ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 15

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ТЕОРЕМЫ ФРЕДГОЛЬМА

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

Определение 1. **Интегральным уравнением Фредгольма 2 рода** называется уравнение

$$x(t)=\int_a^b K(s,t)x(s)ds+f(t). \quad (1)$$

Здесь *x(t)*- неизвестная функция, *K(s,t), f(t)* – известные функции, называемые **ядром** и **свободным членом** уравнения соответственно, $a,b\in$ **R**.

Будем рассматривать уравнение (1) в комплексных пространствах L_2[a,b] или *C*[a,b]. При этом предполагается, что $f\in L_2$[a,b], $K\in L_2([a,b]\times[a,b])$ (соответственно $f\in C$[a,b], $K\in C([a,b]\times[a,b])$).

Определение 2. Ядро уравнения (1) называется **вырожденным**, если оно имеет вид

$$K(s,t)=\sum_{j=1}^{n}p_j(s)q_j(t), \quad (2)$$

где функции $p_j(s)$, $q_j(t)$ непрерывны и линейно независимы.

Если ядро уравнения (1) — вырожденное, то, подставив (2) в (1), получаем

$$x(t)=\sum_{j=1}^{n}a_jq_j(t)+f(t), \quad (3)$$

где

$$a_j=\int_a^b p_j(s)x(s)ds. \quad (4)$$

Для нахождения неизвестных a_j подставляют выражение (3) для *x* в (1) или (4). При этом возникает система *n* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными.

Важнейшие свойства уравнения (10) описываются тремя теоремами Фредгольма (теоремы 1 - 3 ниже). Для их формулировки запишем **однородное, сопряженное** и **сопряженное однородное** уравнения, соответствующие уравнению (1):

$$x_0(t)=\int_a^b K(s,t)x_0(s)ds, \quad (1_0)$$

$$u(t)=\int_a^b \overline{K(t,s)}u(s)ds+g(t) \quad (1')$$

$$u_0(t)=\int_a^b \overline{K(t,s)}u_0(s)ds \quad (1'_0).$$

Следующие теоремы справедливы как в пространстве L_2[a,b], так и в пространстве *C*[a,b] (при указанных выше ограничениях на *K* и *f*).

ТЕОРЕМА 1 (альтернатива Фредгольма). *Уравнение* (1) *разрешимо для любого f тогда и только тогда, когда уравнение* (1_0) *имеет только нулевое решение. При этом решение уравнения* (1) *единственно.*

ТЕОРЕМА 2. *Однородные уравнения* (1_0) *и* ($1'_0$) *имеют одно и то же, и притом конечное, число линейно независимых решений.*

ТЕОРЕМА 3. *Уравнение* (1_0) *разрешимо при тех и только тех f, которые ортогональны любому решению сопряженного однородного уравнения* ($1'_0$) *(ортогональность означает, что* $\int_a^b f(t)\overline{u_0(t)}dt=0$).

Ясно, что функции u_0 в теореме 3 достаточно брать из (конечной по теореме 2) фундаментальной системы линейно независимых решений уравнения ($1'_0$).

Л И Т Е Р А Т У Р А [1], § 50; [2], гл. IX, § 2.

II. З А Д А Ч И

Будем рассматривать интегральное уравнение

$$x(t)=\mu\int_a^b K(s,t)x(s)ds+f(t) \quad (5).$$

1. Решите уравнение (5) при $\mu=1$, если

	a	*b*	*K(s,t)*	*f(t)*
1.1	*0*	1	$t+s-2ts$	$t+t^2$
1.2	*0*	π	$\sin(t-2s)$	$\cos 2t$
1.3	*0*	1	$5st$	$3t+2$
1.4	*1*	1	$3t-s^2t^2$	t^2+t^4
1.5	*0*	π	$\cos(t+s)$	$\sin t$
1.6	*0*	π	$\sin s+s\cos t$	$1-\frac{2}{\pi}t$
1.7	*0*	π	$\frac{2}{\pi}\cos(s+t)$	$1+\sin t$
1.8	*0*	π	$\sin(s-2t)$	$\cos 2t$
1.9	*0*	π	$\cos(s+t)$	$1+2\sin t$
1.10	*0*	$\pi/2$	$\sin s\cos t$	$\sin t$

