ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1

МНОЖЕСТВА. ОТОБРАЖЕНИЯ. СИСТЕМЫ МНОЖЕСТВ

1. Основные понятия и теоремы

Пусть X — множество и пусть $\alpha(x)$ — некоторое свойство, которое для каждого конкретного элемента x из X может быть истинным или не быть таковым. Совокупность всех элементов x из X, для которых $\alpha(x)$ истинно, является подмножеством множества X. Это множество записывается так:

$$\{x \mid x \in X, \alpha(x)\} \quad \text{или} \quad \{x \in X \mid \alpha(x)\}$$

В тех случаях, когда ясно, о каком множестве X идет речь, используют еще более краткое обозначение — $\{x \mid \alpha(x)\}$.

Например, если A и B некоторые множества и $\alpha(x)$ есть $x \notin B$, то $\{x \in A \mid \alpha(x)\}$ является множеством всех элементов из A, которые не принадлежат B. Оно называется **разностью** множеств A и B и обозначается $A \setminus B$.

Объединение двух множеств A и B обычно обозначают $A \cup B$. Множество $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ называется **симметрической разностью** множеств A и B и обозначается $A \Delta B$. Объединение множеств $A_1,\ldots,A_n$ обозначают $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Если $A_1,\ldots,A_n,\ldots$ — бесконечная последовательность множеств, то их объединение обозначают $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ или $\bigcup_{n \in N} A_n$.

Пусть I — некоторое множество и $\{A_i \mid i \in I\}$ — семейство множеств, т.е. каждое A_i является множеством. Совокупность всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A_i, называется **объединением семейства** $\{A_i \mid i \in I\}$ и обозначается $\bigcup_{i \in I} A_i$ или $\cup\{A_i \mid i \in I\}$. Множество I называют множеством индексов рассматриваемого семейства. Добавим, что по определению объединение пустого семейства множеств (т.е. такого, что $I = \varnothing$) является пустым множеством.

Если множество индексов I не пусто, то совокупность всех элементов, которые принадлежат одновременно каждому множеству A_i $(i \in I)$, обозначается $\bigcap_{i \in I} A_i$ или $\cap\{A_i \mid i \in I\}$ и называется **пересечением** семейства $\{A_i \mid i \in I\}$.

Пересечение двух множеств A и B, конечной последовательности $A_1,...,A_n$ и бесконечной последовательности множеств $A_1,...,A_n,...$ обозначается соответственно $A\cap B$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$, $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.

Справедливы следующие формулы, которые называют принципом двойственности или формулами де Моргана.

Если $\{A_i \mid i\in I\}$ — непустое семейство подмножеств множества X, то

$$X \setminus \cup\{A_i \mid i\in I\} = \cap\{X \setminus A_i \mid i\in I\}$$

и

$$X \setminus \cap\{A_i \mid i\in I\} = \cup\{X \setminus A_i \mid i\in I\}.$$

Пусть X и Y — множества, $f : X\to Y$ — отображение множества X в множество Y. Если A — подмножество множества X, то множество $\{f(x) \mid x\in A\}$ называют **образом** множества A и обозначают $f(A)$. Если $B\subset Y$, то множество $\{x\in X \mid f(x)\in B\}$ называют **прообразом** множества B и обозначают $f^{-1}(B)$.

Ввиду важности понятий образа и прообраза множества еще раз их переформулируем.

Итак, образом $f(A)$ множества $A\subset X$ называется такое множество, которое получится если мы “соберем вместе” все элементы вида $f(x)$ для $x\in A$. (Так как $f(x)\in Y$, то образ множества A есть подмножество множества Y.) Прообраз $f^{-1}(B)$ множества $B\subset Y$ при отображении $f : X\to Y$ есть совокупность всех элементов x из X таких, что $f(x)\in B$; ясно, что $f^{-1}(B)\subset X$.

Отображение f называется **инъективным**, если разные элементы из X оно переводит в разные элементы множества Y, т.е. $f(x) = f(y)$ тогда и только тогда, когда $x=y$.

Отображение f называется **сюръективным**, если $f(X)=Y$. Отображение, которое сюръективно и инъективно, называется **биективным** отображением или биекцией.

Говорят, что два множества X и Y имеют одинаковую мощность или **равномощны**, если существует биекция между X и Y.

Множество называется **счетным**, если оно равномощно множеству $\mathbf{N}$ (множеству натуральных чисел). Множество, которое не является ни конечным, ни счетным, называется несчетным. Множество $[0,1]$ несчетно, его мощность называют **континуум**.

Любое подмножество счетного множества конечно или счетно. Объединение конечного или счетного числа счетных множеств является счетным множеством.

