МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

А.Р.Миротин, В.В.Мухин, А.П.Старовойтов,
Г.Н.Казимиров

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
(линейные ограниченные операторы в нормированных пространствах)

Практическое пособие
для студентов заочного факультета
специальности I-310301-02-«Математика
(научно-педагогическая деятельность)»

Гомель 2004

УДК 517. 9 (075.8)
ББК 22.16 Я73
Ф 947

Рецензенты:
В.И.Мироненко, профессор, кандидат физико-математических наук
В.Н.Семенчук, профессор, доктор физико-математических наук

Рекомендованы к изданию научно-методическим советом Учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Миротин А.Р., Мухин В.В., Старовойтов А.П., Казимиров Г.Н.
Функциональный анализ и интегральные уравнения: Практическое пособие
Ф947 для студентов- заочников математических специальностей вузов /А.Р. Миротин, В.В.Мухин, А.П.Старовойтов, Г.Н.Казимиров-Гомель: УО"ГГУ им.Ф.Скорины", 2004.-80 с.
ISBN

Практическое пособие подготовлено в соответствии с программой курса «Функциональный анализ и интегральные уравнения» и предназначен для студентов заочного факультета специальности I-310301-02-«Математика (научно-педагогическая деятельность)», а также может быть использована студентами математического факультета

В пособии шесть самостоятельных частей, каждая из которых содержит перечень понятий и теорем, которыми необходимо овладеть для усвоения соответствующего раздела курса и типичные задачи, снабжённые подробными решениями, которые могут использоваться студентами для самопроверки готовности к выполнению контрольных заданий.

УДК 517. 9 (075.8)
ББК 22.16 Я73

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Как самостоятельная математическая дисциплина функциональный анализ оформился в начале XX века в результате переосмысления и обобщения ряда понятий математического анализа, алгебры и геометрии. Датой рождения функционального анализа считается 1932 год, когда вышла в свет основополагающая монография Стефана Банаха «Теория линейных операций». За последующие десятилетия функциональный анализ глубоко проник почти во все области математики. Основой для широких приложений функционального анализа является то, что большинство задач, возникающих в математике и математической физике, касается не отдельных объектов типа функций, мер или уравнений, а, скорее, обширных классов таких объектов, причём на этих классах обычно существует естественная структура векторного пространства и естественная топология. Среди областей применения функционального анализа можно указать теорию функций, теорию дифференциальных и интегральных уравнений, теорию вероятностей, методы вычислений, квантовую механику, математическую экономику и ряд других разделов математики, физики и естествознания.

Настоящее пособие посвящено важному разделу курса «Функциональный анализ и интегральные уравнения» - линейным операторам и функционалам в нормированных пространствах. Согласно учебному плану подготовки специалистов по этому разделу студент-заочник должен выполнить предложенную ему контрольную работу. Помочь ему успешно справиться с этой задачей - цель, которую ставили перед собой авторы данного пособия.

Учитывая специфику заочного факультета, которая обуславливает небольшое количество учебных часов, отведённых на решение задач по данному разделу курса, а также недостаточную обеспеченность учебными пособиями и отсутствием сборников задач с подробным решением вводных задач («решебников»), данное пособие приобрело следующую структуру.

Пособие разбито на шесть самостоятельных частей, тема каждой из которых посвящена целостному разделу курса. Каждая часть содержит перечень понятий и теорем, которыми необходимо овладеть для усвоения соответствующего раздела курса. Приводятся типичные задачи, снабжённые подробными решениями. Мы надеемся, что они будут использованы студентами для самопроверки готовности к выполнению контрольных заданий. В каждом разделе приведены ссылки на учебные пособия с точностью до страницы. С целью облегчения усвоения материала и подготовки к экзамену в пособии приводится базовая программа по функциональному анализу, причём каждый вопрос снабжён ссылкой на наиболее доступные для студентов-заочников учебники.

Процесс изучения функционального анализа на заочном факультете состоит из следующих основных этапов:

1) самостоятельная работа над учебником и учебными пособиями;
2) посещение проработка установочных и обзорных лекций;
3) работа на практических занятиях;
4) выполнение контрольной работы;

5) сдача зачётов и экзаменов.

