ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 5

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

I. Основные понятия и теоремы

Пусть X — множество, Σ — σ-алгебра подмножеств множества X и на Σ задана σ-аддитивная полная мера μ. Для последовательности $\{f_n\}$измеримых функций на измеримом подмножестве $E \subset X$ рассмотрим три основных вида сходимости:

1) последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно к f на множестве E , если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in N$ такое, что при $n \geq n_\varepsilon$ для $\forall x \in E$ выполняется неравенство $| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$;
2) последовательность $\{f_n\}$ сходится поточечно к функции f на множестве E, если для $\forall x \in E$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$;
3) последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f почти всюду на множестве E, если числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ для всех $x \in E$, за исключением множества из E, мера которого равна нулю.

В частности, E может совпадать со всем X, тогда получим три вида сходимости на X. Ясно, что из равномерной сходимости последовательности следует поточечная сходимость, а из нее сходимость почти всюду, т.е. самым слабым видом сходимости из этих трех видов является сходимость почти всюду.

Из курса математического анализа известно, что предельный переход под знаком интеграла Римана возможен только в случае самой стильной сходимости из этих трех видов сходимости, точнее, если $\{f_n\}$ сходится равномерно к f на отрезке $[a,b] \subset \mathbf{R}$, то для интеграла Римана имеет место следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

а если $\{f_n\}$ сходится к f лишь поточечно или почти всюду, то это равенство (предельный переход под знаком интеграла), вообще говоря, не имеет места.

Замечательным свойством интеграла Лебега, порожденного мерой μ, является возможность предельного перехода даже в случае самой слабой сходимости — сходимости почти всюду.

ТЕОРЕМА 1 (Лебега о предельном переходе). *Пусть последовательность измеримых функций* $\{f_n\}$ *сходится почти всюду к функции* f *на* $E\in\Sigma$ *и существует такая интегрируемая на* E *функция* φ, *что*

$$| f_n(x) | \le \varphi(x)$$

почти всюду на E (n=1,23,...). *Тогда предельная функция* f *интегрируема на* E *и имеет место предельный переход под знаком интеграла Лебега, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)d\mu(x) = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)d\mu(x) = \int_E f(x)d\mu(x)\,.$$

Эту теорему также называют теоремой Лебега о мажорированной сходимости.

Теорема Лебега о монотонной сходимости (теорема 1 лабораторной работы 4) также является теоремой о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.

Напомним, что если $\{a_n\}$ — последовательность в **R**, то нижний ($\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$) и верхний ($\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$) пределы последовательности $\{a_n\}$ определяются соответственно как наименьшая и наибольшая предельные точки последовательности $\{a_n\}$.

ТЕОРЕМА 2 (лемма Фату). *Пусть* $\{f_n\}$ — *последовательность неотрицательных функций измеримых на* E *и*

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)d\mu(x) < +\infty.$$

Тогда функция $f(x) = \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ *является интегрируемой на* E *и*

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)d\mu(x) \le \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)d\mu(x).$$

ТЕОРЕМА 3 (Б.Леви). *Пусть* $\{f_n\}$ — *последовательность интегрируемых функций на* $E\in\Sigma$ *и для* $\forall x \in E$

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_n(x) \le \ldots .$$

Тогда если существует такое положительное число M, *что*

$$\int_E f_n(x)d\mu(x) < M$$

для всех $n \in \mathbf{N}$, *то почти всюду на E существует конечный предел* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, *функция f интегрируема на E и*

$$\int_E f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)d\mu(x).$$

ЛИТЕРАТУРА: [1, с. 53-60]; [2, с. 346-350].

II. З а д а ч и

В задачах 1 – 3 рассматривается только линейная мера Лебега.

1. Проверить, является ли последовательность функций $\{f_n\}$, заданных на отрезке [0,2], сходящейся равномерно, поточечно, почти всюду на этом отрезке к функции $f \equiv 0$.

