ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 9

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. НОРМА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА И ФУНКЦИОНАЛА

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

Определение 1. Пусть E_1 и E_2 — векторные пространства над одним и тем же полем K ($K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$). Отображение $A{:}E_1 \to E_2$ с областью определения $D(A) \subset E_1$ и областью значений $R(A) \subset E_2$ называется **линейным оператором** из E_1 в E_2, если для любого $x, y \in E_1$ и $\lambda \in K$:

1) $A(x+y) = Ax + Ay$ (аддитивность);

2) $A(\lambda x) = \lambda Ax$ (однородность).

Обозначим через $\mathscr{L}^{\#}(E_1,E_2)$ множество всех линейных операторов из E_1 в E_2, область определения которых совпадает с E_1. Для $A,B \in \mathscr{L}^{\#}(E_1,E_2)$ и $\lambda \in K$ определим операторы $A+B, \lambda A \in \mathscr{L}^{\#}(E_1,E_2)$ формулами :

$$(A+B)x \overset{def}{=} Ax + Bx\,; (\lambda \cdot A)x \overset{def}{=} \lambda \cdot Ax\,.$$

Тогда $\mathscr{L}^{\#}(E_1,E_2)$ становится векторным пространством. В частном случае, когда $E_2 = K$ (поле K является векторным пространством !), элементы $\mathscr{L}^{\#}(E_1,K)$ называется линейными функционалами на E_1.

Пусть теперь на E_i определены нормы $\|\cdot\|_i (i = 1,2)$, т.е. E_1,E_2 — нормированные пространства ($E_1,E_2 \in Norm$).

Определение 2. Оператор $A \in \mathscr{L}^{\#}(E_1,E_2)$ называется ограниченным оператором из E_1 в E_2, если существует такая постоянная $c \ge 0$, что для любых $x \in E_1$ имеет место равенство

$$\|Ax\|_2 \le c\|x\|_1.$$

Определение 3. Нормой оператора $A \in \mathscr{L}^{\#}(E_1,E_2)$ называется число

$$\|A\| \overset{def}{=} \sup_{\|x\|_1 \le 1} \|Ax\|_2\,.$$

Можно показать, что $\|A\|$ есть точная нижняя грань множества всех констант c из определения 2 .

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\mathrm{A} \in \mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$, *где* $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2 \in Norm$.
Тогда следующие утверждения эквивалентны :

1) оператор A *является непрерывным оператором из* E_1 *в* E_2;

2) оператор A *является ограниченным оператором из* E_1 *в* E_2;

3) $\|\mathrm{A}\| < +\infty$.

Пусть $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$, где $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2 \in Norm$. Справедливы соотношения:

1) $\|\mathrm{A} + \mathrm{B}\| \le \|\mathrm{A}\| + \|\mathrm{B}\|$;

2) $\|\lambda \mathrm{A}\| = |\lambda| \cdot \|\mathrm{A}\|$;

3) $\|\mathrm{A}\| \ge 0, \quad \|\mathrm{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{A} = 0$.

Поэтому, если A, B — ограниченные операторы, то операторы $\mathrm{A} + \mathrm{B}, \quad \lambda \cdot \mathrm{A}$ — тоже ограничены. Следовательно, если обозначать через $L(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ — множество всех линейных ограниченных операторов из E_1 в E_2, то $L(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ является векторным подпространством $\mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$.

ТЕОРЕМА 2. *Если* $\mathrm{E}_1 \in Norm$, *а* E_2 — *банахово (*$\mathrm{E}_2 \in Ban$*), то* $L(\mathrm{E}_2, \mathrm{E}_2) \in Ban$.

Все сказанное относится и к функционалам. В этом случае $\mathrm{E}_2 = \mathrm{K}$, норма на K $\|x\|_2 = |x|$, поэтому функционал $f \in \mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}, \mathrm{K})$ называется ограниченным на $\mathrm{E} \in Norm$, если существует такая постоянная $c \ge 0$, что $|f(x)| \le c\|x\|$ для любых $x \in \mathrm{E}$.

