ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 10

ОБРАТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ . СХОДИМОСТЬ В $L(E_1,E_2)$

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ.

Определение 1. Пусть E_1, E_2 — линейные пространства и $A \in \mathcal{L}^{\#}(E_1,E_2)$. Оператор $B: E_2 \to E_1$ называется **правым обратным** к оператору $A: E_1 \to E_2$, если $A \circ B = 1_{E_2}$. Оператор $B: E_2 \to E_1$ называется **левым обратным** к оператору A, если $B \circ A = 1_{E_1}$. Оператор $B: E_2 \to E_1$ называется **обратным оператором** к оператору A, если $A \circ B = 1_{E_2}$, $B \circ A = 1_{E_1}$, т.е. B является одновременно левым обратным и правым обратным.

В определении обратного оператора не выдвигается требование его линейности. Однако , нетрудно показать, что если оператор B является обратным для $A \in \mathcal{L}^{\#}(E_1,E_2)$, то B является также линейным оператором и $B \in \mathcal{L}^{\#}(E_2,E_1)$.

Ниже следующие утверждения дают необходимые и достаточные условия существования левого и правого обратного оператора.

ТЕОРЕМА 1. *Следующие утверждения эквивалентны :*

1) *для оператора* A *существует левый обратный оператор ;*
2) $Ker A = \{0\}$*;*
3) *решение уравнения* $Ax = y$ *единственно для любого* $y \in A(E_1)$.

ТЕОРЕМА 2. *Следующие утверждения равносильны :*

1) *для оператора* A *существует правый обратный оператор ;*
2) $A(E_1) = E_2$*;*
3) *решение уравнения* $Ax = y$ *существует для любого* $y \in E_2$.

Пусть теперь $E_1, E_2 \in Ban$ и $A \in L(E_1,E_2)$.

Определение 2. Оператор A называется обратимым , если для него существует линейный ограниченный обратный оператор.

ТЕОРЕМА (Банаха об обратном операторе). *Пусть* A *— линейный ограниченный оператор , действующий из банахова пространства* E_1 *в банахово пространство* E_2. *Тогда , если* A *- биекция из* E_1 *в* E_2 *, то* A *— обратный оператор , т.е. существует ограниченный обратный оператор* A^{-1}.

Приведем еще три утверждения, дающие достаточные условия обратимости оператора .

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\mathrm{E} \in Ban$, $\mathrm{A} \in L(\mathrm{E},\mathrm{E})$ *и* $\|\mathrm{A}\| < 1$. *Тогда оператор* $T = I - \mathrm{A}$ *обратим .*

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2 \in Ban$, $\mathrm{A} \in L(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ *и :*

1) *множество* $\mathrm{A}(\mathrm{E}_1)$ *всюду плотно в* E_2*;*
2) *существует постоянная* $c > 0$ *такая , что* $\forall x \in \mathrm{E}_1$ $\|\mathrm{A}x\|_2 \ge c\|x\|_1$

Тогда A *— обратимый оператор.*

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2 \in Ban$, $\mathrm{A} \in L(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ *и оператор* A *имеет ограниченный обратный . Если оператор* $\mathrm{B} \in L(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ *удовлетворяет условию* $\|\mathrm{A} - \mathrm{B}\| < 1 / \|\mathrm{A}^{-1}\|$, *то оператор* B *обратим .*

В пространстве линейных ограниченных операторов $L(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ введем различные виды сходимости .

<u>Определение 3.</u> Последовательность операторов $\{\mathrm{A}_n\} \subset L(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ называется **сходящейся по норме (равномерно сходящейся)** к оператору $\mathrm{A} \in L(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ (обозначение : $\mathrm{A}_n \Rightarrow \mathrm{A}$), если при $n \to \infty$ $\|\mathrm{A}_n - \mathrm{A}\| \to 0$.

