Лабораторная работа № 16
Приложения дифференциального исчисления

Необходимые понятия и теоремы: монотонные функции, критерий монотонности функции, точки локального и глобального экстремума функции, необходимые и достаточные условия существования локального экстремума.

Литература: [1] с. 261 – 266, [4] с. 317 – 327.

1 Найти естественную область определения функции $f(x)$, ее интервалы монотонности и точки экстремума:

№	$f(x)$	№	$f(x)$	№	$f(x)$
1.1	$x-e^{x}$	1.8	x^2e^{-x}	1.15	$x-\sin x$
1.2	$x+\cos x$	1.9	$x-2\ln x$	1.16	$x/\ln x$
1.3	$x-\sqrt{2-x}$	1.10	$x+\sqrt{x-3}$	1.17	e^{x}/x
1.4	$x^2(1-x\sqrt{x})$	1.11	$x\ln x$	1.18	x^3-3x^2-9x+1
1.5	$2x^2-\ln x$	1.12	$x-2\cos x$	1.19	$\sqrt{2x-x^2}$
1.6	$(x-2)^5(2x+1)^4$	1.13	$x\sqrt{x-x^2}$	1.20	$\dfrac{\lvert x-1\rvert}{x^2}$
1.7	$\ln(x^2+1)$	1.14	$-x^2\sqrt{x^2+2}$	1.21	x^3-3x^2+x-20

2 Найти глобальный экстремум функции $f(x)$, определенной на $[a;b]$:

№	$f(x)$	$[a;b]$	№	$f(x)$	$[a;b]$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
2.1	$x^2+\dfrac{4}{x}-4$	[1; 5]	2.11	$x^2-2x+\dfrac{16}{x-1}-13$	[2; 5]
2.2	$4-x-\dfrac{4}{x^2}$	[1; 4]	2.12	$\dfrac{4x}{x^2+4}-4$	[-4; 2]
2.3	$2\sqrt{x}-x$	[0; 4]	2.13	$2\sqrt{x-1}-x+2$	[1; 5]
2.4	$x-\dfrac{6}{x}$	[-3; 3]	2.14	$8x+\dfrac{4}{x^2}-15$	[1; 4]
2.5	$x-2\sqrt{x}+5$	[1; 9]	2.15	x^3-3x^2+3x-4	[1; 2]
2.6	$3-x-\dfrac{4}{(x+2^2)}$	[-1; 2]	2.16	$\dfrac{4}{x^2}-8x-4$	[-2; 0,5]
2.7	$-0.5x^2+\dfrac{8}{x}+8$	[-4; -1]	2.17	$x^2+\dfrac{16}{x+2}+4x-9$	[-1; 2]

1	2	3	4	5	6
2.8	x^4+4x	[-2; 2]	2.18	$2\sqrt{x}-x$	[0; 9]
2.9	$x^3-12x+7$	[0; 3]	2.19	$x-4\sqrt{x}+6$	[1; 16]
2.10	x^3-3x+3	[-1; 5]	2.20	x^3-6x^2+9x	[-1; 4]

3 Найти глобальный экстремум функции $f(x)$, определенной на $(a;b)$:

№	$f(x)$	$(a;b)$	№	$f(x)$	$(a;b)$
3.1	$\frac{1}{x}+x^2$	$(-1;1)$	3.11	$\frac{1}{x}e^{-1/x}$	$(-1;1)$
3.2	$\frac{x^2+4x+1}{x+4}$	$(-5;5)$	3.12	$\frac{9}{x}+\frac{25}{1-x}$	$(0;1)$
3.3	$\frac{1}{x}e^{-x}$	$(-2;2)$	3.13	$(x-3)^3e^{\|x+1\|}$	$(-2;4)$
3.4	$x+\frac{1}{x-2}$	$(-4;4)$	3.14	$\frac{x^3-3x^2+1}{x-3}$	$(0;3)$
3.5	$2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2x$	$(-\pi/2;\pi/2)$	3.15	$\ln x-x$	$(0;e)$
3.6	$\|\sin(x+\pi/4)\|$	$(-\pi/2;\pi/2)$	3.16	$(x^2+4)e^{\|x\|}$	$(-2;2)$
3.7	$xe^{-1/x}$	$(-5;5)$	3.17	$\|\cos(x-\pi/4)\|$	$(0;\pi/2)$
3.8	$\ln x-1$	$(0;e)$	3.18	$e^{x\|x-1\|}$	$(-2;2)$
3.9	$2\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}^2x$	$(0;\pi)$	3.19	$\|\operatorname{tg}(x-\pi/4)\|$	$(-\pi/2;\pi/2)$
3.10	$(x-3)e^{\|x+1\|}$	$(-2;4)$	3.20	$(x-3)^2e^{1/x}$	$(-1;4)$

4 Решить геометрическую задачу:

4.1 Найдите прямоугольный треугольник наибольшей площади, если сумма катета и гипотенузы его постоянна.

