Лабораторная работа № 2

Гильбертовы пространства

5.1.1 Пусть L − заданное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$. Проверить аксиомы скалярного произведения для функции $\omega: L\times L\to\mathbb{C}$ (таблица 5.1.1).

Таблица 5.1.1

Вариант	L	$\omega(x,y)$
1	*2*	*3*
1	l_2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x(n)\overline{y(n)}$
2	$C[a;b]$	$\int_a^b e^{-t}x(t)\overline{y(t)}dt$
3	l_∞	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x(n)\overline{y(n)}$
4	c	$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}x(n)\overline{y(n)}$
5	c_0	$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-3/2}x(n)\overline{y(n)}$
6	l_2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x(n)\overline{y(n)}$
7	$C[0;1]$	$\int_0^1 t^{-1/2}x(t)\overline{y(t)}dt$
8	$C^{(1)}[a;b]$	$\int_a^b (x(t)\overline{y(t)}+x'(t)\overline{y'(t)})dt$
9	c	$\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}x(n)\overline{y(n)}$
10	$C[0;1]$	$\int_0^1 t^{-1/3}x(t)\overline{y(t)}dt$

5.1.2 В гильбертовом пространстве H найти проекцию вектора x_0 на заданное подпространство L (таблица 5.1.2).

Таблица 5.1.2

Вариант	H	x_0	L
1	*2*	*3*	*4*
1	l_2	$x_0(k)=\dfrac{1}{2^k}$	$\{\alpha x+\beta y\,\vert\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}, x=(0,1,0,0,0,\ldots),$ $y=(1,1,0,0,0,\ldots)\}$
2	l_2	$x_0(k)=\dfrac{1}{3^k}$	$\{\alpha x+\beta y\,\vert\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}, x=(0,1,1,0,0,\ldots),$ $y=(1,1,1,0,0,\ldots)\}$
3	l_2	$x_0(k)=\dfrac{1}{k}$	$\{\alpha x_1+\beta x_2\,\vert\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}, x_1=(1,1,0,0,0,\ldots),$ $x_2=(1,0,1,0,\ldots)\}$
4	l_2	$x_0(k)=\dfrac{1}{3^k}$	$\{\alpha x_1+\beta x_2\,\vert\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}, x_1=(1,0,1,0,0,\ldots),$ $x_2=(1,1,1,0,0,\ldots)\}$
5	l_2	$x_0(k)=\dfrac{1}{2^k}$	$\{\alpha x_1+\beta x_2\,\vert\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}, x_1=(1,1/2,0,0,\ldots),$ $x_2=(1,0,1,0,0,\ldots)\}$
6	l_2	$x_0(k)=\dfrac{1}{k^2}$	$\{\alpha x+\beta y\,\vert\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}, x=(1,0,1,0,\ldots),$ $y=(0,1/3,1,0,\ldots)\}$
7	$L_2[0;1]$	$x_0(k)=\cos t$	$\{\alpha t^2+\beta t\,\vert\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$
8	$L_2[-1;1]$	$x_0(k)=\sin t$	$\left\{x\,\middle\vert\, x(t)=x(-t), \int_0^1 x(t)dt=0\right\}$
9	$L_2[-1;1]$	$x_0(k)=1+t^2$	$\left\{x\,\middle\vert\, \int_0^1 x(t)dt=\int_{-1}^1 x(t)t^2dt=0\right\}$
10	$L_2[-2;2]$	$x_0(k)=e^t$	$\left\{x\,\middle\vert\, x(t)=-x(-t), \int_0^1 x(t)dt=0\right\}$

5.1.3. Доказать, что в указанном нормированном пространстве X со стандартной нормой нельзя ввести скалярное произведение, порождающее эту норму (таблица 5.1.3).

Таблица 5.1.3

Вариант	X	Вариант	X
1	$C^{(1)}[0;1]$	6	l_3
2	l_1	7	$L_3[0;1]$

3	$C[0;1]$	8	c_0
4	l_∞	9	c
5	$L_1[0;1]$	10	$L_5[0;1]$

5.1.4. Вычислить угол между данными векторами x, y: а) в пространстве H_1, б) в пространстве H_2 (пространства считать вещественными) (таблица 5.1.4).