Тогда норма функционала *f* есть число

$$\|f\| \overset{def}{=} \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)| = \inf \left\{ c : \forall x \in \mathrm{E}, |f(x)| < c\|x\| \right\}.$$

Так как $\mathrm{K} \in Ban$, то по теореме 2 $L(\mathrm{E}, \mathrm{K}) \in Ban$.

Определение 4. Банахово пространство $L(\mathrm{E}, \mathrm{K})$, состоящее из линейных ограниченных функционалов на E, будем обозначать через E^* и называть сопряженным пространством к E .

Литература: [1] стр. 179-188, 149-156; [2] стр. 218-253; [5] стр. 98-101.

2. З А Д А Ч И

1. Пусть $E_1, E_2 \in Norm$. Найти область определения $D(A) \overset{def}{=} \{x \in E_1 : Ax \in E_2\}$ оператора A и установить, совпадает ли она с E_1. Если $D(A) \in Norm$, то выяснить, является ли оператор A линейным ограниченным оператором из $D(A)$ в E_2?

	E_1	E_2	A
1.1	l_∞	c_0	$Ax = x$
1.2	c_0	l_∞	$Ax = x$
1.3	$L_4[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^1 t^2 x^2(s)ds$
1.4	$L_2[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t) = \lvert x(t)\rvert$
1.5	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t) = x^2(t)$
1.6	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = (x'(t))^2$
1.7	$C[0,1]$	$C^{(1)}[0,1]$	$(Ax)(t) = x'(t)$
1.8	$C^{(1)}[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = \lvert x'(t)\rvert$
1.9	c_0	**R**	$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$
1.10	l_2	l_1	$Ax = (x_1 + 1, x_2, x_3, \dots)$
1.11	l_1	l_2	$Ax = (1, x_2, x_3, \dots)$
1.12	$L_2[-1,1]$	$L_2[-1,1]$	$(Ax)(t) = x(\sqrt[5]{t})$
1.13	$C[0,1]$	**R**	$(Ax)(t) = \lvert x'(0) + x(0)\rvert$
1.14	$L_1[-1,1]$	$L_1[-1,1]$	$(Ax)(t) = \int_{-1}^{1} tx^2(s)ds$
1.15	$L_1[0,1]$	$L_4[0,1]$	$(Ax)(t) = x^2(t)$

Решение задачи 1.15. Найдем $D(A) = \{x \in L_{1[0,1]} : Ax \in L_{4[0,1]}\}$ — область определения оператора A. Поскольку $\|Ax\|_{L_4[0,1]} = \left(\int_{[0,1]} \left|x^2(t)\right|^4 dt\right) = \left(\int_{[0,1]} |x(t)|^8 dt\right)^{1/4}$, то $D(A)=L_8[0,1] \neq L_1[0,1]$. Итак, область определения оператора A совпадает с нормированным пространством $L_8[0,1]$, отличным от исходного. Проверим линейность A на $D(A)$: возьмем $x(t) \equiv y(t) \equiv 1 \in L_8[0,1]$, тогда

$$A(x+y)=2^2 \neq Ax+Ay=1+1=2.$$

Поэтому оператор A не является линейным на $D(A)$, а следовательно и ограниченным. ●

2-5. Задает ли данная формула линейный ограниченный оператор $A: E_1 \to E_2$? В случае ограниченности оператора, найти его норму.

