrt{1-3x}-2}{\sqrt{\lvert x\rvert}-1}$
1.19	–1	$\dfrac{x^2-1}{2x^2+x-1}$	1	$\dfrac{\sqrt{x^3}-1}{x^2-1}$	–16	$\dfrac{\sqrt[4]{-x}-2}{\sqrt{\lvert x\rvert}-4}$
1.20	1	$\dfrac{2}{1-x^2}+\dfrac{1}{x-1}$	1	$\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}{x^2-1}$	1	$\dfrac{\sqrt{1+3x}-2}{\sqrt{\lvert x\rvert}-1}$

2 Используя свойства пределов и первый замечательный предел, вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$:

№	A		B	
	a	$f(x)$	a	$f(x)$
1	2	3	4	5
2.1	0	$\dfrac{\sin 5x}{x}$	1	$\dfrac{\sin x-\sin 1}{x-1}$
2.2	0	$\dfrac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x}$	0	$\dfrac{1-\cos 4x}{\sin 3x}$

1	*2*	*3*	*4*	*5*
2.3	0	$\dfrac{1-\cos 2x}{2x^2}$	1	$\dfrac{\sin \pi x}{x-1}$
2.4	0	$\dfrac{\sin^2 3x}{\sin^2 5x}$	1	$\dfrac{\sin x-\sin 1}{x-1}$
2.5	0	$\dfrac{1-\cos x^2}{\sin^4(x/2)}$	0	$\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$
2.6	π	$\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$	1	$\dfrac{x-1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}$
2.7	0	$\dfrac{1-\cos 5x}{x\sin 7x}$	1	$\dfrac{\sin \pi x}{\sin(x-1)}$
2.8	1	$\dfrac{\sin 2\pi x}{\sin(x-1)}$	0	$\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$
2.9	0	$\dfrac{1-\cos x^2}{x^4}$	1	$\dfrac{\sin^2(x-1)}{\sin^2 \pi x}$
2.10	0	$\dfrac{1-\cos x^2}{\sin^2 2x}$	0	$\dfrac{tg\ \ x-\sin x}{x^3}$
2.11	0	$\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$	1	$\dfrac{\sin \pi x^2}{\sin \pi x^3}$
2.12	0	$\dfrac{\arcsin x}{x\dfrac{\cos x-\cos 2}{x-2}}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$
2.13	2	$\dfrac{\cos x-\cos 2}{x-2}$	0	$\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$
2.14	0	$\dfrac{\sin x^2}{1-\cos 2x}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\sin(x-\dfrac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$
2.15	0	$\dfrac{\sin^2 2x}{\sin 2x^2}$	2	$\dfrac{\sin x-\sin 2}{x-2}$
2.16	π	$\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}}{x-\pi}$	0	$\dfrac{\sin^2 4x}{1-\cos x}$

1	2	3	4	5
2.17	1	$\dfrac{(x-1)^2}{\cos\frac{\pi}{2}x}$	0	$\dfrac{\arcsin^2 x}{x^2}$
2.18	0	$\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$	0	$\dfrac{x}{\sin 3x}$
2.19	0	$\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{1-\cos 2x}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$
2.20	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\sin^2(x-\frac{\pi}{6})}{1-2\sin x}$	–1	$\dfrac{\sin \pi x}{\sin(x+1)}$

3 Используя свойства пределов, второй замечательный предел и равенства $\lim\limits_{x\to a}\ln g(x)=\ln(\lim\limits_{x\to a} g(x))$, $\lim\limits_{x\to a} e^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$:

№	A		B	
	a	$f(x)$	a	$f(x)$
1	2	3	4	5
3.1	0	$(1+2x)^{\frac{1}{x}}$	∞	$\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$
3.2	0	$\left(1+\dfrac{x}{7}\right)^{\frac{5}{x}}$	∞	$\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$
3.3	∞	$\left(1+\dfrac{1}{4x+1}\right)^{8x}$	0	$\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$
3.4	∞	$\left(1+\dfrac{2}{x-6}\right)^{4x-1}$	1	$\left(\dfrac{\sin x}{\sin 1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$
3.5	∞	$\left(1+\dfrac{7}{x-6}\right)^{x-1}$	∞	$\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$
3.6	∞	$\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$	0	$\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$
3.7	0	$\sqrt[x]{1-2x}$	0	$(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

