Лабораторная работа № 15

Основные теоремы дифференциального исчисления: примеры применения теорем. Правило Лопиталя.

Необходимые понятия и теоремы: теорема Ролля, теорема Лагранжа, формула конечных приращений, правило Лопиталя раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, раскрытие неопределенностей вида $0 \cdot \infty$, $0^0, \infty^0$, $\infty - \infty$.

Литература: [1] с. 254 – 263, [2] с. 164 – 172.

1 Проверить справедливость теоремы Ролля для данной функции $y = f(x)$ на указанном отрезке $[a;b]$:

№	$f(x)$	$[a;b]$
1	*2*	*3*
1.1	$y = 2^{\sin x}$	$[0;\pi]$
1.2	$y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$	$[-1;2]$
1.3	$y = \frac{5}{7}\left(x^2 + \frac{6}{x}\right)$	$[1;2]$
1.4	$y = 4\sqrt{3}x^3 + 9x^2 - 4\sqrt{3}x$	$[-1;1]$
1.5	$y = \ln \sin x$	$\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$
1.6	$y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$	$[1;2]$
1.7	$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	$[2;3]$
1.8	$y = 2\sin x + \cos 2x$	$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
1.9	$y = e^{2x - x^2}$	$[-1;3]$

1	2	3
1.10	$y=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$	$[0;\sqrt{2}]$
1.11	$y=x^3-6x^2+11x-6$	$[1;2]$
1.12	$y=\ln\cos x$	$\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{4}\right]$
1.13	$y=\sin x-\cos^2 x-1$	$[0;\pi]$
1.14	$y=3^{-x^2-3\cdot x}$	$[-2;-1]$
1.15	$y=x^3+4x^2-7x-10$	$[-5;-1]$
1.16	$y=2\sin x+\sin 2x$	$[0;\pi]$
1.17	$y=4^{\sin x}$	$[0;\pi]$
1.18	$y=x^3-2x^2-x+2$	$[1;2]$
1.19	$y=x^4-8x^2+3$	$[\sqrt{3};\sqrt{5}]$
1.20	$y=e^{\cos 2x}$	$\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right]$

2 Для данной функции $y=f(x)$ и указанного отрезка $[a;b]$ найдите точку $\xi\in(a,b)$, такую, что $f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a)$ (или покажите, что такая точка ξ существует):

№	$f(x)$	$[a;b]$	№	$f(x)$	$[a;b]$
1	2	3	4	5	6
2.1	$y=3x^2-2\sqrt{x}$	$1;4$	2.11	$y=2x+\dfrac{5}{x-2}$	$-1;1$
2.2	$y=4x^3-5x^2+x-2$	$0;2$	2.12	$y=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{1}{3}x-1$	$1;8$

1	2	3	4	5	6
2.3	$y=x^3+3x^2+6$	1; 2	2.13	$y=5x^3+15x$	1; 2
2.4	$y=\ln x$	$[1;e^2]$	2.14	$y=e^{2x}$	0; 2
2.5	$y=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$	0; 1	2.15	$y=x^3-2x^2-x+2$	0; 2
2.6	$y=\ln\sin x$	$\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right]$	2.16	$y=\dfrac{1}{x}$	$\left[\dfrac{1}{2};4\right]$
2.7	$y=\sqrt{1+x^2}$	$[0;\sqrt{3}]$	2.17	$y=\sqrt{x^2-2x}$	3; 8
2.8	$y=x^3+4x^2-7x-10$	0; 2	2.18	$y=x+\dfrac{1}{x}$	2; 4
2.9	$y=x^2+\dfrac{6}{x}$	1; 3	2.19	$y=x+\dfrac{4}{x}$	1; 2
2.10	$y=x^3-6x^2+11x-6$	[2; 4]	2.20	$y=x^4-8x^2+3$	1; 2

3 Используя теорему Лагранжа, докажите неравенство при указанных значениях переменных:

№	неравенство
1	*2*
3.1	$\dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}<\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta<\dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha},\quad 0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$
3.2	$n(b-a)a^{n-1}<b^n-a^n<n(b-a)b^{n-1},\quad 0<a<b, n\in\mathbb{N}$
3.3	$\dfrac{x-y}{x}<\ln\dfrac{x}{y}<\dfrac{x-y}{y},\quad 0<y<x$
3.4	$\left\lvert\sin\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{y}\right\rvert\le\lvert x-y\rvert,\quad x, y\ge 1$
3.5	$\lvert\operatorname{arcctg}x-\operatorname{arcctg}y\rvert\le\lvert x-y\rvert,\quad x,y\in\mathbb{R}$
3.6	$\lvert\sqrt{x}-\sqrt{y}\rvert\le\dfrac{1}{2}\lvert x-y\rvert,\quad x\ge 1, y\ge 1$