2. Оператор умножения

	E_1	E_2	A
2.1	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t)=(t^2-t)x(t)$
2.2	$C[-1,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t)=(t^4-t^2)x(t)$
2.3	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t)=t^2x(t)$
2.4	$L_1[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t)=(t^2-t)x(t)$
2.5	$L_2[-1,1]$	$L_2[-1,1]$	$(Ax)(t)=t^2x(t)$
2.6	$L_2[-1,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t)=tx(t)$
2.7	$L_3[0,1]$	$L_3[0,1]$	$(Ax)(t)=(1-t^2)x(t)$
2.8	$C[-1,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t)=(t^2-\lvert t\rvert)x(t)$
2.9	$L_3[-1,1]$	$L_2[-1,1]$	$(Ax)(t)=\lvert t\rvert x(t)$
2.10	$C^{(1)}[-1,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t)=\sin\pi t x(t)$
2.11	$L_4[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t)=\sqrt{t}x(t)$
2.12	$C[-1,1]$	$C[-1,1]$	$(Ax)(t)=\begin{cases}(t^2+1)x(t), & t\in[-1,0\\(t^2+4t+1)x(t), & t\in[0,1]\end{cases}$
2.13	$C[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t)=t^2x(t)$
2.14	$L_2[-1,1]$	$L_2[-1,1]$	$(Ax)(t)=\begin{cases}tx(t), & t\in[0,1]\\0, & t\in[-1,0[\end{cases}$

Решение задачи 2.14. Область определения оператора A $D(A)=L_2[-1,1]$ (произведение $x(t)$ на непрерывную функцию не "выводит" это произведение из $L_2[-1,1]$). Линейность оператора A очевидна. Так как для $\forall x \in L_2[-1,1]$

$$\|\mathrm{A}x\|_{L_2[-1,1]}=\left(\int_0^1 |tx(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\le\left(\int_0^1 |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\le 1\|x\|_{L_2\{-1,1]},$$

то в качестве константы c в определении 2 можно взять c=1. Итак, А — ограниченный оператор и $\|\mathrm{A}\|\le 1$.

Пусть $x_n(t)=\sqrt{n}\chi_{[1-\frac{1}{n},1]}(t)$.Тогда $\|x\|_{L_2[-1,1]}=1$ и

$$\|\mathrm{A}\|=\sup_{\|x\|\le 1}\|\mathrm{A}x\|\ge\sup_n\|\mathrm{A}x_n\|=\sup_n\left(\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}\left|\sqrt{n}t\right|^2 dt\right)^{1/2}=$$

$$=\sup_n\sqrt{n}\left(\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}t^2dt\right)^{1/2}=\sup_n\sqrt{\frac{n}{3}\left\{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^3\right\}}^{1/2}=\sup_n\left\{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^2}\right\}^{1/2}=1.$$

Следовательно $\|\mathrm{A}\|=1$ ●

3. Оператор замены переменной

	E$_1$	E$_2$	A
3.1	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=t^2x(\sqrt{t})$
3.2	$C[-1,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=(t^2-t)x(t^2)$
3.3	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=tx(\sqrt{t})$
3.4	$L_2[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=x(\sqrt[4]{t})$
3.5	$L_3[-1,1]$	$L_3[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=x(\sqrt[3]{t})$
3.6	$L_3[-1,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=t^2x(t^2)$
3.7	$L_2[-1,1]$	$L_1[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=x(t^2)$
3.8	$C[0,2]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=(t-1)tx(t^2+1)$
3.9	$L_4[0,2]$	$L_4[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=tx(t+1)$
3.10	$L_2[-1,1]$	$L_1[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=t^2x(t^2-1)$
3.11	$C^{(1)}[0,2]$	$C^{(1)}[0,2]$	$(\mathrm{A}x)(t)=tx(t^2+1)$
3.12	$L_{3/2}[0,1]$	$L_{3/2}[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=(t^2-t)x(\sqrt{t})$

3.13	$L_4[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = tx(\sqrt{t})$
3.14	$L_2[-1,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = t^2 x(t^2-1)$

Решение задачи 3.14. Пусть $x \in L_2[-1,1]$. Тогда

$$\|\mathrm{A}x\|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 t^4 \left|x(t^2-1)\right|^2 dt\right)^{1/2} = \begin{bmatrix} u = t^2 - 1 \\ du = 2tdt \\ t = \sqrt{u+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\int_{-1}^{0} (u+1)^2 |x(u)|^2 \frac{du}{2\sqrt{u+1}}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(u+1)^{3/2}|x(u)|^2 du\right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\int_{-1}^{1}|x(u)|^2 du\right)^{1/2} \le \frac{\sqrt{2}}{2}\|x\|_{L_2[-1,1]}.$$