1	*2*	*3*	*4*	*5*
3.8	∞	$\left(\dfrac{x-14}{x-10}\right)^{x-2}$	0	$\sqrt[x^2]{\cos x}$
3.9	0	$\left(\dfrac{x+4}{x}\right)^{\frac{3}{x}}$	0	$(1-x)^{\frac{1}{\sin x}}$
3.10	0	$\sqrt[x]{1-4x}$	0	$(1+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}$
3.11	0	$\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{2}{x}}$	∞	$\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$
3.12	0	$\left(1+\dfrac{x}{8}\right)^{\frac{5}{x}}$	0	$\left(1+x^2\right)^{\mathrm{ctg}^2 x}$
3.13	∞	$\left(1+\dfrac{6}{3x+4}\right)^{2x}$	0	$\left(\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$
3.14	∞	$\left(1-\dfrac{1}{4x+3}\right)^{x+4}$	2	$\left(\dfrac{\sin x}{\sin 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$
3.15	∞	$\left(1+\dfrac{1}{5x+1}\right)^{x-1}$	0	$\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$
3.16	∞	$\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{x+2}$	0	$\left(\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$
3.17	0	$\sqrt[2x]{1+3x}$	0	$\left(\cos x\right)^{\frac{1}{1-\cos 2x}}$
3.18	∞	$\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{x+4}$	0	$\left(\sin x+\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$
3.19	∞	$\left(\dfrac{2x-1}{1-2x}\right)^{3x}$	0	$\left(1+3x^2\right)^{\dfrac{1}{\sin^2 x}}$
3.20	0	$\sqrt[3x]{1+2x}$	0	$\left(\cos x-\sin x\right)^{\frac{1}{x}}$

4 Используя свойства пределов, известные пределы, предел $\lim\limits_{x\to\varphi_0}\cos x=\cos\varphi_0$, вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$:

№	A		B	
	a	$f(x)$	a	$f(x)$
1	*2*	*3*	*4*	*5*
4.1	0	$\dfrac{2^x-1}{x}$	1	$\dfrac{\ln x}{x-1}$
4.2	∞	$\dfrac{\ln\left(2+e^{3x}\right)}{\ln(3+e^{2x})}$	1	$(1-x)\log_x 2$
4.3	$+\infty$	$\dfrac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{\ln\left(x^{10}+x+1\right)}$	1	$(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$
4.4	0	$\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$	0	$x\log_{1-x}2$
4.5	$\dfrac{\pi}{2}$	$(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$	2	$\dfrac{2^x-4}{x-2}$
4.6	0	$\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x^2}$	0	$\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin 5x}$
4.7	e	$\dfrac{\ln\ln x}{x-e}$	π	$\dfrac{\ln\frac{x}{\pi}}{x-\pi}$
4.8	1	$\dfrac{\lg\frac{x+1}{2}}{x-1}$	∞	$x\ln\dfrac{2x+1}{2x}$
4.9	0	$\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 3x}$	2	$\dfrac{x^x-4}{x-2}$
4.10	0	$\dfrac{shx}{x}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$(1-\cos x)^{\operatorname{tg}^2 x}$
4.11	0	$\dfrac{\ln(1+x)}{x}$	∞	$x\ln\dfrac{x+1}{x}$
4.12	2	$\dfrac{\ln x-\ln 2}{x-2}$	$+\infty$	$\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

1	2	3	4	5
4.13	0	$\left(\dfrac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$(\text{tg }x)^{\text{tg }2x}$
4.14	0	$\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$	1	$\dfrac{x^x-1}{x-1}$
4.15	0	$\left[tg\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\text{ctg}\,x}$	0	$\dfrac{e^{2x}-1}{x^2}$
4.16	3	$\dfrac{2^x-8}{\sin\ \pi x}$	e	$\dfrac{\ln\frac{x}{e}}{x-e}$
4.17	0	$(x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}$	2	$\dfrac{\ln\frac{x}{2}}{x-2}$
4.18	7	$\dfrac{\ln x-\ln 7}{x-7}$	0	$\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
4.19	$+\infty$	$\dfrac{x^4}{2^x}$	2	$\dfrac{\log_2\frac{x}{2}}{x-2}$
4.20	1	$(1-\sin\pi x)^{\text{ctg}\,x}$	2	$\dfrac{2^x-4}{\sin\pi x}$

Решение типовых примеров

1.20 Используя свойства пределов и известные пределы, вычислить

$$\textbf{A)}\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}+\frac{1}{x-1}\right);\ \text{B)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}{x^2-1};\ \text{C)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+3x}-2}{\sqrt{|x|}-1}.$$

Решение.

