Лабораторная работа № 4

Спектр оператора. Компактные операторы

4.1. Найти спектр данного оператора $A:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (таблица 4.2.1).

Таблица 4.2.1

Вариант	A
1	$Ax = (x_1 + x_3, 2x_2, 0)$
2	$Ax = (2x_1, x_2, 0)$
3	$Ax = (x_1, 0, x_2)$
4	$Ax = (x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_1)$
5	$Ax = (x_2 + x_3, x_2 + x_3, 0)$
6	$Ax = (0, 3x_2, 3x_3)$
7	$Ax = (x_1 - x_2, x_3, 0)$
8	$Ax = (2x_3, -x_2, 0)$
9	$Ax = (x_1 + x_3, x_2 - x_3, x_3)$
10	$Ax = (x_1 - x_3, x_2 + x_3, 0)$

4.2. Найти собственные значения, точки непрерывного и точки остаточного спектров оператора A в пространстве $C[0;1]$, если $(Ax)(t) = a(t)\cdot x(t)$ (таблица 4.2.3).

Таблица 4.2.3

Вариант	$a(t)$	Вариант	$a(t)$
1	$2\left\|t-\frac{1}{2}\right\| - 2\left\|t-\frac{1}{3}\right\|$	6	$\|2t-1\| - \|2-2t\|$
2	$4\left\|t-\frac{1}{4}\right\| - 4\left\|t-\frac{2}{3}\right\|$	7	$\|2t-1\| - \left\|\frac{1}{3}-2t\right\|$
3	$\|3t-1\| - \left\|3t-\frac{1}{2}\right\|$	8	$\|2t-1\| - \left\|2t-\frac{1}{2}\right\|$

4	$5\lvert 2t-1\rvert-\left\lvert 10t-\frac{1}{3}\right\rvert$	9	$2\lvert t-1\rvert-\lvert 2-2t\rvert$
5	$\lvert 12t-1\rvert-\lvert 2-12t\rvert$	10	$\left\lvert 6t-\frac{1}{2}\right\rvert-6\left\lvert t-\frac{1}{4}\right\rvert$

4.3. Выяснить, может ли множество $M\subset\mathbb{C}$ быть спектром некоторого линейного ограниченного оператора. В случае положительного ответа привести пример такого оператора (таблица 4.2.5).

Таблица 4.2.5

Вариант	M	Вариант	M
1	$\left\{0;1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};...\right\}$	6	$\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};...\right\}$
2	$\lambda\in\mathbb{C}\mid -1\le\lambda\le 1$	7	$0;1;i$
3	$\lambda\in\mathbb{C}\mid \lambda=it, 0\le t\le 1$	8	$\lambda\in\mathbb{C}\mid \lvert\operatorname{Im}\lambda\rvert\le 1$
4	$0;\ 21;\ 20$	9	$\lambda\in\mathbb{C}\mid \lvert\lambda\rvert\le 4$
5	$\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};...\right\}$	10	$\lambda\in\mathbb{C}\mid \lambda=2it^2, 0\le t\le 1$

4.4. Выяснить, является ли данный оператор компактным в пространстве $C[0;1]$ (таблица 4.3.1).

Таблица 4.3.1

Вариант	A	Вариант	A
1	$(Ax)(t)=t^2\cdot x(t)$	6	$(Ax)(t)=x(\sqrt[3]{t})$
2	$(Ax)(t)=(t^3+5)x(t)$	7	$(Ax)(t)=e^t\cdot x(\sqrt{t})$
3	$(Ax)(t)=x(t^2)$	8	$(Ax)(t)=(t+1)x(t)$
4	$(Ax)(t)=\sin t\cdot x(\sqrt{t})$	9	$(Ax)(t)=e^{2t}\cdot x(t)$
5	$(Ax)(t)=(t^2+3)x(t)$	10	$(Ax)(t)=2x(\sqrt{t})$

4.5. Определить, является ли данный оператор компактным в пространстве $C[0;1]$ (таблица 4.3.2).

Таблица 4.3.2

Вариант	A
1	$(Ax)(t) = x(t) - \int_0^1 t^2 s x(s) ds$
2	$(Ax)(t) = t^2 \cdot x(0)$
3	$(Ax)(t) = t^2 \cdot x(0) + t \cdot x(1)$
4	$(Ax)(t) = x(0) - t \cdot x(1)$
5	$(Ax)(t) = x\ \ 1/3\ \ + x\ \ 1/5\ \cos t - x\ \ 1/7\ \ t$
6	$(Ax)(t) = x\ \ 0,5\ \ + t^3 \cdot x(1)$
7	$(Ax)(t) = x(0) + 3tx(1)$
8	$(Ax)(t) = x\ \ 1/4\ \ - x\ \ 1/5\ \cos t + x\ \ 1/8\ \ t$
9	$(Ax)(t) = 3x(t) + \int_0^1 s^2 t x(s) ds$
10	$(Ax)(t) = 2tx(0) - x(1)$