ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 4

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

I. О с н о в н ы е п о н я т и я и т е о р е м ы

Пусть μ — σ-аддитивная мера. Областью определения меры μ мы будем считать некоторую σ-алгебру Σ подмножеств множества X; в том случае, когда мера задана на полукольце (но не σ-алгебре) подмножеств множества X мы считаем, что мера продолжена по Лебегу, и в этом случае в качестве Σ мы рассматриваем σ-алгебру измеримых по Лебегу множеств. Считаем, что мера полная. Элементы Σ называем измеримыми множествами. Все рассматриваемые ниже множества будем считать измеримыми, а также предполагаем измеримость на соответствующих множествах всех рассматриваемых функций.

Определение 1. Измеримая на множестве E числовая функция называется **простой** на E, если она принимает на E лишь конечное число различных значений.

Определение 2. Пусть h — неотрицательная, простая на множестве E функция, принимающая на E значения $y_1, y_2 ,\ldots,y_n;$ $y_i \neq y_j$ $(i \neq j)$.

Пусть $E_k = \{x\in E \mid h(x) = y_k\}$, $k = 1,\ldots,n$. Число

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \mu(E_k) \qquad (\text{здесь } 0\cdot\infty = 0)$$

(конечное или равное $+\infty$), называется **интегралом от h по множеству E** и обозначается

$$\int_E h(x)d\mu(x) \quad \text{или} \quad \int_E hd\mu$$

Определение 3. Пусть f — неотрицательная, измеримая на множестве E функция. **Интегралом от f по множеству E** называется число (конечное или равное $+\infty$), обозначаемое $\int_E fd\mu$ и равное

$$\int_E fd\mu = \sup\{\int_E hd\mu \mid h \geq 0 \text{ и } h\text{— простая на } E,\ h \leq f \text{ на } E\}.$$

Определение 4. Измеримая на E функция f называется **интегрируемой по Лебегу на множестве** E, если $\int\limits_E |f(x)|d\mu(x) < +\infty$. В этом случае интеграл от функции f по множеству E определяется равенством

$$\int\limits_E f d\mu = \int\limits_E f^+ d\mu - \int\limits_E f^- d\mu,$$

где $f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}$ и $f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) < 0 \\ 0, & f(x) \geq 0 \end{cases}$.

Если $f \geq 0$, то f интегрируема на E тогда и только тогда , когда $\int\limits_E f d\mu < +\infty$.

Функции f и g, определенные на E и равные почти всюду на E, интегрируемы или не интегрируемы на E одновременно; в случае их интегрируемости, интегралы на E от этих функций совпадают. Функция f, определенная почти всюду на E, называется интегрируемой по Лебегу на множестве E, если интегрируема функция f, определенная всюду на E и совпадающая с g почти всюду на E, и тогда, по определению,

$$\int\limits_E g d\mu := \int\limits_E f d\mu.$$

Интеграл Лебега обладает следующими основными свойствами:

1. Если f и g интегрируемые на множестве E функции, то функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема на E для всех $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ и

$$\int\limits_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int\limits_E f d\mu + \beta \int\limits_E g d\mu.$$

2. Если $f \geq 0$ почти всюду на множестве E и функция f интегрируема на E, то $\int\limits_E f d\mu \geq 0.$

3. Если $f \geq g$ почти всюду на E и обе функции f и g интегрируемы на E, то $\int\limits_E f d\mu \leq \int\limits_E g d\mu$.

4. Функция f интегрируема на E тогда и только тогда, когда $|f|$ интегрируема на E.

5. Если f измерима на E, а g интегрируема на E и $|f| \le g$ почти всюду на E, то f интегрируема на E.

6. Если f интегрируема на E и $E = \coprod_{n \in N} E_n$, то

$$\int_E f d\mu = \sum_{n \in N} \int_{E_n} f d\mu \quad \text{(σ-аддитивность интеграла Лебега).}$$

ТЕОРЕМА 1 (Теорема Лебега о монотонной сходимости). *Пусть* $0 \le f_1 \le \le f_2 \le \ldots \le f_n \le \ldots$ — *последовательность измеримых на множестве E функций и пусть в каждой точке множества E существует конечный предел* $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$. *Тогда* $\int_E f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n d\mu$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть m — мера Лебега на прямой. Если для функции f, заданной на отрезке* $[a,b]$, *существует собственный интеграл Римана, то f интегрируема по Лебегу на этом отрезке и ее интеграл Лебега* $\int_{[a,b]} f(x) dm(x)$ *равен интегралу Римана* $\int_a^b f(x) d(x)$.

