ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 7

ПОЛНОТА И КОМПАКТНОСТЬ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. О С Н О В Н Ы Е П О Н Я Т И Я И Т Е О Р Е М Ы

Определение 1. Пусть $X \neq \varnothing$. Отображение $\rho: X \times X \to \mathbf{R}$,которое каждой паре $(x,y) \in X \times X$ ставит в соответствие действительное число $\rho(x,y)$ называется **метрикой** на X, если для любых $x,y,z \in X$ выполнены условия:

1. $\rho(x,y) \geq 0$ и $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (симметричность) ;
3. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z)+\rho(z,y)$ (неравенство треугольника) ;

Определение 2. Множество X с заданной на нём метрикой ρ, т.е. пара (X,ρ), называется **метрическим пространством .**

Число $\rho(x,y)$ обычно называют **расстоянием** между точками x,y множества X. В дальнейшем через (x_n), $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$ будем обозначать последовательность точек из X. С помощью метрики можно выделить два важных класса последовательностей в метрическом пространстве.

Определение 3. Последовательность точек (x_n) метрического пространства (X,ρ), называется **сходящейся**, если для некоторого $x_0 \in X$, числовая последовательность $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Точка x_0, при этом, называется **пределом** последовательности (x_n).

Определение 4. Последовательность (x_n) называется **фундаментальной** в (X,ρ), если числовая последовательность $\rho(x_n, x_m) \to 0$, когда $n \to \infty$ и $m \to \infty$.

Определение 5. Множество A точек метрического пространства (X,ρ) называется **ограниченным**, если A целиком принадлежит некоторому шару конечного радиуса .

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* (x_n) *— сходящаяся последовательность точек в* (X,ρ), *тогда она*:

1) *ограничена;*
2) *имеет единственный предел;*
3) *фундаментальна.*

Определение 6. Метрическое пространство, в котором всякая фундаментальная последовательность точек сходится, называется **полным метрическим пространством.**

Заметим, что не всякое метрическое пространство полно, тем не менее, всякое не полное метрическое пространство можно пополнить, т.е. включить некоторым (единственным по существу !) способом в полное пространство. В полных метрических пространствах имеют место два важных принципа, отражающие существенные свойства таких пространств .

ТЕОРЕМА 2 (Принцип вложенных шаров). *Для того чтобы метрическое пространство было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нём всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение .*

Пусть $f : X \to X$ — отображение метрического пространства X в себя. Точка $a \in X$ называется **неподвижной точкой** отображения f, если $f(a)=a$.

Определение 7 . Отображение f : $(X,\rho) \to (X,\rho)$ называется **сжимающим**, если существует константа $0 \le \alpha < 1$ такая, что для $\forall\, x, y \in X \quad \rho(f(x),f(y)) \le \alpha\rho(x,y)$.

ТЕОРЕМА 3 (Принцип сжимающих отображений). *В полном метрическом пространстве сжимающее отображение имеет неподвижную точку и при этом только одну .*

Метрические пространства являются частным случаем топологических пространств, имеющих счетную базу в каждой точке. Следовательно, для них понятие компактности и счетной компактности совпадают. Поэтому определим компактность в (X,ρ) на языке последовательностей.

Определение 8. Множество **M** метрического пространства (X,ρ) называется **компактным**, если из любой последовательности $(x_n) \subset \mathbf{M}$ можно выделить сходящуюся к элементу из **M** подпоследовательность (x_{n_k}), т.е. $x_{n_k} \to x \in \mathbf{M}$, при $k \to \infty$.

Компактность в метрическом пространстве тесно связано с понятием **полной ограниченности**.

Определение 9. Подмножество A метрического пространства (X,ρ) называется **ε-сетью** множества $M \subset X$, если $\forall\ x \in M$ существует $a \in A$ такое, что $\rho(x, a) < \varepsilon$. Если A при этом — конечное множество, то A называют **конечной ε-сетью.**

Определение 10. Множество $M \subset X$ называется **вполне ограниченным** в (X,ρ), если при любом $\varepsilon > 0$ для M существует конечная ε-сеть.

Перечислим основные свойства вполне ограниченных множеств:

1. Вполне ограниченное множество ограничено.
2. Если M вполне ограничено, то его замыкание вполне ограничено .
3. Всякое вполне ограниченное метрическое пространство ($M = X$!) сепарабельно.
4. Подмножество вполне ограниченного множества вполне ограничено.