А) Приведя к общему знаменателю выражение, стоящее под знаком предела, получим

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}+\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 1}(1+x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 1}1+\lim\limits_{x\to 1}x}=\frac{1}{2}.$$

B) Положим $x=t^{12}$. Тогда, учитывая, что при $x\to 1$ $t\to 1$, получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{t^4-t^3}{t^{24}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{t^3(t-1)}{(t-1)\left(t^{23}+t^{22}+\ldots+t+1\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}t^3}{\lim\limits_{x\to 1}\left(1+t+\ldots+t^{22}+t^{23}\right)}=\frac{1}{24}.$$

C) Домножая числитель и знаменатель функции на сопряженные выражения, будем иметь:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+3x}-2}{\sqrt{|x|}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{1+3x}-2)(\sqrt{1+3x}+2)}{(\sqrt{1+3x}+2)}\cdot\frac{\sqrt{|x|}+1}{(\sqrt{|x|}-1)(\sqrt{|x|}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{|x|}+1}{\sqrt{1+3x}+2}\cdot\frac{3(x-1)}{|x|-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{|x|}+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{1+3x}+2)}\cdot 3=\frac{3}{2}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что при $x\to 1$ $|x|=x$, и равенствами: $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{|x|}=1$; $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{1+3x}=2$, которые доказываются, например, по определению. Можно опереться на равенство $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}$, которое также следует из определения предела.

2.20 Используя свойства пределов и первый замечательный предел, вычислить

$$\textbf{A)}\ \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{1-2\sin x};\quad \text{B)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{\sin(x+1)}.$$

Решение.

A) Сделаем замену $x-\dfrac{\pi}{6}=t$. Тогда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{1-2\sin x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{1-2\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{1-2\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t-\cos t}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{\frac{1-\cos t}{\sin t}-\sqrt{3}}=\frac{\lim\limits_{t\to0}\sin t}{\lim\limits_{t\to0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{\sin t}-\sqrt{3}}=\frac{\lim\limits_{t\to0}\sin t}{\lim\limits_{t\to0}\left[2\cdot\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{\frac{t^2}{2}}\cdot\frac{t}{2}\cdot\frac{t}{\sin t}\right]-\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{t\to0}\sin t}{2\cdot1\cdot0\cdot1-\sqrt{3}}=\frac{0}{-\sqrt{3}}=0.$$

Это следует из того, что $\lim\limits_{t\to a}\sin t=\sin a$. Действительно,

$$|\sin t-\sin a|=2\cdot\left|\sin\frac{t-a}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{t+a}{2}\right|\le2\cdot\left|\sin\frac{t-a}{2}\right|\le|t-a|.$$

Поэтому для $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ такое, что из неравенства

$$|t-a|<\delta\Rightarrow|\sin t-\sin a|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,\text{ т.е. }\lim_{t\to a}\sin t=\sin a.$$

В) Сделаем замену $x+1=t$. Тогда

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{\sin(x+1)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi t-\pi)}{\sin t}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}\cdot(-1)\cdot\frac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot\pi=$$

$$=-\pi\cdot\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}\cdot\lim_{t\to0}\frac{\sin\pi t}{\pi t}=-\pi,$$

так как из первого замечательного предела следует, что

$$\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}=1,\ \lim_{t\to0}\frac{\sin\pi t}{\pi t}=1.$$

3.20 Используя свойства пределов, второй замечательный предел и равенства $\lim\limits_{x\to a}\ln g(x)=\ln(\lim\limits_{x\to a}g(x))$, $\quad\lim\limits_{x\to a}e^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$, вычислить

А) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[3x]{1+2x}$; В) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x-\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение.