ЛИТЕРАТУРА: [3, стр. 140-148].

II. З а д а ч и

1. Пусть m — мера Лебега на прямой. Найдите наибольшее из множеств $[0,1]$, $[0,2]$, $[0,1] \cup [3,4]$, $[2,3]$, $[0,4]$, на котором функция f является простой, и вычислите интеграл от f по этому множеству.

1.1	$f(x) = D(x) + 2\chi_{[0,1]}(x)$	1.2	$f(x) = \chi_{[0,1]}(x) + \chi_{[0,2]}(x) + 5\chi_{[0,3]}(x)$
1.3	$f(x) = e^{\operatorname{sign}(x)} D(x)$	1.4	$f(x) = x\chi_{[0,1]}(x) + \chi_{[0,2]}(x) + 2\chi_{[0,4]}(x)$
1.5	$f(x) = e^{x} D(x) \chi_{[1,4]}(x)$	1.6	$f(x) = x^2\chi_{[0,1]}(x) + 3\chi_{[0,4]}(x)$
1.7	$f(x) = xD(x)(1 - \chi_{[0,2]}(x))$	1.8	$f(x) = e^{(x+1)}\chi_{[0,1]}(x) + 4\chi_{[2,3]}(x)$
1.9	$f(x) = \operatorname{sign}(x - 1) + \chi_{[0,2]}(x)$	1.10	$f(x) = \operatorname{sign}(x - 2)\chi_{[2,3]}(x) + x\chi_{[0,1]}(x)$

Здесь и далее

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q;\\ 0, & x\in R\setminus Q,\end{cases}\qquad sign(x)=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0,\end{cases}\qquad \chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E;\\ 0, & x\notin E.\end{cases}$$

Решение задачи 1.10. Имеем

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x, & x\in[0,1];\\ 0, & x\in]1,2];\\ 1, & x\in]2,3];\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Функция $f(x)$ на [0,1] принимает бесконечно много различных значений, а на отрезке [2,3] принимает только два значения: 0 в точке 2 и 1 на]2,3]. Следовательно, наибольшее множество из перечисленных в условии задачи множеств, на которых f является простой, есть отрезок [2,3]. По определению 2 имеем

$$\int\limits_{[2,3]} fd\mu = 0\cdot m(\{2\})+1\cdot m([2,3])=1.$$

2. Пусть m — мера Лебега на прямой. Вычислить $\int\limits_{]0,1]} fdm$ от неотрицательной функции f.

2.1	$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\chi_{[0,1/n]}(x)$	2.2	$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\chi_{[0,n^{-2}]}(x)$
2.3	$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{1/2}\chi_{[0,1/n]}(x)$	2.4	$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{1/2}\chi_{[0,n^{-2}]}(x)$
2.5	$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{1/4}\chi_{[0,1/n]}(x)$	2.6	$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{1/4}\chi_{[0,n^{-2}]}(x)$
2.7	$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-1/4}\chi_{[0,1/n]}(x)$	2.8	$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-1/4}\chi_{[0,n^{-2}]}(x)$

2.9	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\chi_{[0,1/n]}(x)$	2.10	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\chi_{[0,n^{-2}]}(x)$
2.11	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{[0,n^{-3}]}(x)$	2.12	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{[0,n^{-4}]}(x)$

Решение задачи 2.12. Сначала покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{[0,n^{-4}]}(x)$ сходится для каждого $x\in]0,1]$.