ТЕОРЕМА 4 (Хаусдорф). *Пусть* (X,ρ) *— полное метрическое пространство. Для того чтобы множество* $M \subset X$ *было компактным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

(1) M *— замкнуто;*

(2) M *— вполне ограничено в* (X,ρ).

Из этой общей теоремы можно получить критерий компактности множеств в конкретных метрических пространствах ($\mathbf{R}^n$, l_p, $\mathbf{C}[a,b]$ и др.).

ТЕОРЕМА 5 ($\mathbf{R}^n$, Гейне -Борель-Лебег). *Для того чтобы множество* $M \subset \mathbf{R}^n$ *было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым и ограниченным .*

ТЕОРЕМА 6 (l_p). *Множество* $M \subset l_p$, $1 \le p < \infty$ *компактно тогда и только тогда, когда выполнены условия*:

(1) M *— замкнутое множество*;

(2) M *— ограниченное множество*;

(3) для любого $\varepsilon > 0$ *существует номер* $n_0 = n_0(\varepsilon)$ *такой, что*

$$\left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} < \varepsilon \text{ для всех } x = (x_1, x_2, \ldots) \in M.$$

ТЕОРЕМА 7 ($\mathbf{C}[a,b]$, Арцела-Асколи). $M \subset \mathbf{C}[a,b]$ *компактно тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

(1) M *— замкнуто в* $\mathbf{C}[a,b]$;

(2) M *— ограничено в* $\mathbf{C}[a,b]$;

(3) M *— равностепенно непрерывно в* $\mathbf{C}[a,b]$, *т.е.* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta$ *такое, что* $\forall x \in M$ *и* $t_1, t_2 \in [a,b]$ *из того, что* $|t_1 - t_2| \le \delta$ *следует неравенство:*

$$|x(t_2) - x(t_1)| \le \varepsilon.$$

<u>Определение 11.</u> Множество M метрического пространства (X,ρ) называется предкомпактным, если для любой последовательности $(x_n) \subset M$ из нее можно извлечь сходящуюся в (X,ρ) подпоследовательность.

<u>Замечание .</u> Все критерии компактности, сформулированные в трех последних теоремах, являются и критериями предкомпактности множества M, если в них опустить требование замкнутости множества M.

ЛИТЕРАТУРА : [1, с. 79-136]; [2, с. 61-78, 92-106].

II.З А Д А Ч И.

1. Проверить, является ли заданная последовательность (x_n) точек метрического пространства (X,ρ) ограниченной, фундаментальной, сходящейся. (определение метрики ρ на X смотри в таблице в конце пособия). Если существует, найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

	X	x_n		X	x_n
1.1	$C[0,2]$	$\frac{t^2 n}{n+t^2}$	1.2	$L_2[0,1]$	$\frac{nt^2}{1+nt}$
1.3	$C[-1,1]$	$\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}$	1.4	$L_1[1,2]$	$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n$
1.5	$C[0,1]$	$t^n - t^{n+1}$	1.6	$L_4[-2,2]$	$n\left(\sqrt{t^2+\frac{1}{n}}-\sqrt{t^2}\right)$
1.7	$C[0,1]$	$n\left(\sqrt{t+\frac{1}{n}}-\sqrt{t}\right)$	1.8	$L_3[0, 1]$	$n\sin\frac{t}{n}$

	X	x_n
1.9	l_4	$\left(\underbrace{\frac{n}{n+1},\frac{n}{n+1},\ldots,\frac{n}{n+1}}_{n},0,0,\ldots\right)$
1.10	l_2	$\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},\ldots,\frac{1}{3^n},0,0,\ldots\right)$
1.11	l_∞	$\left(\underbrace{n\sin\frac{1}{n},n\sin\frac{1}{n},\ldots,n\sin\frac{1}{n}}_{n},0,0,\ldots\right)$
1.12	c_0	$\left(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n},\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n},0,0,\ldots\right)$

1.13	$l_{4/3}$	$\left(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n},\underbrace{\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}}_{n},0,0,\ldots\right)$
1.14	$L_3[0,2]$	$\begin{cases}\left(\frac{t}{2}\right)^n, t\in[0,2]\setminus Q\\ e^{nt}, t\in[0,2]\cap Q\end{cases}$
1.15	$L_1[-2,2]$	$\begin{cases}\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}, t\in[-2,2]\setminus Q\\ \cos nt, t\in[-2,2]\cap Q\end{cases}$