4.2 При каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка данной вместимости V будет иметь наименьшую полную поверхность?

4.3 В данный круговой сегмент, не превышающий полукруга, вписать прямоугольник наибольшей площади.

4.4 В эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вписать прямоугольник со сторонами, параллельными осям эллипса, площадь которого наибольшая.

4.5 Боковое ребро правильной треугольной пирамиды имеет постоянную заданную длину и составляет с плоскостью основания угол α. При каком значении α объём пирамиды является наибольшим?

4.6 В полушар радиуса *R* вписать прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием наибольшего объёма.

4.7 В данный шар радиуса *R* вписать цилиндр наибольшего объёма.

4.8 В шар радиусом *R* вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

4.9 Около шара радиуса r описать конус наименьшего объёма.

4.10 Через вершину *M* квадрата *CEMK* провести прямую, пересекающую лучи *CK* и *CE* в точках *A* и *B* так, чтобы площадь *ΔABC* была наименьшей.

4.11 Две стороны параллелограмма лежат на сторонах данного треугольника, а одна из его вершин принадлежит третьей стороне. При каких условиях площадь параллелограмма является наибольшей?

4.12 Найти наибольший объём конуса с образующей *l*.

4.13 В прямой круговой конус с углом 2α в осевом сечении и радиусом основания *R* вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

4.14 Найти кратчайшее расстояние точки *M(p,p)* от параболы $y^2 = 2px$.

4.15 Найти наибольшую хорду эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad 0 < b < a$, проходящую через вершину $B(0;-b)$.

4.16 Через точку эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ провести касательную, образующую с осями координат треугольник наименьшей площади.

4.17 Найти основания и высоту равнобочной трапеции, которая при данной площади *S* имеет наименьший периметр; угол при большем основании трапеции равен α .

4.18 Какова должна быть высота равнобедренного треугольника, вписанного в окружность диаметра *d*, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

4.19 В прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 см и углом 30° вписан прямоугольник, основание которого расположено на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы площадь его была наибольшей?

4.20 Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию. Каков должен быть угол при большем основании, чтобы площадь трапеции была наибольшей?

5 Решить физическую задачу:

5.1 Тяжелую балку длиной 13 м, расположенную вертикально, опускают на землю так, что нижний её конец прикреплен к вагонетке, а верхний удерживается канатом, намотанным на ворот. Канат сматывается со скоростью 2 м/мин. С каким ускорением откатывается вагонетка в момент, когда она пройдёт расстояние 5 м?

5.2 Антенна радара находится на расстоянии 1000 м по горизонтали от стартовой площадки и все время направлена на ракету, которая поднимается с постоянным ускорением 20 м/с^2. Какова угловая скорость антенны в момент, когда ракета находится не высоте 1000 м?

5.3 Лошадь бежит по окружности со скоростью 20 м/с. В центре окружности находится фонарь. Забор касается окружности в точке, из которой лошадь начинает бег. С какой скоростью перемешается тень лошади вдоль забора в момент, когда лошадь пробежит 1/8 окружности?

5.4 Резервуар, имеющий форму полушара радиуса R_0, заполняется водой. Скорость заполнения резервуара равна V_0. Определите скорость подъёма воды в резервуаре в момент, когда вода поднялась на высоту h_0.

5.5 Длина вертикально стоящей лестницы равна 5 м. Нижний конец лестницы начинает отодвигаться от стены с постоянной скоростью 2 м/с. Чему равно ускорение верхнего конца лестницы в момент, когда нижний конец отодвинулся от стены на 1 м?

5.6 Канат висячего моста, имеющего форму цепной линии, т. е. графика функции $y = a\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{a}\right)$, прикреплен к вертикальным опорам, отстоящим друг от друга на расстоянии 200 м. Самая нижняя точка каната находится на 40 м ниже точки подвеса. Чему равен угол между канатом и опорой в точке подвеса (для определения a можно воспользоваться равенством $\mathrm{ch}\,x \approx 1 + \dfrac{x^2}{2}$)?

5.7 В точках A и B находятся источники света силы J_1 и J_2 соответственно, $AB = 27$. Найдите на отрезке AB наименее освещенную точку (освещенность прямо пропорциональна силе света источника и обратно пропорциональна квадрату расстояния до него).