При этом в силу специфики заочного обучения, на наш взгляд, основными в этом процессе являются 1) и 4) этапы. Хочется думать, что данное пособие поможет студентам как в самостоятельной работе над учебником, так и в овладении практическими навыками решения задач данного раздела курса «Функциональный анализ и интегральные уравнения».

При выполнении контрольной работы необходимо соблюдать следующие правила:

1) контрольную работу следует выполнять аккуратно, оставляя поле для замечаний рецензента;

2) условия задач своего варианта должны быть полностью переписаны;

3) решения задач и используемые формулы должны сопровождаться краткими и ясными пояснениями;

4) в контрольной работе следует указать учебники и параграфы, которыми следует пользоваться при решении задач;

5) текст контрольной работы должен быть внимательно вычитан студентом с целью устранения описок и арифметических ошибок. При рецензировании учитываются все ошибки, допущенные в работе.

6) на титульном листе указывается наименование дисциплины, по которой производиться контрольная работа, номер варианта, факультет, курс и номер группы, фамилия и инициалы студента, домашний адрес.

Контрольные работы, представленные без соблюдения указанных правил оформления, а также работы, выполненные не по своему варианту, не засчитываются. Вариант задания каждому студенту даётся преподавателем по его усмотрению. Для удобства после каждого раздела приводится двадцать вариантов заданий.

При повторном рецензировании обязательно представить работу с первой рецензией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. –Минск, БГУ, 2003.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: «Наука», 1981 г.
3. Мухин В.В., Миротин А.Р., Старовойтов А.П. Лабораторные работы по функциональному анализу. Часть I – Гомель. 1987, 1988.
4. Мухин В.В., Миротин А.Р., Старовойтов А.П. Лабораторные работы по функциональному анализу. Часть II– Гомель. 1988.
5. Садовничий В.А.Теория операторов 2-е изд.– М ГУ, 1986.
6. Антоневич А.Б., Радыно Я.В., Ваткина Е.И, Мазель М.Х., Миротин А.Р., Мухин В.В., Старовойтов А.П., Третьякова Л.Г. Функциональный анализ и интегральные уравнения: Лабораторный практикум: Учеб. пособие –Мн: БГУ, 2003.

7. Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск, “Вышэйшая школа”, 1978 г.
8. Кирилов А.А. , Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука. 1979.

ТРЕБОВАНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО СТАНДАРТА

(РУКОВОДЯЩИЙ ДОКУМЕНТ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ РД РБ 02100.5.035-98)

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Специальность I-310301-02-«Математика (научно-педагогическая деятельность)»

ДИСЦИПЛИНА «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

Введение: возникновение функционального анализа как самостоятельного раздела математики; современное развитие функционального анализа и его связь с другими областями математики. Метрические и топологические пространства: множества, алгебра множеств; счетные множества и множества мощности континуума; метрические пространства: открытые и замкнутые множества; компактные множества в метрических пространствах: критерий Хаусдорфа; полнота и пополнение: теорема о вложенных шарах; принцип сжимающих отображений; топологические пространства; примеры. Мера и интеграл Лебега: построение меры Лебега на прямой; общее понятие аддитивной меры; лебеговское продолжение меры; измеримые функции их свойства; определение интегала Лебега: класс суммируемых функций; предельный переход под знаком интеграла; связь интеграла Лебега с интегралом Римана: интеграл Стильтьеса: теорема Радона-Никодима; прямое произведение мер и теорема Фубини; пространства $L_p,\ 1 \le p \le \infty$; неравенства Гельдера и Минковского. Банаховы пространства: определение линейного нормированного пространства; примеры норм: банаховы пространства: сопряженное пространство, его полнота; теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала; общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах. Линейные операторы; норма оператора; сопряженный оператор; принцип равномерной ограниченности; обратный оператор; спектр и резольвента; теорема Банаха об обратоном операторе: компактные операторы: компактность интегральных операторов; понятие об индексе: теорема Фредгольма: примеры использования теоремы Фредгольма (задача Штурма-Лиувилля, теория потенциала, индекс дифференциального оператора). Гильбертовы пространства: скалярное произведение: неравенство Коши-Буняковского-Шварца; ортогональные системы:неравенство Бесселя; базисы и гильбертова размерность; теорема об изоморфизме; ортогональное дополнение; общий вид линейного функционала; самосопряженные (эрмитовы0 и унитарные операторы: ортопроекторы; спектр эрмитова и унитарного оператора; теорема Гильберта о компактных эрмитовых операторах; функциональное исчисление: приведение оператора к виду умножения на функцию; спектральная теорема; неограниченные самосопряженные операторы: примеры. Линейные топологические пространства и обобщенные функции: полинормированные пространства: функционал Минковского: нормируемостьт и метризуемость; топология в сопряженном пространстве; слабая компактность шара в сопряженном пространстве;Основные пространства гладких функций; пространства обобщенных функций; операции над обобщенными функциями: умножение на гладкую функцию, дифференцирование, замена переменных, преобразование Фурье.

УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА КУРСА

1.Возникновение функционального анализа как самостоятельного раздела математики.

Работы Фреше, Вольтерра, Гильберта, Ф.Рисса, Фредгольма, Банаха, приведшие к возникновению функционального анализа. Современное развитие функционального анализа и его связь с другими областями математики.

2. Развитие теории банаховых, топологических векторных пространств и алгебр в связи с потребностями математики, физики и других разделов естествознания.

3. Множества, алгебра множеств, счетные множества и множества мощности континуума.

[1] Гл.1 §1
[2] Гл.1 §1-4
[5] Гл.1 §1

Основные понятия теории множеств. Операции над множествами. Отношения и функции. Аксиома выбора и лемма Цорна. Мощность множества. Счетные и несчетные множества. Теорема Кантора.

4. Метрические пространства Метрика. Открытые и замкнутые множества, компактность, критерий Хаусдорфа. Критерии компактности в конкретных пространствах. Полнота, теорема о пополнении. Принцип вложенных шаров и принцип сжимающих отображений. Теорема Бэра.	[1] Гл.3 §14-24 [2] Гл.2 §1-4, 7 [5] Гл.1 §2,3
5. Топологические пространства Открытые, замкнутые и компактные множества. Способы задания топологий. Аксиомы счётности и отделимости. Сходящиеся последовательности и непрерывные отображения. Примеры.	[1]Приложение. §1,2,7 [2] Гл.2 §5,6 [5] Гл.1 §4,5
6. Общее понятие аддитивной меры. Системы множеств: полукольца, полуалгебры, алгебры, сигма-алгебры. Алгебра, порожденная полуалгеброй. Мера. Свойства меры. Продолжение меры с полуалгебры на порожденную ею алгебру.	[1] Гл.1 §2,3 [2] Гл.1 §5, Гл. 5 §2 [5] Гл.3 §1
7. Лебеговское продолжение меры. Внешняя мера. Свойства внешней меры. Измеримые множества. Теорема о продолжении. Критерий Валле-Пуссена.	[1] Гл.1 §4 [2] Гл. 5 §3 [5] Гл.3 §1
8. Построение меры Лебега на прямой. Счетная аддитивность длины. Мера Лебега на прямой. Неизмеримые множества. Функция распределения меры. Мера Лебега-Стилтьеса.	[1] Гл.1 §5,6 [2] Гл. 6 §6 [5] Гл.3 §1
9. Измеримые функции и их свойства. Равносильность различных определений измеримости функции. Устойчивость измеримости относительно арифметических операций и предельного перехода. Аппроксимация измеримых функций простыми. Различные типы сходимости последовательностей измеримых функций. Теоремы Егорова и Лузина.	[1] Гл.2 §7 [2] Гл. 5 §4 [5] Гл.3 §2
10. Определение интеграла Лебега. Интеграл от простой функции и его	[1] Гл.2 §8 [2] Гл. 5 §5