Решение задачи 1.15. Мера Лебега множества $[-2,2]\cap Q$ равна нулю, поэтому $x_n(t)=\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}$ почти всюду на отрезке [–2,2]. Тогда в силу определения метрического пространства $L_1[-2,2]$ (см. лабораторную работу №6) в качестве представителя класса $x_n(t)$ можно брать функцию $x_n(t)=\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}$ и для последовательности из таких функций отвечать на поставленные вопросы. По определению

$$\forall\, x,y \in L_1[-2,2] \;\; \rho(x,y)=\int\limits_{[-2,2]}|y(t)-x(t)|dt\,.$$

Поэтому для любого $n\in N$

$$\rho(0,x_n)=\int\limits_{[-2,2]}\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}dt\le\int\limits_{[-2,2]}\sqrt{t^2+1}dt=\int\limits_{-2}^{2}\sqrt{t^2+1}dt\le\int\limits_{-2}^{2}\sqrt{5}dt=4\sqrt{5}$$

и значит последовательность (x_n)ограничена (т.к. она лежит в шаре $B(0,4\sqrt{5})$) .

Докажем, что она является фундаментальной:

$$\rho(x_n,x_m)=\int\limits_{[-2,2]}\left|\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{t^2+\frac{1}{m^2}}\right|dt=\int\limits_{[-2,2]}\left|\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}}{\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{t^2+\frac{1}{m^2}}}\right|dt=$$

$$= \left|\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right| \cdot \int\limits_{[-2,2]} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{t^2 + \frac{1}{m^2}}}.$$

Предположим для определенности, что $m < n$. Тогда

$$\int\limits_{[-2,2]} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{t^2 + \frac{1}{m^2}}} = 2\int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{t^2 + \frac{1}{m^2}}} \le 2\int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{m^2}}} =$$

$$= 2m\ln(mt + \sqrt{m^2t^2 + 1})\Big|_0^2 = 2m\ln(2m + \sqrt{4m^2 + 1}).$$

Поэтому

$$\rho(x_m, x_n) \le \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) 2m\ln(2m + \sqrt{4m^2 + 1}) \le \frac{4\ln(4m+1)}{m} \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

Итак последовательность (x_n) фундаментальна в $L_1[-2,2]$ Поскольку $L_1[-2,2]$ — полное пространство, то (x_n) — сходящаяся последовательность. Найдем ее предел..

Покажем, что таковым является $x_0(t) = |t|$ (взяли поточечный предел $x_n(t)$). Действительно,

$$\rho(|t|, x_m(t)) = \int\limits_{[-2,2]} \left||t| - \sqrt{t^2 + \frac{1}{m^2}}\right| dt = \frac{2}{m^2}\int_0^2 \frac{dt}{|t| + \sqrt{t^2 + \frac{1}{m^2}}} \le \frac{2}{m^2}\int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{m^2}}} =$$

$$= \frac{2m\ln(2m + \sqrt{4m^2 + 1})}{m^2} \to 0, \text{ при } m \to \infty,$$

т.е. $x_m(t) \to |t|$ в метрическом пространстве $L_1[-2,2]$.

2 . Проверить является ли метрическое пространство (X,ρ) полным ?

В случае отрицательного ответа, привести пример фундаментальной последовательности, которая не сходится в (X,ρ) .