1.1	$f_n(t) = \begin{cases} n^2, \ t \in [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}[; \\ 0, t \in [0,2] \setminus [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}[\end{cases}$	1.2	$f_n(t) = \begin{cases} n^2 t, \ t \in [0, \frac{1}{n}]; \\ \frac{2n(t+1)}{2n^2+1}, \ t \in]\frac{1}{n}, 2] \end{cases}$
1.3	$f_n(t) = \cos^n \pi t$	1.4	$f_n(t) = \sin^n \pi t$
1.5	$f_n(t) = \begin{cases} \frac{t^n}{2^n}, \ t \in [0,2] \setminus Q; \\ t^n, \ t \in]0,2] \cap Q \end{cases}$	1.6	$f_n(t) = \begin{cases} nt, \ t \in [0,2] \cap Q; \\ \frac{\sin nt}{n}, \ t \in]0,2] \setminus Q \end{cases}$
1.7	$f_n(t) = \begin{cases} \frac{t^n}{2^n}, \ t \in [0,2] \setminus Q; \\ n, \ t \in]0,2] \cap Q \end{cases}$	1.8	$f_n(t) = \begin{cases} n, \ t \in [0, \frac{1}{n}[; \\ \left(\frac{t}{2}\right)^n, \ t \in [\frac{1}{n}, 2] \end{cases}$

1.9	$f_n(t)=\begin{cases}2^n t,\ t\in[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}[;\\ \left(\frac{t}{2}\right)^n, t\in[\frac{1}{2^{n+1}},2];\\ 0,\ t\in[0,\frac{1}{2^{n+1}}[\end{cases}$	1.10	$f_n(t)=\begin{cases}\frac{k}{n^2},\ t\in[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}[, k\le n;\\ \frac{n(2k+1)}{k(2n+1)}t, t\in[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}[, k>n;\\ \frac{1}{n}, t\in\{0\}\cup[1,2]\end{cases}$
1.11	$f_n(t)=\frac{2^n t^n - t^{2n}}{2^{2n}}$	1.12	$f_n(t)=(1+D(t))^n+1$
1.13	$f_n(t)=\begin{cases}n,\ t\in[0,\frac{1}{n}[;\\ \sin\frac{\pi t}{n}, t\in[\frac{1}{n},2]\end{cases}$	1.14	$f_n(t)=\begin{cases}\frac{\sin nt}{n},\ t\in[0,1]\setminus Q;\\ (2-t)^n, t\in[1,2];\\ e^{n(t+1)}, t\in[0,1[\cap Q\end{cases}$

Решение задачи 1.14. Так как

$$\lim_{n\to\infty}(2-t)^n=\begin{cases}0, & t\in]1,2];\\ 1, & t=1,\end{cases}$$

то последовательность $\{f_n\}$ не может поточечно, а значит и равномерно сходится к нулю на [1,2], а следовательно, и на [0,2]. Вычислим предел $f_n(t)$ для остальных точек рассматриваемого отрезка:

$$\lim_{n\to\infty}f_n(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,1]\setminus Q;\\ \infty, & t\in[0,1[\cap Q.\end{cases}$$

Так как линейная мера Лебега множества $[0,1]\cap\mathbf{Q}$ равна нулю, то множество точек, в которых последовательность $f_n(t)$ не сходится к нулю на отрезке [0,2], имеет меру нуль. Поэтому последовательность $\{f_n\}$ почти всюду на [0,2]сходится к нулю.

2. Проверить выполнение условий теоремы Лебега (о монотонной сходимости) и теоремы Б.Леви для последовательности функций $f_n(t)$, заданных на отрезке [0,1]. Можно ли утверждать, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{[0,1]} f_n(x)dx = \int\limits_{[0,1]}\lim_{n\to\infty} f_n(x)dx\,?$$