1	*2*
3.7	$\lvert\cos x-\cos y\rvert \le \lvert x-y\rvert, \quad x,y\in\mathbb{R}$
3.8	$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x, \quad x>0$
3.9	$\lvert\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y\rvert \le \lvert x-y\rvert, \quad x,y\in\mathbb{R}$
3.10	$(1+x)^{\alpha}\ge 1+\alpha\cdot x, \quad x>-1, \alpha\ge 1$
3.11	$\lvert\sin x-\sin y\rvert \le \lvert x-y\rvert, \quad x,y\in\mathbb{R}$
3.12	$\operatorname{sh}\alpha-\operatorname{sh}\beta<2(\alpha-\beta), \quad 0<\beta<\alpha<\ln 3$
3.13	$\ln(1+x)<x, \quad x>0$
3.14	$e^{x}>ex, \quad x>1$
3.15	$\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}<\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha}}-\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right), \quad n\in\mathbb{N}, \alpha>0$
3.16	$\lvert\arcsin x-\arcsin y\rvert \ge \lvert x-y\rvert, \quad x,\ y\in(-1;1)$
3.17	$\lvert\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\rvert \le \dfrac{1}{3}\lvert x-y\rvert, \quad x,\ y\ge 1$
3.18	$\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})<2x, \quad x>0$
3.19	$e^{\sin x}-1\le ex, \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{2}$
3.20	$e^{x}\ge 1+x, \quad \forall x\in\mathbb{R}$

4 С помощью правила Лопиталя вычислить следующие пределы:

№	а)	б)
1	*2*	*3*
4.1	$\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin x}{e^x+\cos x}$
4.2	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln(x^2-8)}{2x^2-5x-3}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{10}}{2^x}$
4.3	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax-\sin bx}{\operatorname{sh} ax-\operatorname{sh} bx}\quad, a\neq b$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2+\ln^2 x}$
4.4	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^{10}}$
4.5	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{\operatorname{tg}^2 x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+\ln x}{x^3+\cos x}$
4.6	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x\ln^2 x}$
4.7	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-3x^2+7x-5}{x^4-5x+4}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\ln x}{e^x}$
4.8	$\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}}$	$\lim\limits_{x\to+0}\frac{3+\ln x}{2-3\ln\sin x}$
4.9	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x^3-x}-2x}{\sqrt[5]{x^2}-1}$	$\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln\operatorname{tg} x}$
4.10	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\operatorname{tg} x-x}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{\ln(x-\frac{\pi}{2})}{\operatorname{tg} x}$

1	*2*	*3*
4.11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{1+x}{1-x}-2x}{x-\sin x}$	$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg} x}$
4.12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{x}}{\sin x - x}$	$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$
4.13	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x\sqrt{x}-3x+4}{x\sqrt{x}-5x+8\sqrt{x}-4}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-2\operatorname{tg} x}{1+3\operatorname{ctg} 2x}$
4.14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$
4.15	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$
4.16	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(\pi x/2)}{1-\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}}{2+\operatorname{ctg}\pi x}$
4.17	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}\pi x}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^{100}}{(0{,}01)^{x}}$
4.18	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2x}{x^2\arcsin x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x^2}{\operatorname{ctg} 3x}$
4.19	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x-\cos x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^{0{,}001}}$
4.20	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg} 4x-12\operatorname{tg} x}{3\sin 4x-12\sin x}$	$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}\quad ,a,b>0$

5 Установить вид неопределенности в данных пределах. Преобразовав имеющиеся неопределенности к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, вычислить предел с помощью правила Лопиталя.