<u>Определение 4.</u> Последовательность операторов $\{\mathrm{A}_n\} \subset L(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ будем называть **поточечно (сильно)** сходящейся к оператору $\mathrm{A} \in L(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ (обозначение: $\mathrm{A}_n \to \mathrm{A}$), если для любого $x \in \mathrm{E}_1$ при $n \to \infty$ $\|\mathrm{A}_n x - \mathrm{A}x\|_2 \to 0$.

Очевидно, что из сходимости по норме последовательности операторов, следует ее поточечная сходимость.

ТЕОРЕМА 6. *Если* $\mathrm{E}_1 \in Ban, \mathrm{E}_2 \in Norm$, *то из поточечной сходимости* $\{\mathrm{A}_n\} \subset L(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ *к оператору* $\mathrm{A} \in \mathcal{L}^{\#}(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ *следует что* $\mathrm{A} \in L(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$.

<u>Литература</u>: [1] с.149-156,179-194 ; [2] с. 206-213,224-230 ; [3] с. 106-109.

2. З А Д А Ч И

1. Пусть $\mathrm{A} \in L(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$: $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2 \in Norm$
   i) Определить область значений оператора A , т.е. найти $\mathrm{A}(\mathrm{E}_1)$.
   ii) Если существуют левый и правый обратные операторы для $\mathrm{A}: \mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_2$ - найти их.

iii) Существует ли обратный оператор для : а) $A:E_1 \to E_2$; б) $A:E_1 \to A(E_1)$?

iv) Является ли оператор $A^{-1}:A(E_1) \to E_1$ ограниченным , если он существует ?

	E_1	E_2	A
1.1	l_2	l_2	$Ax = (0, x_1, x_2, ...)$
1.2	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)ds$
1.3	$C[0,1]$	$C^{(1)}[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)ds$
1.4	l_1	l_1	$Ax = (x_2, x_3, x_4, ...)$
1.5	$C^{(1)}[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x'(t)$
1.6	l_2	l_2	$Ax = (2x_1, 4x_2, 2x_3, 4x_4, ...)$
1.7	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x(\sqrt{t})$
1.8	c_0	c_0	$Ax = \left(\frac{1}{1+1}x_1, \frac{2}{2+1}x_2, \frac{3}{3+1}x_3, ...\right)$
1.9	c	c	$Ax = \left(0, \left(1-\frac{1}{2}\right)x_1, \left(1-\frac{1}{3}\right)x_2, \left(1-\frac{1}{4}\right)x_3, ...\right)$
1.10	l_∞	l_2	$Ax = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right)$
1.11	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^1 tx(s)ds$
1.12	$C[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t) = tx(1)$
1.13	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^t (t-s)x(s)ds$
1.14	l_1	l_1	$Ax = (x_3, x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, ...)$
1.15	$C[0,1]$	$C^{(2)}[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^t (t-s)x(s)ds$

Решение задачи 1.15. Ясно, что $D(A) = C[0,1]$. По формуле дифференцирования интеграла, зависящего от параметра (см. Б.П.Демидович "Сборник задач по математическому анализу " с.345), обозначив $y(t)=(\mathrm{A}x)(t)$, получим $y'(t)=\int\limits_0^t x(s)ds,\ \ y''(t)=x(t)$. Поэтому $\mathrm{A}(C[0,1])\subset\left\{y\in C^{(2)}[0,1]: y(0)=y'(0)=0\right\}$.

Поскольку $\mathrm{A}(C[0,1])\neq C^{(2)}[0,1]$, то по теореме 2 оператор $\mathrm{A}: C[0,1]\to C^{(2)}[0,1]$ не может иметь правого обратного. Если же положим $(\mathrm{B}x)(t)=x''(t)$, то из сказанного выше, для $\forall x\in C[0,1]$

$$(\mathrm{B}\circ\mathrm{A})x(t)=\left(\int\limits_0^t (t-s)x(s)ds\right)''=x(t).$$

Итак левый обратный для оператора $\mathrm{A}: C[0,1]\to C^{(2)}[0,1]$ существует и равен B. Ясно, что он является и левым обратным для оператора $\mathrm{A}: C[0,1]\to\mathrm{A}(C[0,1])$.