2.1	$f_n(t)=\begin{cases}0,\ t=0;\\ n, t\in]0,2^{-n}];\\ k, t\in]2^{-k},2^{-k+1}],\\ \qquad k=1,2,\ldots,n\end{cases}$	2.2	$f_n(t)=\begin{cases}0,\ t=0;\\ n^2, t\in]0,2^{-n}];\\ k^2, t\in]2^{-k},2^{-k+1}],\\ \qquad k=1,2,\ldots,n\end{cases}$
2.3	$f_n(t)=\begin{cases}n, t\in[0,2^{-n}];\\ k, t\in]2^{-k},2^{-k+1}],\\ \qquad k=1,2,\ldots,n\end{cases}$	2.4	$f_n(t)=\begin{cases}n^2, t\in[0,2^{-n}];\\ k^2, t\in]2^{-k},2^{-k+1}],\\ \qquad k=1,2,\ldots,n\end{cases}$
2.5	$f_n(t)=\begin{cases}0,\ t=0;\\ n^2, t\in]0,\frac{1}{n}];\\ k^2, t\in]\frac{1}{k},\frac{1}{k-1}],\\ \qquad k=2,3,\ldots,n\end{cases}$		$f_n(t)=\begin{cases}0,\ t=0;\\ n, t\in]0,\frac{1}{n}];\\ k\ \ , t\in]\frac{1}{k},\frac{1}{k-1}],\\ \qquad k=2,3,\ldots,n\end{cases}$
2.7	$f_n(t)=\frac{2n}{n+1}\chi_{[1/n,1]}(t)$	2.8	$f_n(t)=\cos(\frac{\pi}{2n}t)\chi_{[1/n,1]}(t)$
2.9	$f_n(t)=\begin{cases}0,\ t=0;\\ \cos\frac{\pi}{2n}t, t\in]0,\frac{1}{n}];\\ 1, t\in]\frac{1}{n},1]\end{cases}$	2.10	$f_n(t)=\begin{cases}\sin\frac{\pi n}{2n+2}t, t\in[0,2^{-n}];\\ \sqrt{k}, t\in]2^{-k},2^{-k+1}],\\ \qquad k=1,2,\ldots,n\end{cases}$
2.11	$f_n(t)=\begin{cases}0,\ t=0;\\ n\cos\frac{\pi}{2n}t, t\in]0,3^{-n}];\\ k^2, t\in]3^{-k},3^{-k+1}],\\ \qquad k=1,2,\ldots,n\end{cases}$	2.12	$f_n(t)=\begin{cases}0,\ t=0;\\ n, t\in]0,\frac{1}{n}];\\ k, t\in]\frac{1}{k},\frac{1}{k-1}], k=2,3,\ldots,n\end{cases}$

2.13	$f_n(t)=\begin{cases} nt, t\in[0,2^{-n}]; \\ k^2, t\in]2^{-k},2^{-k+1}], \\ \quad k=1,2,\dots,n \end{cases}$	2.14	$f_n(t)=\begin{cases} n^2, t\in[0,4^{-n}]; \\ 4^k, t\in]4^{-k},4^{-k+1}], \\ \quad k=1,2,\dots,n \end{cases}$

Решение задачи 2.14. Ясно, что $f_n(t)\geq 0$ при $t\in[0,1]$. Проверим, является ли последовательность $f_n(t)$ монотонной. Действительно,

$$f_n(t) = f_{n+1}(t), \text{ если } t\in\,]4^{-n}, 1];$$

$$f_n(t) = n^2 < 4^{n+1} = f_{n+1}(t), \text{ если } t\in\,]4^{-n-1}, 4^{-n}];$$

$$f_n(t) = n^2 < (n+1)^2 = f_{n+1}(t), \text{ если } t\in\,]0,4^{-n-1}],$$

т.е. последовательность $f_n(t)$ монотонна для каждого значения аргумента из рассматриваемого отрезка. (Полезно нарисовать графики функций $f_n(t)$ и $f_{n+1}(t)$ из которых ясно видно, что последовательность $\{f_n(t)\}$ неубывающая, а также эти графики дают представление и о пределе последовательности$\{f_n(t)\}$.) Пусть теперь $t\in\,]0,1]$. Тогда существует такое k, что $t\in\,]4^{-k},4^{-k-1}]$ и поэтому для всякого $n>k$ имеем $f_n(t) = 4^k$, т.е $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = 4^k$. С другой стороны, $f_n(0) = n^2\to\infty$, при $n\to\infty$. Следовательно, в точке нуль не существует конечного предела последовательности $f_n(t)$, поэтому теорему Лебега о монотонной сходимости к последовательности $\{f_n\}$ на отрезке $[0,1]$ применять нельзя. Заметим, что если изменить все функции последовательности в точке 0, например $f_n(0) = 0$, то все условия данной теоремы выполняются.