	X	$\rho(x, y)$

2.1	$C[0,1]$	$\rho(x,y)=\int_0^1 \lvert y(t)-x(t)\rvert dt$
2.2	$\left\{x\in C[0,1]:\ \max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert<1\right\}$	$\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert y(t)-x(t)\rvert$
2.3	$C[0,1]$	$\rho(x,y)=\left(\int_0^1 \lvert y(t)-x(t)\rvert^2 dt\right)^{1/2}$
2.4	$C^{(1)}[0,1]$	$\rho(x,y)=\int_0^1 \lvert y(t)-x(t)\rvert dt$
2.5	l_∞	$\rho(x,y)=\sup\limits_n \lvert y_n-x_n\rvert$
2.6	$\left\{x\in l_2:\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert x_k\rvert^2<1\right\}$	$\rho(x,y)=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert y_k-x_k\rvert^2\right)^{1/2}$
2.7	l_3	$\rho(x,y)=\sup\limits_n \lvert y_n-x_n\rvert$
2.8	l_2	$\rho(x,y)=\sup\limits_n \lvert y_n-x_n\rvert$
2.9	c_0	$\rho(x,y)=\sup\limits_n \lvert y_n-x_n\rvert$
2.10	$C^{(1)}[0,1]$	$\rho(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}\lvert x(t)-y(t)\rvert+\max\limits_{0\le t\le 1}\lvert x'(t)-y'(t)\rvert$
2.11	$C^{(2)}[0,1]$	$\rho(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}\lvert y(t)-x(t)\rvert$
2.12	$l_1\cap l_2$	$\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert y_k-x_k\rvert$
2.13	$l_1\cap l_2$	$\rho(x,y)=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert y_k-x_k\rvert^2\right)^{1/2}$
2.14	$l_1\cap l_3$	$\rho(x,y)=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert y_k-x_k\rvert^3\right)^{1/3}$

2.15	$l_1 \cap l_2$	$\rho(x,y) = \sup_n \lvert y_n - x_n \rvert$
2.16	$C^{(1)}[0,1]$	$\rho(x,y) = \max_{0 \le t \le 1} \lvert y(t) - x(t) \rvert$
2.17	l_1	$\rho(x,y) = \sup_n \lvert y_n - x_n \rvert$

Решение задачи 2.17. Покажем, что данное метрическое пространство не является полным. Для этого рассмотрим последовательность $x^n = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots) \in l_1$ n=1,2,... .

При $m < n$ имеем $x^n - x^m = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m}, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots \right)$, следовательно $\rho(x^n, x^m) = \frac{1}{m+1} \to 0$, если $m, n \to \infty$. Итак x^n— фундаментальная последовательность в (l_1, ρ). Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ из l_1 и $\lim_{n\to\infty} \rho(a, x^n) = 0$. Тогда для любого $k \in \mathbf{N}$ при $n>k$ имеем $\rho(a, x^n) \ge \lvert a_k - \frac{1}{k} \rvert$. Значит, $a_k = 1/k$ и поэтому a не принадлежит l_1. Итак мы построили фундаментальную последовательность x^n, которая не сходится в рассматриваемом пространстве. •

Решение задачи 2.16. Покажем что это метрическое пространство также не является полным. Разлагая в ряд Фурье функцию $y = \lvert \sin x \rvert$ (см. "Сборник задач и упражнений по математическому анализу " Б.П. Демидович стр.270, №2957) будем иметь :

$$\lvert \sin x \rvert = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1} \quad \text{для } \forall x \in R. \tag{1}$$

Последнее равенство имеет место в силу равномерной сходимости ряда (1) (признак Веерштрасса). Отсюда следует, что последовательность функций

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}$$

равномерно сходится, в частности на отрезке [–1,1], к функции $\lvert \sin x \rvert$. Тогда $\rho(\lvert \sin x \rvert, S_n(x)) \to 0$ при $n \to \infty$. Другого предела у $S_n(x)$ быть не может, а

$|\sin x| \notin C^{(1)}[-1,1]$. Поэтому достаточно показать, что последовательность $S_n(x)$ фундаментальна в рассматриваемом пространстве. В самом деле, если $m<n$, то $\rho(S_n,S_m) = \max\limits_{-1\le t\le 1}\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n}\dfrac{\cos 2kt}{4k^2-1}\right| \le \sum\limits_{k=m+1}^{\infty}\dfrac{1}{4k^2-1} \to 0$ при $m\to\infty$, как остаток сходящегося ряда . •

3. Выяснить является ли множество **M** предкомпактным, компактным в пространстве $C[0,1]$?