5.8 Бревно длиной 10 м с помощью подъёмного крана поднимается вертикально вверх за один из его концов. При этом второй конец волочится по земле со скоростью 0,05 м/с. С какой скоростью перемещается верхний конец бревна в момент, когда его нижний конец находится на расстоянии 3 м от вертикали?

5.9 Мальчик надувает воздушный шар, радиус которого возрастает с постоянным ускорением 0,2 см/с^2. С какой скоростью увеличивается объём шара в момент, когда площадь его поверхности равна 4π см^2 (радиус шара в начальный момент времени равнялся нулю)?

5.10 Человек, рост которого 1,7 м, удаляется от точечного источника света, расположенного на высоте 3 м, с постоянным ускорением 0,1 м/с^2. С каким ускорением перемещается тень его головы?

5.11 Скорость тела, движущегося по окружности радиуса 1 м, меняется по закону $v = v_0 t + {at^2}/{2}$. Найдите величину ускорения тела в момент времени $t = 1$ с.

5.12 Зависимость пути, пройденного телом, движущимся по окружности радиуса R, от времени задается уравнением $S = kt^3$ ($k > 0$). Чему равна величина скорости тела в момент, когда оно пройдёт путь S_0?

5.13 Частица движется с постоянной по величине скоростью v по кривой $y = x^3$. Найдите величину ускорения частицы в момент, когда $x = 0$.

5.14 При изобарном нагревании ν молей идеального газа его объём с течением времени меняется по закону $V = V_0 + at + bt^2$ ($V_0 > 0$, $a > 0$, $b > 0$). С каким ускорением меняется температура газа *T*, если его давление $p = p_0$?

5.15 Зависимость электрического заряда, проходящего через проводник с сопротивлением *R*, от времени имеет вид $Q(t) = te^{-t}$. Исследуйте на экстремум функцию $W(t)$, выражающую зависимость от времени мгновенной тепловой мощности, выделяемой в проводнике.

5.16 Предмет, находившийся первоначально на расстоянии $d_0 > F$ от собирающей линзы, начинают удалять от неё с постоянным ускорением *a*. Чему равна скорость движущегося изображения в момент, когда предмет находится от линзы на расстоянии d?

5.17 Дождевая капля, начальная масса которой m_0 падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь, так, что убыль массы пропорциональна времени с коэффициентом пропорциональности *k*. В какой момент времени после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей (сопротивлением воздуха пренебречь)?

5.18 Груз весом *P*, лежащий на горизонтальной плоскости, требуется сдвинуть с места приложенной силой. При каком наклоне этой силы к горизонту величина её будет наименьшей, если коэффициент трения груза равен k?

5.19 Найдите максимальную возможную температуру ν молей идеального газа, если его давление *p* и объём *V* связаны зависимостью $\alpha p^3 + \beta V^3 = p_0$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$, $p_0 > 0$).

5.20 Баржу, палуба которой на $h = 4$м ниже уровня пристани, подтягивают к ней при помощи каната, наматываемого на ворот, со скоростью $v = 2$ м/с. С каким ускорением движется баржа в момент, когда она удалена от пристани на расстояние *l*=8м (по горизонтали)?

Решение типовых примеров

1.20 Найти естественную область определения функции $f(x)$, ее интервалы монотонности и точки экстремума

$$f(x)=\frac{|x-1|}{x^2}.$$

Решение. Областью определения данной функции является множество $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Производная этой функции имеет вид

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^3} \text{ при } x\in(-\infty;0)\cup(0;1),\\ \dfrac{2-x}{x^3} \text{ при } x\in(1;+\infty)\end{cases}$$

и обращается в нуль в точке $x=2$. При этом производная не существует в точках $x=0$ и $x=1$. Поэтому точками возможного экстремума являются $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$. Они разбивают область определения на четыре интервала монотонности: $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$.

Видно, что $f'(x)>0$ при $x\in(-\infty;0)\cup(1;2)$, $f'(x)<0$ при $x\in(0;1)\cup(2;+\infty)$. Следовательно, функция $f(x)$ монотонно возрастает при $x\in(-\infty;0)$ и $x\in(1;2)$[1]; монотонно убывает при $x\in(0;1)$ и $x\in(2;+\infty)$. Согласно первому достаточному условию локального экстремума, в точке $x_3=2$ функция имеет локальный максимум, $f_{\max}=f(2)=\frac{1}{4}$, а в точке $x_2=1$ – локальный минимум, $f_{\min}=f(1)=0$.