Пусть $x_0\in]0,1]$. Тогда $x_0>0$ и поэтому найдется такой номер $n_0\in\mathbf{N}$, что при $n>n_0$ будет выполняться неравенство $n^{-4}< x_0$. Для этих n имеем $\chi_{[0,n^{-4}]}(x_0)=0$, т.е. числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{[0,n^{-4}]}(x_0)$ имеет лишь конечное число отличных от нуля членов, и поэтому сходится. Итак, мы показали, что функция $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{[0,n^{-4}]}(x)$ определена на]0,1].

Пусть $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n} k\chi_{[0,k^{-4}]}(x)$. Ясно, что функция $f_n(x)$ является неотрицательной и простой на]0,1] , что $f_n(x)\le f_{n+1}(x)$ и что $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Поэтому по теореме Лебега о монотонной сходимости имеем $\int\limits_{]0.1]} fdm=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{]0.1]} f_n m.$ Нетрудно заметить, что функция $f_n(x)$ интегрируема на]0,1], и поэтому

$$\int\limits_{]0,1]} f_n dm=\int\limits_{]0,1]}\sum_{k=1}^{n} k\chi_{[0,k^{-4}\}}(x)dm(x)=\sum_{k=1}^{n} k\int\limits_{]0,1]}\chi_{[0,k^{-4}]}(x)dm(x)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} km([0,k^{-4}]\cap]0,1])=\sum_{k=1}^{n} k\cdot k^{-4}=\sum_{k=1}^{n} k^{-3}.$$

Переходя к пределу, получаем, что $\int\limits_{]0,1]} fdm=\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3}.$

Так как последний ряд сходится, то функция f будет интегрируема на]0,1].

3. Пусть $X=\mathbf{R}$, μ — мера Лебега-Стильтьеса на $\mathbf{R}$,

4.

$$F(t)=\begin{cases}0, & t\le 0;\\ 1, & 0<t\le 2;\\ 5, & 2<t\le 3;\\ 7, & t>3\end{cases}$$

— ее порождающая функция. Вычислить $\int\limits_R f(x)d\mu(x)$.

3.1	$f(x) = e^x$	3.2	$f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$
3.3	$f(x)=\dfrac{\sin x}{\lvert x\rvert+1}$	3.4	$f(x)=\dfrac{\cos x}{\lvert x\rvert+1}$
3.5	$f(x) = x^3$	3.6	$f(x) = x^4$
3.7	$f(x) = \ln(\lvert x\rvert+1)$	3.8	$f(x) = x^2 + e^x$
3.9	$f(x) = \lvert x\rvert+1$	3.10	$f(x)=\dfrac{e^x}{\lvert x\rvert+1}$
3.11	$f(x) = \lvert x\rvert + \sin x$	3.12	$f(x) \equiv 1$
3.13	$f(x) = x^2 + 3x + 4$	3.14	$f(x) = \cos(e^x + 1)$
3.15	$f(x) = (\sin 2x)(x^2 + 1)$	3.16	$f(x) = 2^x + \cos x$

Решение задачи 3.16. Так как F — неубывающая непрерывная слева на **R** функция, то формула

$$m_f([a,b[) = F(b) - F(a)$$

является σ-аддитивной мерой. Ее лебегово продолжение и есть мера Лебега–Стильтьеса μ на **R**. Имеем

$$\mu(]-\infty,0[)=\mu\left(\coprod_{n=1}^{\infty}[-n,-n+1[\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(F(-n+1)-F(-n)\right)=0,$$

$$\mu(\{0\}) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}[0,1/n[\right) = \lim_{n\to\infty}\mu([0,1/n[) = \lim_{n\to\infty}\left(F(1/n) - F(0)\right) = 1,$$

$$\mu([0,2[) \setminus \{0\}) = \mu([0,2[) - \mu(\{0\}) = F(2) - F(0) - 1 = 1 - 0 - 1 = 0.$$

Аналогично устанавливаем, что $\mu(\{2\}) = 4$, $\mu(\,]2,3[) = 0$, $\mu(\{3\}) = 2$ и $\mu(]3,+\infty[) = 0$.

Отсюда и из того, что каждое подмножество множества меры нуль измеримо и имеет меру нуль, вытекает, что каждое подмножество E числовой прямой измеримо. Значит, каждая числовая функция на E измерима.

