Лабораторная работа № 4

Вещественные числа

Необходимые понятия и теоремы: рациональные и иррациональные числа, действительные числа, аксиомы действительных чисел, принцип математической индукции, верхняя и нижняя грани множеств, ограниченные множества.

Литература: [1] с. 29 – 61, [4] с. 37 – 80.

1 Исходя из аксиом действительных чисел, доказать утверждения:

1.1 Если $a+b=c$, то $a=c-b$.

1.2 Число, обладающее свойством единицы, единственно.

1.3 Если $a>b$, то для любого числа c справедливо $a+c>b+c$.

1.4 Для любого числа a справедливо $a\cdot 0=0$.

1.5 Число, обладающее свойством нуля, единственно.

1.6 Число, обратное к данному отличному от нуля числу, единственно.

1.7 Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.

1.8 Если $a\cdot b=0$, то хотя бы один из сомножителей a и b равен нулю.

1.9 Число, противоположное данному, единственно.

1.10 Для любого числа $a\neq 0$ справедливо $a:a=1$.

1.11 Если $a<b$, то $-a>-b$.

1.12 Для любых чисел a и b справедливо $(-a)\cdot b=-a\cdot b$.

1.13 Для любых чисел a и b справедливо $-a-b=-(a+b)$.

1.14 Для любого числа $a\neq 0$ справедливо $1:(1:a)=a$.

1.15 Если $a<b$ и $c\leq d$, то $a+c<b+d$.

1.16 Уравнение $a\cdot x=b$, $a\neq 0$, имеет единственное решение.

1.17 Для любой дроби $\frac{a}{b}$, $b\neq 0$, и $\forall c\neq 0$ справедливо $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$.

1.18 Если $a<b$ и $c\leq d$, то $a-c<b-d$.

1.19 Если $a<b$ и $c<0$, то $ac>bc$.

1.20 Уравнение $a+x=b$ имеет единственное решение.

2 Доказать иррациональность числа a:

№	a	№	a	№	a	№	a
2.1	$\sqrt{3}$	2.6	$\sqrt{13}$	2.11	$\sqrt{21}$	2.16	$\sqrt{43}$
2.2	$\sqrt{5}$	2.7	$\sqrt{17}$	2.12	$\sqrt{22}$	2.17	$\sqrt{51}$
2.3	$\sqrt{7}$	2.8	$\sqrt{15}$	2.13	$\sqrt{33}$	2.18	$\sqrt{57}$
2.4	$\sqrt{11}$	2.9	$\sqrt{19}$	2.14	$\sqrt{37}$	2.19	$\sqrt{50}$
2.5	$\sqrt{10}$	2.10	$\sqrt{20}$	2.15	$\sqrt{41}$	2.20	$\sqrt{2}$

3 Найти $\max X$, $\min X$, $\sup X$, $\inf X$ числового множества:

№	X	№	X
3.1	$\{x\in\mathbb{Q}: \lvert x\rvert<1\}$	3.11	$\{x\in\mathbb{Q}: \lvert x\rvert>1\}$
3.2	$[0;2)$	3.12	$[1;2]$
3.3	$\{(-1)^n(1-1/n), n\in\mathbb{N}\}$	3.13	$\{1+(-1)^n/n, n\in\mathbb{N}\}$
3.4	$\{\cos n, n\in\mathbb{Z}\}$	3.14	$\{-1/3; -1/9; ..., -1/3^n, ...\}$
3.5	$\{1/3; 1/9; ..., 1/3^n, ...\}$	3.15	$\{-1/2; -3/4; ..., -(2^n-1)/2^n, ...\}$
3.6	$\{x\in\mathbb{Q}: \lvert x\rvert\geq 1\}$	3.16	$\{x\in\mathbb{Q}: \lvert x\rvert<3\}$
3.7	$(0;5]$	3.17	$\{\sin n, n\in\mathbb{Z}\}$
3.8	$\{n^2e^{-n}, n\in\mathbb{N}\}$	3.18	$\{1/10; 1/100; ..., 1/10^n, ...\}$
3.9	$\{1/10; 1/100; ..., 1/10^n, ...\}$	3.19	$\{2; 1+1/2; ..., 1+1/n, ...\}$
3.10	$\{1/2; 3/4; ..., (2^n-1)/2^n, ...\}$	3.20	$\{m/n \mid m,n\in\mathbb{N}, m<n\}$