	M		**M**
3.1	$\{\sin(t+a): a\in R\}$	3.2	$\{x\in C^{(2)}[0,1]: \lvert x(t)\rvert\le 1, \lvert x'(t)\rvert\le 1\}$
3.3	$\{ae^{t+b}: 1\le a\le 2, b\in R\}$	3.4	$\{x\in C^{(2)}[0,1]: \lvert x(t)\rvert\le\lvert x'(t)\rvert\le\lvert x''(t)\rvert\le 1\}$
3.5	$\{bt^{\alpha}: 0<\alpha\le 1, 0\le b\le 2\}$	3.6	$\{x\in C[0,1]: \lvert x(0)\rvert\le 1, \lvert x(t_2)-x(t_1)\rvert\le 4\lvert t_2-t_1\rvert\}$
3.7	$\{\cos at: -1\le a\le 1\}$	3.8	$\{x\in C^{(1)}[0,1]: \lvert x(t)\rvert\le t^{-2}, \lvert x(t_2)-x(t_1)\rvert\le\lvert t_2-t_1\rvert\}$
3.9	$\{x(t): \lvert x(t)\rvert\le\cos t\}$	3.10	$\{x\in C^{(2)}[0,1]: \lvert x(0)\rvert\le 1, \lvert x''(t)\rvert\le 1\}$
3.11	$\{a\sin(t+b): 0\le a,b\le 1\}$	3.12	$\{x\in C^{(2)}[0,1]: \lvert x(0)\rvert\le 2, \lvert x'(t)\rvert\le 2\}$
3.13	$\left\{\dfrac{t+a}{t+b}: 1\le a,b\le 2\right\}$	3.14	$\{x\in C^{(2)}[0,1]: x(0)=1, \lvert x'(0)\rvert\le 1, \lvert x''(t)\rvert\le 1\}$
3.15	$\{t^n: n\in N\}$	3.16	$\{x\in C[0,1]: x(0)=1, \lvert x(t_2)-x(t_1)\rvert\le\lvert t_2-t_1\rvert\}$

Решение задачи 3.16 . Применим теорему Арцела-Асколи. Покажем, что **M** — замкнуто, т.е. содержит все свои предельные точки. Пусть $(x_n)\subset\mathbf{M}$ и $x_n\to x$ в $C[0,1]$. Тогда по условию $\forall n\in N$ и $\forall t_1,t_2\in[0,1]$

$$x_n(0)=1,\quad |x_n(t_2)-x_n(t_1)|\le|t_2-t_1|. \tag{2}$$

Перейдя в (2) к пределу при $n\to\infty$, получим $x(0)=1$, $|x(t_2)-x(t_1)|\le|t_2-t_1|$, т.е. $x\in\mathbf{M}$ и **M** — замкнуто. Если в (2) положить $t_1=0$, $t_2=t$, то будем иметь $|x_n(t)-1|\le t \Rightarrow \rho(1,x_n)\le 1$. Откуда $\rho(0,x_n)\le\rho(0,1)+\rho(1,x_n)\le 2$.

Итак $\mathbf{M}\subset B[0,2]$, т.е. **M** ограничено. Осталось проверить равностепенную непрерывность множества **M** .

Для любого $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \varepsilon$. Тогда при любой функции $x \in \mathbf{M}$ и любых $|t_2 - t_1| \le \delta$**,** согласно определению множества **M,** получим $|x(t_2) - x(t_1)| \le |t_2 - t_1| \le \varepsilon$.

Итак, **M** — компактно, а следовательно, и предкомпактно. •

4. Является ли множество **M** предкомпактным в пространстве l_p? В случае положительного ответа построить для множества **M** конечную ε-сеть при $\varepsilon = 1/10$.

	p	**M**
4.1	1	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): \frac{1}{k^2} < \lvert x_k\rvert < \frac{2}{k^2}, k \in N\right\}$
4.2	2	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): \lvert x_k\rvert \le \frac{1}{2^k}, k \in N\right\}$
4.3	2	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): \frac{1}{2^k} \le \lvert x_k\rvert \le \frac{1}{2^{k+1}}, k \in N\right\}$
4.4	3	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): x_k = \frac{k}{1+ak^2}, 1 \le a \le 2, k \in N\right\}$
4.5	4	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): x_1 = 1, x_k > 0, x_{k+1} < \frac{1}{2} x_k, k \in N\right\}$
4.6	1	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): x_1 = 1, x_k > 0, x_{k+1} < \frac{1}{4} x_k, k \in N\right\}$
4 .7	1	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): x_{2k} = 0, 0 < x_{2k+1} \le \frac{1}{2^k},\ k \in N\right\}$
4.8	2	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): \lvert x_{2k}\rvert \le \frac{1}{k}, x_{2k+1} = 0, k \in N\right\}$
4.9	4	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): x_k = \frac{1}{2^{ak}}, \frac{1}{4} \le a \le 1, k \in N\right\}$
4.10	3	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): x_k = \frac{a}{k^{2/3}}, 1 \le a \le 5, k \in N\right\}$
4.11	2	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): x_k = \frac{\sin \alpha k}{(\sqrt{2})^k}, 1 \le \alpha < 2, k \in N\right\}$
4.12	1	$\{(x_1, x_2, x_3, \dots): x_1 = \alpha, x_2 = x_3 = \dots = 0, 1 \le \alpha < 10\}$