свойства. Интеграл от неотрицательной функции и его свойства. Класс суммируемых функций. Свойства интеграла (монотонность, признак сравнения).	[5] Гл.3 §3
11. Предельный переход под знаком интеграла. Теорема Б. Леви, лемма Фату, теорема Лебега и их следствия для рядов. Неравенство Чебышева. Абсолютная непрерывность интеграла. Замена переменной.	[1] Гл.2 §9 [2] Гл. 5 §5 [5] Гл.3 §3
12. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана. Сравнение интеграла Лебега по отрезку с интегралом Римана. Критерий Лебега интегрируемости по Риману. Связь интеграла Лебега с несобственным интегралом Римана.	[1] Гл.2 §10 [2] Гл. 5 §5 [5] Гл.3 §3
13. Интеграл Стилтьеса. Функции ограниченной вариации и их свойства. Абсолютно непрерывные функции и их свойства. Интеграл Лебега-Стилтьеса. Свойства интеграла Лебега-Стилтьеса.Частные случаи.	[2] Гл. 6 §6
14. Теорема Радона-Никодима. Знакопеременные меры (заряды). Разложение Жордана. Абсолютная непрерывность одной меры относительно другой. Теорема Радона-Никодима.	[1] Гл.2 §11,12 [2] Гл. 6 §5 [5] Гл.3 §4
15. Прямое произведение мер и теорема Фубини. Прямое произведение полуалгебр. Определение прямого произведения мер. Теорема Фубини. Теорема. Тонелли. Примеры.	[1] Гл.2 §13 [2] Гл. 5 §6 [5] Гл.3 §5
16. Пространства L_p, неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства L_p, $1 \le p \le \infty$. Неравенства Юнга, Гёльдера и Минковского. Метрика в L_p. Полнота пространств L_p.	[1] Гл.3 §19,20 [2] Гл. 7 §1,2 [5] Гл.3 §3 п.5
17. Линейные нормированные пространства. Определение и примеры линейных нормированных пространств. Эквива-	[1] Гл.4 §25-28, Гл.5 §33,34 [2] Гл.3 §1,3, Гл.4 §1,5 [5] Гл.2 §1 п. 1-3, §2 п.1,2

лентные нормы. Критерий полноты нормированного пространства. Критерий конечномерности. Пополнение. Ограниченные линейные отображения, их норма. Полнота пространства L(X,Y).

18. Сопряженное пространство.
Сопряженное пространство. Его полнота. Теорема Хана-Банаха. Достаточность множества линейных функционалов. Общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах.

[1] Гл.6 §40-42
[2] Гл.4 §1-3
[5] Гл.2 §2 п.4,5

19. Линейные операторы.
Сопряженный оператор. Принцип равномерной ограниченности. Обратный оператор. Спектр и резольвента. Теорема Банаха об обратном операторе.

[1] Гл.5 §33-36
[2] Гл.4 §5
[5] Гл.2 §2 п.1-3, Гл.4 §4 п.6

20. Компактные операторы.
Компактность интегральных операторов. Понятие об индексе. Теорема Фредгольма. Примеры использования теоремы Фредгольма (задача Штурма-Лиувилля, теория потенциала, индекс дифференциального оператора).

[1] Гл.7 §47-50
[2] Гл.4 §6, Гл. 9 §2
[5] Гл.4 §2 п.2, 10

21. Гильбертовы пространства.
Скалярное произведение. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Ортогональное дополнение, теорема о разложении. Общий вид линейного функционала. Неравенство Бесселя. Базисы и гильбертова размерность. Теорема об изоморфизме.

[1] Гл.4 §29-32
[2] Гл.3 §4
[5] Гл.4 §1

22. Самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы.
Эрмитово сопряженный оператор. Самосопряженне и унитарные операторы, ортопроекторы. Спектр эрмитовых и унитарных операторов. Теорема Гильберта о компактных эрмитовых операторах. Интегральные уравнения с симметричным ядром.

[1] Гл.7 §51,52
[2] Гл.4 §5 п. 6, Гл. 9 §2 п. 2
[5] Гл.4 §2 п.1, 7

23. Спектральная теорема.
Функциональное исчисление эрмитовых операторов. Приведение оператора

[5] Гл.4 §2 п. 10-13

к виду умножения на функцию. Спектральная теорема. Неограниченные самосопряженные операторы. Примеры.	
24. Линейные топологические пространства. Полинормированные пространства. Функционал Минковского. Нормируемость и метризуемость. Топологии в сопряженном пространстве. Теорема Алаоглу.	[1] Гл.8 §53, Гл. 9 §57-59 [2] Гл.3 §5, Гл. 4 §2,3 [5] Гл.2 §1 п.4-6, §2 п.5,6
25. Обобщенные функции. Основные пространства гладких функций. Пространства обобщенных функций. Операции над обобщенными функциями: умножение на гладкую функцию, дифференцирование, замена переменных, свертка. Преобразование Фурье основных и обобщенных функций.	[1] Гл.8 [2] Гл.4 §4, Гл.8 §4,5,8 [5] Гл.6