Объединение $\bigcup_{i\in I} A_i$ семейства попарно непересекающихся множеств (т.е. таких множеств, что $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $i,j \in I$) обозначают также символом $\coprod_{i\in I} A_i$ или $\coprod \{A_i | i \in I\}$.

Множество, элементы которого являются подмножествами фиксированного множества X, называют системой подмножеств множества X.

<u>Определение 1.</u> Система $\mathfrak{R}$ подмножеств множества X называется **кольцом**, если выполнены следующие условия:

(i) $\mathfrak{R} \neq \varnothing$;

(ii) если $A,B \in \mathfrak{R}$, то $A \cup B \in \mathfrak{R}$ и $A \setminus B \in \mathfrak{R}$.

Кольцо $\mathfrak{R}$ называется **алгеброй**, если $X \in \mathfrak{R}$.

Пересечение любого семейства колец подмножеств множества X является кольцом. Поэтому, если $\boldsymbol{A}$ — некоторая непустая система подмножеств множества X, то пересечение всех колец, содержащих $\boldsymbol{A}$ и содержащихся в $\boldsymbol{P}(X)$ — множестве всех подмножеств множества X, является наименьшим кольцом, содержащим $\boldsymbol{A}$. Оно обозначается $\mathfrak{R}(\boldsymbol{A})$ и называется кольцом, порожденным системой $\boldsymbol{A}$.

<u>Определение 2.</u> Система $\boldsymbol{S}$ подмножеств множества X называется **полукольцом,** если выполнены следующие условия:

(i) $\varnothing \in \boldsymbol{S}$;

(ii) если A и B принадлежат $\boldsymbol{S}$, то $A \cap B \in \boldsymbol{S}$;

(iii) если A и B принадлежат $\boldsymbol{S}$, то $B \setminus A$ можно представить в виде $B \setminus A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$, где $A_k \in \boldsymbol{S}$, $k=1,2,...,n$.

<u>Пример</u>. Пусть $X=\mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{S}=\{[a_1,b_1[\times [a_2,b_2[\mid a_i,b_i \in \mathbf{R};\ a_i \leq b_i,\ i=1,2\}$. Тогда $\varnothing=[1,1[\times[1,1[$, а справедливость оставшихся двух условий определения полукольца видна из рисунков1 и 2. На рисунке 2 множество $B \setminus A$ заштриховано.

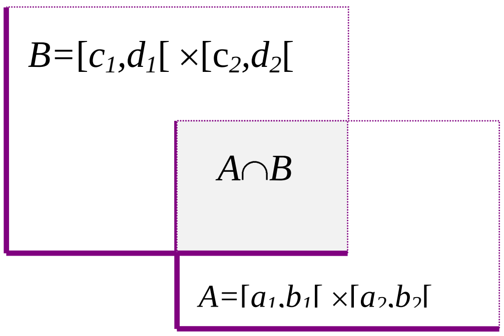

Рис. 1

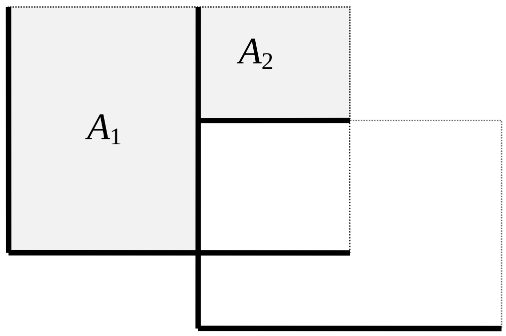

Рис. 2

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\mathbf{S}$ *— полукольцо подмножеств множества* X. *Тогда кольцо* $\mathfrak{R}(\mathbf{S})$, *порожденное системой подмножеств* $\mathbf{S}$, *состоит из всех множеств, являющихся конечными дизъюнктивными объединениями множеств из* $\mathbf{S}$; *т.е.*

$$\mathfrak{R}(\mathbf{S}) = \{ \coprod_{k=1}^{n} A_k \mid A_1,\ldots,A_n \in \mathbf{S},\ n \in \boldsymbol{N} \}.$$

<u>Определение 3</u>. Кольцо $\mathfrak{R}$ называется **σ-кольцом**, если объединение счетного числа множеств из $\mathfrak{R}$ принадлежит $\boldsymbol{R}$; т.е. если $A_i \in \mathfrak{R}$, $i=1,2,\ldots$, то объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ принадлежит $\mathfrak{R}$.

Кольцо $\mathfrak{R}$ называется **δ-кольцом**, если пересечение счетного числа множеств из $\mathfrak{R}$ принадлежит $\mathfrak{R}$; т.е. если $A_i \in \mathfrak{R}$, $i=1,2,\ldots$, то $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}$.