Таблица 5.1.4

Вариант	x	y	H_1	H_2
1	$\sin 3t$	$\cos 5t$	$L_2[-\pi;\ \pi]$	$L_2[0;3]$
2	t	t^2	$L_2[0;1]$	$L_2[0;3]$
3	e^{-t}	e^{-2t}	$L_2[-1;1]$	$L_2[0;3]$
4	$\sin \pi t$	$\sin t$	$L_2[0;1]$	$L_2[0;3]$
5	t	$\cos t$	$L_2[0;1]$	$L_2[0;3]$
6	$\sin \pi t$	$\cos \pi t$	$L_2[-1;\ 1]$	$L_2[0;3]$
7	t	t^2	$L_2[0;1]$	$L_2[-1;\ 1]$
8	1	t^2	$L_2[-1;\ 1]$	$L_2[0;1]$
9	$\sin 4t$	$\cos 3t$	$L_2[0;\ \pi]$	$L_2[-\pi;\ \pi]$
10	$\sin 2\pi t$	$\cos t$	$L_2[0;\ 1]$	$L_2[0;\ \pi]$

5.1.5. Становится ли система векторов (φ_n) после нормировки ортонормированным базисом пространства H (мы полагаем $e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...)\left(n \in \mathbb{N}\right)$, $f_n = (...0, 0, 1, 0, 0, ...)\left(n \in \mathbb{Z}\right)$, где единица стоит на n-ном месте) (таблица 5.1.5).

Таблица 5.1.5

Вариант	φ_n	H	$< x, y >$

1	2	3	4
1	$f_n, n \in \mathbb{Z}$	$l_2(\mathbb{Z}) := \left\{ (x(n))_{n\in\mathbb{Z}} \,\middle|\, \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lvert x(n)\rvert^2 < \infty \right\}$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\overline{y(n)}$
2	$e_n, n \in \mathbb{N}$	c_0	$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-3/2} x(n)\overline{y(n)}$
3	$e_n, n \in \mathbb{N}$	c	$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} x(n)\overline{y(n)}$
4	$e_n, n \in \mathbb{N}$	l_∞	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x(n)\overline{y(n)}$
5	$e_n, n \in \mathbb{N}$	l_2	$\sum_{n=1}^{\infty} x(n)\overline{y(n)}$
6	$f_n, n \in \mathbb{Z}$	$l_2(\mathbb{Z}) := \left\{ (x(n))_{n\in\mathbb{Z}} \,\middle|\, \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lvert x(n)\rvert^2 < \infty \right\}$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n} x(n)\overline{y(n)}$
7	$\sin \pi nt, n \in \mathbb{N}$	$L_2[0;1]$	$\int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$
8	$\cos \pi nt, n \in \mathbb{N}$	$L_2[0;1]$	$\int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$
9	$\sin nt, n \in \mathbb{N}$	$L_2[0;\pi]$	$\int_0^\pi x(t)\overline{y(t)}dt$
10	$\cos nt, n \in \mathbb{N}$	$L_2[0;\pi]$	$\int_0^\pi x(t)\overline{y(t)}dt$

5.1.6. Для данного подмножества M гильбертова пространства H найти ортогональное дополнение $M^\perp$ (таблица 5.1.6).

Таблица 5.1.6

Вариант	H	M
1	2	3
1	$L_2[-1;1]$	$\{ x \mid x(t) = 0 \text{ при } t < 0 \}$
2	$L_2[0;+\infty)$	$\{ x \mid x(t) = 0 \text{ при } t > 1 \}$

3	$L_2[-1;1]$	$\left\{ x \,\middle\vert\, \int_{-1}^{1} x(t)dt = 0 \right\}$
4	$L_2[-\pi;\pi]$	$\left\{ x \,\middle\vert\, \int_{-\pi}^{0} x(t)\sin t dt = 0 \right\}$
5	$L_2[0;1]$	$\left\{ x \,\middle\vert\, \int_{0}^{1} x(t) \cdot t dt = 0 \right\}$
6	$L_2[-1;1]$	$\left\{ x \,\middle\vert\, \int_{0}^{1} x(t)\sqrt{t} dt = 0 \right\}$
7	$L_2[1;+\infty)$	$\left\{ x \,\middle\vert\, x(t) = 0 \text{ при } t > 2 \right\}$
8	$L_2[-1;1]$	$\left\{ x \,\middle\vert\, x(t) = 0 \text{ при } t > 0 \right\}$
9	$L_2[0;1]$	$\left\{ x \,\middle\vert\, \int_{0}^{1} x(t)\sqrt{t} dt = 0 \right\}$
10	$L_2[-\pi;\pi]$	$\left\{ x \,\middle\vert\, \int_{-\pi}^{0} x(t) t dt = 0 \right\}$