ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 6

ТЕОРЕМА ФУБИНИ. ПРОСТРАНСТВА $L_p(X,\mu)$

I. Основные понятия и теоремы

Определение 1. Пусть X и Y – множества, μ_X и μ_Y – меры, заданные на полукольцах $\boldsymbol{S}_X$ и $\boldsymbol{S}_Y$ — подмножеств множеств X и Y соответственно. Систему подмножеств

$$\{A\times B \mid A\in \boldsymbol{S}_X,\, B\in \boldsymbol{S}_Y\}$$

множества $Z = X\times Y$ называют **произведением полуколец** $\boldsymbol{S}_X$ и $\boldsymbol{S}_Y$ и обозначают $\boldsymbol{S}_X\times\boldsymbol{S}_Y$.

Для $A\in \boldsymbol{S}_X$, $B\in \boldsymbol{S}_Y$ положим

$$\mu\, A\times B)= \mu_X(A)\, \mu_Y(B).$$

ТЕОРЕМА 1. *Система множеств* $\boldsymbol{S}_X\times\boldsymbol{S}_Y$ *является полукольцом. Функция* μ *является мерой на полукольце* $\boldsymbol{S}_X\times\boldsymbol{S}_Y$ *и обозначается* $\mu_X\times\mu_Y$. *Эта мера σ-аддитивна, если меры* μ_X и μ_Y σ-*аддитивны.*

Определение 2. Если μ_X и μ_Y σ-аддитивные меры, заданные соответственно на σ-алгебрах $\sum_X$ и $\sum_Y$, то их (тензорным) **произведением** называется лебегово продолжение меры $\mu_X\times\mu_Y$.

Обозначается это произведением символом $\mu_X\otimes\mu_Y$. Если μ_X и μ_Y — линейные меры (меры Лебега в $\mathbf{R}$), то их произведение $\mu_X\otimes\mu_Y$ является плоской мерой Лебега (мерой Лебега в $\mathbf{R}^2$).

ТЕОРЕМА 2 (Фубини). *Пусть* μ_X *и* μ_Y *определены на σ-алгебрах, σ-аддитивны и полны,* $\mu = \mu_X\otimes\mu_Y$. *Пусть, далее, f(x,y) интегрируема по мере* μ *на* $A\subset X\times Y$. *Тогда*

$$\int_A f d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f(x,y)d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x) = \int_Y \left(\int_{A^y} f(x,y)d\mu_X(x) \right) d\mu_Y(y),$$

где $A_x = \{y\in Y \mid (x,y)\in A\}$, $A^y = \{x\in X \mid (x,y)\in A\}$.

Утверждение теоремы включает существование внутренних интегралов при почти всех значениях переменного, по которому берутся соответствующие внешние интегралы.

ТЕОРЕМА 3 (Тонелли). *В обозначениях предыдущей теоремы из существования одного из интегралов*

$$\int\limits_X \Big(\int\limits_{A_x} |f(x,y)|\, d\mu_Y(y) \Big) d\mu_X(x) \qquad \text{или} \qquad \int\limits_Y \Big(\int\limits_{A^y} |f(x,y)|\, d\mu_X(x) \Big) d\mu_Y(y)$$

вытекает существование $\int\limits_A f d\mu$ *при условии, что функция f μ-измерима.*

Пусть (X,S,μ) — пространство с полной мерой μ, $p\in[1, +\infty)$. Обозначим через $L_P(X,\mu)$ множество всех μ-измеримых функций f на X, для которых функция $f^{\,P}$ μ-интегрируема, и пусть $\widetilde{f}$ есть класс всех таких функций из $L_P(X,\mu)$, которые μ-почти всюду на X совпадают с f. Множество $\mathrm{L}_P(X,\mu)$ =
$=\{\widetilde{f}\ | f\in L_P(X,\mu)\}$наделяется метрикой

$$d_P(\widetilde{f}\ \widetilde{g}) = \left(\int\limits_X |f-g|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

и становится полным метрическим пространством.

Если это не приводит к недоразумениям, то, допуская вольность речи, элементы из $\mathrm{L}_P(X,\mu)$ называют функциями.