4.13	2	$\left\{ (x_1, x_2, x_3, \ldots) : x_{2k} = 0, x_{2k+1} = \dfrac{1}{1+\alpha k}, 1 \le \alpha \le 2, k \in N \right\}$
4.14	2	$\left\{ (x_1, x_2, x_3, \ldots) : x_1 = 1, x_k > 0, x_{k+1} \le \dfrac{1}{2} x_k, k \in N \right\}$

Решение задачи 4.14. Из условий задачи следует, что

$$x_1 = 1, \quad 0 < x_2 \le \frac{1}{2^1}, \quad 0 < x_3 \le \frac{1}{2^2}, \ldots, \quad 0 < x_k \le \frac{1}{2^{k-1}}, \ldots$$

т.е. имеем $\mathbf{M} \subset \mathbf{M_1} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, \ldots) : 0 < x_k \le \dfrac{1}{2^{k-1}} \right\}$.

Покажем, что $\mathbf{M_1}$ предкомпактно в полном метрическом пространстве l_2. Для этого применим критерий предкомпактности (теорема 6 без условия (1)). Поскольку $\forall x \in \mathbf{M_1}$ $\rho(0,x) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2} \le \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{2(k-1)}} \right)^{1/2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} < 2$, то $\mathbf{M_1} \subset B(0,2)$ и, следовательно оно ограничено.

Проверим условие (2) теоремы 6. Для любого $x \in \mathbf{M_1}$ $I_{n_0} = \left(\sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2} \le$

$\le \left(\sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{2(k-1)}} \right)^{1/2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \dfrac{1}{2^{n_0}}$. Поэтому, для любого $\varepsilon > 0$ достаточно взять n_0 таким, чтобы $\dfrac{2}{\sqrt{3}} 2^{-n_0} < \varepsilon$ (например, $n_0 = \left[\log_2 \dfrac{2}{\varepsilon\sqrt{3}} \right] + 1$). Тогда $\forall x \in \mathbf{M}$ $I_{n_0} < \varepsilon$, и условие (2) выполняется, т.е. $\mathbf{M_1}$ — предкомпактно. Так как каждое подмножество предкомпактного множества предкомпактно то $\mathbf{M}$ — предкомпактно.

Приведем другое доказательство предкомпактности $\mathbf{M}$, которое основано на теореме 4. Согласно этой теореме достаточно показать вполне ограниченность множества $\mathbf{M}$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем n так, что $2^{-n+1} < \varepsilon/2$ (например, $n = \left[\log_2 \dfrac{2}{\varepsilon} \right] + 2$). Рассмотрим множество $\mathbf{M}^* = \left\{ x^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) : (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \mathbf{M} \right\}$.

Множество точек $\mathbf{M}^*$ вполне ограниченно как множество изометричное ограниченному множеству из $\mathbf{R}^n$. Значит, для него существует конечная $\varepsilon/2$-сеть. Но для $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)\in\mathbf{M}$ и $x^n=(x_1,x_2,...,x_n,0,0,...)\in\mathbf{M}^*$

$$\rho(x,x^n)=\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{1/2}\le\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{4^k}\right)^{1/2}<\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon/2$$

Поэтому данная $\varepsilon/2$ – сеть $\mathbf{M}^*$ будет ε-сетью во всем $\mathbf{M}$, т.е. $\mathbf{M}$ — вполне ограничено.