Функция $f(x) = 2^x + \cos x$ совпадает почти всюду на **R** с функцией

$$h(x) = \begin{cases} 2^x + \cos x, x \in \{0,2,3\}; \\ 0, x \in R \setminus \{0,2,3\} \end{cases}.$$

Функция h принимает 4 различных значения и неотрицательна на **R**, поэтому

$$\int_R h d\mu = 0 \cdot \mu(R \setminus \{0,2,3\}) + 2 \cdot \mu(\{0\}) + (4 + \cos 2)\mu(\{2\}) + (8 + \cos 3)\mu(\{3\}) =$$

$$= 2 + (4 + \cos 2) \cdot 4 + (8 + \cos 3) \cdot 2 = 34 + 4\cos 2 + 2\cos 3.$$

Следовательно, функция f интегрируема на **R** и

$$\int_R f d\mu = \int_R h d\mu = 34 + 4\cos 2 + 2\cos 3.$$

4. Пусть f – интегрируемая, а g и h — измеримые на множестве E функции. Что можно сказать об интегрируемости функций g и h, если:

4.1. $f = g + h$;

4.2. $f = g - h$;

4.3. $f = g + h$, где g и h — неотрицательные на E функции;

4.4. $f = g + h$, где g и h — неположительные на E функции;

4.5. $f = g + h$, где g — интегрируемая на E функция;

4.6. $g = h = f^2$;

4.7. $g = h = f^2$ и f — ограниченная на E функция;

4.8. $g = h = f^2$ и $\mu(E) < +\infty$;

4.9. $g = h = f^3$;

4.10. $g = h = f^3$ и f — ограниченная на E функция;

4.11. $g = h = f^3$ и f — ограниченная, неотрицательная на E функция;

4.12. $g = h = f^3$, $\mu(E) < +\infty$ и f — ограниченная на E функция;

4.13. $g = h = f^3$, $\mu(E) < +\infty$.

Решение задачи 4.13. При данных предположениях мы не можем что-либо определенно сказать об интегрируемости функций g и h. Покажем это на примерах.

Пусть m — мера Лебега на $\mathbf{R}$, $E =]0,1[$, $f_1(x) \equiv 1$, $f_2(x) = x^{-1/3}$. Тогда функция $f_1^3(x) \equiv 1$ интегрируема на E, а функция $f_2^3(x) = x^{-1}$ — не интегрируема на E. Осталось заметить, что $\mu(E) = 1$.

5. Пусть f и g – интегрируемые на множестве E функции.

5.1. Пусть $\int\limits_A f d\mu = 0$ для любого $A \subset E$. Следует ли отсюда, что $f(x) = 0$ всюду на E?

5.2. Пусть $\int\limits_E f d\mu = 0$. Следует ли отсюда, что $f(x) = 0$ почти всюду на E?

5.3. Пусть $\int\limits_A f d\mu = 0$ для любого $A \subset E$. Доказать, что $f(x) = 0$ почти всюду на E.

5.4. Пусть $\int\limits_E f d\mu \geq 0$. Следует ли отсюда, что $f(x) \geq 0$ почти всюду на E?

5.5. Пусть $\int\limits_A f d\mu \geq 0$ для любого $A \subset E$. Доказать, что $f(x) \geq 0$ почти всюду на E.

5.6. Пусть $\int\limits_A f d\mu \geq \int\limits_A g d\mu$ для любого $A \subset E$. Доказать, что $f(x) \geq g(x)$ почти всюду на E.

5.7. Пусть $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_E g d\mu$. Следует ли отсюда, что $f(x) = g(x)$ почти всюду на E?

5.8. Пусть $\int\limits_E f d\mu \geq \int\limits_E g d\mu$. Следует ли отсюда, что $f(x) \geq g(x)$ почти всюду на E?

5.9. Пусть $\int\limits_A f d\mu = \int\limits_A g d\mu$ для любого $A \subset E$. Доказать, что $f(x) = g(x)$ почти всюду на E.

Решение задачи 5.9. Пусть $\int\limits_A f d\mu = \int\limits_A g d\mu$ для любого $A \subset E$. Найдем меру множества $A_n = \{x \in E \mid f(x) > g(x) + 1/n\}$.