ТЕОРЕМА 4 (неравенство Гельдера). *Пусть* $p, p' \geq 1,\ {}^{1}\!/_{p} + {}^{1}\!/_{p'} = 1.$ *Если* $f\in L_P(X,\mu)$, $g \in L_{p'}(X,\mu)$, *то* $f\,g\in L_1(X,\mu)$, *причем*

$$\Big| \int\limits_X fg d\mu \Big| \leq \left(\int\limits_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int\limits_X |g|^p \, d\mu \right)^{1/p'}$$

(*числа p и p' называются сопряженными показателями*).

Часто бывает полезна следующая теорема, устанавливающая связь между интегралом Лебега и несобственным интегралом Римана.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть функция f имеет на (конечном или бесконечном) промежутке* $]a,b]$ *лишь конечное число точек разрыва. Для того чтобы f была интегрируема по Лебегу на* $]a,b]$, *необходимо и достаточно, чтобы* *несобственный интеграл Римана* $\int_a^b f(x)dx$ *сходился абсолютно. В этом случае интегралы Римана и Лебега от функции f по* $]a,b[$ *совпадают.*

Это вытекает из теоремы Б.Леви о предельном переходе под знаком интеграла (докажите!).

ЛИТЕРАТУРА: [1, с. 73-79, 104-114]; [2, с. 352-366, 430-442]; [3, с. 180-190].

II. З а д а ч и

В нижеследующих задачах рассматривается только линейная и плоская мера Лебега.

1. Доказать существование и вычислить $\int_A f d\mu$, где $A = [0,1]\times[0,1]$, μ — плоская мера Лебега.

	1.1	1.2	1.3
f	$\begin{cases} e^{xy}, x+y\in Q; \\ x+y, x+y\notin Q \end{cases}$	$\begin{cases} x, \dfrac{x}{y+1}\in Q; \\ x\sin y, \dfrac{x}{y+1}\notin Q \end{cases}$	$\begin{cases} 1, x-y\in Q; \\ xy^3, x-y\notin Q \end{cases}$
	1.4	1.5	1.6
f	$\begin{cases} x^y, y\in Q; \\ x-y, y\notin Q \end{cases}$	$\begin{cases} \dfrac{y}{x}, \dfrac{1}{y}\in N; \\ x^2-y, \dfrac{1}{y}\notin N \end{cases}$	$\begin{cases} \dfrac{x}{\sin y}, x\in Q; \\ e^{x-y}, x\notin Q \end{cases}$
	1.7	1.8	1.9
f	$\begin{cases} e^{x^2}, \dfrac{x}{y}\in \mathrm{N}; \\ \dfrac{1}{x^2+1}, \dfrac{x}{y}\notin \mathrm{N} \end{cases}$	$\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y}, (x,y)\in Q\times R; \\ xy^2, (x,y)\notin Q\times R \end{cases}$	$\begin{cases} \dfrac{y}{\sin y}, x^2-y\in Q; \\ \dfrac{x-y}{1+x}, x^{2-y}\notin Q \end{cases}$
	1.10	1.11	1.12

f	$\begin{cases}\ln x, \dfrac{x^2}{y} \in \mathrm{N}; \\ \dfrac{y+1}{x+1}, \dfrac{x^2}{y} \notin \mathrm{N}\end{cases}$	$\begin{cases}\cos x, x^2 y \in Q; \\ \dfrac{x+y}{\sqrt{x}}, x^2 y \notin Q\end{cases}$	$\begin{cases} tgx, x^3 + y \in Q; \\ \sqrt[3]{xy}, x^3 + y \notin Q\end{cases}$
	1.13	1.14	1.15
f	$\begin{cases} ctgx, \dfrac{x}{y^2} \in \mathrm{N}, \\ \sqrt{\dfrac{x}{y}}, \dfrac{x}{y^2} \notin \mathrm{N}\end{cases}$	$\begin{cases}\dfrac{tgx}{x}, \dfrac{x}{y^3} \in \mathrm{N}, \\ \dfrac{y}{\sqrt{x}}, \dfrac{x}{y^3} \notin \mathrm{N}\end{cases}$	$\begin{cases} y, xy \in Q; \\ xy, xy \notin Q\end{cases}$

Решение задачи 1.15. Для любого $q \in \mathbf{Q}$ положим $\Gamma_q = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = q\}$. Тогда $\mu(\Gamma_q) = 0$. Поэтому множество

$$M = \{(x, y) \in R^2 \mid xy \in Q\} = \bigcup_{q \in Q} \Gamma q$$

имеет нулевую μ-меру. Таким образом, $f(x,y)=xy$ μ-почти всюду и в силу теоремы Фубини имеем

$$\int_A f d\mu = \int_0^1 \left(\int_0^1 xydx \right) dy = \frac{1}{4}.$$

2. Известно, что при пересечении измеримого множества $E \subset [0,1] \times [0,1]$ каждой вертикальной прямой $x=c$, $c \in [0,1]$ получается множество линейной меры $\varphi(c)$. Найти меру множества E, если:

	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
φ	$e^{\frac{1}{3c}}$	$\dfrac{1}{4+c^2}$	$c \cos c$	$\sqrt[3]{1-2c}$	$tg \dfrac{c}{2}$
	2.6	2.7	2.8	2.9	2.10
φ	$(1+3c)^{-\frac{1}{2}}$	$\ln(1+2c)$	$arctg\, c$	$(1+c^3)^{-2}$	$c(1+c)^{-1}$

	2.11	2.12	2.13	2.14	2.15
φ	ce^{-c}	$(1+c^2)^{\frac{1}{2}}$	$c(1+c^{-2})^{-1}$	$ctg(1+c)$	$c^{-1}\sin c$

Указание. Примените теорему Фубини к интегралу $\int\chi_E\,d\mu$, где μ — плоская мера Лебега.

3. При каких значениях параметра α функции *f* принадлежат пространству $L_p[0,1]$?

	3.1	3.2	3.3	3.4	2.5
f	$x^{-\alpha}\sin x$	$x^{\alpha}\operatorname{tg} x$	$(\sin x)^{\alpha}$	$(\operatorname{tg} x)^{\alpha}$	$\frac{e^x-1}{x^{\alpha}}$
	3.6	3.7	3.8	3.9	3.10
f	$\frac{1-\cos x}{x^{\alpha}}$	$\frac{e^x+1}{x^{\alpha}}$	$\frac{x^{\alpha}}{x^2+1}$	$(\arcsin x)^{\alpha}$	$x^{\alpha}\arcsin x$
	3.11	3.12	3.13	3.14	3.15
f	$(x\,arctgx)^{\alpha}$	$x^{\alpha}\operatorname{arctg} x$	$\ln^{\alpha}(1+x)$	$x^{\alpha}(e^x-1)$	$(\sin(\sin x))^{\alpha}$

Решение задачи 3.15. При α ≥ 0 функция *f* непрерывна. Пусть α < 0. В силу теоремы 5 достаточно исследовать сходимость несобственного интеграла Римана $\int_0^1(\sin(\sin x))^{\alpha p}dx$. Для этого воспользуемся признаком сравнения. Поскольку sin *x* ~ *x* при $x\to 0$, то наш интеграл сходится одновременно с интегралом $\int_0^1(x)^{\alpha p}dx$. Последний интеграл, как известно, сходится лишь при $-\alpha p < 1$. Итак, *f* принадлежат пространству *f* принадлежат пространству $L_p[0,1]$ если и только если $\alpha > -\frac{1}{p}$.

4. Докажите, что функция *f* принадлежит пространству $L_1[0,1/2]$, но не принадлежит пространству $L_2[0,1/2]$.

	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
f	$\frac{1}{x\ln^3 x}$	$\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}$	$\frac{tgx}{x\sqrt{x}}$	$\frac{x}{\sin x\sqrt{x}}$	$\frac{x}{tgx\sqrt{x}}$
	4.6	4.7	4.8	4.9	4.10
f	$\frac{x}{(\sin x)^{3/2}}$	$\frac{tgx}{x^2\ln^2 x}$	$\frac{\sin x}{x^2\ln^2 x}$	$\frac{arctgx}{x^2\ln^2 x}$	$\frac{\arcsin x}{x^2\ln^2 x}$
	4.11	4.12	4.13	4.14	4.15
f	$\frac{x}{(tg)^{3/2}}$	$\frac{x}{e^{x^{3/2}}-1}$	$\frac{x}{\ln(1+x)^{3/2}}$	$\frac{\ln(1+x)}{x^2\ln^2 x}$	$\frac{e^x-1}{x^2\ln^4 x}$