Укажем теперь ε-сеть $\mathbf{M}$ для $\varepsilon=\frac{1}{10}$. В этом случае $n=[\log_2 20]+2=6$, и нужно построить конечную $\varepsilon/2$-сеть в множестве

$$\mathbf{M}^*=\left\{(x_1,x_2,\dots,x_6,0,0,\dots):0<x_k\le\frac{1}{2^{k-1}},\ k=2,3\dots6;\ x_1=1,0\right\}$$

Такой будет множество точек вида $y=\left(1,\frac{j_0}{50},\frac{j_1}{50},\frac{j_2}{50},\frac{j_3}{50},\frac{j_4}{50},0,0,...\right)$, где $j_0=\overline{1,25};\ j_1=\overline{1,13};\ j_2=\overline{1,8};\ j_3=\overline{1,4};\ j_4=\overline{1,2}$ (индексы j_i пробегают свои значения независимо друг от друга) ●

5. Является ли отображение f метрического пространства X в себя сжимающим? Найти x_4, где $x_0=0,\ x_{k+1}=f(x_k)$ и оценить расстояние x_4 до неподвижной точки отображения f.

	X	f
5.1	$C[0,1]$	$f(x)(t)=\frac{1}{4}x(t)+1$
5.2	$C[-1,1]$	$f(x)(t)=\frac{1}{2}x(t^2)+t$
5.3	l_2	$f(x)=\left(1,\frac{x_2}{3},\frac{x_3}{4},...\right)$
5.4	l_1	$f(x)=\left(1,\frac{x_2}{4},\frac{x_3}{8},0,0,...\right)$
5.5	c_0	$f(x)=\left(1,\frac{x_2}{2},0,\frac{x_4}{2},0,\frac{x_6}{2},...\right)$
5.6	c	$f(x)=\left(\frac{x_1}{4},1,0,0,...\right)$

5.7	$L_2[0,1]$	$f(x)(t)=\frac{1}{8}x(\sqrt{t})+1$
5.8	$L_2[0,1]$	$f(x)(t)=\frac{1}{4}x(\sqrt[3]{t})+1$
5.9	l_∞	$f(x)=\left(1,\frac{x_1}{2},\frac{x_2}{4},0,0,\ldots\right)$
5.10	l_3	$f(x)=\left(1,\frac{x_1}{4},\frac{x_2}{4},\frac{x_3}{4},\ldots\right)$
5.11	$C[0,1]$	$f(x)(t)=\frac{1}{5}\sin x(t)+\sin t$
5.12	$C^{(1)}[0,1]$	$f(x)(t)=\frac{1}{6}x(t^2)+1$
5.13	$C^{(1)}_{[0,1]}$	$f(x)(t)=\frac{1}{8}tx(t)+t$
5.14	l_4	$f(x)=\left(1,\frac{x_3}{5},\frac{x_4}{6},\frac{x_5}{7},\ldots\right)$
5.15	l_2	$f(x)=\left(1,\frac{x_1}{2},0,\frac{x_3}{4},0,\frac{x_5}{6},\ldots\right)$

Решение задачи 5.15. Пусть $x,y\in l_2$. Тогда

$$\rho(f(x),f(y))=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x_{2n-1}}{2n}-\frac{y_{2n-1}}{2n}\right|^2\right)^{1/2}\le$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_{2n-1}-y_{2n-1}|^2\right)^{1/2}\le\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^2\right)^{1/2}=\frac{1}{2}\rho(x,y).$$

Следовательно, $\alpha=\frac{1}{2}$ и отображение f является сжимающим в l_2. Найдем x^1,x^2,x^3,x^4: $x^1=f(x_0)=(1,0,0,\ldots)$; $x^2=f(x^1)=(1,\frac{1}{2},0,0,\ldots)$; $x^3=f(x^2)=(1,\frac{1}{2},0,0,\ldots)$ и $x^4=f(x^3)=(1,\frac{1}{2},0,0,\ldots)$.

Отсюда следует, что неподвижной точкой отображения f является точка $b=x^4$ $(x^4=f(x^4))$ и поэтому $\rho(x^4,b)=0$ ●

Заметим, что для оценки расстояния точки x_n от неподвижной точки b применимо неравенство $\rho(x_n, b) \le \frac{\alpha^4}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1)$.