ТЕМА 1
ПОЛНОТА И КОМПАКТНОСТЬ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

Определение 1. Пусть $X \neq \varnothing$. Отображение $\rho\colon X \times X \to \mathbf{R}$, которое каждой паре $(x,y) \in X \times X$ ставит в соответствие действительное число $\rho(x,y)$, называется **метрикой** на X, если для любых $x, y, z \in X$ выполнены условия:

1. $\rho(x,y) \geq 0$ и $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (симметричность) ;
3. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z)+\rho(z,y)$ (неравенство треугольника) ;

Определение 2. Множество X с заданной на нём метрикой ρ, т.е. пара (X,ρ), называется **метрическим пространством .**

Число $\rho(x,y)$ обычно называют **расстоянием** между точками x,y множества X. В дальнейшем через (x_n) (или $(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$) будем обозначать последовательность точек из X. Выделим два важных класса последовательностей в метрическом пространстве.

Определение 3. Последовательность точек (x_n) метрического пространства (X,ρ) называется **сходящейся**, если для некоторого $x_0 \in X$ числовая последовательность $\rho(x_n,x_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Точка x_0 при этом называется **пределом** последовательности (x_n).

Определение 4. Последовательность (x_n) называется **фундаментальной** в (X,ρ), если числовая последовательность $\rho(x_n,x_m) \to 0$, когда $n \to \infty$ и $m \to \infty$.

Определение 5. Множество A точек метрического пространства (X,ρ) называется **ограниченным**, если A содержится в некотором шаре.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* (x_n) *— сходящаяся последовательность точек* (X,ρ). *Тогда она*

1) *ограничена;*
2) *имеет единственный предел;*
3) *фундаментальна.*

Определение 6. Метрическое пространство, в котором всякая фундаментальная последовательность точек сходится, называется **полным.**

Заметим, что не всякое метрическое пространство полно, но всякое не полное метрическое пространство можно пополнить, т.е. включить некоторым (единственным по существу) способом в полное пространство в качестве всюду плотного подпространства. В полных метрических пространствах имеют место два важных принципа, отражающие существенные свойства таких пространств.

ТЕОРЕМА 2 (Принцип вложенных шаров). *Для того чтобы метрическое пространство было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нём всякая убывающая последовательность замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.*

Пусть $f: X \to X$ — отображение метрического пространства X в себя. Точка $a \in X$ называется **неподвижной точкой** отображения f, если $f(a)=a$.

Определение 7 . Отображение $f:\ (X,\rho) \to (X,\rho)$ называется **сжимающим**, если существует константа $0 \le \alpha < 1$ такая, что для $\forall x,y \in X \quad \rho(f(x),f(y)) \le \alpha\rho(x,y)$.

ТЕОРЕМА 3 (Принцип сжимающих отображений). *В полном метрическом пространстве сжимающее отображение имеет неподвижную точку и притом только одну.*

Метрические пространства являются частным случаем топологических пространств, имеющих счетную базу в каждой точке. Для них понятия компактности и счетной компактности совпадают. Поэтому компактность в (X,ρ) можно определить на языке последовательностей.

Определение 8. Подмножество К метрического пространства (X,ρ) называется **компактным**, если из любой последовательности $(x_n) \subset$ **К** можно выделить сходящуюся к элементу из К подпоследовательность.

Компактность в метрическом пространстве тесно связано с понятием **полной ограниченности**.

Определение 9. Подмножество A метрического пространства (X,ρ) называется **ε-сетью** множества $M \subset X$, если $\forall\ x \in M$ существует $a \in A$ такое, что $\rho(x,a) < \varepsilon$. Если A при этом — конечное множество, то A называют **конечной ε-сетью.**

Определение 10. Множество $M \subset X$ называется **вполне ограниченным** в (X,ρ), если при любом $\varepsilon > 0$ для M существует конечная ε-сеть. То же можно выразить сказав, что M можно покрыть конечным числом шаров радиуса ε.