Решение задачи 4.15. Рассмотрим несобственный интеграл $\int\limits_0^{1/2}\frac{e^x-1}{x^2\ln^4 x}dx$. Поскольку $e^x - 1 \sim x$ при $x\to 0$, то вопрос о сходимости данного интеграла сводится к сходимости интеграла $\int\limits_0^{1/2}\frac{1}{x\ln^4 x}dx$. С помощью подстановки $t = \ln x$ легко убедится, что этот интеграл сходится. Итак, $f\in L_1[0,1/2]$. Для доказательства соотношения $f\notin L_2[0,1/2]$ нам нужно доказать расходимость интеграла $\int\limits_0^{1/2}\left(\frac{e^x-1}{x^2\ln^4 x}\right)^2 dx$, или, что равносильно, доказать расходимость интеграла $\int\limits_0^{1/2}\frac{1}{x^2\ln^8 x}dx$. П о правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to+0} x\ln^8 x = 0$, следовательно, при достаточно малом ε > 0 имеем $\frac{1}{x\ln^8 x} > 1 \text{ для } x\in]0,\varepsilon[$. Поэтому $\int\limits_0^{\varepsilon}\frac{1}{x^2\ln^8 x}dx \ge \int\limits_0^{\varepsilon}\frac{dx}{x}$, последний же интеграл расходится.

5. Приведите пример последовательности точек из $L_p[0,1] \cap L_q[0,1]$, сходящейся в $L_p[0,1]$, но не сходящейся в $L_q[0,1]$.

	5.1	5.2	5.3	5.4.	5.5
(p;q)	(1;2)	(2;4)	(1;7)	(3;4)	(2;5)
	5.6	5.7	5.8	5.9	5.10
(p;q)	(3.6)	(5.8)	(4;9)	(2;7)	(2;3)
	5.11	5.12	5.13	5.14	5.15
(p;q)	(4;5)	(3;7)	(3;5)	(1;4)	(2;6)

Решение задачи 5.15. Пусть $f_n = n^{1/6}\chi_{[0;n^{-1}]}$ (χ_A — характеристическая функция множества A). Тогда в метрике пространства $L_2[0,1]$ имеем

$$d_2(f_n,0) = \left(\int_0^1 f_n^2(x)dx\right)^{1/2} = \left(\int_0^{1/n} n^{1/3}dx\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)^{1/2} \to 0 \quad при \quad n \to \infty,$$

т.е. $f_n \to 0$ в пространстве $L_2[0,1]$. С другой стороны, при $m > n$ имеем

$$d_6(f_m, f_n) = \left(\int_0^1 (f_m(x) - f_n(x))^6 dx\right)^{1/6} \geq \left(\int_0^{1/m} (f_m(x) - f_n(x))^6 dx\right)^{1/6} =$$

$$= \left(\int_0^{1/m} (m^{1/6} - n^{1/6})^6 dx\right)^{1/6} = \left(\frac{(m^{1/6} - n^{1/6})^6}{m}\right)^{1/6}$$

(нарисуйте графики функций f_m и f_n). Поэтому

$$d_6(f_{64n}, f_n) \geq \left(\frac{n}{64n}\right)^{1/6} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{f_n\}$ не фундаментальна в пространстве $L_6[0,1]$, а потому не может иметь в этом пространстве предела.

6. Докажите включение $L_q[0,1] \subset L_p[0,1]$. Будет ли здесь иметь место равенство (p и q — те же, что и в задаче 5)?

Решение задачи 6.15. Если $f \in L_6[0,1]$, то $f^2 \in L_3[0,1]$. Так как функция тождественно равная единице принадлежит $L_q[0,1]$, где q удовлетворяет равенству $1/3 + 1/q = 1$, то в силу теоремы 4 имеем $f^2 = f \cdot 1 \in L_1[0,1]$, т.е. $f \in L_2[0,1]$, что доказывает включение $L_6[0,1] \subset L_2[0,1]$. Осталось заметить, что функция $f(x) = x^{-1/3}$ принадлежит $L_2[0,1]$, но не принадлежит $L_6[0,1]$.

