Лабораторная работа № 3

Линейные нормированные пространства и операторы в них

3.1. Проверить, является ли функция *p* нормой в пространстве *X* (таблица 3.1.1).

Таблица 3.1.1

Вариант	*X*	*p(x)*
1	*2*	*3*
1	l_∞	$\sup\ \lvert x(n)\rvert \,\vert\, n\in\mathbb{N}$
2	$C^{(n)}[0;1]$	$\sum\limits_{k=0}^{n}\max\limits_{0\le t\le 1}\lvert x^{(k)}(t)\rvert$
3	$B(\mathbb{R})$	$\sup\ \lvert x(t)\rvert \,\vert\, t\in\mathbb{R}$
4	$C^{(1)}[0;1]$	$\int\limits_0^1\lvert x(t)\rvert dt$
5	l_1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-1}\lvert x(n)\rvert$
6	$C^{(1)}[a;b]$	$\lvert x(a)\rvert+\max\ \lvert x'(t)\rvert : t\in[a;b]$
7	$C[0;2]$	$\int\limits_0^2\lvert x(t)\rvert dt$
8	l_1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-3}\lvert x(n)\rvert$
9	$C[0;3]$	$\lvert x(1)\rvert$
10	l_2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-3}\lvert x(n)\rvert$

3.2. Проверить, является ли последовательность векторов x_k в пространстве X линейно независимой (таблица 3.1.3).

Таблица 3.1.3

Вариант	X	x_k
1	l_3	$x_k = \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{(k+1)^2}, \frac{1}{(k+1)^3}, ... \right), k = 1,..., p$
2	l_∞	$x_k = \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{k}, 1, 1, ... \right), k = 1,..., p.$
3	$C[a;b]$	$x_k(t) = t^k, k = 0,1,..., p$
4	$C[a;b]$	$x_k(t) = e^{itk}, k = 0,1,..., p$
5	$L_2[a;b]$	$x_k(t) = (1 + D(t))t^k, k = 0,1,..., p, D -$ функция Дирихле
6	$C[0;1]$	$x_k(t) = e^{-kt}, k = 1,..., p.$
7	$C[0;1]$	$x_1(t) = 1 + t + t^2,\ x_2(t) = 2 + t + 2t^2,\ x_3(t) = 1 + t,$
8	$L_2[0;1]$	$x_1(t) = 1 + t^2,\ x_2(t) = 1 + t - 2t^2,\ x_3(t) = 1 - t,$
9	$L_2[0;1]$	$x_k(t) = \sin kt, k = 1, 2, 3.$
10	$C[0;2]$	$x_k(t) = \sin \pi(t + 0{,}1k), k = 0,1,..., p;\ p \geq 2.$

3.3. Являются ли нормы p и q эквивалентными в пространстве E (таблица 3.1.5)?

Таблица 3.1.5

Вариант	E	p	q
1	l_2	$\sup\limits_{n \in N} \lvert x(n) \rvert$	$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lvert x(n) \rvert^2 \right)^{1/2}$
2	$C[0;1]$	$\max\limits_{0 \leq t \leq 1} \lvert x(t) \rvert$	$\left(\int\limits_0^1 \lvert x(t) \rvert^2 dt \right)^{1/2}$
3	$C^{(1)}[0;1]$	$\max\limits_{0 \leq t \leq 1} \lvert x(t) \rvert + \max\limits_{0 \leq t \leq 1} \lvert x'(t) \rvert$	$\int\limits_0^1 \lvert x(t) \rvert dt$
4	c	$\sup\limits_{n \in \boldsymbol{N}} \lvert x(n) \rvert$	$\sup\limits_{n \in \boldsymbol{N}} \frac{n \lvert x(n) \rvert}{n+1}$
5	$\mathbb{R}^n$	$\sup\limits_{1 \leq k \leq n} \lvert x(k) \rvert$	$\sum\limits_{k=1}^{n} \lvert x(k) \rvert$