Пусть теперь $\forall y\in\left\{y\in C^{(2)}[0,1]: y(0)=y'(0)=0\right\}$. Тогда

$$(\mathrm{A}\circ\mathrm{B})y(t)=\int\limits_0^t (t-s)y''(s)ds=$$

$$=\int\limits_0^t (t-s)dy'(s)=(t-s)y'(s)\Big|_{s=0}^{s=t}+\int\limits_0^t y'(s)ds=y(t)-y(0)=y(t),$$

т.е. $\mathrm{A}\circ\mathrm{B}=1_{\mathrm{A}(C[0,1])}$. Следовательно оператор B является обратным оператором для оператора A , действующего из нормированного пространства $C[0,1]$ в нормированное пространство $\left\{y\in C^{(2)}[0,1]: y(0)=y'(0)=0\right\}$, которое является подпространством $C^{(2)}[0,1]$.

Проверим ограниченность оператора $\mathrm{B}: \mathrm{A}(C[0,1])\to C[0,1]$.

Пусть $y\in\left\{y\in C^{(2)}[0,1]: y(0)=y'(0)=0\right\}$. Тогда

$$\|\mathrm{B}y\|_{C_{[0,1]}}=\|y''(t)\|=\max_{0\le t\le 1}|y''(t)|\le$$

$$\le\max_{0\le t\le 1}|y(t)|+\max_{0\le t\le 1}|y'(t)|+\max|y''(t)|=1\cdot\|y\|_{C^{(2)}[0,1]}.$$

Поскольку $c=1$, то оператор B ограничен, а следовательно исходный оператор обратим . ●

2. Пусть $E_1, E_2 \in Ban$. Доказать что оператор $A: E_1 \to E_2$ обратим и найти A^{-1}. (В каждом варианте оператор A ограничен и его ограниченность можно не доказывать.)

	E_1	E_2	A
2.1	c_0	c_0	$Ax = \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{3}x_2, \frac{1}{2}x_3, \frac{1}{3}x_4, \ldots\right)$
2.2	l_2	l_2	$Ax = \left(1\left(\sin\frac{1}{1}\right)x_1, 2\left(\sin\frac{1}{2}\right)x_2, 3\left(\sin\frac{1}{3}\right)x_3, \ldots\right)$
2.3	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 e^{t+s}x(s)ds$
2.4	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 (1-st)(s)ds$
2.5	$C^{(1)}[0,1]$	$C^{(1)}[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 (t+s)x(s)ds$
2.6	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 t^2 sx(s)ds$
2.7	$C^{(2)}[0,1]$	$C^{(2)}[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 e^{t-s}x(s)ds$
2.8	l_1	l_1	$Ax = \left(\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 x_1, \left(1-\frac{1}{3}\right)^3 x_2, \left(1-\frac{1}{4}\right)^4 x_3, \ldots\right)$
2.9	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 (t+s)x(s)ds$
2.10	l_2	l_2	$Ax = \left(\left(1+\frac{1}{2}\right)x_1, \left(1+\frac{1}{3}\right)x_2, \left(1+\frac{1}{4}\right)x_3, \ldots\right)$
2.11	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 tsx(s)ds$
2.12	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 (t+s)^2 x(s)ds$
2.13	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 (1-ts)x(s)ds$

2.14	$C^{(1)}[0,1]$	$C^{(1)}[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=x(t)+\int\limits_0^1 ts^2x(s)ds$
2.15	$C^{(2)}[0,1]$	$C^{(2)}[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=x(t)+\int\limits_0^1 tsx(s)ds$

Решение задачи 2.15. Линейность и ограниченность оператора А легко устанавливаются. Для доказательства обратимости оператора А применим теорему Банаха об обратном операторе. Пусть $x(t),y(t)\in C^{(2)}[0,1]$ и $x(t)\not\equiv y(t)$.