4 Пусть $n, m\in\mathbb{N}$. Найти:

4.1	$\sup\limits_m \inf\limits_n \frac{m-n}{m+n}$	4.8	$\inf\limits_n \sup\limits_m \frac{m-n}{m+3n}$	4.15	$\sup\limits_n \inf\limits_m \frac{m-n}{2m+n}$
4.2	$\inf\limits_n \sup\limits_m \frac{m-n}{m+n}$	4.9	$\sup\limits_m \inf\limits_n \frac{m}{7m+n}$	4.16	$\inf\limits_m \sup\limits_n \frac{m-n}{2m+n}$
4.3	$\sup\limits_m \inf\limits_n \frac{m}{m+n}$	4.10	$\inf\limits_n \sup\limits_m \frac{m}{7m+n}$	4.17	$\sup\limits_n \inf\limits_m \frac{m-n}{m+3n}$
4.4	$\inf\limits_n \sup\limits_m \frac{m}{m+n}$	4.11	$\sup\limits_n \inf\limits_m \frac{m-n}{m+n}$	4.18	$\inf\limits_m \sup\limits_n \frac{m-n}{m+3n}$
4.5	$\sup\limits_m \inf\limits_n \frac{m-n}{2m+n}$	4.12	$\inf\limits_m \sup\limits_n \frac{m-n}{m+n}$	4.19	$\sup\limits_n \inf\limits_m \frac{m}{7m+n}$
4.6	$\inf\limits_n \sup\limits_m \frac{m-n}{2m+n}$	4.13	$\sup\limits_n \inf\limits_m \frac{m}{m+n}$	4.20	$\inf\limits_m \sup\limits_n \frac{m}{m+n}$
4.7	$\sup\limits_m \inf\limits_n \frac{m-n}{m+3n}$	4.14	$\inf\limits_m \sup\limits_n \frac{m}{m+n}$	4.21	$\sup\limits_m \inf\limits_n \frac{m-n}{m+2n}$

5 С помощью метода математической индукции доказать истинность утверждений при $n\in\mathbb{N}$:

5.1 n^3+5n кратно 6.

5.2 $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

5.3 $n^3+9n^2+26n+24$ кратно 6.

5.4 $1+4+7+\dots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$.

5.5 $7^{2n}-1$ кратно 24.

5.6 $2\cdot 2+3\cdot 5+\dots(n+1)(3n-1)=\dfrac{n(2n^2+5n+1)}{2}$.

5.7 13^n+5 кратно 6.

5.8 $5+9\cdot 5+13\cdot 5^2+\dots+(4n+1)\cdot 5^{n-1}=n\cdot 5^n$.

5.9 15^n+6 кратно 7.

5.10 $4\cdot 2+7\cdot 2^3+10\cdot 2^5+\dots+(3n+1)\cdot 2^{2n-1}$.

5.11 9^n+3 кратно 4.

5.12 $1+6+20+\dots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}=3+2^n\cdot(2n-3)$.

5.13 $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\dots\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2}$.

5.14 $(1-\dfrac{1}{4})\cdot(1-\dfrac{1}{9})\cdots(1-\dfrac{1}{n^2})=\dfrac{n+1}{2n}$.

5.15 7^n+3n-1 кратно 9.

5.16 $(1-\dfrac{4}{1})(1-\dfrac{4}{9})(1-\dfrac{4}{25})\cdots(1-\dfrac{4}{(2n-1)^2})=\dfrac{1+2n}{1-2n}$.

5.17 $7^n+12n+17$ кратно 18.

5.18 $\dfrac{1}{5\cdot 12}+\dfrac{1}{12\cdot 19}+\dots+\dfrac{1}{(7n-2)\cdot(7n+5)}=\dfrac{n}{5(7n+5)}$.

5.19 $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\dots\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{n+1}$.

5.20 $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

6 С помощью метода математической индукции доказать неравенство при $n\in\mathbb{N}$:

6.1 $4^n>7n-5$.

6.2 $3^n-2^n\ge n$.

6.3 $4^n>n^2+3^n$.