Из последнего соотношения следует, что $D(\mathrm{A}) =$ $L_2[-1,1]$. Очевидно, что оператор A линеен и из доказанного неравенства вытекает, что A ограничен и $\|\mathrm{A}\| \le \frac{\sqrt{2}}{2}$. Рассмотрим последовательность функций $x_n(t) = \sqrt{n}\chi_{[-\frac{1}{n},0]}(t) \in L_2[-1,1]$, $\|x_n\|_{L_2[-1,1]} = 1$. Тогда

$$\|\mathrm{A}\| = \sup_{\|x\|_{L_2[-1,1]}\le 1} \|\mathrm{A}x\|_{L_2[0,1]} \ge \sup_n \|\mathrm{A}x_n\|_{L_2[0,1]} = \sup_n \frac{1}{\sqrt{2}}\left(n\int_{-\frac{1}{n}}^{0}(u+1)^{3/2} du\right)^{1/2} =$$

$$= \sup_n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{5/2}\right]^{1/2} = \sup_n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\left[1-\left\{1-\frac{5}{2}\frac{1}{n}+\frac{1}{2!}\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}+1\right)\frac{1}{n^2}-\ldots\right\}\right]^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Итак $\|\mathrm{A}\| \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$. Учитывая предыдущее, имеем $\|\mathrm{A}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ●

4. Операторы в пространствах последовательностей

	E_1	E_2	A
4.1	l_2	l_2	$\mathrm{A}x = (0, x_1, x_2, \ldots)$

4.2	l_3	l_3	$Ax=(x_2,x_3,x_4,...)$
4.3	c_0	c_0	$Ax=(x_1,x_2,...,x_n,0,0,...)$
4.4	l_4	l_4	$Ax=\left(\frac{x_1}{1},\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\dots\right)$
4.5	l_2	l_2	$Ax=\left(0,\frac{x_1}{2^0},\frac{x_2}{2^1},\frac{x_3}{2^2},...\right)$
4.6	l_1	l_1	$Ax=\left(0,0,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\frac{x_4}{4},...\right)$
4.7	l_2	l_2	$Ax=\left((1+1)x_1,...,\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x_n,...\right)$
4.8	c	c	$Ax=\left(\frac{1}{1+1}x_1,...,\frac{n}{n+1}x_n,...\right)$
4.9	c_0	c	$Ax=\left(1\cdot\sin\frac{1}{1}x_1,\dots,n\sin\frac{1}{n}x_n,\dots\right)$
4.10	l_∞	l_∞	$Ax=(x_1,0,x_2,0,x_3,0,...)$
4.11	l_2	c	$Ax=\left(\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\frac{x_4}{4},\dots\right)$
4.12	l_2	l_∞	$Ax=\left(\frac{x_1}{1},\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\dots\right)$
4.13	l_1	c_0	$Ax=(0,x_1,x_2,...)$
4.14	l_2	l_2	$Ax=(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,\lambda_3x_3,...)$ где $\lvert\lambda_n\rvert\le M, n\in \boldsymbol{N}$

Решение задачи 4.14. Так как для $\forall x\in l_2$ $\|Ax\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n x_n|^2\right)^{1/2}\le\sup_n|\lambda_n|\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{1/2}=\sup_n|\lambda_n|\cdot\|x\|$, то $D(A)=l_2$ и линейность оператора A проверяется без труда. Отсюда же имеем $\|A\|\le\sup_n|\lambda_n|=I$. В силу определения точной верхней грани, для $\forall\varepsilon>0$ существует такое *n*, что $|\lambda_n|>I-\varepsilon$. Тогда для $l_n=(0,0,...,1,0,...)\in l_2$, $\|l_n\|=1$ и $\|A\|=\sup_{\|x\|\le1}\|Ax\|\ge\|Al_n\|=|\lambda_n|>I-\varepsilon$.