2.20 Найти глобальный экстремум функции $f(x)$, определенной на $[-1;4]$:

$$f(x)=x^3-6x^2+9x.$$

Решение. Областью определения данной функции является множество $D(f)=\mathbb{R}$.

Определяем точки возможного экстремума (стационарные точки) функции $f(x)$:

[1] Выражение $x\in(-\infty;0)$ и $x\in(1;2)$ при определении интервалов возрастания функции обусловлено тем, что использование символа $\cup$ не корректно. Например, при $x_1=-1/4$, $x_2=4/3$ таких, что $x_1,x_2\in(-\infty;0)\cup(1;2)$ и $x_1<x_2$, имеем, $f(x_1)=20>3/16=f(x_2)$. Следовательно, функция $f(x)$ монотонно возрастает на каждом из интервалов $(-\infty;0)$, $(1;2)$, но функция не является монотонно возрастающей на множестве $(-\infty;0)\cup(1;2)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9,\ 3x^2 - 12x + 9 = 0.$$

Значит, $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$.

Так как при $-1 < x < 1$ имеем $f' > 0$, при $1 < x < 3$ имеем $f' < 0$, то $x_1 = 1$ является точкой максимума. Так как при $1 < x < 3$ имеем $f' < 0$ и при $3 < x < 4$ имеем $f' > 0$, то $x_2 = 3$ является точкой минимума.

Вычисляем значения $f(x)$ на концах отрезка $[-1;4]$ и в стационарных точках, принадлежащих отрезку:

$$f(-1) = -16,\ f(4) = 4,\ f(1) = 4,\ f(3) = 0.$$

Тогда

$$\min_{x\in[-1;4]} f(x) = \min\{-16, 4, 4, 0\} = -16,$$

$$\max_{x\in[-1;4]} f(x) = \max\{-16, 4, 4, 0\} = 4$$

Наименьшее значение данная функция принимает на левом конце отрезка в точке $x = -1$, наибольшее – в точке $x = 1$ и на правом конце отрезка в точке $x = 4$. График данной функции изображен на рисунке 18.

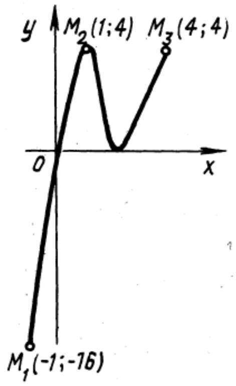

Рисунок 18 – График функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ на отрезке $[-1;4]$

3.20 Найти глобальный экстремум функции $f(x) = (x-3)^2 e^{1/x}$, определенной на $(-1;4)$.

Решение. Естественной областью определения данной функции является множество $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Для определения наибольшего и наименьшего значений функции на интервале $(-1;4)$. найдем локальные экстремумы. Вычислим производную:

$$f'(x) = e^{1/x}(x-3)\frac{2x^2 - x + 3}{x^2},\ x \in (-1;0) \cup (0;4).$$

В точке $x=0$ производная не существует. Критическими точками являются точки $x=0$, $x=3$. Для всех $x\in D(f)$ справедливо неравенство $f(x)\geq 0$ и $f(3)=0$. Поэтому наименьшее значение данной функции на $(-1;4)$ равно нулю.

Рассмотрим точку $x=0$. Заметим, что $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=+\infty$. Поэтому наибольшее значение данной функции на $(-1;4)$ не существует (см. рис.19).

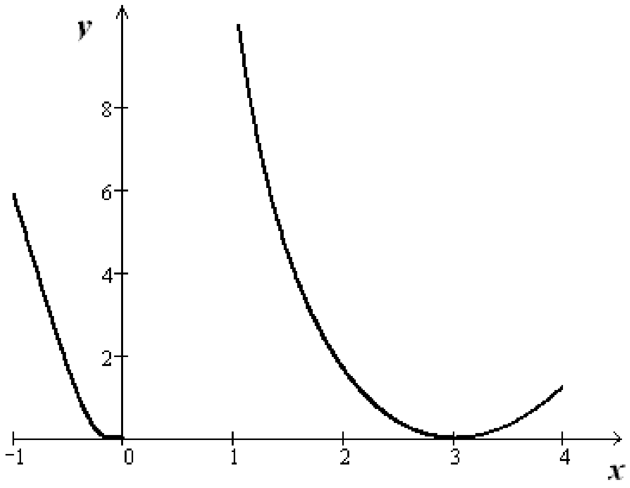

Рисунок 19 – График функции $f'(x)=e^{1/x}(x-3)\dfrac{2x^2-x+3}{x^2}$,

$x\in(-1;0)\bigcup(0;4)$

4.20 Решить геометрическую задачу:

Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию. Каков должен быть угол при большем основании, чтобы площадь трапеции была наибольшей?