Имеем $\int\limits_{A_n} fd\mu \geq \int\limits_{A_n} gd\mu + \int\limits_{A_n}(1/n)d\mu$. Отсюда $\int\limits_{A_n} fd\mu \geq \int\limits_{A_n} gd\mu + (1/n)\mu(A_n)$.
Так как $\int\limits_{A_n} fd\mu = \int\limits_{A_n} gd\mu$ по условию, то $0 \geq (1/n)\mu(A_n)$; что возможно только, если $\mu(A_n) = 0$. Аналогично можно показать, что $\mu(B_n) = 0$, где $B_n = \{x \in E \mid f(x) < g(x) - 1/n\}$. Осталось заметить, что $\{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n)$ и, следовательно, это множество имеет меру нуль, как счетное объединение множеств нулевой меры. Итак, мы доказали, что $f(x) = g(x)$ почти всюду на E.

6. Пусть m – мера Лебега на **R**. Вычислить $\int\limits_{[0,1]} f(x)\,dm(x)$

6.1	$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1/2; \\ \cos x, & x \leq 1/2. \end{cases}$	6.2	$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1/2; \\ \sin x, & x \leq 1/2. \end{cases}$
6.3	$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1/2; \\ x^{-1/2}, & x \leq 1/2. \end{cases}$	6.4	$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x > 1/2; \\ x^{-1/2}, & x \leq 1/2. \end{cases}$
6.5	$f(x) = x \cdot \text{sign}(x - 1/2)$	6.6	$f(x) = x \cdot \text{sign}(x - 1/3)$
6.7	$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1/2; \\ -x^{-1/2}, & x \leq 1/2. \end{cases}$	6.8	$f(x) = \begin{cases} xe^x, & x > 1/2; \\ x^2, & x \leq 1/2. \end{cases}$
6.9	$f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 1/2; \\ -x^{-1/3}, & x \leq 1/2. \end{cases}$	6.10	$f(x) = x^{-1./3}$
6.11	$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \geq 1/2; \\ x\sin x, & x < 1/2. \end{cases}$	6.12	$f(x) = \begin{cases} (1-x)^{-1/2}, & x > 1/2; \\ x^{-1/2}, & x \leq 1/2. \end{cases}$

Решение задачи 6.12. Функция $f(x)$ не ограничена в окрестности точек 0 и 1 и интегрируема по Риману на каждом отрезке $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, $\varepsilon>0$. Воспользуемся теоремой, которая утверждает, что если функция $f(x)$ интегрируема по Риману в несобственном смысле по некоторому промежутку, то она интегрируема по Лебегу по этому промежутку тогда и только тогда, когда несобственный интеграл Римана сходится абсолютно.

Найдем $\int\limits_0^1 |f(x)|d(x) = \int\limits_0^1 f(x)d(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x)d(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{1/2} + \int\limits_{1/2}^{1-\varepsilon}\right) =$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{1/2} x^{-1/2}dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1/2}^{1-\varepsilon}(1-x)^{-1/2}dx = \lim_{\varepsilon\to+0} 2x^{1/2}\Big|_{\varepsilon}^{1/2} - \lim_{\varepsilon\to+0} 2(1-x)^{1/2}\Big|_{1/2}^{1-\varepsilon} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to=0}(2(\frac{1}{2})^{1/2} - 2\varepsilon^{1/2}) - \lim_{\varepsilon\to+0}(2\varepsilon^{1/2} - 2(\frac{1}{2})^{1/2}) = 4(\frac{1}{2})^{1/2}.$$

Итак, несобственный интеграл $\int\limits_0^1 f(x)dx$ сходится абсолютно и, значит, функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу и $\int\limits_{[0,1]} f(x)\,dm(x) = 4(\frac{1}{2})^{1/2}$.