Тогда и $(\mathrm{A}x)(t)\not\equiv(\mathrm{A}y)(t)$. Действительно, если $(\mathrm{A}x)(t)\equiv(\mathrm{A}y)(t)$, то

$$x(t)-y(t)+\int\limits_0^1 ts(x(s)-y(s))ds\equiv 0. \tag{1}$$

Обозначив $x(t)-y(t)=u(t)$, получим $u(t)+t\int\limits_0^1 su(s)ds\equiv 0$. Отсюда $u(t)$ имеет вид: $u(t)=\alpha t$. Подставляя $u(t)$ в последнее тождество, будем иметь

$$\alpha t+t\int\limits_0^1 s\alpha s ds\equiv 0\Leftrightarrow \alpha t(1+\frac{1}{3})\equiv 0\Leftrightarrow\alpha=0,$$

т.е. равенство (1) возможно только тогда , когда $u\equiv 0\Leftrightarrow x(t)\equiv y(t)$, что противоречит предположению. Следовательно, мы доказали инъективность A. Докажем , что A — сюръекция. Возьмем произвольную функцию $y\in C^{(2)}[0,1]$ и покажем , что существует решение $x\in C^{(2)}[0,1]$ уравнения

$$x(t)+\int\limits_0^1 tsx(s)ds=y(t)\Leftrightarrow x(t)=y(t)-t\int\limits_0^1 sx(s)ds. \tag{2}$$

Отсюда, если решение $x(t)$ есть, то оно имеет вид : $x(t)=y(t)+\alpha t$. Подставим данное $x(t)$ в последнее уравнение и получим :

$$y(t)+\alpha t=y(t)-t\int\limits_0^1 s(y(s)+\alpha s)ds\Leftrightarrow\alpha t=-t\left\{\int\limits_0^1 sy(s)ds+\frac{\alpha}{3}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha=-\frac{\alpha}{3}-\int\limits_0^1 sy(s)ds\Leftrightarrow\alpha=-\frac{3}{4}\int\limits_0^1 sy(s)ds.$$

Итак решением (2) будет

$$x(t) = y(t) - \frac{3}{4}\int_0^1 tsy(s)ds. \qquad (3)$$

Поэтому A — сюръекция и по теореме Банаха оператор A обратим. Более того, из (2) и (3) следует, что $(A^{-1}y)(t) = y(t) - \frac{3}{4}\int_0^1 tsy(s)ds$ ●

3. Пусть $A_\lambda \in L(E_1, E_2)$; $E_1, E_2 \in Ban$. Выяснить, при каких λ существует обратный оператор к оператору A_λ, построить его. При каких λ оператор A_λ обратим ? (Как и в предыдущей задаче оператор A ограничен.)

	E_1	E_2	A_λ
3.1	l_2	l_2	$A_\lambda x = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, \ldots)$ $\lambda = (\lambda_n)_1^\infty, \lvert\lambda_n\rvert < M$
3.2	$\{x \in l_2 : x_1 = 0\}$	$\{x \in l_2 : x_1 = 0\}$	$A_\lambda x = (0, \lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, \ldots)$ $\lambda = (\lambda_n)_1^\infty, \lvert\lambda_n\rvert < M$
3.3	$\{x \in C^{(1)}[0,1] : x(0) = 0\}$	$C[0,1]$	$(A_\lambda x)(t) = \lambda x(t) + x'(t)$
3.4	$\{x \in C^{(1)}[0,1] : x(0) = 0\}$	$C[0,1]$	$(A_\lambda x)(t) = \lambda t^2 x(t) + x'(t)$
3.5	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(A_\lambda x)(t) = \lambda x(t) + x^n(t)$
3.6	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(A_\lambda x)(t) = \lambda x(t) + \int_0^1 e^{t+s} x(s)d(s)$
3.7	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(A_\lambda x)(t) = x(t) + \lambda \int_0^1 t^2 s^2 x(s)d(s)$
3.8	$C^{(1)}[0,1]$	$C^{(1)}[0,1]$	$(A_\lambda x)(t) = x(t) + \lambda \int_0^1 (t+s)x(s)d(s)$
3.9	$\{x \in C^{(2)}[0,1]:$ $x(0) = x'(0) = 0\}$	$C[0,1]$	$(A_\lambda x)(t) = \lambda x(t) + 2x'(t) + x''(t)$