Решение. На рисунке 20 изображена трапеция $ABCD$. Пусть $AB=a$. Тогда по условию $AB=CD=BC=a$. Пусть BE и CF – высоты трапеции; $BE=CF$. Полагая $\angle BAD=\alpha$, выразим площадь трапеции как функцию от α:

$$S=S(\alpha),\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

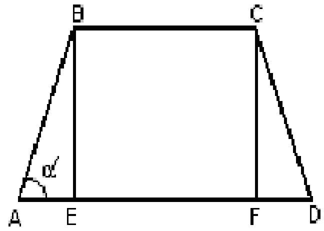

Рисунок 20 – Геометрическая интерпретация задачи 3.20

Площадь трапеции $ABCD$ равна

$$S_{\text{ABCD}} = S_{ABE} + S_{BCFE} + S_{CDF}.$$

Из геометрических соображений имеем:

$$S_{ABE} = S_{CDF} = \frac{1}{2} AE \cdot BE = \frac{1}{2} a\cos\alpha \cdot a\sin\alpha = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\alpha,$$

$$S_{BCFE} = BC \cdot BE = a^2 \sin\alpha.$$

Тогда площадь трапеции равна

$$S(\alpha) = \frac{1}{2} a^2 \sin 2\alpha + a^2 \sin\alpha.$$

Исследуем функцию $S(\alpha)$, определенную при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, на экстремум.

$$S'(\alpha) = a^2 (\cos 2\alpha + \cos\alpha).$$

Решая уравнение $S'(\alpha) = 0$, получим:

$$\cos 2\alpha + \cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -1 \text{ и } \cos\alpha = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $\alpha_1 = \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Единственным решением этого уравнения, лежащим на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ является $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Убедимся, что при $\alpha = \frac{\pi}{3}$ функция $S(\alpha)$ достигает максимума.

$$S''(\alpha) = -a^2 (2\sin 2\alpha + \sin\alpha).$$

Так как $\sin\frac{2\pi}{3} > 0$, $\sin\frac{\pi}{3} > 0$, $a > 0$, то $S''\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$. Значит, при $\alpha = \frac{\pi}{3}$ функция $S(\alpha)$ достигает наибольшего значения на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Угол при большем основании трапеции равен $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

5.20 Решить физическую задачу:

Баржу, палуба которой на $h = 4$м ниже уровня пристани, подтягивают к ней при помощи каната, наматываемого на ворот, со скоростью $v = 2$ м/с. С каким ускорением движется баржа в момент, когда она удалена от пристани на расстояние l=8м (по горизонтали)?

Решение. Пусть через t секунд после начала движения баржа (рисунок 21) находится на расстоянии $l(t)$м от пристани (по горизонтали).

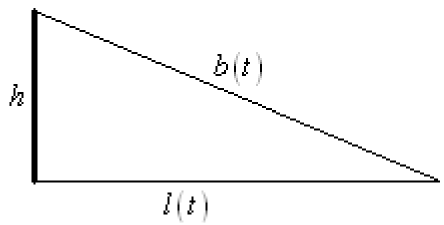

Рисунок 21– Геометрическая интерпретация задачи 4.20

Тогда длина каната представляет собой функцию

$$b(t)=\sqrt{l^2(t)+h^2}\,,\ t\in(0;+\infty),$$

производная которой в момент времени t равна

$$b'(t)=\frac{l(t)l'(t)}{\sqrt{l^2(t)+h^2}}.$$

Поскольку канат подтягивают, то по условию задачи $b'(t)=-2$.

Отсюда

$$-2=\frac{l(t)l'(t)}{\sqrt{l^2(t)+h^2}}.$$

Разрешая относительно $l'(t)$, получим скорость движения баржи

$$l'(t)=\frac{-2\sqrt{l^2(t)+h^2}}{l(t)}=-2\frac{b(t)}{l(t)}.$$

Ускорение движения баржи есть вторая производная от функции $l(t)$:

$$a(t)=-l''(t)=2\frac{b'(t)\cdot l(t)-b(t)\cdot l'(t)}{l^2(t)}.$$

Если t_0 – тот момент времени, когда $l(t_0)$=8, то

$$b(t_0)=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5},$$

$$l'(t_0)=\frac{-2\cdot 4\sqrt{5}}{8}=-\sqrt{5},$$

$$a(t_0)=2\frac{b'(t_0)\cdot l(t_0)-b(t_0)\cdot l'(t_0)}{l^2(t_0)}=\frac{1}{8}\ (\text{м/с}^2).$$