1.11	*0*	1	e^{t+s}	*1*
1.12	*0*	1	$2e^{t-s}$	*1*
1.13	*-1*	1	$3s + st - 5s^2t^2$	*3t*
1.14	*-1*	1	$\frac{5}{2}s^2t^2 - \frac{1}{2}t(3+s)$	*t*

Решение задачи 1.14. Нам нужно решить уравнение с вырожденным ядром

$$x(t) = \int_{-1}^{1}(\frac{5}{2}s^2t^2 - \frac{1}{2}t(3+s))x(s)ds + t \quad (6),$$

или

$$x(t) = \frac{5}{2}t^2\int_{-1}^{1}s^2x(s)ds - \frac{1}{2}t\int_{-1}^{1}(3+s)x(s)ds + t \quad (7).$$

Если мы положим

$$a_1 = \int_{-1}^{1}s^2x(s)ds, \quad a_2 = \int_{-1}^{1}(3+s)x(s)ds \quad (8),$$

то в силу (7) искомое решение имеет вид

$$x(t) = \frac{5}{2}a_1t^2 - (\frac{1}{2}a_2 - 1)t. \quad (9)$$

Подставляя это выражение для *x* в (8), имеем

$$a_1 = \int_{-1}^{1}s^2(\frac{5}{2}a_1s^2 - (\frac{1}{2}a_2 - 1)s)ds,$$
$$a_2 = \int_{-1}^{1}(3+s)(\frac{5}{2}a_1s^2 - (\frac{1}{2}a_2 - 1)s)ds.$$

Вычислив интегралы, стоящие в правой части, получаем следующие равенства:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = 5a_1 - \frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{3}.$$

Данная система имеет бесконечное множество решений:

$$a_2 = \frac{15}{4}a_1 + \frac{1}{2}, \quad a_1 \in \mathbf{C}.$$

Подставляя это в (9), имеем

$$x(t) = \frac{5}{2}a_1 t^2 + (-\frac{15}{8}a_1 + \frac{3}{4})t.$$

Наконец, полагая $\frac{5}{2}a_1 = c$, окончательно имеем

$$x(t) = ct^2 + \frac{3}{4}(1-c)t,$$

где c - произвольная постоянная.

2. Не решая уравнения (5), определите, при каких $f \in L_2[a,b]$ оно имеет решение в пространстве L_2[a,b] (в этой задаче мы полагаем $\mu = 1$).

	a	b	K(s,t)		a	b	K(s,t)
2.1	0	π	$\frac{2}{\pi}\cos(t+s)$	2.8	$-\pi$	π	se^{it}
2.2	-2	2	$\frac{i}{4}\lvert t \rvert$	2.9	-1	1	$i(t^2 - ts)$
2.3	0	$\pi/2$	$4\sin^2 t$	2.10	0	1	$t - is$
2.4	0	1	$2st - 4t^2$	2.11	-1	1	$t^4 + 5it^3 s$
2.5	-1	1	$st + s^2t^2$	2.12	-1	1	$is + ts^2$
2.6	0	2π	$\sin(t - 2s)$	2.13	0	π	$\sin(3t + s)$
2.7	09	1	ist	2.14	0	2π	$\frac{1}{\pi}\sin(t+s)$

Решение задачи 2.14. Данное уравнение имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(s+t)x(s)ds + f(t) \qquad (10)$$

В силу одной из теорем Фредгольма (см. теорему 3 выше) оно имеет решение для тех и только тех f, которые ортогональны всем решениям сопряженного однородного уравнения

$$u(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(t+s)u(s)ds \qquad (10'_0)$$

Это уравнение с вырожденным ядром. Решая его как выше (см. решение задачи 1.14), получаем

$$u(t) = c(\sin t + \cos t), \quad c \in \mathbf{C}.$$

Таким образом, уравнение (10) разрешимо при тех и только тех f из $L_2[0,2\pi]$, которые удовлетворяют уравнению

$$\int_0^{2\pi} f(t)(\sin t + \cos t)dt = 0.$$

3. При каких значениях параметра $\mu \in \mathbf{C}$ уравнение (5) разрешимо в пространстве $C[a,b]$ при любой функции f из $C[a,b]$?