А) Преобразовывая функцию, будем иметь:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[3x]{1+2x}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{3x}}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot\frac{2x}{3x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{\frac{2}{3}}=\ 2x=t\ =\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{2}{3}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}e^{\frac{2}{3}\ln(1+t)^{1/t}}=e^{\frac{2}{3}\ln\left[\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t}\right]}=e^{\frac{2}{3}}.$$

В) Произведя преобразования, получим

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x-\sin x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1-\sin x-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-\sin x-2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{-\sin x-2\sin^2\frac{x}{2}}{x}}=$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x+2\sin x^2\frac{x}{2}}{x}\right)\cdot\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin x-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-\sin x-2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]}=e^{-\ln e}=\frac{1}{e}.$$

Здесь воспользовались равенством из условия, свойствами предела и вторым замечательным пределом.

4.20 Используя свойства пределов, известные пределы, предел $\lim\limits_{x\to\varphi_0}\cos x=\cos\varphi_0$, вычислить:

А) $\lim\limits_{x\to 1}\left(1-\sin\pi x\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}$; **В)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-4}{\sin\pi x}$.

Решение.

А) Преобразовывая функцию, будем иметь:

$$\lim_{x\to 1}\left(1-\sin\pi x\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}=\lim_{x\to 1}\left(1-\sin\pi x\right)^{\frac{1}{-\sin\pi x}\cdot(-\cos\pi x)}=$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to 1}\cos\pi x\cdot\ln\left[\lim\limits_{x\to 1}\left(1-\sin\pi x\right)^{-\frac{1}{\sin\pi x}}\right]}=e^{1\cdot\ln e}=e.$$

Мы воспользовались тем, что $\lim\limits_{x\to 1}\cos\pi x=\cos\left(-\pi\right)=-1$ и равенствами из предыдущей задачи.

В). Преобразовав функцию, получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x-4}{\sin\pi x}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{2^x-4}{x-2}\cdot\frac{x-2}{\sin\pi x}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{2^x-4}{x-2}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sin\pi x}.$$

Найдем первый из пределов произведения:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x-4}{x-2}=4\lim_{x\to 2}\frac{2^{x-2}-1}{x-2}=4\lim_{t\to 0}\frac{2^t-1}{t}=$$

$$=\left[\!\left[\begin{matrix}2^t-1=u\\ t=\log_2(1+u)\end{matrix}\right]\!\right]=4\lim_{u\to 0}\frac{u}{\log_2(1+u)}=4\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}\cdot\ln 2=$$

$$=4\ln 2\cdot\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\left[\!\left[\begin{matrix}(1+u)^{\frac{1}{u}}=v\\ u\to 0\Rightarrow v\to e\end{matrix}\right]\!\right]=4\ln 2\cdot\frac{1}{\lim\limits_{v\to e}\ln v}=4\ln 2.$$

Вычислим второй предел:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sin\pi x}=\quad x-2=t\quad=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin(\pi t+2\pi)}=\frac{1}{\pi}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\pi t}{\sin\pi t}=\frac{1}{\pi}.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-4}{\sin\pi x}=\dfrac{4}{\pi}\ln 2$.

Лабораторная работа № 9
Асимптотическое поведение функций. Вычисление пределов

Необходимое понятие и теоремы: бесконечно малые функции при $x \to a$, сравнение бесконечно малых функций, асимптотические равенства, эквивалентные бесконечно малых, применение асимптотических равенств для вычисления пределов.

Литература: [1] с. 181-184, 216-218, [2] с.72-77, [6] с. 102-105, 136-137.

1 Определить порядок относительно x бесконечно малой при $x \to 0$ (при $x \to 0+$) функций $g(x)$:

№	A	B
	$g(x)$	$g(x)$
1	*2*	*3*
1.1	$x^3 + x$	$e^{\sqrt{x}} - 1$
1.2	$\dfrac{4x^5}{1+x^2}$	$e^{\sin x} - 1$
1.3	$\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{\sin x}$	$e^{x^2} - \cos^2 x$
1.4	$\sqrt{x}tg\dfrac{\pi x}{2}$	$\ln(1 + x\sin\sqrt{x})$
1.5	$\cos x - \sqrt[3]{\cos x}$	$\dfrac{\cos\pi x - 1}{\sin\sqrt{x}}$
1.6	$x\sin^2 x$	$\arcsin(\sqrt{1+x} - 1)$
1.7	$\arcsin x^2$	$tgx - \sin x$
1.8	$\sqrt{x^2+1} - 1$	$e^{tgx} - x$
1.9	$\arcsin(2\sin x)$	$\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}$
1.10	$e^{\cos x} - e$	$\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x})$
1.11	$\dfrac{x(x+1)}{1+2x}$	$e^{x^2} - 1$
1.12	$\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$	$e^x - \cos x$
1.13	$\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} - 1$	$1 - \cos x$
1.14	$\sqrt{1+2x} - 1 - \sqrt{x}$	$\ln(1+\sin^2 x)$
1.15	$\sin\sqrt{1-x} - \sin 1$	$\dfrac{x\sqrt{x}}{\sin x}$