Проверим выполнимость условий теоремы Б.Леви. В силу аддитивности интеграла имеем

$$I_n = \int\limits_{[0,1]} f_n(x)dx = \int\limits_{[0,4^{-n}]} n^2 dx + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{]4^{-k},4^{-k+1}]} 4^k dx =$$

$$= \frac{n^2}{4^n} + \sum_{k=1}^{n} 4^k (4^{-k+1} - 4^{-k}) = \frac{n^2}{4^n} + 3n.$$

Поэтому не существует такого M, для которого $I_n\leq M$ при всех $n\in\mathbf{N}$. Следовательно, теорема Б.Леви к данной последовательности не применима.

Поскольку на полуинтервале]0,1] к последовательности $\{f_n\}$ можно применить теорему Лебега о монотонной сходимости, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{]0,1]} f_n(x)dx = \int_{]0,1]}\lim_{n\to\infty} f_n(x)dx =$$

$$= \int_{[0,1]}\lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

3. Для последовательности функций $\{f_n\}$, определенных на отрезке [0,1], проверить применимость теоремы Лебега о предельном переходе и леммы Фату. Найти и сравнить интегралы

4.

$$\int_{[0,1]}\lim_{n\to\infty} f_n(x)dx, \qquad \lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n(x)dx$$

3.1	$f_n(t)=\begin{cases} n^2,\ t\in[0,2^{-n}]; \\ t^2,\ t\in]2^{-n},1] \end{cases}$	3.2	$f_n(t)=\begin{cases} 3^n,\ t\in[0,e^{-2n}]; \\ e^t,\ t\in]e^{-2n},1] \end{cases}$
3.3	$f_n(t)=\begin{cases} n^2,\ t\in[0,2^{-n}]; \\ t^3,\ t\in]2^{-n},1] \end{cases}$	3.4	$f_n(t)=\begin{cases} 2^n,\ t\in[4^{-n-1},4^{-n}]; \\ t,\ t\in[0,4^{-n-1}[\cup]4^{-n},1] \end{cases}$
3.5	$f_n(t)=\begin{cases} \sqrt{n},\ t\in[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]; \\ t^3,\ t\in[0,\frac{1}{n+1}[\cup]\frac{1}{n},1] \end{cases}$	3.6	$f_n(t)=\begin{cases} n^4,\ t\in[2^{-n-1},2^{-n}]; \\ 2^t,\ t\in[0,1]\setminus[2^{-n-1},2^{-n}] \end{cases}$
3.7	$f_n(t)=\begin{cases} \frac{n}{t},\ t\in[0,3^{-n}[; \\ e^t,\ t\in[3^{-n},1] \end{cases}$	3.8	$f_n(t)=\begin{cases} n^3,\ t\in[0,2^{-n}]; \\ t^2,\ t\in]2^{-n},1] \end{cases}$
3.9	$f_n(t)=\begin{cases} n^2,\ t\in[3^{-n-1},3^{-n}]; \\ t^2,\ t\in[0,1]\setminus[3^{-n-1},3^{-n}] \end{cases}$	3.10	$f_n(t)=\begin{cases} n,\ t\in[0,e^{-n}]; \\ t^4,\ t\in]e^{-n},1] \end{cases}$