3.10	l_2	l_2	$A_\lambda x = \\ =\left((\lambda+1)x_1, (\lambda+\frac{1}{2^1})x_2, (\lambda+\frac{1}{2^2})x_3, \ldots\right)$
3.11	$\{x \in C^{(2)}[0,1]: \\ x(0) = x'(1) = 0\}$	$C[0,1]$	$(A_\lambda x)(t) = \lambda x(t) + x''(t)$
3.12	$C[0,1]$	$\{x \in C^{(2)}[0,1]: \\ x(0) = x'(0) = 0\}$	$(A_\lambda x)(t) = \lambda \int\limits_0^1 (t-s)x(s)d(s)$
3.13	$\{x \in C^{(2)}[0,1]: \\ x(0) = x'(0) = 0\}$	$C[0,1]$	$(A_\lambda x)(t) = \lambda x''(t)$
3.14	c	c	$A_\lambda x = \\ =\left((\lambda+1)x_1, (\lambda+\frac{1}{2})x_2, (\lambda+\frac{1}{3})x_3, \ldots\right)$
3.15	$\{x \in C^{(2)}[0,1]: \\ x(0) = x'(0) = 0\}$	$C[0,1]$	$(A_\lambda x)(t) = \lambda x(t) + x''(t)$

Решение задачи 3.15. Так как $\left\|\frac{d^2}{dt^2}\right\| \le 1$ (доказать!), то, в силу теоремы 3, из представления A в виде: $A = \lambda\left(I + \frac{1}{\lambda}\frac{d^2}{dt^2}\right)$ следует, что A является обратимым при $|\lambda|>1$ (ибо $\left\|\frac{1}{\lambda}\frac{d^2}{dt^2}\right\| < 1$). Случай $|\lambda|\le 1$ с помощью теоремы 3 исследовать не представляется возможным.. Для его исследования возьмем произвольную функцию $y \in C[0,1]$ и рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda x(t) = y(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases} . \qquad (3)$$

Как известно из теории дифференциальных уравнений данная задача имеет единственное решение в $C^{(2)}[0,1]$. Тем самым определен оператор B_λ: $y(t) \to x(t)$, действующий из $C[0,1]$ в $E_1 = \{x \in C^{(2)}[0,1]: x(0) = x'(0) = 0\}$. Поэтому из его определения следует, что $A_\lambda \circ B_\lambda = 1_{E_1}$, $B_\lambda \circ A_\lambda = 1_{C[0,1]}$. Поэтому B_λ — обратный оператор для A_λ. Чтобы его найти, нужно решить задачу Коши (3). Последнее осуществляется, например, с помощью метода вариации произвольных постоянных:

$$(A_\lambda{}^{-1}y)(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{-\lambda}}\left[e^{\sqrt{-\lambda}t}\int\limits_0^t e^{-\sqrt{-\lambda}s}y(s)ds-e^{-\sqrt{-\lambda}t}\int\limits_0^t e^{\sqrt{-\lambda}s}y(s)ds\right], & \lambda<0\\ -\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\cos\sqrt{\lambda}t\int\limits_0^t\sin\sqrt{\lambda}sy(s)ds-\sin\sqrt{\lambda}t\int\limits_0^t\cos\sqrt{\lambda}sy(s)ds\right], & \lambda>0\\ \int\limits_0^t(t-s)y(s)ds, \quad \lambda=0\end{cases}$$