Перечислим основные свойства вполне ограниченных множеств:

1. Вполне ограниченное множество ограничено.
2. Если M вполне ограничено, то его замыкание вполне ограничено.
3. Всякое вполне ограниченное метрическое пространство сепарабельно.
4. Подмножество вполне ограниченного множества вполне ограничено.

ТЕОРЕМА 4 (Хаусдорф). *Пусть (X,ρ) — полное метрическое пространство. Для того чтобы множество $K \subset X$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

(1) К — замкнуто в (X,ρ);

(2) К — вполне ограничено в (X,ρ).

Из этой общей теоремы можно получить критерии компактности множеств в конкретных метрических пространствах ($\mathbf{R}^n$, l_p, $\mathbf{C}[a,b]$ и др.).

ТЕОРЕМА 5 (Гейне-Борель-Лебег). *Для того чтобы множество* $K \subset \mathbf{R}^n$ *было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым и ограниченным.*

ТЕОРЕМА 6. *Множество* $K \subset l_p$, $1 \le p < \infty$ *компактно тогда и только тогда, когда выполнены условия*:

(1) К — замкнутое множество;

(2) К — ограниченное множество;

(3)для любого $\varepsilon > 0$ *существует номер* $n_0 = n_0(\varepsilon)$ *такой, что*

$$\left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} < \varepsilon \text{ для всех } x = (x_1, x_2, \ldots) \in K.$$

ТЕОРЕМА 7 (Арцела-Асколи). *Множество* $K \subset \mathbf{C}[a,b]$ *компактно тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(1) К замкнуто в $\mathbf{C}[a,b]$;

(2) К ограничено в $\mathbf{C}[a,b]$;

(3) К равностепенно непрерывно, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *такое, что* $\forall x \in K$ *и* $t_1, t_2 \in [a,b]$ *из неравенства* $|t_1 - t_2| \le \delta$ *следует неравенство* $|x(t_2) - x(t_1)| \le \varepsilon$.

Определение 11. Подмножество M метрического пространства (X,ρ) называется предкомпактным, если его замыкание компактно. Это равносильно тому, что из любой последовательности $(x_n) \subset M$ можно извлечь сходящуюся в (X,ρ) подпоследовательность (но предел этой подпоследовательности не обязательно принадлежит M).

Замечание. Из критериев компактности, сформулированных в трех последних теоремах, получаются критерии предкомпактности множества, если в них опустить требование замкнутости множества.

ЛИТЕРАТУРА: [1, с. 79-136]; [2, с. 61-78, 92-106].

II. З А Д А Ч И.

1. Проверить, является ли заданная последовательность (x_n) точек метрического пространства (X,ρ) ограниченной, фундаментальной, сходящейся (определение метрики ρ на X смотри в таблице в конце пособия). Если существует, найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

	X	x_n		X	x_n
1.1	$C[0,2]$	$\frac{t^2 n}{n+t^2}$	1.2	$L_2[0,1]$	$\frac{nt^2}{1+nt}$
1.3	$C[-1,1]$	$\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}$	1.4	$L_1[1,2]$	$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n$
1.5	$C[0,1]$	$t^n - t^{n+1}$	1.6	$L_4[-2,2]$	$n\left(\sqrt{t^2+\frac{1}{n}}-\sqrt{t^2}\right)$
1.7	$C[0,1]$	$n\left(\sqrt{t+\frac{1}{n}}-\sqrt{t}\right)$	1.8	$L_3[0, 1]$	$n\sin\frac{t}{n}$

	X	x_n
1.9	l_4	$\left(\underbrace{\frac{n}{n+1},\frac{n}{n+1},\ldots,\frac{n}{n+1}}_{n},0,0,\ldots\right)$
1.10	l_2	$\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},\ldots,\frac{1}{3^n},0,0,\ldots\right)$
1.11	l_∞	$\left(\underbrace{n\sin\frac{1}{n},n\sin\frac{1}{n},\ldots,n\sin\frac{1}{n}}_{n},0,0,\ldots\right)$
1.12	c_0	$\left(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n},\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n},0,0,\ldots\right)$
1.13	$l_{4/3}$	$\left(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n},\underbrace{\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}}_{n},0,0,\ldots\right)$