Если σ-кольцо является алгеброй, то его называют **σ-алгеброй,** аналогично, **δ-алгебра** — это δ-кольцо, которое является алгеброй.

<u>Определение 4</u>. Пусть $\boldsymbol{A}$ — непустая система подмножеств множества X. Наименьшее σ-кольцо из всех σ-колец, содержащих систему A, называется **σ-кольцом, порожденным системой $\boldsymbol{A}$**. Это σ-кольцо будем обозначать $S(\boldsymbol{A})$.

Можно показать, что $S(\boldsymbol{A})$ совпадает с пересечением всех σ-колец, содержащих систему A и содержащихся в $\boldsymbol{P}(X)$.

Пример. Пусть X=**R** и пусть τ — естественная топология на **R** (т.е. τ состоит из открытых интервалов и всевозможных объединений таких интервалов). σ-кольцо $S(\tau)$, порожденное топологией τ, является σ-алгеброй. Ее элементы называются **борелевскими** множествами на прямой. $S(\tau)$ не допускает такого простого описания, как, например, кольцо, порожденное полукольцом. Борелевскими множествами являются открытые множества, замкнутые множества — как дополнение до открытых, счетные пересечения открытых множеств (их называют множествами типа G_δ), счетные объединения замкнутых множеств (их называют множествами F_σ). Отметим, что эти классы не исчерпывают σ-алгебру борелевских множеств.

ЛИТЕРАТУРА : [I, с. 1–14]; [2, с. 17–56].

II. З а д а ч и

1. Найти разность и симметрическую разность множеств A и B (привести геометрическое решение задачи).

	A	B
1.1	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \lvert x\rvert < 1/2\}$
1.2	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \ge 1\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4\}$
1.3	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \lvert x\rvert+\lvert y\rvert \le 1\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$
1.4	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \max(\lvert x\rvert,\lvert y\rvert) \le 1\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$
1.5	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 2xy \le 1\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$
1.6	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \sin(x)-y > 0 \}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x>0, y>0 \}$
1.7	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \sin(x)-y > 0 \}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x>0, y<0 \}$
1.8	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \sin(x) < y \}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x<0, y>0 \}$
1.9	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2+2x \le 0\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2+2y \le 0\}$
1.10	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 1\le x^2+y^2 \le 4\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x-y=1 \}$
1.11	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 9x^2-4y \le 36\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \lvert x\rvert\le 2, 0<y<1 \}$
1.12	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<\sin x<1 \}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \lvert x\rvert\le 2, \lvert y\rvert<2 \}$
1.13	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<\cos x<1 \}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \lvert x\rvert\le\pi/2, \lvert y\rvert<\pi 2 \}$
1.14	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \mathrm{tg}\, x \le 1 \}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$

Решение задачи 1.14. Множество А изображено на рис.3 заштрихованной частью плоскости $\mathbf{R}^2$. Оно представляет собой объединение полос шириной $3\pi/4$, левые границы которых, проходящие через точки $\pi/2 + \pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$, не принадлежат множеству А, а правые границы — прямые $x=\pi/4 + \pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$, принадлежат множеству А.