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon\to0$ получим $\|A\|\ge I=\sup_n|\lambda_n|$, т.е. $\|A\|=\sup_n|\lambda_n|$ ●

5. Интегральный оператор

	E_1	E_2	A
5.1	$L_2[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=\int_0^1 t^2 s x(s)ds$
5.2	$L_1[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=\int_0^1 (t+1)sx(\sqrt{s})ds$
5.3	$C[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=\int_0^1 (t+s)x(\sqrt{s})ds$
5.4	$L_3[0,1]$	$C[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=\int_0^1 ts^2 x(s^{1/3})ds$
5.5	$L_1[0,1]$	l_2	$\mathrm{A}x=\left(\frac{1}{2}\int_0^1 tx(t),\ldots,\frac{1}{2^k}\int_0^1 t^k x(t)dt,\ldots\right)$
5.6	$L_1[0,1]$	l_1	$\mathrm{A}x=\left(\frac{1}{2}\int_0^1 tx(t),\ldots,\frac{1}{2^k}\int_0^1 t^k x(t)dt,\ldots\right)$
5.7	$L_3[0,1]$	$L_2[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=\int_0^1 t^2 sx(s)ds$
5.8	$C[-1,1]$	$L_1[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=\int_{-1}^1 t\,\mathrm{sign}\,s\,x(s)ds$
5.9	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=\int_0^1 \lvert t\cdot s\rvert x(\sqrt[4]{s})ds$
5.10	$L_2[0,2]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=\int_0^2 (t+1)s^2 x(s^2)ds$
5.11	$C[0,2]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=\int_0^2 \mathrm{sign}(s-1)x(s)ds+tx(0)$
5.12	$L_2[-1,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=\int_{-1}^1 (t+1)s^2 x(s^2)ds$
5.13	$C[0,1]$	$C[0,2]$	$(\mathrm{A}x)(t)=\int_0^1 (t^2+s^2)x(s)ds$
5.14	$L_1[0,1]$	l_4	$\mathrm{A}x=\left(\frac{1}{3}\int_0^1 tx(t)dt,\ldots,\frac{1}{3^k}\int_0^1 t^k x(t)dt,\ldots\right)$

Решение задачи 5.14. Пусть $x \in L_1[0,1]$. Тогда

$$\|\mathrm{A}x\|_{l_4} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{3^k}\int_0^1 t^k x(t)dt\right|^4\right)^{1/4} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^k}\int_0^1 |x(t)|dt\right)^4\right)^{1/4} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{4k}}\right)^{1/4}\cdot\|x\|_{L_{1[0,1]}}.$$

Поэтому $D(\mathrm{A}) = L_1[0,1]$ и линейность оператора A следует из линейности интеграла. Из установленного неравенства следует тамкже, что

$$\|\mathrm{A}\| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{4k}}\right)^{1/4} = 80^{-\frac{1}{4}}.$$

С другой стороны, если $x_n(t) = n\chi_{\left[1-\frac{1}{n},1\right]}(t)$, то $\|x_n\|_{L_{1[0,1]}} = 1$, и

$$\|\mathrm{A}\| = \sup_{\|x\|_{L_{1[0,1]}}\le 1}\|\mathrm{A}x\|_{l_4} \ge \sup_n\|\mathrm{A}x_n\|_{l_4} = = \sup_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{n}{3^k}\int_{1-\frac{1}{n}}^{1} t^k dt\right|^4\right)^{1/4} =$$

$$= \sup_n\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^4}{3^{4k}(k+1)^4}\left\{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k+1}\right\}^4\right]^{1/4} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{4k}}\right)^{1/4} = 80^{-\frac{1}{4}}.$$

Следовательно, $\|\mathrm{A}\| = 80^{-\frac{1}{4}}$ ●

6-7. Пусть $\mathrm{E} \in Ban$, $\mathrm{K} = \mathbf{K}$ или $\mathbf{C}$. Задает ли данная формула линейный ограниченный функционал $f : \mathrm{E} \to \mathrm{K}$? В случае положительного ответа, найти его норму .