Из теорем 1 и 2 следует, что B_λ — биекция из $C[0,1]$ в E_1. Так как E_1 — замкнутое подпространство банахова пространства $C^{(2)}[0,1]$, то оно является банаховым и по теореме Банаха оператор A_λ^{-1} является ограниченным при любых $\lambda\in\mathbf{R}$, т.е. для любых $\lambda\in\mathbf{R}$ оператор A_λ обратим (это можно доказать и непосредственно оценивая норму A_λ^{-1}. ●

4. Для последовательности операторов $(A_n)\subset L(E_1,E_2)$; $E_1,E_2\in Norm$ и $A\in L(E_1,E_2)$ установить:

i) сходится ли (A_n) поточечно к оператору A;

ii) сходится ли (A_n) по норме к оператору A?

	E_1	E_2	A_n	A
4.1	l_1	l_1	$A_nx=(x_1,...,x_n,0,0,...)$	1_{l_1}
4.2	l_2	l_2	$A_nx=\left((1+\frac{1}{n})x_1,\dots,(1+\frac{1}{n}x_n,\dots\right)$	1_{l_1}
4.3	c_0	c_0	$A_nx=(0,...,0,x_n,0,0,...)$	0
4.4	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(A_nx)(t)=x\left(t^{1+\frac{1}{n}}\right)$	$1_{C[0,1]}$
4.5	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(A_nx)(t)=(t^n-t^{2n})x(t)$	0
4.6	$C^{(1)}[0,1]$	$C[0,1]$	$(A_nx)(t)=(t^n-t^{2n})x(t)$	0
4.7	$C^{(1)}[0,3]$	$C[1,2]$	$(A_nx)(t)=n\left[x\left(t+\frac{1}{n}\right)-x(t)\right]$	$\frac{d}{dt}$
4.8	$C^{(2)}[0,3]$	$C[1,2]$	$(A_nx)(t)=n\left[x\left(t+\frac{1}{n}\right)-x(t)\right]$	$\frac{d}{dt}$

4.9	$C^{(1)}\,[0,2]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}_n x)(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}x\left(t+\frac{k}{n^2}\right)$	$\mathrm{A}x=x$
4.10	l_2	l_2	$\mathrm{A}_n x=(0,\ldots,0,x_{n+1},x_{n+2},\ldots)$	0
4.11	$L_2[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(\mathrm{A}_n x)(t)=(1-t^n)x(t)$	$\mathrm{A}x=x$
4.12	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}_n x)(t)=(1-t^n)x(t)$	$1_{L_2[0,1]}$
4.13	$C^{(1)}[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}_n x)(t)=x\left(t^{1+\frac{1}{n}}\right)$	$\mathrm{A}x=x$
4.14	$C[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(\mathrm{A}_n x)(t)=\frac{[nx(t)]}{n}$	$\mathrm{A}x=x$
4.15	$C^{(2)}\,[0,3]$	$C[1,2]$	$(\mathrm{A}_n x)(t)=$ $=n\left[x\left(t-\frac{1}{n}\right)-2x(t)+x\left(t+\frac{1}{n}\right)\right]$	0

