Лабораторная работа № 7
Предел функции

Необходимые понятия и теоремы: различные определения предела функции, общие свойства предела функции, предел и неравенства, предел и арифметические операции, предел композиции, критерий Коши существования предела, односторонние пределы, бесконечные пределы, частичные пределы.

Литература: [1] с. 163 – 180, [5] с. 47 – 72.

1 Для функции $y = f(x)$, $x \in D\ f$, заданных a, A и $\varepsilon = \varepsilon_i$ найти такое δ, чтобы для любых $x \in D\ f$, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполнялось неравенство $|f(x)-A|<\delta$

№	$f(x)$	$D\ f$	a	A	ε_1	ε_2
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1.1	$2x+1$	$\mathbb{R}$	0	1	0,1	0,001
1.2	x^2	$\mathbb{R}$	1		0,01	0,001
1.3	$2x^2-1$	$\mathbb{R}$	1	1	0,1	0,002
1.4	$\sin x$	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	1	0,01	0,001
1.5	$\cos x$	$(0, \pi)$	0	1	0,1	0,01
1.6	$\frac{1}{x}$	$(0, 2)$	1	1	0,01	0,001
1.7	$\frac{x^2-9}{x-3}$	$(3, 10]$	3	6	0,1	0,001
1.8	$\frac{x-1}{x+1}$	$(-1, 1)$	0	–1	0,02	0,002
1.9	$3x^2-2$	$\mathbb{R}$	1	1	0,3	0,003
1.10	x^3	$\mathbb{R}$	1	1	0,1	0,01
1.11	$3x+1$	$\mathbb{R}$	0	1	0,2	0,01
1.12	x^2-1	$\mathbb{R}$	1	0	1	0,001

1	2	3	4	5	6	7
1.13	$\sin 2x$	$\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$	$\dfrac{\pi}{4}$	1	0,01	0,001
1.14	$\cos 2x$	$(0, \pi)$	$\dfrac{\pi}{2}$	-1	0,1	0,002
1.15	$\dfrac{1}{3}x^2 + 1$	$\mathbb{R}$	3	4	1	0,0001
1.16	$100x + 1$	$\mathbb{R}$	0	1	0,1	0,001
1.17	$\dfrac{x^2}{100} + 1$	$(0, 1)$	0	1	0,1	0,01
1.18	$1000x$	$\mathbb{R}$	0	0	0,1	0,001
1.19	$\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$	$(1, 5]$	1	2	0,2	0,01
1.20	$\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$	$(1, 4)$	1	3	0,1	0,001

2 Пользуясь определением предела по Коши (на «языке $\varepsilon - \delta$»), доказать, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

№	$f(x)$	$D\ f$	a	A
1	2	3	4	5
2.1	x^2	$\mathbb{R}$	3	9
2.2	$2x + 1$	$(1, 2)$	1	3
2.3	$3x$	$(1, 4)$	2	6
2.4	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{\pi}{2}$	1
2.5	$\cos x$	$(0, \pi)$	π	–1
2.6	$\dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$	$(-1, 1)$	–1	–2
2.7	$x^2 - 1$	$\mathbb{R}$	0	–1
2.8	x^3	$\mathbb{R}$	1	1

1	2	3	4	5
2.9	$\frac{x^2}{100}-1$	$(0, 2)$	0	–1
2.10	$100x+1$	$\mathbb{R}$	0	1
2.11	$3x+1$	$(-1, 5)$	5	16
2.12	$\frac{x}{100}+100$	$\mathbb{R}$	100	100
2.13	$100x^2-100$	$(1, 4)$	1	0
2.14	$\sin 2x$	$(0, \pi)$	$\frac{\pi}{4}$	1
2.15	$\cos 2x$	$\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$	$\frac{\pi}{4}$	0
2.16	$\frac{x^2-1}{x-1}$	$(1, 2)$	1	2
2.17	$\frac{x^3-1}{x-1}$	$(1, 3)$	1	3
2.18	$4x^2-1$	$\mathbb{R}$	1	3
2.19	$\frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$	1	1
2.20	$3x^2-1$	$\mathbb{R}$	1	2

3 Используя определение предела функции по Гейне (на языке последовательностей), доказать, что не существует предела $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

№	$f(x)$	a	№	$f(x)$	a
1	2	3	4	5	6
3.1	$\begin{cases} 2x, x\le 1 \\ x, x>1 \end{cases}$	1	3.10	$ctg\ x$	∞
3.2	$\sin x$	$+\infty$	3.11	$sign\ x$	0
3.3	$\cos x$	$+\infty$	3.12	$\sin\frac{1}{x}$	0
3.4	$\begin{cases} 2x, x\le 1 \\ 2-x, x>1 \end{cases}$	1	3.13	$\begin{cases} x^2+2, x\le 0 \\ x+1, x>0 \end{cases}$	0