6	$C^{(1)}[0;1]$	$\max\limits_{0\le t\le 1}\lvert x(t)\rvert$	$\lvert x(0)\rvert+\max\limits_{0\le t\le 1}\lvert x'(t)\rvert$
7	$C[0;1]$	$\lvert x(0)\rvert+\max\limits_{0\le t\le 1}\lvert x'(t)\rvert$	$\max\limits_{0\le t\le 1}\lvert x(t)\rvert$
8	$C^{(1)}[0;1]$	$\max\limits_{0\le t\le 1}\lvert x(t)\rvert+\max\limits_{0\le t\le 1}\lvert x'(t)\rvert$	$\lvert x(0)\rvert+\max\limits_{0\le t\le 1}\lvert x'(t)\rvert$
9	l_3	$\sup\limits_{n\in N}\lvert x(n)\rvert$	$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert x(n)\rvert^3\right)^{1/3}$
10	$L_1[0;1]$	$\int\limits_{0,1}\lvert x(t)\rvert dt$	$\int\limits_{0,1}e^t\lvert x(t)\rvert dt$

3.4. Пусть X – банахово пространство над полем K. Задает ли данная формула линейный ограниченный функционал $f:X\to C$? В случае положительного ответа найти его норму (таблица 4.1.5).

Таблица 4.1.5

Вариант	X	f
1	c	$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x(n)$
2	l_∞	$f(x)=x(1)+x(3)$
3	C	$f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}x(k)$
4	C	$f(x)=x(1)+\lim\limits_{n\to\infty}x(n)$
5	$C^{(2)}[0;1]$	$f(x)=ix(0)+x''(1)$
6	$L_1[4;16]$	$f(x)=\int\limits_2^4 t^2x(t^2)dt$
7	$L_2[0;2]$	$f(x)=i\int\limits_2^4 t^{-3/2}x(\sqrt{t})dt$

8	l_1	$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} ix(4k+1)$
9	$L_4[8;64]$	$f(x)=\int_2^4 t^2 x(t^3)dt$
10	$C^{(1)}[0;1]$	$f(x)=ix(0)+2x'(1)$

3.5. Доказать, что данный оператор взвешенного сдвига *A*, действующий из *X* в *Y*, является линейным ограниченным, и найти его норму (таблица 3.2.4).

Таблица 3.2.4

Вариант	X	Y	A
1	$C[-1;1]$	$C[-1;1]$	$(Ax)(t)=(\sin^2\pi t)x(\sqrt[3]{t})$
2	$C[-1;1]$	$C[-1;1]$	$(Ax)(t)=(\sin\pi t)x(\sqrt[7]{t})$
3	$C[-1;0]$	$C[-1;0]$	$(Ax)(t)=(t^2\sin t)x(t^3)$
4	$C[0;1]$	$C[0;1]$	$(Ax)(t)=t^2x(\sqrt{t})$
5	$C[-1;1]$	$C[0;1]$	$(Ax)(t)=(t^2-t)x(t^2)$
6	$L_4[0;1]$	$L_4[0;1]$	$(Ax)(t)=tx(t^{3/2})$
7	$L_{3/2}[0;1]$	$L_{3/2}[0;1]$	$(Ax)(t)=(t^2-2t)x(\sqrt{t})$
8	$L_3[-1;1]$	$L_3[-1;1]$	$(Ax)(t)=x(\sqrt[3]{t})$
9	$L_3[-1;1]$	$L_2[0;1]$	$(Ax)(t)=t^2x(t^2)$
10	$L_2[-1;1]$	$L_1[0;1]$	$(Ax)(t)=tx(t^2)$

3.6. Для данных нормированных пространств *X*, *Y*, последовательности операторов $(A_n)\subset LB(X,Y)$ и оператора $A\in LB(X,Y)$ установить:1) сходится ли (A_n) поточечно (т. е. сильно) к оператору *A*;

2) сходится ли (A_n) по норме к оператору *A* (таблица 3.2.6).