Варианты заданий

Вариант 1:	1.1;	2.1;	3.1;	4.1;	5.1;	6.1.
Вариант 2:	1.2;	2.2;	3.2;	4.2;	5.2;	6.2.
Вариант 3:	1.3;	2.3;	3.3;	4.3;	5.3;	6.3.
Вариант 4:	1.4;	2.4;	3.4;	4.4;	5.4;	6.4.
Вариант 5:	1.5;	2.5;	3.5;	4.5;	5.5;	6.5.
Вариант 6:	1.6;	2.6;	3.6;	4.6;	5.6;	6.6.
Вариант 7:	!.7;	2.7;	3.7;	4.7;	5.7;	6.7.
Вариант 8:	1.8;	2.8;	3.8;	4.8;	5.8;	6.8.
Вариант 9:	1.9;	2.9;	3.9;	4.9;	5.9;	6.9.
Вариант 10:	1.10;	2.10;	3.10;	4.10;	5.10;	6.10.
Вариант 11:	1.11;	2.11;	3.11;	4.11;	5.11;	6.11.
Вариант 12:	1.12;	2.12;	3.12;	4.12;	5.12;	6.12.
Вариант 13:	1.13;	2.13;	3.13;	4.13;	5.13;	6.13.
Вариант 14:	1.14;	2.14;	3.14;	4.14;	5.14;	6.14.
Вариант 15:	1.1;	2.9;	3.12;	4.2;	5.7;	6.3.
Вариант 16:	1.2;	2.8;	3.1;	4.11;	5.10;	6.4.
Вариант 17:	1.3;	2.13;	3.2;	4.14;	5.9;	6.5.

Вариант 18:	1.4;	2.12;	3.11;	4.13;	5.8;	6.3.
Вариант 19:	1.5;	2.11;	3.10;	4.9;	5.6;	6.2.
Вариант 20:	1.6;	2.10;	3.9;	4.8;	5.5;	6.10.
Вариант 21:	1.7;	2.6;	3.8;	4.4;	5.3;	6.13.
Вариант 22:	1.8;	2.5;	3.7;	4.1;	5.2;	6.14.
Вариант 23:	1.9;	2.7;	3.6;	4.3;	5.1;	6.8.
Вариант 24:	1.10;	2.4;	3.5;	4.2;	5.11;	6.1.
Вариант 25:	1.11;	2.3;	3.4;	4.10;	5.12;	6.6.

III. Дополнительные задачи и упражнения

В задачах 42-47 m — мера Лебега на **R**.

42. Показать, что для функции е $^{-xy}\cdot\sin x\cdot \sin y$ существуют повторные интегралы:

$$\int\limits_{[0,+\infty[}\left(\int\limits_{[0,+\infty[} e^{-xy}\sin x\cdot\sin y\,dm(x)\right)dm(y),\qquad \int\limits_{[0,+\infty[}\left([\int\limits_{[0,+\infty[} e^{-xy}\sin x\cdot\sin y\,dm(y)\right)dm(x)$$

и величины этих повторных интегралов совпадают. Интегрируема ли на [0,+∞[× [0,+∞[эта функция относительно плоской меры Лебега?

43. Показать, что функция $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не интегрируема на [0,1]× [0,1] относительно плоской меры Лебега, но повторные интегралы

$$\int\limits_{[0,1]}\left(\int\limits_{[0,1]} f(x,y)dm(x)\right)dm(y) \text{ и } \int\limits_{[0,1]}\left(\int\limits_{[0,1]} f(x,y)dm(y)\right)dm(x)$$

существуют и равны.

44. Показать, что для функции $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ существуют оба повторных интеграла на [0,1][× [0,1], но их величины не совпадают.

45. Доказать, что следующие множества плотны в пространстве L_1([0,1], m):

а) множество кусочно-постоянных функций с конечным числом точек разрыва;

б) множество непрерывных кусочно-линейных функций с конечным числом точек излома;

в) множество всех многочленов $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$;

г) множество всех тригонометрических многочленов $T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi ikx}$.

46. Доказать, что в пространстве $L_1(\mathbf{R}, m)$ плотны следующие множества:

а) всех кусочно-постоянных финитных функций (т.е. кусочно-постоянных функций, равных нулю вне некоторого отрезка);

b) всех непрерывных финитных функций;

c) всех функций вида $P(x) = e^{-x^2}$, *где* P — многочлен.

47. Пусть $f \in L_1(\mathbf{R}, m)$. Доказать, что $\int_R |f(x+\varepsilon) - f(x)| dx \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Другими словами, сдвиг является непрерывной операцией в $L_1(\mathbf{R}, m)$

ЛИТЕРАТУРА

1. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. — Минск: Изд-во “Университетское”, 1984. — 351 с.

2. Колмогоров А.Н., Фомин СВ. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989. — 623 с.

3. Партасарати К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры. М.: Мир, 1983. — 336 с.

4. Кириллов А..А. Теоремы и задачи функционального анализа. — М.: Наука, 1979. — 384 с.

5. Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. — Минск: “Вышейшая школа”, 1978. — 205 с.

С О Д Е Р Ж А Н И Е