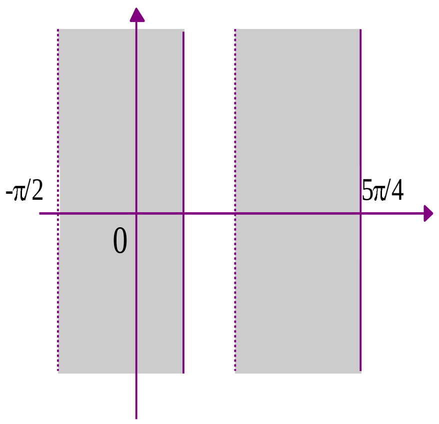

Рис. 3

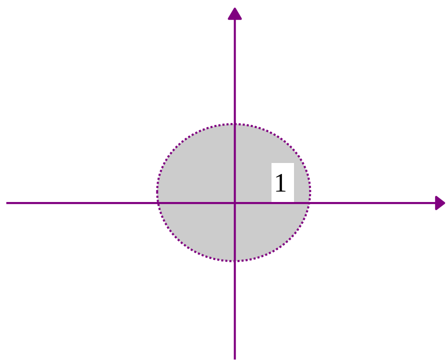

Рис. 4

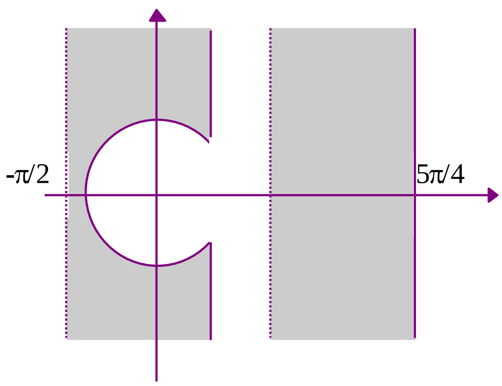

Рис. 5

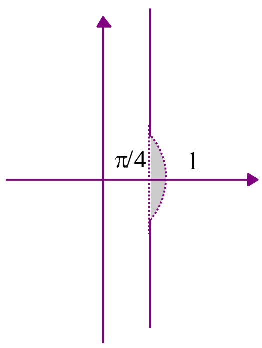

Рис.6

На рис. 4 изображено множество B. Оно представляет собой внутренность круга радиуса 1 с центром в начале координат.

Разность $A \backslash B$ изображена на рис. 5 , разность $B \backslash A$ — на рис. 6. Симметрическая разность $A \Delta B$ изображена на рис. 7.

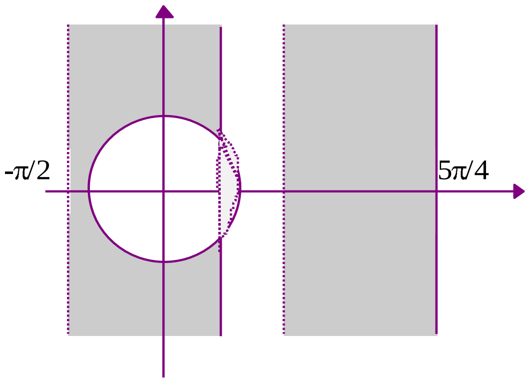

Рис.7

2. Пусть $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $A,B \subset \mathbf{R}^2$, C=[0,1]. Найти и изобразить множества $f(A)$, $f(B)$, $f(A \cap B)$, $f^{-1}(C)$; выяснить, является ли отображение f инъективным, сюръективным, биективным, если:

	f	A	B
2.1	$f(x,y) = x$	$\{(x,0) \mid x \in [0,1]\}$	$\{(x,1) \mid x \in [0,1]\}$
2.2	$f(x,y) = y$	$\{(1,y) \mid y \in [0,1]\}$	$\{(2,y) \mid y \in [0,1]\}$
2.3	$f(x,y) = x^2+y^2$	$\{(x,x) \mid x \in [0,1]\}$	$\{(x,-x) \mid x \in [0,1]\}$
2.4	$f(x,y) = \sin x$	$\{(x,1) \mid x \in [0,\pi]\}$	$\{(x,2) \mid x \in [0,\pi]\}$
2.5	$f(x,y) = \sin y$	$\{(1,y) \mid y \in [0,\pi]\}$	$\{(2,y) \mid y \in [0,\pi]\}$
2.6	$f(x,y) = x+y$	$\{(x,y) \mid x,y \in [0,1]\}$	$\{(-1,y) \mid y \in [1,3]\}$
2.7	$f(x,y) = x - y$	$\{(x,y) \mid x,y \in [0,1]\}$	$\{(x,2) \mid x \in [0,3]\}$
2.8	$f(x,y) = e^{x}$	$\{(x,y) \mid x,y \in [0,1]\}$	$\{(x,2) \mid x \in [0,1]\}$
2.9	$f(x,y) = e^{-x}$	$\{(x,y) \mid x,y \in [0,1]\}$	$\{(x,5) \mid x \in [0,1]\}$
2.10	$f(x,y) = e^{y}$	$\{(x,y) \mid x,y \in]-\infty,0]\}$	$\{(3,y) \mid y \in]-\infty,0]\}$
2.11	$f(x,y) = e^{-y}$	$\{(x,y) \mid x,y \in]-\infty,0]\}$	$\{(4,y) \mid y \in]-\infty,0]\}$
2.12	$f(x,y) = xy$	$\{(x,y) \mid x,y \in [0,1]\}$	$\{(x,2) \mid x \in [0,1/2]\}$
2.13	$f(x,y) = x^3$	$\{(x,y) \mid x \in [0,1]\}$	$\{(x,4) \mid x \in [0,2]\}$
2.14	$f(x,y) = y^3$	$\{(3,y) \mid y \in [0,1]\}$	$\{(1,y) \mid y \in [0,1]\}$

Решение задачи 2.14.