№	а)	б)	в)
1	*2*	*3*	*4*
5.1	$\lim\limits_{x\to 1}(\sin\frac{\pi}{x}\cdot\operatorname{ctg}\pi x)$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\operatorname{arctg}x}-\frac{1}{x^2}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$
5.2	$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x+2)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2+3^x)^{\frac{1}{x}}$
5.3	$\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\frac{2\operatorname{arctg}x}{\pi}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg}x)^{\cos x}$
5.4	$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}3x\cdot\ln x^2$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arcsin x}\right)$	$\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\ln x}$
5.5	$\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$	$\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$
5.6	$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x\cdot\arcsin\frac{1}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{th}x}-\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$	$\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{2}{1-x}}$
5.7	$\lim\limits_{x\to+\infty}x^4\cdot e^{-x^3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$
5.8	$\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$	$\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{3}{1+\ln x}}$
5.9	$\lim\limits_{x\to+0}x^{0,1}\cdot\ln x$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{5}{1-x^5}\right)$	$\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

1	2	3	4
5.10	$\lim\limits_{x\to+0}\sin x\cdot\ln\operatorname{ctg} x$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}-\frac{1}{\sin x}\right)$	$\lim\limits_{x\to+0}(2\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$
5.11	$\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\operatorname{arctg}\sqrt{x})\cdot\sqrt{x}$	$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg} x)^{\cos x}$
5.12	$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\pi-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$	$\lim\limits_{x\to0}(x^{-2}-\operatorname{ctg}^2 x)$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$
5.13	$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x-(1-\sin x)^{-1})$	$\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$
5.14	$\lim\limits_{x\to1}(1-x)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$	$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{10}{1-x^{10}}-\frac{20}{1-x^{20}}\right)$	$\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$
5.15	$\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{sh} x-\sin x)\cdot\operatorname{ctg}^2 x$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin 2x}-\frac{1}{\operatorname{tg} 2x}\right)$	$\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{4}{1-2\ln x}}$
5.16	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\operatorname{ctg} x}-\frac{1}{\cos x}\right)$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{x}+1\right)^x$
5.17	$\lim\limits_{x\to+0}\sqrt{x}\cdot\ln^2 x$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x^{-1}}{2}-\frac{1}{\arcsin 2x}\right)$	$\lim\limits_{x\to0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$
5.18	$\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\frac{x+1}{x}$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg} 3x-\frac{1}{3x}\right)$	$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}-0}(2-2x)^{\operatorname{tg}\pi x}$
5.19	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$	$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x\ln^2 x)$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$

1	2	3	4
5.20	$\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[3]{x}\cdot\ln^{10}x$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\mathrm{ctg}^2 x\right)$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}$

Решение типовых примеров

1.20 Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y=e^{\cos 2x}$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение. Данная функция непрерывна на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$, дифференцируема на интервале $\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$. Кроме того, выполняются условия: $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=y\left(\frac{3\pi}{4}\right)=e^0=1$. Значит, на интервале $\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$ существует такая точка C, что $y'(C)=0$, т. е. теорема Ролля для данной функции справедлива.

В данном примере точку C можно найти. Действительно, рассмотрим уравнение $y'(x)=0$.

$$-2\sin 2x\cdot e^{\cos 2x}=0,$$

$$\sin 2x=0,$$

$$x=\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$$

Решение уравнения $y'(x)=0$ $C=\frac{\pi}{2}$, действительно, принадлежит интервалу $\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$. Теорема Ролля выполняется.

2.20 Для данной функции $y=f(x)$ и отрезка $[a;b]$ найти точку $\xi\in(1;2)$ такую, что $f(a)-f(b)=f'(\xi)\cdot(b-a)$, или показать, что такая точка существует.

$$f(x)=x^4-8x^2+3,\ \ 1;2$$

Решение. В данном случае $a=1,\ b=2,\ f'(x)=4x^3-16x,$

$$f(a)=f(1)=-4,\ \ f(b)=f(2)=-13.$$

Равенство $f(a)-f(b)=f'(\xi)\cdot(b-a)$ принимает вид:

$$-13+4=(4\xi^3-16\xi)\cdot 1.$$

Получаем уравнение $4\xi^3-16\xi+9=0$. Покажем, что оно имеет корень на интервале $(1;2)$. Обозначим $g(\xi)=4\xi^3-16\xi+9$. Так как $g(1)=-3<0$, $g(2)=9>0$, то по свойствам непрерывных функций, функция $g(\xi)$ имеет ноль на интервале $(1;2)$, и данное равенство выполняется в этой точке.