Решение задачи 4.15. Пусть $x\in C^{(2)}\,[0,3]$. Тогда, два раза применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях, имеем

$$\|(\mathrm{A}_n x)(t)\|_{C[0,1]}=\max_{1\le t\le 2}\left|n\left(x\left(t-\frac{1}{n}\right)-x(t)+x\left(t+\frac{1}{n}\right)-x(t)\right)\right|=\max_{1\le t\le 2}|x'(\tau_1)-x'(\tau_2)|=$$

$$=\max_{1\le t\le 2}|x''(\tau_3)(\tau_1-\tau_2)|,$$

где τ_1 лежит между t и $t+\frac{1}{n}$, τ_2 — между $t-\frac{1}{n}$ и t, а τ_3 — между τ_1 и τ_2. Следовательно, $\|(\mathrm{A}_n x)(t)\|_{C[0,1]}\le\frac{2}{n}\|x\|_{C^{(2)}[0,3]}$ и $\|\mathrm{A}_n\|\le 2/n\to 0$ при $n\to\infty$, т.е. данная последовательность операторов сходится по норме к нулевому оператору, а следовательно, сходится и поточечно. ●

Варианты задания

Вариант 1	1.14	2.1	3.5	4.9
Вариант 2	1.13	2.2	3.6	4.8
Вариант 3	1.12	2.3	3.7	4.7
Вариант 4	1.11	2.4	3.8	4.6
Вариант 5	1.10	2.5	3.9	4.5

Вариант 6	1.9	2.6	3.10	4.4
Вариант 7	1.8	2.7	3.11	4.3
Вариант 8	1.7	2.8	3.12	4.2
Вариант 9	1.6	2.9	3.13	4.1
Вариант 10	1.5	2.10	3.14	4.10
Вариант 11	1.4	2.11	3.4	4.11
Вариант 12	1.3	2.12	3.3	4.12
Вариант 13	1.2	2.13	3.2	4.13
Вариант 14	1.1	2.14	3.1	4.14
Вариант 15	1.2	2.5	3.12	4.3
Вариант 16	1.3	2.6	3.11	4.4
Вариант 17	1.4	2.7	3.13	4.5
Вариант 18	1.5	2.8	3.2	4.6
Вариант 19	1.6	2.9	3.1	4.7
Вариант 20	1.7	2.10	3.3	4.8
Вариант 21	1.8	2.11	3.4	4.9
Вариант 22	1.9	2.12	3.5	4.10
Вариант 23	1.10	2.13	3.6	4.11
Вариант 24	1.1	2.14	3.7	4.12
Вариант 25	1.11	2.1	3.8	4.13
Вариант 26	1.12	2.2	3.9	4.14

3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

29. Доказать, что если оператор является левым (правым) обратным к линейному оператору, то он также линеен.

30. Доказать, что каждый линейный оператор, действующий в конечномерном пространстве и имеющий левый (правый) обратный, имеет обратный.

31. Привести пример линейного ограниченного необратимого оператора, действующего в банаховом пространстве, имеющего левый обратный.

32. Показать, что утверждение теоремы Банаха об обратном операторе не верно без предположения о полноте рассматриваемых пространств.

33. Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства. Оператор $A\colon E_1 \to E_2$ линеен, непрерывен и сюръективен. Показать, что если $y_n \to y_0$ в E_2, то существует $c>0$ и $x_n \to x_0$ в E_1 такие, что $A(x_n)=y_n$ и $\|x_n\| \le c\|y_n\|$.

34. Пусть L и N — замкнутые подпространства банахова пространства E и для любого $x \in E$ имеет место единственное представление $x = y + z$, $y \in L$, $z \in N$. Показать существование постоянной $c>0$ такой, что $\|y\| \le c\|x\|$, $\|z\| \le \|x\|$.

35. доказать, что множество обратимых операторов в банаховом пространстве открыто в пространстве всех непрерывных операторов.

36. Пусть E,F,G — нормированные пространства. Доказать, что если $S_n,S\in L(E,F)$, $T_n,T\in L(F,G)$, $S_n \Rightarrow S$ и $T_n \Rightarrow T$, то $T_n \circ S_n \Rightarrow T \circ S$.

37. Пусть E,F — нормированные пространства. Доказать, что если S_n,S, $T_n,T \in L(E,F)$ и T_n, сильно сходится к T, S_n, сильно сходится к S, то $T_n \circ S_n$ — сильно сходится к $T \circ S$.