1	2	3	4	5	6
3.5	$\begin{cases} x^2, x<0 \\ x+2, x\ge 0 \end{cases}$	0	3.14	$\begin{cases} 2x, x<0 \\ 2x^2+1, x\ge 0 \end{cases}$	0
3.6	$\begin{cases} -x+1, x\le 2 \\ x+1, x>2 \end{cases}$	2	3.15	$\frac{\lvert x\rvert}{x}$	0
3.7	$\begin{cases} x^2, x\le 0 \\ x+1, x>0 \end{cases}$	0	3.16	$\frac{x-1}{\lvert x-1\rvert}$	1
3.8	$\begin{cases} -x+1, x\le 0 \\ 2+x, x>0 \end{cases}$	0	3.17	$\cos\frac{1}{x}$	0
3.9	$\begin{cases} -2, x<1 \\ x+2, x\ge 1 \end{cases}$	1	3.18	$\sin\frac{1}{x-1}$	1

4 Используя логические символы (на языке «$\varepsilon-\delta$») сформулировать утверждение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и привести соответствующие примеры.

№	x_0	A	№	x_0	A	№	x_0	A	№	x_0	A
4.1	∞	b	4.6	a	∞	4.11	$a+0$	$-\infty$	4.16	$+\infty$	$-\infty$
4.2	$-\infty$	b	4.7	$a-0$	$+\infty$	4.12	$a+0$	$+\infty$	4.17	$+\infty$	$+\infty$
4.3	$+\infty$	b	4.8	$a-0$	$-\infty$	4.13	$-\infty$	$-\infty$	4.18	$+\infty$	∞
4.4	a	$+\infty$	4.9	$a-0$	∞	4.14	$-\infty$	$+\infty$	4.19	$a-0$	b
4.5	a	$-\infty$	4.10	$a+0$	∞	4.15	$-\infty$	∞	4.20	$a+0$	b

5 Найти односторонние пределы $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)$ или показать, что эти пределы не существуют. Если существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, найти его.

№	$f(x)$	a	№	$f(x)$	a
1	2	3	4	5	6
5.1	$\sin\frac{1}{x}$	0	5.10	$\begin{cases} \sin x, x<0 \\ \cos x, x\ge 0 \end{cases}$	0
5.2	$\cos\frac{1}{x}$	0	5.11	$tg\ x$	$\frac{\pi}{2}$

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
5.3	$\begin{cases}1, x\le 0\\ -1, x>0\end{cases}$	0	5.12	$ctg\ x$	π
5.4	$\begin{cases}2x^2, x\le 1\\ 1-x, x>1\end{cases}$	1	5.13	$\dfrac{x}{\lvert x\rvert}$	0
5.5	$e^{\frac{1}{x}}$	0	5.14	$\sin^2\dfrac{1}{x}$	0
5.6	$\sin\dfrac{1}{x-1}$	1	5.15	$\begin{cases}x^2, x\le 1\\ 2x-1, x>1\end{cases}$	1
5.7	$\dfrac{\lvert x-2\rvert}{x-2}$	2	5.16	$\begin{cases}x^2, x\le 1\\ 2x+1, x>1\end{cases}$	1
5.8	$\lvert x\rvert$	0	5.17	x *\	1
5.9	$\begin{cases}x+1, x\le 1\\ 1-x, x>1\end{cases}$	1	5.18	$\sin\dfrac{1}{\lvert x-2\rvert}$	2

*\ x – целая часть x.

6 Пользуясь определение предела по Коши, доказать, что число A не является $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

№	$f(x)$	$D\ f$	a	A
1	*2*	*3*	*4*	*5*
6.1	x^2-1	$(0,1)$	1	1
6.2	$3x^2-1$	$\mathbb{R}$	0	2
6.3	$\dfrac{x^2-1}{x+1}$	$(-1,1)$	-1	1
6.4	$\dfrac{x^2-1}{x-1}$	$\mathbb{R}$	1	0
6.5	$\dfrac{x}{100}-1$	$\mathbb{R}$	0	4
6.6	x^3-x	$(0,10)$	1	1