3.11	$f_n(t)=\begin{cases}\dfrac{n}{\sqrt{t}},\ t\in[0,2^{-n}];\\ e^t,\ t\in]2^{-n},1]\end{cases}$	3.12	$f_n(t)=\begin{cases}3^n,\ t\in[\dfrac{1}{5^{n+1}},\dfrac{1}{5^n}];\\ t,\ t\in[0,1]\setminus[\dfrac{1}{5^{n+1}},\dfrac{1}{5^n}]\end{cases}$
3.13	$f_n(t)=\begin{cases}n\cos\dfrac{\pi}{2n}t,\ t\in[0,3^{-n}[;\\ t^2,\ t\in[3^{-n},1]\end{cases}$	3.14	$f_n(t)=\begin{cases}2^n,\ t\in[\dfrac{1}{4^{n+1}},\dfrac{1}{4^n}];\\ 2^t,\ t\in[0,1]\setminus[\dfrac{1}{4^{n+1}},\dfrac{1}{4^n}]\end{cases}$

Решение задачи 3.14. Последовательность функций $\{f_n\}$ является неотрицательной. В силу аддитивности интеграла имеем

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n(t)dt=\underline{\lim}_{n\to\infty}\left(\int_{[4^{-n-1},4^{-n}]}2^n\,dt+\int_{[0,4^{-n-1}[}2^t\,dt+\int_{]4^{-n},1]}2^t\,dt\right)=$$

$$=\underline{\lim}_{n\to\infty}\left(2^n(4^{-n}-4^{-n-1})+\int_0^{4^{-n-1}}2^t\,dt+\int_{4^{-n}}^{1}2^t\,dt\right)=\frac{1}{\ln 2}<\infty.$$

Поэтому лемма Фату применима. Рассмотрим возможность применения теоремы Лебега о предельном переходе. Так как для всякого $t_0\in]0,1]$, существует $k\in\mathbf{N}$ такое, что $t_0\in]4^{-k},1]$, то для всех $n\geq k$ имеем $f_n(t_0)=2^{t_0}$. Имеем также $f_n(0)=0$ для всех n = 1,2,... . Следовательно, на отрезке [0,1] последовательность $\{f_n\}$ поточечно сходится к функции 2^t и поэтому сходится к этой функции и почти всюду на [0,1]. Найдем теперь интегрируемую мажоранту $\varphi(t)$. В качестве таковой возьмем

$$\varphi(t)=\sup_{m\geq 1}|f_m(t)|=\begin{cases}1,\quad t=0;\\ 2^n,\quad t\in]4^{-n-1},4^{-n}],\ n\in N;\\ 2^t,\quad t\in]\dfrac{1}{4},1]\end{cases}$$

— наименьшую из возможных мажорант для последовательности функций $\{f_n\}$. Выясним, является ли $\varphi(t)$ интегрируемой функцией. На промежутке]1/4,1] $\varphi(t)=2^t$ и, следовательно, на этом промежутке $\varphi(t)$ интегрируема как непрерывная и ограниченная функция. При $t\in[0,1/4]$ имеем

$$\varphi(t)=\chi_{\{0\}}(t)+\sum_{n=1}^{\infty}2^{n}\chi_{]4^{-n-1},4^{-n}]}(t).$$

Тогда если $\varphi_n(t)=\chi_{\{0\}}(t)+\sum_{k=1}^{n}2^{k}\chi_{]4^{-k-1},4^{-k}]}(t)$, то $0\le\varphi_1(t)\le\varphi_2(t)\le\ldots$ и $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t)$ на [0,1/4].

Воспользовавшись теоремой Лебега о монотонной сходимости и свойствами интеграла Лебега, получим

$$\int_{[0,1/4]}\varphi(t)dt=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1/4]}\varphi_n(t)dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2^{k}\int_{[0,1/4]}\chi_{]4^{-k-1},4^{-k}]}(t)dt=$$

$$=\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k}}<\infty.$$

Итак, $\varphi(t)$ интегрируема на [0,1] и к последовательности $\{f_n\}$ можно применить теорему Лебега о предельном переходе.

4. Решить предложенные ниже задачи:

4.1. Доказать, что условие $|\ f_n(x)\ |\le\varphi(x)$ почти всюду на E (n=1,23,...), существенно для справедливости теоремы Лебега.