1	*2*	*3*
1.16	$\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}$	$\arcsin(\sqrt{4+x^2}-2)$
1.17	$1-\cos 2x^2$	$\ln(1+\sqrt{x\sin x})$
1.18	$\arccos(\sqrt{1+x})$	$\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}$
1.19	$\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}$	$\arccos(\sqrt{1+x^2})$
1.20	$\ln(1+\sqrt{x})$	$\arcsin(1-\cos x)$

2 Для бесконечно малых при $x \to a$ (при $x \to a+0$) функций $f(x)$ и $g(x)$ выяснить, какие из следующих соотношений верны: 1) $f(x)=O(g(x))$, 2) $g(x)=O(f(x))$, 3) $f(x)=o(g(x))$, 4) $g(x)=o(f(x))$, 5) $f(x)\sim g(x)$, 6) $f(x)\asymp g(x)$:

№	a	$f(x)$	$g(x)$
1	*2*	*3*	*4*
2.1	0	$\sin x$	$\arcsin x$
2.2	1	$tg\pi x$	$\sqrt{x-1}$
2.3	0	$\ln(1+\sin x)$	$\sqrt{1-\cos x}$
2.4	∞	$\sqrt{x^2+1}-\|x\|$	$\frac{1}{\sqrt{\|x\|}}$
2.5	0	$\arcsin x$	$\sqrt{x}$
2.6	0	$\ln(1+\sqrt{x})$	$\sin\sqrt{x}$
2.7	0	$\frac{1-\cos 2x}{tgx}$	$\ln(1+x)$
2.8	1	$e^{x^2}-1$	$\sin x^2$
2.9	0	$e^{\sin x}-1$	$\ln(1-x)$
2.10	2	$\frac{2^x-4}{\sqrt{x}}$	$\sin\sqrt{x}$
2.11	1	$\cos\frac{\pi}{2}x$	$\sin(x-1)$
2.12	0	$\ln(1+x^2)$	$2x$
2.13	$+\infty$	$\sqrt{x^2-1}-x$	$\frac{1}{x}$

1	*2*	*3*	*4*
2.14	0	$x^2 actgx$	$\sin^3 x$
2.15	1	$\sqrt{x-1}\arccos x$	$\sqrt{(x-1)^3}$
2.16	1	$\ln(1-\sin^2 x)$	$tg^2 x$
2.17	0	$\frac{(1-\cos x)^2}{\sin x}$	$\sin\frac{x}{2}$
2.18	$\frac{\pi}{2}$	$\arccos\frac{2}{\pi}x$	$\sin 2x$
2.19	0	$\arccos\frac{1-x}{1+x}$	$\sin^2 x$
2.20	0	$\arccos\frac{1-x}{1+x}$	$\sqrt{1-\cos x}$

3 Для бесконечно малой при $x \to a$ (при $x \to a+0$) функции $f(x)$ найти бесконечно малую при $x \to a$ функцию вида $g(x) = cx^{\alpha}$ ($c, \alpha \in \mathbb{R}$) такую что: 1) $f(x) \asymp g(x)$, 2) $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$:

№	a	A	B
		$f(x)$	$f(x)$
1	*2*	*3*	*4*
3.1	0	$e^x - 1$	$\arcsin^2 x$
3.2	0	$\sqrt{1+x} - 1$	$\arcsin\sqrt{x}$
3.3	1	$\sqrt[3]{x} - 1$	$\arcsin\sqrt{x-1}$
3.4	1	$\ln^2(2-x)$	$e^{2x} - e^2$
3.5	0	$\sqrt[5]{1-x} - 1$	$\sin^{10}\sqrt{x}$
3.6	0	$e^{\ln(1-x)} - 1$	$\arcsin\sqrt[3]{x}$
3.7	0	$\sqrt[3]{1-\cos x}$	$\sqrt[4]{1-x} - 1$
3.8	0	$2^x - 1$	$\ln(1+\frac{x^2}{2})$
3.9	2	$2^x - 4$	$\ln(3-x)$
3.10	0	$sh^2 x$	$\ln(2-\cos x)$
3.11	0	$\ln(1-x)$	$\sin(2\arcsin x)$
3.12	0	$\sqrt[3]{1+x} - 1$	$arctg\sqrt{x}$
3.13	0	$\sqrt[4]{1+x} - 1$	$\arcsin(\sin^2 x)$
3.14	1	$\sqrt{\ln x}$	$e^{\sin x} - e^{\sin 1}$