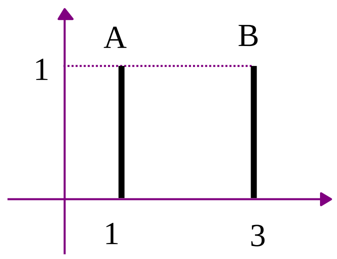

Рис.8

Множества A и B изображены на рис. 8. Ясно, что $f(A) = f(B) = [0,1]$. Имеем $A \cap B = \varnothing$. Поэтому $f(A \cap B) = \varnothing$. Далее имеем $f^{-1}(C) = f^{-1}([0,1]) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x,y) \in [0,1]\} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^3 \in [0,1]\}$; т.е. $f^{-1}(C)$ есть полоса в плоскости $\mathbf{R}^2$, ограниченная прямыми $y=0$ и $y=1$, которые ей принадлежат.

Отображение $f(x,y) = y^3$ не является инъективным, а значит и биективным, так как в разных точках (1,1) и (2,1) оно принимает одинаковые значения $f(1,1) = f(2,1) = 1$. Отображение f сюръективно, так как $f(1,c^{1/3})=c$ для каждого $c \in$ **R.**

3. Выполняются ли для произвольного отображения $f : X \to Y$ и множеств $A,B \subset X$; $C,D \subset Y$ следующие равенства:

3.1	$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$	3.2	$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
3.3	$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$	3.4	$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
3.5	$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$	3.6	$f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$
3.7	$f(X \setminus B) = f(X) \setminus f(B)$	3.8	$f^{-1}(Y \setminus D) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(D)$
3.9	$f(A \Delta B) = f(A) \Delta f(B)$	3.10	$f^{-1}(C \Delta D) = f^{-1}(C) \Delta f\text{–}^{1}(D)$
3.11	$f(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha f(A_\alpha)$	3.12	$f^{-1}(\bigcup_\alpha C_\alpha) = \bigcup_\alpha f^{-1}(C_\alpha)$
3.13	$f(\bigcap_\alpha A_\alpha) = \bigcap_\alpha f(A_\alpha)$	3.14	$f^{-1}(\bigcap_\alpha C_\alpha) = \bigcap_\alpha f^{-1}(C_\alpha)$

Решение задачи 3.13. Пусть f, A, B те же, что в задаче 2.14. Мы при решении задачи 2.14 показали, что что $f(A) = [0,1]$, $f(B) = [0,1]$ и $f(A \cap B) = \varnothing$. Так как $f(A) \cap (B) = [0,1] \neq \varnothing$, то для произвольного отображения f формула $f(\bigcap_\alpha A_\alpha) = \bigcap_\alpha f(A_\alpha)$ не выполняется .

Пусть, далее, f — инъективное отображение. Пусть $y \in f(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha})$. Тогда для некоторого $x \in \bigcap_{\alpha} A_{\alpha}$ имеем $f(x)=y$. Следовательно, для каждого индекса α имеем $x \in A_{\alpha}$ и $f(x)=y$. Тем самым мы показали, что $y \in \bigcap_{\alpha} f(A_{\alpha})$ т.е. $f(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}) \subset \bigcap_{\alpha} f(A_{\alpha})$.

Пусть теперь $y \in \bigcap_{\alpha} f(A_{\alpha})$. Тогда $y \in f(A_{\alpha})$ для каждого α. Отсюда для каждого α найдется $x_{\alpha} \in A_{\alpha}$ такое, что $y = f(x_{\alpha})$. Так как f — инъективное отображение, то все x_{α} совпадают. Поэтому $f(x) = y$, для $x \in \bigcap_{\alpha} A_{\alpha}$, т.е. $y \in f(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha})$. Следовательно, $f(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}) \supset \bigcap_{\alpha} f(A_{\alpha})$, а вместе с тем мы показали выполнение равенства $f(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}) = \bigcap_{\alpha} f(A_{\alpha})$.

Итак, это равенство выполняется для инъективных отображений. Не для всех сюръективных отображений оно выполняется, так как в задаче 2.14 f — сюръективное отображение , но как мы уже отмечали выше, для этого отображения данное равенство не выполняется.

4. Выяснить, являются ли следующие множества конечными, счетными или несчетными?

4.1. Множество рациональных чисел;

4.2. Множество всех упорядоченных пар рациональных чисел;

4.3. Множество всех конечных последовательностей рациональных чисел;

4.4. Множество всех последовательностей из нулей и единиц;

4.5. Множество всех многочленов с рациональными коэффициентами;

4.6. Множество всех открытых кругов на плоскости рационального радиуса, координаты центра которых рациональны;

4.7. Множество попарно непересекающихся треугольников на плоскости;

4.8. Множество всех сходящихся последовательностей целых чисел;

4.9. Множество всех последовательностей целых чисел;

4.10. Множество всех непрерывных на отрезке [0,1] числовых функций;

4.11. Множество всех непрерывных на отрезке [0,1] числовых функций, принимающих в рациональных точках отрезка рациональные значения;

4.12. Множество точек разрыва монотонно неубывающей на числовой прямой числовой функции;

4.13. Множество точек разрыва монотонной на числовой прямой числовой функции;

4.14. Множество точек разрыва заданной на числовой прямой числовой функции, представимой в виде разности двух монотонно неубывающих функций.