Варианты заданий

Вариант 1:	1.1;	2.3;	3.15;	4.4;	5.1;	6.11.
Вариант 2:	1.2;	2.4;	3.14;	4.6;	5.5;	6.5.
Вариант 3:	1.3;	2.1;	3.13;	4.10;	5.7;	6.1.
Вариант 4:	1.4;	2.5;	3.12;	4.1;	5.2;	6.3.
Вариант 5:	1.5;	2.8;	3.11;	4.7;	5.1;	6.8.
Вариант 6:	1.6:;	2.2;	3.10;	4.3;	5.8;	6.10.
Вариант 7:	!.7;	2.7;	3.9;	4.9;	5.5;	6.4.
Вариант 8:	1.8;	2.6;	3.8;	4.2;	5.3;	6.6.
Вариант 9:	1.9;	2.10;	3.7;	4.11;	5.6;	6.6.
Вариант 10:	1.9;	2.2;	3.6;	4.5;	5.3;	6.7.
Вариант 11:	1.8;	2.8;	3.5;	4.12;	5.6;	6.2.
Вариант 12:	1.7;	2.9;	3.4;	4.2;	5.4;	6.11.
Вариант 13:	1.6;	2.11;	3.3;	4.8;	5.8;	6.7.
Вариант 14:	1.5;	2.3;	3.2;	4.12;	5.7;	6.11.
Вариант 15:	1.4;	2.11;	3.1;	4.4;	5.2;	6.9.
Вариант 16:	1.3;	2.7;	3.2;	4.11;	5.4;	6.8.
Вариант 17:	1.2;	2.1;	3.3;	4.9;	5.6;	6.4.
Вариант 18:	1.1;	2.6;	3.4;	4.3;	5.3;	6.8.
Вариант 19:	1.2;	2.2;	3.5;	4.10;	5.8;	6.3.
Вариант 20:	1.3;	2.9;	3.6;	4.8;	5.6;	6.5.
Вариант 21:	1.4;	2.10;	3.7;	4.6;	5.1;	6.9.
Вариант 22:	1.5;	2.5;	3.8;	4.7;	5.4;	6.6.
Вариант 23:	1.6;	2.1;	3.9;	4.1;	5.7;	6.7.

Вариант 24:	1.7;	2.4;	3.10;	4.5;	5.2;	6.1.
Вариант 25:	1.8;	2.3;	3.11;	4.2;	5.5;	6.2.

III. Дополнительные задачи и упражнения

33. Пусть f — измеримая на E функция, принимающая на E счетное число различных значений $y_1, y_2, \ldots$. Доказать, что f интегрируема по Лебегу на E тогда и только тогда, когда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k \mu(E_k)$ сходится абсолютно, где $E_k = \{x \in E_k \mid f(x) = y_k\}$. В этом случае показать, что

$$\int\limits_E f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(E_k).$$

34. Пусть $\mu(E) < \infty$ и f — интегрируемая на E функция. Доказать, что интеграл Лебега $\int\limits_E f d\mu$ может быть вычислен по формуле

$$\int\limits_E f d\mu = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu\{x \in E \mid t_k < f(x) \le t_k\}, \qquad (1)$$

где $T=\{t_k\}$ — разбиение числовой прямой, для которого $\lambda(T) = \sup|t_k - t_{k-1}| < +\infty$, а $\{\xi_k\}$ — любой набор точек, удовлетворяющий условию $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$. Выражение в формуле (1), стоящее после знака предела, называется интегральной суммой Лебега.

35. Доказать, что измеримая и неотрицательная на E функция f интегрируема на E, тогда и только тогда, когда $\sup \int\limits_A f d\mu < \infty$, где верхняя рань берется по всем множествам A конечной меры, на котором функция f ограничена сверху.

36. Пусть $\mu(E) < \infty$. Доказать, что измеримая и неотрицательная на E функция f интегрируема на E, тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \mu\{x \in E \mid f(x) \ge 2^n\}.$$

37. Пусть m – мера Лебега на $\mathbf{R}$. Вычислить интеграл Лебега:

а) $\int\limits_{]0,+\infty[} e^{-[x]} dm(x);$

б) $\displaystyle\int\limits_{]0,+\infty[} \frac{1}{[x+1]\cdot[x+2]}\,dm(x);$

в) $\displaystyle\int\limits_{]0,+\infty[} \frac{1}{[x]!}\,dm(x),$

где $[x]$ обозначает целую часть числа x.