6.4 $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}<1$.

6.5 $y_1 + y_2 + \ldots + y_n \ge n,\ \ \forall y_1, y_2, \ldots, y_n > 0 : y_1 y_2 \ldots y_n = 1$.

6.6 $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{1}{2},\ \ \forall n \ge 2$.

6.7 $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n},\ \forall n \ge 2$.

6.8 $\dfrac{1}{n!} \le \dfrac{1}{2^{n-1}},\ \forall n \ge 2$.

6.9 $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},\ \ x_k \ge 0, \forall k = \overline{1, n}$.

6.10 $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n+1} > 1$.

6.11 $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}},\ \forall n \ge 2$.

6.12 $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{14},\ \forall n \ge 2$.

6.13 $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n},\ \forall n \ge 2$.

6.14 $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{2^n - 1} < n,\ \forall n \ge 2$.

6.15 $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{2^n - 1} > \dfrac{n}{2},\ \forall n \ge 2$.

6.16 $(1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n) \ge \dfrac{1}{2},\ x_k \ge 0, \forall k = \overline{1, n},$ и $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le \dfrac{1}{2}$.

6.17 $(2n)! > \dfrac{4n}{n+1}(n!)^2,\ \forall n \ge 2$.

6.18 $2^n n! < n^n,\ \forall n > 2$.

6.19 $3^n > 2^n + 7n,\ \forall n \ge 4$.

6.20 $n \le 2^{n-1}$.

7 Построив соответствующее сечение, доказать равенство:

7.1	$\sqrt{2} + \sqrt{32} = \sqrt{50}$	7.7	$\sqrt{3} + \sqrt{75} = \sqrt{108}$	7.13	$\sqrt{6} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{30}$
7.2	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$	7.8	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$	7.14	$\sqrt{7} \cdot \sqrt{11} = \sqrt{77}$
7.3	$\sqrt{3} + \sqrt{27} = \sqrt{48}$	7.9	$\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{27}$	7.15	$\sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{45}$
7.4	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{15}$	7.10	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12}$	7.16	$\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{21}$
7.5	$\sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{45}$	7.11	$\sqrt{7} + \sqrt{28} = \sqrt{63}$	7.17	$\sqrt{3} + \sqrt{27} = \sqrt{48}$
7.6	$\sqrt{7} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{35}$	7.12	$\sqrt{7} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{14}$	7.18	$\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$

Решение типовых примеров

1.20 Уравнение $a+x=b$ имеет единственное решение.

Решение. Число $-a+b$ удовлетворяет уравнению $a+x=b$. В самом деле: $a+(-a+b)=(a+(-a)+b)=0+b=b$. Других решений нет. Действительно, если $x\in\mathbb{R}$ и является решением уравнения $a+x=b$, то

$$\begin{aligned} -a+b&=-a+b,\\ -a+(a+x)&=-a+b,\\ (-a+a)+x&=-a+b,\\ 0+x&=-a+b,\\ x&=-a+b. \end{aligned}$$

2.20 Доказать, что $\sqrt{2}$ – иррациональное число.

Решение. Доказываем методом от противного. Допустим, что существует такое рациональное число $\frac{m}{n}$ (несократимая дробь), квадрат которого равен 2. Тогда $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$ или $m^2=2n^2$. Следовательно, число m^2 есть четное число. Отсюда m есть четное число, и, следовательно, представимо в виде $m=2k$. Тогда имеем $n^2=2k^2$. Значит, n^2 есть четное число, тогда и n – четное. Таким образом, числа m и n являются четными. Поэтому дробь $\frac{m}{n}$ сократима, что противоречит предположению. Допущение не верно, т.е. не существует рационального числа, квадрат которого равен 2, а, значит, $\sqrt{2}$ – иррациональное число, $\sqrt{2}=1,41421356\ldots$

3.20 Найти $\max X$, $\min X$, $\sup X$, $\inf X$ числового множества

$$X=\left\{\frac{m}{n}\,\middle|\; m,n\in\mathbb{N}, m<n\right\}$$

Решение. *Шаг 1.* Покажем, что $\inf X=0$, то есть, 1) $\forall x=\frac{m}{n}\in X$, $\frac{m}{n}>0$ (0 – нижняя граница X); 2) $\forall x^*>0\ \exists\overline{x}\in X$ такой, что $\overline{x}<x^*$ (0 – наибольшая из нижних границ). Утверждение 1) очевидно.