Решение задачи 4.12. Функция $f(x) = x$ $(x \in \mathbf{R})$ монотонно не убывает на числовой прямой и не имеет точек разрыва. Следовательно, множество точек разрыва монотонно неубывающей функции может быть пустым.

Функция $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{[i,+\infty[}(x)$, где $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$, монотонно не убывает на $\mathbf{R}$ и имеет n разрывов в точках {1,2,...,n}. Следовательно, множество точек разрыва монотонно неубывающей функции может быть конечным и для любого n из $\mathbf{N}$ состоять ровно из n точек.

Функция $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{[i,+\infty[}(x)$ монотонно не убывает и имеет разрывы в точках множества **N.** Следовательно, множество точек разрыва монотонно неубывающей функции может быть счетным.

Покажем, что множество точек разрыва монотонно неубывающей на $\mathbf{R}$ функции f не более чем счетно.

Обозначим через A множество точек разрыва функции f. Вспоминая, что монотонно неубывающая на $\mathbf{R}$ функция имеет разрывы только первого рода, заключаем, что $f(a-0) < f(a+0)$ для каждого $a \in A$. Так как f — монотонно неубывающая на $\mathbf{R}$ функция, то открытые интервалы $[f(a-0),f(a+0)\}[$ попарно не пересекаются и каждый из них содержит рациональную точку . Следовательно, множество A имеет мощность не большую, чем множество рациональных чисел, т.е. множество A не более чем счетно.

5. Доказать, что следующие системы множеств являются полукольцами. Являются ли они кольцами?

5.1. Система всех ограниченных промежутков числовой прямой;

5.2. Система всех открытых справа интервалов отрезка [0,1];

5.3. Система всех промежутков числовой прямой, содержащихся в отрезке [0,1];

5.4. Система всех ограниченных подмножеств числовой прямой;

5.5. Система всех открытых слева ограниченных интервалов числовой прямой;

5.6. Система всех конечных подмножеств множества X;

5.7. Система всех подмножеств множества X, которые конечны или конечны их дополнения;

5.8. Система всех подмножеств топологического пространства, которые одновременно открыты и замкнуты;

5.9. Система всех прямоугольников плоскости $\mathbf{R}^2$ вида $[a,b[\times[c,d[$, где $a \le b$; $c \le d$;

5.10. Система всех прямоугольников плоскости $\mathbf{R}^2$ вида $[a,b[\times[0,1]$, где $0 \le a \le b \le 1$;

5.11. Система всех открытых слева интервалов, содержащихся в отрезке $[0,1]$.

Решение задачи 5.11. Пусть $\boldsymbol{S} = \{]a,b] \mid 0 \le a \le b \le 1\}$. Тогда $\varnothing =]1,1] \in \boldsymbol{S}$. Если $A,B \in \boldsymbol{S}$, то $A =]a,b]$, $B =]c,d]$, где $0 \le a \le b \le 1$, $0 \le c \le d \le 1$. При $A \cap B \ne \varnothing$ имеем $A \cap B =]\alpha,\beta]$, где $\alpha = \max\{a,c\}$, а $\beta = \min\{b,d\}$, причем $\alpha<\beta$. Очевидно, что $0 \le \alpha \le \beta \le 1$. Следовательно, $A \cap B \in \boldsymbol{S}$. Имеем также $B \setminus A =]c,\alpha] \cap]b,\beta]$.

Тем самым мы показали, что $\boldsymbol{S}$ является полукольцом подмножеств отрезка $[0,1]$. Заметим, что $\boldsymbol{S}$ кольцом не является, так как множества $]0,1/2]$ и $]3/4,1]$ являются элементами $\boldsymbol{S}$, а их объединение не принадлежит $\boldsymbol{S}$.

6. Показать, что:

6.1 Объединение конечного числа элементов полукольца может не принадлежать полукольцу;

6.2 Пересечение любого конечного числа элементов полукольца принадлежит полукольцу, а пересечение счетного числа элементов полукольца может ему не принадлежать;

6.3 Объединение счетного числа элементов кольца может не принадлежать кольцу;

6.4 Пересечение счетного числа элементов кольца может не принадлежать кольцу;

6.5 Пересечение любого непустого семейства σ-колец подмножеств множества X является σ-кольцом;

6.6 Пересечение любого непустого семейства δ-колец подмножеств множества X является δ-кольцом;

6.7 σ-кольцо является δ-кольцом;

6.8 δ-кольцо может не быть σ-кольцом;

6.9 σ-алгебра является δ-алгеброй;

6.10 δ-алгебра является σ-алгеброй.