Варианты задания

Вариант 1	1.1	2.15	3.5	4.10	5.8
Вариант 2	1.2	2.14	3.6	4.9	5.9
Вариант 3	1.3	2.13	3.7	4.8	5.10
Вариант 4	1.4	2.12	3.8	4.7	5.11
Вариант 5	1.5	2.11	3.9	4.6	5.12
Вариант 6	1.6	2.10	3.10	4.5	5.13
Вариант 7	1.7	2.9	3.11	4.4	5.14
Вариант 8	1.8	2.8	3.12	4.3	5.1
Вариант 9	1.9	2.7	3.13	4.2	5.2
Вариант 10	1.10	2.6	3.14	4.1	5.3
Вариант 11	1.11	2.5	3.1	4.11	5.4
Вариант 12	1.12	2.4	3.2	4.12	5.5
Вариант 13	1.13	2.3	3.3	4.13	5.6
Вариант 14	1.14	2.2	3.4	4.1	5.7
Вариант 15	1.13	2.1	3.5	4.2	5.6
Вариант 16	1.12	2.2	3.6	4.3	5.7
Вариант 17	1.11	2.3	3.7	4.4	5.8
Вариант 18	1.10	2.4	3.8	4.5	5.9
Вариант 19	1.9	2.5	3.9	4.6	5.10
Вариант 20	1.8	2.6	3.10	4.7	5.11
Вариант 21	1.7	2.7	3.11	4.8	5.12
Вариант 22	1.6	2.8	3.12	4.9	5.13
Вариант	1.5	2.9	3.13	4.10	5.14

23					
Вариант 24	1.4	2.10	3.14	4.11	5.1
Вариант 25	1.3	2.11	3.15	4.12	5.2
Вариант 26	1.2	2.12	3.1	4.13	5.3

3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что сходящаяся последовательность в метрическом пространстве имеет только один предел .

2. Показать, что на множестве натуральных чисел **N** функция

$$\rho(m,n) = \begin{cases} 1+\dfrac{1}{m+n}, & m \neq 0 \\ 0, & m = n \end{cases}$$

является метрикой и что метрическое пространство (**N**,ρ) является полным.

Указать в этом пространстве последовательность замкнутых вложенных шаров с пустым пересечением (сравнить с теоремой 2).

3. Пусть ρ — метрика на множестве *X*. Доказать, что функция $\rho(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ является метрикой на *X*.

Пусть *X* — непустое множество. Числовая функция ρ на $X \times X$ называется квазиметрикой на *X*, если она удовлетворяет всем условиям метрики, кроме, может быть, условия: $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

4. Пусть $(\rho_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность квазиметрик на *X* и пусть для $x \neq y$ найдется такое n, что $\rho_n(x,y) > 0$.

Доказать, что функция $\rho(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{-n}\rho_n(x,y)}{1+\rho_n(x,y)}$ является метрикой на *X*.

5. Пусть *X* — множество. Обозначим через *B*(*X*) множество всех ограниченных числовых функций на *X*. Доказать, что формула $\rho(f,g) = \sup\{|f(t)-g(t)| : t \in X\}$ определяет метрику на *B*(*X*).

6. Доказать, что метрическое пространство *B*(*X*) (из предыдущей задачи) полно.

7. Доказать, что замкнутое подпространство полного метрического пространства полно.

8. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство.

8.1 Показать, что для любого $z \in X$ числовая функция $f_z(t) = \rho(t,z) - \rho(t,x)$ $(t \in X)$ ограничена на X (другими словами $f_z \in B(X)$).

8.2 Обозначим через π отображение метрического пространства (X,ρ) в метрическое пространство $B(X)$ (из задачи 5), определяемое формулой $\pi(z) = f_z$ $(z \in X)$. Доказать, что для любых z_1, z_2 из X выполняется равенство $\rho(\pi(z_1), \pi(z_2)) = \rho(z_1, z_2)$

8.3 Вывести из задач 5-8 теорему о существовании пополнения для метрических пространств .

9. Пусть метрическое пространство X таково, что для любого $\varepsilon > 0$ в нем существует конечная ε-сеть. Доказать, что пополнение пространства X является компактным метрическим пространством .

10. Доказать, что сжимающее отображение метрического пространства в себя является непрерывным отображением.

11. Доказать, что отображение $f(x) = \frac{1}{2}x$ является сжатием подпространства $]0,1]$ числовой прямой $\mathbf{R}$. Показать, что это отображение не имеет неподвижной точки .

12. Показать, что для отображения $f(x) = \sin x$ числовой прямой в себя неравенство $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x,y)$ выполняется для любых x, y из $\mathbf{R}$, $x \neq y$. Доказать, что отображение f не является сжатием .

13. Пусть f и g — два отображения метрического пространства (X,ρ) в себя такие, что f коммутирует с g (т.е. $f \circ g = g \circ f$), а g имеет единственную неподвижную точку. Доказать, что отображение f имеет неподвижную точку .