Докажем утверждение 2). Представим x^* в виде десятичной дроби $x^*=a,x_1x_2\ldots x_nx_{n+1}\ldots$. Если $a>0$, то неравенство $\overline{x}<x^*$ очевидно, так как

множество X состоит из правильных дробей. Если $a=0$, то $\exists n$ такой, что $x_n \neq 0$, и поэтому $\overline{x}=0,x_1x_2...x_{n-1}(x_n-1)...$ – искомое, то есть, $\overline{x}<x^*$.

Шаг 2. Покажем, что $\min X$ не существует. По определению, наименьшим элементом множества X называется такое число $c\in X$, что для всех $x\in X$ выполняется неравенство $x\geq c$. Заметим, что $\inf X \notin X$, так как $\frac{0}{n}\notin X$, 0– не натуральное число, и поэтому множество не имеет наименьшего элемента.

Шаг 3. Покажем, что $\sup X=1$, то есть 1) $\forall x=\frac{m}{n}\in X$, $\frac{m}{n}<1$ (1 – верхняя граница X); 2) $\forall x^*<1$ $\exists \overline{x}\in X$ такой, что $\overline{x}>x^*$ (1 – наименьшая из верхних границ). Утверждение 1) очевидно, так как X содержит только правильные дроби.

Докажем утверждение 2). Представим x^* в виде десятичной дроби $x^*=0,x_1x_2...x_nx_{n+1}...$. Тогда $\exists n$ такой, что $x_n\neq 0$, и поэтому $\overline{x}=0,x_1x_2...x_{n-1}(x_n+1)...$ – искомое, то есть, $\overline{x}>x^*$.

Шаг 4. . Покажем, что $\max X$ не существует. По определению, наибольшим элементом множества X называется такое число $c\in X$, что для всех $x\in X$ выполняется неравенство $x\leq c$. Заметим, что $\sup X\notin X$, так как $\frac{m}{n}=1$ при $m=n$, что противоречит определению правильной дроби. Поэтому множество X не имеет наибольшего элемента.

4.20 Пусть $n,m\in\mathbb{N}$. Найти $\inf\limits_m \sup\limits_n \frac{m}{m+n}$.

Решение. Заметим, что если $\exists \max X$ и $\min X$, то $\sup X=\max X$, $\inf X=\min X$.

Для всех $n\in\mathbb{N}$ выполняется $0\leq\frac{m}{m+n}\leq\frac{m}{m+1}$. Следовательно, $\max\limits_n \frac{m}{m+n}=\frac{m}{m+1}$, а значит, $\sup\limits_n \frac{m}{m+n}=\frac{m}{m+1}$

Для всех $m\in\mathbb{N}$ выполняется $\frac{1}{2}\leq\frac{m}{m+1}<1$. Следовательно, $\min\limits_m \frac{m}{m+1}=\frac{1}{2}$, а значит, $\inf\limits_m \frac{m}{m+1}=\frac{1}{2}$.

5.20 Методом математической индукции докажите, что для любого $n\in\mathbb{N}$ справедливо равенство

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Решение.

Шаг 1. При $n=1$ равенство очевидно.

Шаг 2. Предположим, что равенство верно для натурального числа $n=k$:

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Шаг 3. Проверим верность утверждения для натурального числа $n=k+1$:

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\left[\!\left[\begin{matrix}\textit{учитывая}\\ \textit{шаг}\,2\end{matrix}\right]\!\right]=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$$
$$=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=(k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Из истинности утверждения при $n=k$ вытекает его истинность при $n=k+1$. Согласно методу математической индукции, утверждение верно для любого $n\in\mathbb{N}$.

6.20 С помощью метода математической индукции доказать неравенство $n\le 2^{n-1}$ при $n\in\mathbb{N}$.

Решение.

Шаг 1 При $n=1$ неравенство верно, т.к. $1\le 1$.

Шаг 2. Предположим, что неравенство верно для $n=k$, то есть $k\le 2^{k-1}$.