	E	K	f
6.1	c	**C**	$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$
6.2	l_∞	**R**	$f(x_1) = x_1 + x_3$

6.3	l_2	**R**	$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k}$
6.4	c_0	**C**	$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(i)^k\frac{x_k}{k^2}$
6.5	l_1	**R**	$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k^2+1}$
6.6	c	**R**	$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}x_k$
6.7	l_3	**C**	$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_{2k}}{k}$
6.8	c_0	**R**	$f(x)=4x_{10}-2x_2+5x_{100}$
6.9	l_∞	**R**	$f(x)=x_1-x_2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{2^k}$
6.10	l_2	**R**	$f(x)=x_1-x_0$
6.11	l_1	**C**	$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}ix_{4k+1}$
6.12	l_4	**C**	$f(x)=x_1+\frac{1}{2}x_2$
6.13	c	**R**	$f(x)=x_1+\lim\limits_{n\to\infty}x_n$
6.14	l_2	**C**	$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{2^k}$

Решение задачи 6.14. Линейность функционала проверяется без труда. Пусть $x\in l_2$. Тогда применяя неравенство Коши-Буняковского, будем иметь : $\forall x\in l_2$

$$|f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{2^k}\right|\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\|x\| \qquad (1)$$

Отсюда $D(f)=l_2$, функционал f ограничен на l_2 и $\|f\|\le\frac{1}{\sqrt{3}}$. Покажем , что константа $c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ является наименьшей из всех возможных в неравенстве (1). Для этого достаточно указать такой ненулевой элемент $x^*\in l_2$, для которого (1) становится цепочкой равенств. Равенство в (1) может нарушается после применения неравенства Коши-Буняковского. Последнее не нарушает равенства, если

$\forall k \in \boldsymbol{N}, x_k = \beta \cdot \frac{1}{2^k}$. Возьмем $\beta = \sqrt{3}$, тогда для $x^* = \sqrt{3} \cdot (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$, $\|x^*\| = 1$ и

$|f(x^*)| = \beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \|x^*\|$. Итак, $\|f\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. ●

	E	K	f
7.1	$L_2[0,1]$	**R**	$f(x) = \int_0^1 t^{-1/3} x(t)dt$
7.2	$L_1[0,2]$	**C**	$f(x) = i\int_0^1 t^2 x(\sqrt{t})dt$
7.3	$C[0,1]$	**R**	$f(x) = x(0) - 2x(1)$
7.4	$C[0,1]$	**R**	$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 x(t^n)dt$
7.5	$L_1[2,4]$	**C**	$f(x) = \int_2^4 tx(t^2)dt$
7.6	$L_2[-1,1]$	**R**	$f(x) = \int_{-1}^1 t^2 x(\sqrt{t})dt$
7.7	$L_1[0,1]$	**R**	$f(x) = \int_{-1}^1 t^4 x(t^2)dt$
7.8	$L_6[0,2]$	**R**	$f(x) = \int_0^2 t^2 x(t^3)dt$
7.9	$C^{(1)}[0,1]$	**C**	$f(x) = x(0) + ix'(0)$
7.10	$C^{(1)}[0,2]$	**R**	$f(x) = \int_0^1 x(t)dt + \int_1^2 x'(t)dt$
7.11	$C^{(1)}[-1,1]$	**C**	$f(x) = x'(0)$
7.12	$C^{(2)}[0,1]$	**C**	$f(x) = ix(0) + x''(1)$
7.13	$L_2[0,1]$	**R**	$f(x) = \int_0^1 t^{-1/4} x(t)dt$
7.14	$L_2[0,1]$	**C**	$f(x) = i\int_0^1 t^{-\frac{3}{2}} x(\sqrt{t})dt$

Решение задачи 7.14. Линейность функционала вытекает из линейности интеграла. Пусть $x \in L_2[0,1]$. Тогда произведя замену переменных в интеграле , а затем применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 t^{-2/3} x(\sqrt{t})dt\right| = \begin{bmatrix} u = \sqrt{t} \\ t = u^2 \\ dt = 2udu \end{bmatrix} =$$

$$= \left|\int_0^1 2u^{-1/3} x(u)du\right| \le 2\left(\int_0^1 u^{-2/3} du\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |x(u)|^2 du\right)^{1/2} = 2\sqrt{3}\|x\| \ . \qquad (2)$$