Решение задачи 6.10. Пусть система $\boldsymbol{A}$ подмножеств множества X является δ-алгеброй, т.е. $\boldsymbol{A}$ — кольцо, $X \in \boldsymbol{A}$ и пересечение счетного числа элементов $\boldsymbol{A}$ принадлежит $\boldsymbol{A}$. Пусть $A_1,\ldots,A_n,\ldots \in \boldsymbol{A}$. Рассмотрим объединение этих множеств и, применяя принцип двойственности, имеем

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus (X \setminus A_i)) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i) \in \boldsymbol{A},$$

так как $X \setminus A_i \in \boldsymbol{A}$ $(i=1,2,\ldots)$ и $X \in \boldsymbol{A}$. Следовательно, $\boldsymbol{A}$ является σ-алгеброй.

7. Пусть $f : X \to Y$, $\boldsymbol{A} \neq \varnothing$, $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{P}(Y)$, $\boldsymbol{B} \neq \varnothing$, $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{P}(X)$.

Обозначим через $f^{-1}(\boldsymbol{A}) = \{ f^{-1}(A) \mid A \in \boldsymbol{A} \}$ и через $f(\boldsymbol{B}) = \{ f(B) \mid B \in \boldsymbol{B} \}$. Справедливы ли следующие утверждения?

7.1. Если $\boldsymbol{A}$ есть полукольцо, то $f^{-1}(\boldsymbol{A})$ есть полукольцо;
7.2. Если $\boldsymbol{A}$ есть кольцо, то $f^{-1}(\boldsymbol{A})$ есть кольцо;
7.3. Если $\boldsymbol{A}$ есть алгебра, то $f^{-1}(\boldsymbol{A})$ есть алгебра;
7.4. Если $\boldsymbol{A}$ есть σ-алгебра, то $f^{-1}(\boldsymbol{A})$ есть σ-алгебра;
7.5. Если $\boldsymbol{A}$ есть σ-кольцо, то $f^{-1}(\boldsymbol{A})$ есть σ-кольцо;
7.6. Если $\boldsymbol{B}$ есть полукольцо, то $f(\boldsymbol{B})$ есть полукольцо;
7.7. Если $\boldsymbol{B}$ есть кольцо, то $f(\boldsymbol{B})$ есть кольцо;
7.8. Если $\boldsymbol{B}$ есть алгебра, то $f(\boldsymbol{B})$ есть алгебра;
7.9. Если $\boldsymbol{B}$ есть σ-кольцо, то $f(\boldsymbol{B})$ есть σ-кольцо;
7.10. Если $\boldsymbol{B}$ есть σ-алгебра, то $f(\boldsymbol{B})$ есть σ-алгебра.

Решение задачи 7.7. Пусть $X = Y = \{a,b,c,d\}$. Отображение f зададим зададим с помощью таблицы

x	a	b	c	d
$f(x)$	a	b	c	b

Система $\boldsymbol{B} = \{ \{a,b\}, \{c,d\}, X, \varnothing \}$ является кольцом подмножеств множества X. Система $f(\boldsymbol{B}) = \{ \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \varnothing \}$ кольцом не является, так как пересечение $\{a,b\} \cap \{b,c\} = \{b\}$ не принадлежит $f(\boldsymbol{B})$.

Варианты заданий

Вариант 1:	1.1;	2.9;	3.14;	4.2;	5.7;	6.1;	7.3.
Вариант 2:	1.2;	2.8;	3.1;	4.11;	5.10;	6.2;	7.2.
Вариант 3:	1.3;	2.13;	3.2;	4.14;	5.9;	6.2;	7.1.
Вариант 4:	1.4;	2.12;	3.12;	4.13;	5.8;	6.4;	7.4.
Вариант 5:	1.5;	2.11;	3.10;	4.10;	5.6;	6.5;	7.5.
Вариант 6:	1.6:;	2.10;	3.9;	4.9;	5.5;	6.6;	7.6.
Вариант 7:	1.7;	2.6;	3.8;	4.8;	5.4;	6.7;	7.8.
Вариант 8:	1.8;	2.5;	3.7;	4.1;	5.3;	6.8;	7.9.
Вариант 9:	1.9;	2.7;	3.6;	4.3;	5.2;	6.9;	7.10.
Вариант 10:	1.10;	2.4;	3.5;	4.4;	5.1;	6.1;	7.10.
Вариант 11:	1.11;	2.3;	3.4;	4.5;	5.1;	6.2;	7.9.
Вариант 12:	1.12;	2.2;	3.3;	4.6;	5.2;	6.3;	7.8.
Вариант 13:	1.13;	2.1;	3.11;	4.7;	5.3;	6.4;	7.6.
Вариант 14:	1.12;	2.1;	3.14;	4.8;	5.4;	6.5;	7.5.
Вариант 15:	1.11;	2.2;	3.12;	4.9;	5.5;	6.6;	7.4.
Вариант 16:	1.13;	2.3;	3.11;	4.11;	5.6;	6.7;	7.3.
Вариант 17:	1.10;	2.4;	3.10;	4.13;	5.7;	6.8;	7.2.