Таблица 3.2.6

Вари-	X	Y	A_n	A

ант				
1	l_2	l_2	$A_n x = (1+1/n)x(1),..,(1+1/n)x(k),..$	I_{l_2}
2	c_0	c_0	$A_n x = (0,...0, x(n),0,0,...)$	0
3	l_2	l_2	$A_n x = (0,...,0, x(n+1), x(n+2),...)$	0
4	$C[0;1]$	$C[0;1]$	$(A_n x)(t) = (t^n - t^{2n})x(t)$	0
5	$C^{(1)}[0;1]$	$C[0;1]$	$(A_n x)(t) = (t^n - t^{2n})x(t)$	0
6	$L_2[0;1]$	$L_1[0;1]$	$(A_n x)(t) = (1-t^n)x(t)$	$Ax = x$
7	$C^{(1)}[0;1]$	$L_2[0;1]$	$(A_n x)(t) = x(t^{1+1/n})$	$Ax = x$
8	$L_2[0;1]$	$L_2[0;1]$	$(A_n x)(t) = (1-t^n)x(t)$	$I_{L_2\ 0,1}$
9	$C[0;1]$	$C[0;1]$	$(A_n x)(t) = (1-t^n)x(t)$	$I_{C\ 0,1}$
10	l_2	l_2	$A_n x = (1-1/n)x(1),...,(1-1/n)x(k),...$	I_{l_2}

3.7. Используя теорему об общем виде линейного ограниченного функционала в пространстве l_p, выяснить, задает ли данная формула линейный ограниченный функционал. В случае положительного ответа найти его норму (таблица 4.1.2).

Таблица 4.1.2

Вариант	p	$F(x)$
1	*2*	*3*
1	1	$x(3) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(3k)}{k}$
2	2	$\sum_{k=1}^{100} e \cdot k!\, x(3k) - 3x(3)$
3	3	$3x(2) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(5k)}{k+1}$
4	7/4	$x(100) - x(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(2k)}{k!e^k}$
5	3	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(2k)}{2k} - 3x(1)$

6	5/4	$x(3)-x(1)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x(2k)}{k!}$
7	2	$\sum_{k=1}^{10}\sin^2 x(3k)-3x(3)$
8	4	$\sum_{k=1}^{100}k!x(3k)-3x(1)$
9	1	$\sum_{k=1}^{\infty}x(k^2)-3x(1)+x(5)$
10	3	$x(3)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x(8k)}{k^2}$

3.8. Используя теорему об общем виде линейного ограниченного функционала в пространстве $C[a;b]$, выяснить, задает ли данная формула линейный ограниченный функционал. В случае положительного ответа найти его норму (таблица 4.1.4).

Таблица 4.1.4

Вариант	a	b	$F(x)$
1	*2*	*3*	*4*
1	0	4	$x(1)-\int_0^2 x(t^2)dt$
2	-1	3	$-3x(0)+\int_{-1}^{2}tx(t)dt+\frac{1}{2}x(2)$
3	0	5	$\int_1^4(t^2-2t-1)x(t)dt-2x(2)+x(9/2)$
4	-3	3	$x(0)-3\int_{-2}^{2}(t+1)x(t)dt$
5	-2	2	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin t\cdot x(t)dt+2x(-1)-4x(3/2)$
6	-2	1	$3x(-2)-2x(0)+\int_0^{1/3}tx(t^2)dt$

7	-1	1	$3x(-\frac{1}{2})-2x(0)+\int_0^1 tx(t^2)dt$
8	-2	1	$x(1)+x(-2)-\int_{-2}^{1} x\left(\frac{t^2}{4}\right)dt$
9	-4	1	$x(-2)-3\int_{-2}^{1}(t+1)x(t)dt$
10	1	3	$\int_1^2 (t^2-2t-1)x(t)dt-2x(2)$