Следовательно, $D(f) = l_2$, функционал ограничен и $\|f\| \le 2\sqrt{3}$. Возьмем $x^*(u) = \frac{1}{\sqrt{3}} u^{-1/3}$ (почему ?), тогда из (2) имеем

$$\left|f(x^*)\right| = 2\left|\int_0^1 u^{-1/3} \frac{1}{\sqrt{3}} u^{-1/3} du\right| = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 u^{-2/3} du = 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left\|x^*\right\|.$$

Отсюда следует, что константа $c = 2\sqrt{3}$ в (2) является наименьшей из всех возможных. Поэтому $\|f\| = 2\sqrt{3}$ ●

Варианты задания

Вариант 1	1.1	2.1	3.7	4.5	5.10	6.12	7.2
Вариант 2	1.2	2.13	3.8	4.6	5.9	6.13	7.1
Вариант 3	1.3	2.12	3.9	4.7	5.8	6.11	7.3
Вариант 4	1.4	2.11	3.10	4.8	5.7	6.10	7.4
Вариант 5	1.5	2.10	3.11	4.9	5.6	6.9	7.5
Вариант 6	1.6	2.9	3.12	4.10	5.5	6.8	7.6
Вариант 7	1.7	2.8	3.13	4.11	5.4	6.7	7.7
Вариант 8	1.8	2.7	3.6	4.12	5.3	6.6	7.8
Вариант 9	1.9	2.6	3.5	4.13	5.2	6.5	7.9
Вариант 10	1.10	2.5	3.4	4.4	5.1	6.4	7.10
Вариант 11	1.11	2.4	3.3	4.3	5.13	6.3	7.11
Вариант 12	1.12	2.3	3.1	4.2	5.12	6.2	7.12
Вариант 13	1.13	2.2	3.2	4.1	5.11	6.1	7.13
Вариант 14	1.14	2.3	3.13	4.2	5.10	6.3	7.1
Вариант 15	1.13	2.4	3.12	4.3	5.9	6.4	7.2
Вариант 16	1.12	2.5	3.11	4.4	5.8	6.5	7.3

Вариант 17	1.11	2.6	3.10	4.5	5.7	6.6	7.4
Вариант 18	1.10	2.7	3.9	4.6	5.6	6.7	7.5
Вариант 19	1.9	2.8	3.8	4.7	5.5	6.8	7.6
Вариант 20	1.8	2.9	3.7	4.8	5.4	6.10	7.7
Вариант 21	1.7	2.10	3.6	4.9	5.3	6.9	7.8
Вариант 22	1.8	2.11	3.5	4.10	5.2	6.13	7.9
Вариант 23	1.9	2.12	3.4	4.11	5.1	6.12	7.10
Вариант 24	1.11	2.13	3.3	4.12	5.11	6.1	7.11
Вариант 25	1.12	2.1	3.2	4.13	5.12	6.2	7.12
Вариант 26	1.14	2.2	3.1	4.1	5.13	6.11	7.13

3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

24. Доказать, что функционал $f : x(t) \to x'(t_0) \in \mathbf{R}$ $x(t) \in C^{(1)}[0,1]$ непрерывен .

25. Доказать , что функционал $f : x(t) \to x'(t/2) \in \mathbf{R}$ линеен и неограничен на линейном подпространстве $C^{(1)}[0,1]$ нормированного пространства $C[0,1]$.

26. В l_2 рассмотрим оператор $\mathrm{A}(x_1 \ldots x_n \ldots) = (\alpha_1 x_1 \ldots \alpha_n x_n \ldots)$. При каких $\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots$ он ограничен на l_2? Найти его норму.

27. Пусть A -оператор умножения на ограниченную измеримую функцию $a(x)$, действующей в пространстве $L_p(\mathrm{X}, \mu)$. Доказать, что A ограничен и найти его норму.

28. Найти норму тождественного оператора, действующего из $L_p[a,b]$ в $L_q[a,b]$ при $p \geq q$.