	A	b	K(s,t)		a	b	K(s,t)
3.1	-2	2	$\|t\|$	3.8	0	1	$s^2 - 2st$
3.2	0	$\pi / 2$	$sintcoss$	3.9	0	1	s^2t
3.3	-1	1	$t^2 - 2ts$	3.10	0	1	e^{t+2s}
3.4	-1	1	$s^2 + ts$	3.11	0	1	$3s + st$
3.5	-1	1	$2s^3 + t^3$	3.12	0	1	$2s^2t$
3.6	-1	1	st	3.13	-1	1	$t(1 -s)$
3.7	0	π	$cos(t + s)$	3.14	0	2π	$e^{i(t-s)}$

Решение задачи 3.14. Воспользуемся теоремой 1. Уравнение (1_0) в нашем случае есть уравнение с вырожденным ядром

$$x_0(t) = \mu \int_0^{2\pi} e^{i(t+s)} x_0(s)ds,$$

то есть

$$x_0(t) = \mu e^{it} \int_0^{2\pi} e^{-is} x_0(s)ds. \quad (11)$$

Если мы положим

$$a = \int_0^{2\pi} e^{-is} x_0(s)ds, \quad (12)$$

то из (11) следует, что $x_0(t) = a\mu e^{it}$. Подставив это в (12), имеем

$$a = \int_0^{2\pi} e^{-is} a\mu e^{is} ds = 2\pi a\mu.$$

Таким образом, a удовлетворяет уравнению $a(1 - 2\pi\mu) = 0$. Последнее уравнение, а вместе с ним и уравнение (11), имеет только нулевое решение тогда и только тогда, когда $\mu \neq \dfrac{1}{2\pi}$.

Итак, данное уравнение разрешимо при всех $f \in C[a,b]$ тогда и только тогда, когда $\mu \neq \dfrac{1}{2\pi}$.

4. Для каждого $\mu \in \mathbf{C}$ решите уравнение (5) в пространстве L_2[-l,l] (a= -l, b= l), если $K(s,t) = k(s - t)$, где k - 2l-периодическая функция, совпадающая на отрезке [-l,l] с указанной ниже функцией

	l	$k(t)$	$f(t)$
4.1	π	$\|t\|$	$sgnt$
4.2	π	$\pi^2 - t^2$	e^t
4.3	$\pi/2$	$\cos \pi x$	1
4.4	π	$tsint$	0
4.5	$\pi/2$	$\|sint\|$	t
4.6	π	$\|cost\|$	$-t$
4.7	$\pi/2$	$sin2\|t\|$	e^{2it}
4.8	π	$e^{2\|t\|}$	$sint$
4.9	π	$e^{-\|t\|}$	$cos2t$
4.10	π	$e^{i\|t\|}$	$sin2t$
4.11	1	$\|t\|$	$e^{2\pi it}$
4.12	$\pi/2$	$tcost$	π
4.13	π	$\sin \pi t$	$cost$
4.14	π	t^2	cht

Решение задачи 4.14. Ядро $K(s,t) = k(s - t)$ уравнения (5) не является вырожденным, но мы сможем применить для его решения тот же прием, что и для уравнения с вырожденным ядром, если разложим функцию $K(s,t)$ в ряд Фурье по ортогональному базису $\{e^{i(ms+nt)}: m,n \in \mathbf{Z}\}$ пространства $L_2([-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi])$. Как известно, разложение функции $k(s)$ из $L_2[-\pi,\pi]$ по тригонометрической системе $\{e^{ins} : n \in \mathbf{Z}\}$ имеет вид

$$k(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n e^{\text{int}}, \quad k_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k(t)e^{-\text{int}}dt.$$

В нашем случае интегрируя по частям получаем

$$k_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-\text{int}}dt = 2\frac{(-1)^n}{n}, n \neq 0; \quad k_0 = \frac{\pi^2}{3.}$$

Таким образом,

$$K(s,t) = k(s-t) = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n}{n^2} e^{\text{int}} e^{-ins} \qquad (13)$$

(знак $\sum{}'$ здесь означает, что суммирование не распространяется на значение $n = 0$).