3.20 Используя теорему Лагранжа, доказать неравенство при указанных значениях переменной x.

$$e^x\ge 1+x,\quad x\in(-\infty;+\infty)$$

Решение. Пусть $x>0$. По теореме Лагранжа для функции $f(x)=e^x$, $x\in[0;x]$, существует точка $\xi\in(0;x)$, что

$$e^x-e^0=e^{\xi}(x-0),\ \text{т.е. }\ e^x-1=e^{\xi}\cdot x$$

Так как функция e^{ξ} возрастает на отрезке $[0;x]$, то она принимает минимальное значение в точке $x=0$. Поэтому

$$e^x-1\ge e^0\cdot x\ \ \text{или}\ \ e^x\ge 1+x,\quad \forall x>0.$$

Пусть теперь $x<0$. Применим теорему Лагранжа к функции $f(x)=e^x$ на отрезке $[x;0]$. Тогда для некоторого $\xi\in(x;0)$ имеем

$$e^0-e^x=e^{\xi}\cdot(-x).$$

Поскольку $-x$ здесь величина положительная, а e^{ξ} достигает максимального значения при $\xi=0$, то

$$e^0-e^x\le e^0\cdot(-x)\ \ \text{или}\ \ 1-e^x\le -x.$$

Таким образом, при $x<0$ опять получим $e^x\ge 1+x$.
При $x=0$ имеем $e^0=1+0$, т.е. неравенство тоже выполняется.

4.20 С помощью правила Лопиталя вычислить следующие пределы:

$$\text{а) }\lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x};\ \text{б) }\lim_{x\to+0}\frac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}\quad ,a,b>0.$$

Решение. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{3\cdot 4}{\cos^2 x}-\dfrac{12}{\cos^2 x}}{3\cdot 4\cos 4x-12\cos x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos^2 4x}{\cos^2 4x\cdot\cos^2 x(\cos 4x-\cos x)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos 4x}{\cos^2 4x\cdot\cos^2 x}=-\frac{1+1}{1\cdot 1}=-2.$$

б) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\dfrac{1}{\sin ax}\cdot a\cos ax}{\dfrac{1}{\sin bx}\cdot b\cos bx}=\dfrac{a}{b}\cdot\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\cos ax}{\cos bx}\cdot\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin bx}{\sin ax}=$

$=\dfrac{a}{b}\cdot\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin bx}{\sin ax}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\dfrac{a}{b}\cdot\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{b\cos bx}{a\cos ax}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}=1.$

5.20 Установить вид неопределенности в данных пределах. Преобразуя имеющиеся неопределенности к виду $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$**,** вычислить пределы с помощью правила Лопиталя.

$$\text{а) } \lim_{x\to+0}\sqrt[3]{x}\cdot\ln^{10}x;\quad \text{б) } \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x\right);\quad \text{в) } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}.$$

Решение а) Имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Преобразуем ее к виду $\dfrac{\infty}{\infty}$. Получим

$$\lim_{x\to+0}\sqrt[3]{x}\cdot\ln^{10}x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln^{10}x}{x^{-\frac{1}{3}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+0}\frac{10\ln^9x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}}=-30\lim_{x\to+0}\frac{\ln^9x}{x^{-\frac{1}{3}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=-30\lim_{x\to+0}\frac{9\ln^8x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}}=10\cdot9\cdot3^2\lim_{x\to+0}\frac{\ln^8x}{x^{-\frac{1}{3}}}.$$

Продолжая этот процесс далее, применив правило Лопиталя ещё 7 раз, получим

$$-10\cdot9\cdot8\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot3^9\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{3}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=-3^9\cdot10!\cdot\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}}=3^{10}\cdot10!\cdot\lim_{x\to+0}x^{\frac{1}{3}}=0.$$

б) Имеем неопределённость вида $\infty-\infty$. Преобразуем её к виду $\dfrac{0}{0}$ и далее используем асимптотическую формулу $\sin x\sim x$ при $x\to0$. Получим

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x-x\cos x)(\sin x+x\cos x)}{x^4}=$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x\cos x}{x}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{3x} = \dfrac{1}{3}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to 0}\cos x = 1 + 1 = 2,$$

то исходный предел равен $\dfrac{2}{3}$.

в) Имеем неопределённость вида 0^0. Воспользуемся основным логарифмическим тождеством:

$$(\pi - 2x)^{\cos x} = e^{\cos x\cdot\ln(\pi - 2x)}.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\pi - 2x)^{\cos x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} e^{\cos x\cdot\ln(\pi-2x)} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\cos x\cdot\ln(\pi-2x)}$.

Так как

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\cos x\ln(\pi - 2x) = \left[0\cdot\infty\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln(\pi - 2x)}{\dfrac{1}{\cos x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= -2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos^2 x}{\pi - 2x}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{\sin x} = -2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{2\cos x\cdot(-\sin x)}{-2} = 0,$$

то исходный предел равен e^0, то есть 1.