Шаг 3. Докажем, что неравенство верно для $n=k+1$:

$$2^k=2\cdot 2^{k-1}\ge\left[\!\left[\begin{matrix}\textit{учитывая}\\ \textit{шаг}\;2\end{matrix}\right]\!\right]\ge 2\cdot k\ge k+k\ge k+1.$$

Таким образом, из истинности утверждения при $n=k$ вытекает его истинность при $n=k+1$. Согласно методу математической индукции, утверждение верно для любого $n\in\mathbb{N}$.

7.20 Построив соответствующее сечение, доказать равенство

$$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}.$$

Решение. Для удобства обозначим $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\alpha$. Необходимо доказать, что $\alpha=\sqrt{18}$. Покажем, что совпадают верхние классы сечений, определяющие числа α и $\sqrt{18}$. Сначала построим сечения, определяющие действительные числа $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}$. Рассмотрим верхние классы этих сечений:

$$\sqrt{2} = A \mid A'; \quad A' = \{a' \mid a'^2 > 2, a' > 0\};$$
$$\sqrt{8} = B \mid B'; \quad B' = \{b' \mid b'^2 > 8, b' > 0\};$$
$$\sqrt{18} = C \mid C'; \quad C' = \{c' \mid c'^2 > 18, c' > 0\}.$$

Теперь определим, какой верхний класс определяет число $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{8}$. Пусть α производит сечение $D \mid D'$. Рассмотрим рациональные числа $a', a, b', b,$ удовлетворяющие неравенствам $a < \sqrt{2} < a'$ и $b < \sqrt{8} < b'$, где $a \in A,\ a' \in A',\ b \in B,\ b' \in B'$.

По определению, суммой $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ называется число, которое содержится в следующих рациональных границах:

$$a + b < \sqrt{2} + \sqrt{8} < a' + b'.$$

Из определения суммы двух вещественных чисел следует, что в верхний класс D' сечения, определяющего число $\sqrt{2} + \sqrt{8}$, входят всевозможные суммы вида $a' + b'$:

$$D' = \{d' \mid d' = a' + b', a' \in A', b' \in B'\}.$$

Докажем совпадения классов D' и C'. Для этого вначале покажем, что $D' \subset C'$. Пусть $d' \in D'$, тогда $\alpha' = a' + b'$, $a' \in A'$, $b' \in B'$ и $a'^2 > 2,\ a' > 0$, $b'^2 > b$, $b' > 0$.

Ясно, что $d' > 0$. Докажем, что $d'^2 > 18$. Так как $a'^2 b'^2 > 16$, то $a'b' > 4$ и $2a'b' > 8$. Следовательно,

$$d'^2 = (a' + b')^2 = a'^2 + 2a'b' + b'^2 > 2 + 8 + 8,$$

т. е. $d'^2 > 18$, $d' \in C \Rightarrow D' \subset C'$.

Покажем, что $C' \subset D'$. Пусть $c' > 0$, $c' \in C'$, т. е. $c'^2 > 18$. Положим $c'^2 - 18 = h$ (h –рациональное число) и выберем $a' > 0$ так, чтобы

$$2 < a'^2 < 2 + \frac{1}{6}h,\ a'^2 < 3 \text{ и } b' = c' - a'.$$

Тогда $b' > 0$ и $b'^2 = c'^2 + a'^2 - 2c'a'$. Так как $c'^2 = 18 + h$, а $4a'^2 < 4(2 + h/6) = 8 + 2h/3$, то

$$4c'^2a'^2 < (8 + 2h/3)(18 + h) = 144 + 20h + 2h^2/3 <$$
$$< 144 + 20h + 25h^2/36 = (12 + 5h/6)^2,$$

т.е. $2c'a' < 12 + 5h/6$, а $a'^2 + c'^2 > 20 + h$, следовательно, $b'^2 > 8 + h/6$, т.е. $b'^2 > 8$ или $c' = a' + b'$, где $a' \in A'$, $b' \in B'$ и верхний класс C' содержится в классе D'. Так как $C' \subset D'$ и $D' \subset C'$, то классы C' и D' совпадают. Верхние классы D' и C' сечений совпадают, значит, совпадают и нижние классы D и C и, следовательно, $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$.