1	*2*	*3*	*4*	*5*
6.7	$\dfrac{\lvert x\rvert}{x} - x$	$(-1, 0)$	0	2
6.8	$100x+1$	$\mathbb{R}$	0	-1
6.9	$2\lvert x\rvert-1$	$(-1, 1)$	1	0
6.10	$\dfrac{x^3-1}{x-1}$	$(1, 10)$	1	2
6.11	$2x-1$	$(0, 1)$	0	2
6.12	x^3+1	$(0, 2)$	0	2
6.13	$100x^2-100$	$\mathbb{R}$	1	1
6.14	$\dfrac{1}{x}$	$(0, 10]$	1	4
6.15	$\lvert x\rvert \cdot x$	$(0, 4)$	1	3
6.16	$\dfrac{\lvert x\rvert}{x} + x$	$(0, 1)$	0	2
6.17	$\sin\lvert x\rvert$	$(0, 1)$	0	1
6.18	$\dfrac{x^2}{100} + x$	$\mathbb{R}$	10	1
6.19	$-x^2+1$	$\mathbb{R}$	0	2
6.20	$\dfrac{1}{x} + x$	$(1, 3)$	1	0

7 Если для некоторой последовательности $x_n \to a$ $x_n \neq a$ имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, то число (или символ ∞) A называют частичным пределом функции $f(x)$ в точке a. Наименьший и наибольший из этих частичных пределов обозначают $\varliminf\limits_{x\to a} f(x)$ и $\varlimsup\limits_{x\to a} f(x)$ и называют соответственно нижним и верхним пределами $f(x)$ в точке a. Найти $\varliminf\limits_{x\to a} f(x)$ и $\varlimsup\limits_{x\to a} f(x)$.

№	$f(x)$	$D\ f$	a	№	$f(x)$	$D\ f$	a
7.1	$\sin\frac{1}{x}$	(0, 1)	0	7.10	$\sin^2 x$	$\mathbb{R}$	$-\infty$
7.2	$\sin^2\frac{1}{x}$	(0, 1)	0	7.11	$\sin^2\frac{1}{\lvert x\rvert}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	0
7.3	$x\cos\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	0	7.12	$\cos^2\frac{1}{\lvert x\rvert}$	(0, 2)	0
7.4	$\cos^2\frac{1}{x}$	$(1, +\infty)$	0	7.13	$\sin\frac{1}{x-1}$	(1, 3)	1
7.5	$x\sin\frac{1}{x}$	(0, 1)	0	7.14	$\cos\frac{1}{x-1}$	$(-1, 1)$	1
7.6	$x^2\cos\frac{1}{x-1}$	(1, 2)	1	7.15	$x\cos\frac{1}{x-2}$	$\mathbb{R}\setminus\{2\}$	2
7.7	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$+\infty$	7.16	$\frac{x}{1+x^2\sin^2 x}$	$\mathbb{R}$	$+\infty$
7.8	$2^{\sin x^2}$	$\mathbb{R}$	$+\infty$	7.17	$2^{\sin\frac{1}{x}}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	0
7.9	$x^2\cos^2 x$	$\mathbb{R}$	$+\infty$	7.18	$2^{\cos\frac{1}{x-1}}$	$(1, +\infty)$	1

Решение типовых примеров

1.20. Для функции $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$, $x\in(1,4)$, $a=1$, $A=3$ и $\varepsilon_1=0{,}1$, $\varepsilon_2=0{,}001$ найти δ, чтобы для любых $x\in(1,4)$, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполнялось неравенство $|f(x)-A|<\delta$.

Решение. Так как $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$, $x\in(1,4)$, $a=1$, $A=3$, то

$$|f(x)-A|=\left|\frac{x^3-1}{x-1}-3\right|=\left|x^2+x+1-3\right|\le$$

$$\le|(x-1)(x+1)|+|x-1|=|x-1|\cdot(|x+1|+1).$$

Будем искать нужное δ среди $\delta : \delta \le 1$. Для $x \in (1,4)$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-1| \le \delta \le 1$, имеем $0 < x \le 2$ и $|x+1|+1 \le 4$. Поэтому

$$|f(x) - A| < 4\delta .$$

Теперь если $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0{,}1$, то для него δ найдем из равенства $4\delta = 0{,}1$, т.е. $\delta_1 = \frac{1}{40}$. Если же $\varepsilon = \varepsilon_2 = 0{,}001$, то полагаем $4\delta = 0{,}001$, т.е. $\delta_2 = \frac{1}{4000}$. Заметим, что найденные $\delta_i \le 1$.