1	*2*	*3*	*4*
3.15	0	$\sqrt[8]{1+2x}-1$	$tg^2\sqrt{x}$
3.16	0	$e^{x^2}-\cos x$	$\sqrt{1-\cos x}$
3.17	0	$2^{x^2}-1$	$\ln(1-\sin x)$
3.18	0	$\ln(2-e^x)$	$\sin(2\arcsin x)$
3.19	3	3^x-27	$sh(x-3)$
3.20	0	$1-chx$	$2^{\ln(1-x)}-1$

4 Вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, используя принцип эквивалентности бесконечно малых:

№	a	A	B
		$f(x)$	$f(x)$
1	*2*	*3*	*4*
4.1	0	$\dfrac{e^x-1}{\ln(1+6x)}$	$\dfrac{e^{2x}-1}{(1+5x)^6-1}$
4.2	0	$\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 4x}$	$\dfrac{arctg 3x}{(1+4x)^4-1}$
4.3	1	$\dfrac{\ln(2-x)}{\arcsin(1-x)}$	$\dfrac{2^x-2}{\sin(x-1)}$
4.4	0	$\dfrac{\sin 4x-\sin 7x}{\ln(1+2x)}$	$\dfrac{\arcsin 2x}{e^{4x}-1}$
4.5	3	$\dfrac{\ln(4-x)}{2^x-8}$	$\dfrac{\arcsin\sqrt{3-x}}{e^{3-x}-1}$
4.6	1	$\dfrac{\sqrt[3]{2-x}-1}{\ln(2-x)}$	$\dfrac{\arcsin\sqrt{1-x}}{\ln x}$
4.7	0	$\dfrac{\ln(1+4x)}{\sqrt{1+2x}-1}$	$\dfrac{\sin 2x-\sin 3x}{\ln(1+4x)}$
4.8	0	$\dfrac{arctg 5x}{\ln(1+x)}$	$\dfrac{2^x-1}{\sin 4x-\sin 6x}$
4.9	0	$\dfrac{tg\dfrac{x}{1+x^2}}{\arcsin^2\sqrt{x}}$	$\dfrac{3^x-1}{\ln(1-x)}$
4.10	0	$\dfrac{e^{2x}-1}{\sqrt{1+3x}-1}$	$\dfrac{(\arcsin\sqrt{x})^4}{tg^2 2x}$

1	2	3	4
4.11	0	$\dfrac{\sin x}{\ln(1+2x)}$	$\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^6}}{\ln(1+5x)}$
4.12	0	$\dfrac{e^{3x}-1}{arctg\,2x}$	$\dfrac{2^{2x}-1}{\sin\frac{x}{2}}$
4.13	0	$\dfrac{e^{4x}-1}{\sin 3x+\sin x}$	$\dfrac{(\arcsin x)^2}{tg^2 4x}$
4.14	2	$\dfrac{2^x-4}{\ln(3-x)}$	$\dfrac{\sqrt[3]{5-2x}-1}{\sin(x-2)}$
4.15	0	$\dfrac{\cos 6x-\cos 2x}{(1+3x^4)^5-1}$	$\dfrac{\ln(1+5x)}{\arcsin 3x}$
4.16	0	$\dfrac{e^{4x}-1}{\arcsin 5x-x}$	$\dfrac{tg\,2x-\sin 4x}{\ln(1+8x)}$
4.17	0	$\dfrac{e^{3x}-1}{\sqrt{1+\sin 2x}-1}$	$\dfrac{\sin 4x-\sin 7x}{\ln(1+2x)}$
4.18	1	$\dfrac{\sin \pi x}{\sqrt{x}-1}$	$\dfrac{\arcsin x}{arctgx}$
4.19	0	$\dfrac{\cos 6x-\cos 2x}{\ln(1+4x)}$	$\dfrac{\sin^2\sqrt{x}}{tg\frac{x}{1+x}}$
4.20	1	$\dfrac{\ln(2-x)}{2^x-2}$	$\dfrac{\arcsin(1-x)}{\ln x}$

Решение типовых примеров

1.20 Определить порядок относительно x бесконечно малой при $x \to 0+$ функции:

A) $g(x) = \ln(1+\sqrt{x})$; B) $g(x) = \arcsin(1-\cos x)$

Решение.