Найдем также разложение Фурье свободного члена f. Коэффициенты Фурье функции f есть

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} chte^{-\text{int}}dt = \frac{sh\pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{1+n^2},$$

и, следовательно,

$$cht = \frac{sh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}e^{\text{int}}. \quad (14)$$

Подставляя (13) и (14) в (5), имеем (обоснуйте законность почленного интегрирования ряда)

$$x(t) = \mu\frac{\pi^2}{3}\int_{-\pi}^{\pi} x(s)ds + 2\mu\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{(-1)^n}{n^2}e^{\text{int}}\int_{-\pi}^{\pi} x(s)e^{-ins}ds + \frac{sh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}e^{\text{int}}.$$

Полагая

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} x(s)e^{-ins}ds, n\in \mathbf{Z}, \qquad (15)$$

получим, что *x(t)* имеет вид

$$x(t) = (\mu\frac{\pi^2}{3}a_0 + \frac{sh\pi}{\pi}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'(2\mu\frac{(-1)^n}{n^2}a_n + \frac{sh\pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{1+n^2})e^{\text{int}}. \quad (16)$$

Для нахождения a_n можно подставить это в (15), но мы поступим по-другому. Заметим, что числа $a_n / 2\pi$ есть коэффициенты Фурье функции $x \in L_2[-\pi,\pi]$, а потому

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi}e^{\text{int}}. \quad (17)$$

В силу единственности разложения в ряд по ортогональному базису, получаем из (16) и (17), что

$$\frac{a_0}{2\pi} = \mu\frac{\pi^2}{3}a_0 + \frac{sh\pi}{\pi}, \text{ т.е. } a_0(\frac{1}{2\pi} - \mu\frac{\pi^2}{3}) = \frac{sh\pi}{\pi} \qquad (18)$$

и

$$\frac{a_n}{2\pi} = 2\mu\frac{(-1)^n}{n^2}a_n + \frac{sh\pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{1+n^2}, n\neq 0,$$

т. е.

$$a_n(\frac{1}{2\pi} - 2\mu\frac{(-1)^n}{n^2}) = \frac{sh\pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{1+n^2} \quad (n\in \mathbf{Z}\backslash\{0\}) \qquad (19)$$

Возможны два случая.

1). $\frac{1}{2\pi} - \mu\frac{\pi^2}{3} \neq 0, \frac{1}{2\pi} - 2\mu\frac{(-1)^n}{n^2} \neq 0$ при всех $n\neq 0$, т.е.

$$\mu \notin \{\frac{(-!)^n}{4\pi}n^2 : n\in Z\setminus\{0\}\}\bigcup\{\frac{3}{2\pi^3}\}.$$

В этом случае каждое из уравнений (18) и (19) имеет единственное решение

$$a_0 = \frac{6sh\pi}{3-2\pi^3\mu}, \quad a_n = 2sh\pi\frac{(-1)^n n^2}{(1+n^2)(n^2+(-1)^n 4\pi\mu)}, n\in Z\setminus\{0\} \qquad (20)$$

соответственно. Следовательно, при таких μ уравнение (5) имеет единственное решение (17), где коэффициенты a_n определяются из (20).

2). $\mu \in \{\frac{(-1)^n}{4\pi}n^2 : n\in Z\setminus\{0\}\}\bigcup\{\frac{3}{2\pi^3}\}.$

В этом случае уравнение (18) или (19), а вместе с ним и уравнение (5), не имеет решения.

Варианты заданий см. в лабораторной работе 13 (задачи 1 - 4).

III. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ.

15. Решите задачу 1 при $K(s,t) = \alpha \min(s,t),\ f(t) = 0.$

16. Решите задачу 2 при $K(s,t) = \begin{cases} s(t-1), & t \le s \\ t(s-1), & t > s. \end{cases}$

17. Решите задачу 3 при $K(s,t) = |\sin(t - s)|$.

18. Пусть $k(t)$ - четная непрерывная функция с периодом $2l$. При каких μ уравнение (5), где положено $K(s,t) = k(s - t)$, $a = -l$, $b = l$, $f(t) = 0$, имеет ненулевые решения в пространстве $L_2[-l,l]$?