4.2. Показать, что в теореме Фату нельзя потребовать выполнения равенства

$$\int_E\underline{\lim}_{n\to\infty}f_n(x)d\mu(x)=\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)d\mu(x).$$

4.3. Пусть E имеет конечную меру, а $\{f_n\}$ — последовательность интегрируемых на E функций, равномерно на E сходящаяся к f. Можно ли утверждать, что

$$\int_E f(x)d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)d\mu(x)\,?$$

4.4. Пусть $f_1(t)\ \ge\ f_2(t)\ \ge\ \ldots\ \ \ge\ f_n(t)\ \ge\ \ldots\ \ \ge\ 0$ — последовательность интегрируемых на E функций. Доказать, что

$$\int_E\lim_{n\to\infty}f_n(x)d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)d\mu(x).$$

4.5. Показать, что теорема Б.Леви является следствием леммы фату и теоремы Лебега о предельном переходе.

4.6. Воспользовавшись леммой Фату, доказать, что если последовательность неотрицательных измеримых на E функций сходится почти всюду на E к функции f и

$$\int_E f_n(x)d\mu(x) \le K < \infty, \quad n = 1,2,\ldots,$$

то f интегрируема на E и

$$\int_E f(x)d\mu(x) \le K.$$

Варианты заданий

Вариант 1:	1.13	2.1;	3.2;	4.6.
Вариант 2:	1.11	2.3;	3.3;	4.4.
Вариант 3:	1.12	2.2;	3.5;	4.5
Вариант 4:	1.10	2.4;	3.4;	4.1.
Вариант 5:	1.9	2.7;	3.8;	4.2.
Вариант 6:	1.8;	2.6;	3.6;	4.3.
Вариант 7:	1.7;	2.5;	3.7;	4.1.
Вариант 8:	1.4;	2.10;	3.1;	4.2.
Вариант 9:	1.5;	2.8;	3.9;	4.3.
Вариант 10:	1.2;	2.9;	3.10;	4.4.
Вариант 11:	1.3;	2.11;	3.11;	4.5.
Вариант 12:	1.6;	2.12;	3.13;	4.6.
Вариант 13:	1.1;	2.13;	3.12;	4.1.
Вариант 14:	1.14;	2.11;	3.13;	4.2.
Вариант 15:	1.12;	2.9;	3.10;	4.3.
Вариант 16:	1.11;	2.10;	3.8;	4.4.
Вариант 17:	1.10;	2.8;	3.9;	4.5.
Вариант 18:	1.9;	2.13;	3.7;	4.6.
Вариант 19:	1.8;	2.7;	3.6;	4.1.
Вариант 20:	1.7;	2.6;	3.5;	4.2.
Вариант 21:	1.6;	2.5;	3.12;	4.3.
Вариант 22:	1.5;	2.4;	3.4;	4.4.
Вариант 23:	1.4;	2.3;	3.1;	4.5.
Вариант 24:	1.3;	2.2;	3.3;	4.6.
Вариант 25:	1.1;	2.12;	3.2;	4.2.

III. Д о п о л н и т е л ь н ы е з а д а ч и и у п р а ж н е н и я

38. Привести пример последовательности интегрируемых на множестве E функций сходящихся на E к функции, которая неинтегрируема на E.

39. Доказать, что если $\mu(E) < \infty$ и последовательность $\{ f_n \}$ интегрируемых на E функций равномерно на E сходится, к функции f , то функция f интегрируема на E и

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

(Сравнить с задачей 37).

40. На множестве E конечной меры построить последовательность интегрируемых на E функций f_n , сходящуюся почти всюду к f такую, что не выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu .$$

Выяснить, какие условия теорем о предельном переходе под знаком интеграла не выполняются в данном случае.

41. Будет ли интегрируемой на $[1, +\infty[$ относительно линейной меры Лебега на **R** функция

$$f(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\frac{n}{t}}{n^2} ?$$