A) Возьмем функцию $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$. Поскольку

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \left[\sqrt{x}=t\right] = \lim_{t\to 0+0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1,$$

то порядок бесконечно малой функции $g(x)$ равен $\frac{1}{2}$.

В) Полагаем $f(x) = x^2$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(1-\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2} = \begin{bmatrix} 2\sin^2\frac{x}{2} = t \\ x = 2\arcsin^2\frac{t}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t^2}{4\arcsin^2\frac{t}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t^2}{t^2}\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{\arcsin^2\frac{t}{\sqrt{2}}}.$$

Вычислим отдельно каждый из полученных пределов:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t^2}{t^2} = \left[u = t^2\right] = \lim_{u\to 0}\frac{\arcsin u}{u} = \left[u = \sin x\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1,$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{\arcsin^2\frac{t}{\sqrt{2}}} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{\sqrt{2}}}{\arcsin\frac{t}{\sqrt{2}}}\frac{\frac{t}{\sqrt{2}}}{\arcsin\frac{t}{\sqrt{2}}}\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Последнее равенство получено с учетом предыдущих рассуждений. Итак, $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, т.е. порядок $g(x)$ равен 2.

2.20 Для бесконечно малых при $x \to 0$ функций

$$f(x) = \arccos\frac{1-x}{1+x},\ g(x) = \sqrt{1+\cos x}$$

выяснить какие из соотношений 1) – 6) верны.

Решение. Покажем, что:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\arccos\frac{1-x}{1+x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\arccos\frac{1-x}{1+x}}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} = 0.$$

Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}{\frac{x}{2}}=2\sqrt{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arccos\frac{1-x}{1+x}}=\begin{bmatrix}\frac{1-x}{1+x}=\cos t\\ x=\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\cos t}\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}\frac{t}{4}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0=0.$$

Из равенства $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=0$ согласно определению следует, что $g(x)=o(f(x))$, т.е. верно 4) и не выполняются соотношения 1), 3), 5), 6). Из 4) следует справедливость 2), так как из $g(x)=o(f(x))\Rightarrow g(x)=O(f(x))$. Итак верны только соотношения 2) и 4).

3.20 Для бесконечно малой при $x\to 0$ функции $f(x)$ найти такую $g(x)=cx^{\alpha}$, что: 1) $f(x)\asymp g(x)$, 2) $f(x)\sim g(x)$ при $x\to 0$:

А) $f(x)=1-chx$

Решение. По определению $chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Возьмем $g(x)=x$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-chx}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x+1-e^{-x}}{x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}=-\frac{1}{2},$$

так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$. Отсюда следует, что $f(x)\asymp x$ при $x\to 0$. Учитывая равенство $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-chx}{-\frac{1}{2}x}=1$, получаем, что $f(x)\sim\left(-\frac{1}{2}\right)x$, при $x\to 0$.

4.20 Вычислите $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, используя принцип эквивалентности бесконечно малых:

$$\textbf{A)}\ f(x)=\frac{\ln(2-x)}{2^x-2}\ ;\ \textbf{B)}\ f(x)=\frac{\arcsin(x-1)}{\ln x}.$$

Решение.

A) Применяя преобразование функции, получим

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{2^x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1-(x-1))}{x-1}\frac{x-1}{2(2^{x-1}-1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-(x-1))}{x-1}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2^{x-1}-1}.$$

Так как $\ln(1+t)\sim t\,, 2^t-1\sim t\cdot\ln 2$ при $t\to 0$, то, согласно принципу эквивалентности бесконечно малых,

$$I=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{x-1}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\ln 2}=-\frac{1}{2\ln 2}.$$

B) Преобразовывая функцию, получим

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{\arcsin(x-1)}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\arcsin(x-1)}{x-1}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln(1+(x-1))}.$$

Так как $\arcsin t\sim t$, $\ln(1+t)\sim t$ при $t\to 0$, то

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)}=1.$$