Вариант 18:	1.9;	2.5;	3.9;	4.14;	5.8;	6.9;	7.4.
Вариант 19:	1.7;	2.6;	3.8;	4.7;	5.9;	6.1;	7.1.
Вариант 20:	1.5;	2.7;	3.7;	4.6;	5.10;	6.2;	7.2.
Вариант 21:	1.6;	2.8;	3.6;	4.5;	5.1;	6.3;	7.3.
Вариант 22:	1.4;	2.9;	3.5;	4.4;	5.2;	6.4;	7.4.
Вариант 23:	1.3;	2.10;	3.4;	4.3;	5.10;	6.5;	7.5.
Вариант 24:	1.8;	2.11;	3.3;	4.2;	5.9;	6.6;	7.6.
Вариант 25:	1.2;	2.12;	3.1;	4.10;	5.3;	6.7;	7.8.

III. Дополнительные задачи и упражнения

1. Показать, что

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B).$$

2. Показать что

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \setminus B); \quad A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \Delta B).$$

3. Показать, что

$$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B); \quad A \setminus B = A \Delta (A \cap B).$$

4. 1) Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to X$. Доказать, что: f — инъекция тогда и только тогда, когда существует отображение $f^*: Y \to X$ такое, что $f^* \circ f = 1_X$; g — сюръекция тогда и только тогда, когда существует отображение $g^*: X \to Y$ такое, что $g \circ g^* = 1_X$, где $1_X(x) = x$ $(x \in X)$. (Отображение $f^*: Y \to X$ такое, что $f^* \circ f = 1_X$ называется левым обратным к f, а отображение $g^*: X \to Y$ такое, что $g \circ g^* = 1_X$ — правым обратным к g.)

2) Пусть $X = [0,1]$; $Y = [0,2]$ и пусть отображение f задано формулой $f(x) = 2x^2$. Найдите правый и левый обратный к f, если они существуют.

3) Докажите, что отображение $f : X \to Y$ обратимо тогда и только тогда, когда оно имеет правый и левый обратный. В этом случае правый и левый обратный совпадают и равны обратному к f отображению из Y в X.

5. Построить биективное отображение между множествами $[0,1]$ и $(0,1)$.

6. Доказать, что множество всех непрерывных числовых функций, заданных на отрезке $[a,b]$ числовой прямой, имеет мощность континуума.

7. Доказать, что декартово произведение конечного числа счетных множеств счетно, а декартово произведение счетного числа счетных множеств — несчетно.

8. Пусть $\boldsymbol{S}_1$ — множество всех конечных полуинтервалов вида $[a,b[$ числовой прямой. Доказать, что $\boldsymbol{S}_1$ является полукольцом, а порожденное им кольцо $\mathfrak{R}(\boldsymbol{S}_1)$ не является ни σ-кольцом, ни алгеброй.

9. Доказать, что совокупность всех элементов кольца $\mathfrak{R}(\boldsymbol{S}_1)$ из задачи 8, содержащихся в [0,1], образует алгебру подмножеств множества [0,1[. Образует ли оно алгебру подмножеств отрезка [0,1]?

10. В n-мерном евклидовом пространстве рассмотрим параллелепипеды, определяемые условиями на координаты вида: $a_k \le x_k < b_k$, k=1,2,...n. Пусть $\boldsymbol{S}_\text{n}$ — множество всех ограниченных параллелепипедов. Доказать, что $\boldsymbol{S}_\text{n}$ — полукольцо, а порожденное им кольцо $\mathfrak{R}(\boldsymbol{S}_\text{n})$ не является ни σ-кольцом, ни алгеброй.

11. Множество A пространства $\mathbf{R}^\text{n}$ (или n-мерного евклидова пространства E_n) называется борелевским, если оно может быть получено из открытых множеств счетным применением операций объединения, пересечения и перехода к дополнению.

Доказать, что совокупность всех борелевских множеств данного пространства

1) образует σ-алгебру;

2) является наименьшей σ-алгеброй, содержащей все открытые множества рассматриваемого пространства;

3) является наименьшей σ-алгеброй, содержащей все замкнутые множества рассматриваемого пространства;

4) имеет мощность континуума.