2.20. Пользуясь определением предела по Коши (на «языке $\varepsilon - \delta$»), доказать, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Решение. Так как $f(x) = 3x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$, $a = 1$, $A = 2$, то

$$|f(x) - A| = |3x^2 - 3| = 3|x-1| \cdot |x+1|.$$

Возьмем $\forall \varepsilon > 0$ и будем искать нужное δ среди $\delta : \delta \le 1$. Тогда $0 < |x-1| < \delta \le 1 \Rightarrow 0 < x \le 2$. Поэтому $3|x+1| \le 9$ и

$$|f(x) - A| < 9\delta .$$

Тогда, если $9\delta = \varepsilon$, то $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех $x \in D(f)$ и $0 < |x-1| < \delta$. Поэтому, положив $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{9}\right\}$, будем иметь, что $\forall \varepsilon > 0$ при $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{9}\right\}$ для $\forall x \in D(f)$ и $0 < |x-1| < \delta$ справедливо неравенство

$$|f(x) - 2| < \varepsilon .$$

Итак, показано, что $\lim\limits_{x \to 1}(3x^2 - 1) = 2$.

3.18. Используя определение предела функции по Гейне (на языке последовательностей), доказать, что не существует предела $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, если $f(x) = \sin\frac{1}{x-1}$, $a = 1$.

Решение. Для последовательности

$$x_n' = 1 + \frac{1}{n\pi} \to 1, \ f(x_n') = \sin n\pi \to 0 .$$

С другой стороны,

$$x_n'' = 1 + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 1, \text{ а } f(x_n'') = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) \to 1.$$

Из определения предела по Гейне следует, что предел $\lim\limits_{x \to 1} \sin \frac{1}{x-1}$ не существует.

4.20. Используя логические символы (на языке « $\varepsilon - \delta$ ») сформулировать утверждение $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и привести соответствующие примеры, если $x_0 = a + 0$, $A = b$.

Решение. На языке «$\varepsilon - \delta$» $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что $\forall x \in D(f) \ 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Пример: $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $a = 0$, $b = 1$ $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{x}{x} = 1$.

5.18. Найти односторонние пределы $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x)$, где $f(x) = \sin \frac{1}{|x-2|}$, $a = 2$, или показать, что эти пределы не существуют. Если существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, найти его.

Решение. Покажем, что не существует $\lim\limits_{x \to 2+0} \sin \frac{1}{|x-2|}$. Для доказательства воспользуемся определением предела по Гейне: при $n \to \infty$

$$x_n' = 2 + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 2 + 0, \qquad f\left(x_n'\right) = \sin \frac{\pi}{2} \to 1;$$

$$x_n'' = 2 + \frac{1}{n\pi} \to 2 + 0, \qquad f\left(x_n''\right) = \sin n\pi \to 0.$$

Итак, показано, что не существует $\lim\limits_{x \to 2+0} \sin \frac{1}{|x-2|}$. Аналогично показывается, что не существует $\lim\limits_{x \to 2-0} \sin \frac{1}{|x-2|}$. Таким образом, показано, что не существует $\lim\limits_{x \to 2} \sin \frac{1}{|x-2|}$.

6.20 Пользуясь определение предела по Коши, доказать, что число A не является $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, если $f(x)=\dfrac{1}{x}+x$, $x\in(1,3)$, $a=1$, $A=0$.

Решение. Нужно показать, что $\exists\varepsilon>0$ такое, что $\forall\delta>0$ $\exists x'\in D(f)$, удовлетворяющее условию $0<|x'-1|<\delta$, для которого $|f(x')-0|\ge\varepsilon$. Возьмем $\varepsilon=1$. Для любого $0<\delta<1$ положим $x'=1+\dfrac{\delta}{2}$. Тогда $x'\in(1,3)$

$$0<|x'-1|=\frac{\delta}{2}<\delta \text{ и } |f(x')-0|=1+\frac{\delta}{2}+\frac{1}{1+\frac{\delta}{2}}\ge 1=\varepsilon .$$

Нужное утверждение доказано.

7.18 Найти $\varliminf\limits_{x\to a} f(x)$ и $\varlimsup\limits_{x\to a} f(x)$, если $f(x)=2^{\cos\frac{1}{x-1}}$, $x\in(1,+\infty)$, $a=1$.

Решение. Так как $-1\le\cos t\le 1$, то $\dfrac{1}{2}\le f(x)\le 2$. Поэтому если A – частичный предел $f(x)$ в точке $a=1$, то $\dfrac{1}{2}\le A\le 2$. С другой стороны, имеем: при $n\to\infty$

$$x_n'=1+\frac{1}{\pi+2n\pi}\to 1, \quad \text{а} \quad f(x_n')=2^{\cos\pi}=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2};$$

$$x_n''=1+\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\to 1, \quad \text{а} \quad f(x_n'')=2^{\cos\frac{\pi}{2}}=2\to 2.$$

Следовательно, $\varliminf\limits_{x\to a} f(x)=\dfrac{1}{2}$, а $\varlimsup\limits_{x\to a} f(x)=2$.