1.14	$L_3[0,2]$	$\begin{cases}\left(\frac{t}{2}\right)^n, t\in[0,2]\setminus Q\\ e^{nt}, t\in[0,2]\cap Q\end{cases}$
1.15	$L_1[-2,2]$	$\begin{cases}\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}, t\in[-2,2]\setminus Q\\ \cos nt, t\in[-2,2]\cap Q\end{cases}$

Решение задачи 1.15. Мера Лебега множества $[-2,2]\cap Q$ равна нулю, поэтому $x_n(t)=\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}$ почти всюду на отрезке [–2,2]. Тогда в силу определения метрического пространства $L_1[-2,2]$ (см. лабораторную работу №6) в качестве представителя класса x_n можно брать функцию $x_n(t)=\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}$. По определению

$$\forall\, x,y \in L_1[-2,2]\ \ \rho(x,y)=\int\limits_{[-2,2]}|y(t)-x(t)|dt\,.$$

Поэтому для любого $n\in N$

$$\rho(0,x_n)=\int\limits_{[-2,2]}\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}dt\le\int\limits_{[-2,2]}\sqrt{t^2+1}dt=\int\limits_{-2}^{2}\sqrt{t^2+1}dt\le\int\limits_{-2}^{2}\sqrt{5}dt=4\sqrt{5}$$

и значит последовательность (x_n)ограничена (она лежит в шаре $B(0,4\sqrt{5})$) .

Докажем, что она является фундаментальной:

$$\rho(x_n,x_m)=\int\limits_{[-2,2]}\left|\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{t^2+\frac{1}{m^2}}\right|dt=\int\limits_{[-2,2]}\left|\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}}{\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{t^2+\frac{1}{m^2}}}\right|dt=$$

$$=\left|\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right|\cdot\int\limits_{[-2,2]}\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{t^2+\frac{1}{m^2}}}\,.$$

Предположим для определенности, что $m<n$. Тогда

$$\int\limits_{[-2,2]} \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{t^2+\frac{1}{m^2}}} = 2\int\limits_0^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{t^2+\frac{1}{m^2}}} \le 2\int\limits_0^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{1}{m^2}}} =$$

$$= 2m\ln(mt+\sqrt{m^2t^2+1})\Big|_0^2 = 2m\ln(2m+\sqrt{4m^2+1}).$$

Поэтому

$$\rho(x_m, x_n) \le \left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right) 2m\ln(2m+\sqrt{4m^2+1}) \le \frac{4\ln(4m+1)}{m} \to 0 \text{ при } n,m\to\infty.$$

Итак, последовательность (x_n) фундаментальна в L$_1$[-2,2] . Поскольку L$_1$[-2,2] — полное пространство, то (x_n) — сходящаяся последовательность. Найдем ее предел.

Покажем, что таковым является $x_0(t)=|t|$ (т.е. поточечный предел $x_n(t)$). Действительно,

$$\rho(x_0, x_m) = \int\limits_{[-2,2]} \left| |t| - \sqrt{t^2+\frac{1}{m^2}} \right| dt = \frac{2}{m^2}\int\limits_0^2 \frac{dt}{|t|+\sqrt{t^2+\frac{1}{m^2}}} \le \frac{2}{m^2}\int\limits_0^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{1}{m^2}}} =$$

$$= \frac{2m\ln(2m+\sqrt{4m^2+1})}{m^2} \to 0, \text{ при } m\to\infty,$$

т.е. $x_m \to x_0$ в метрическом пространстве L$_1$[-2,2].

2 . Проверить, является ли метрическое пространство (X,ρ) полным.

В случае отрицательного ответа, привести пример фундаментальной последовательности в (X,ρ), которая не сходится в (X,ρ) .

	X	$\rho(x,y)$
2.1	$C[0,1]$	$\rho(x,y)=\int\limits_0^1 \lvert y(t)-x(t)\rvert dt$
2.2	$\left\{x\in C[0,1]:\ \max\limits_{t\in[0,1]} \lvert x(t)\rvert<1\right\}$	$\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[0,1]} \lvert y(t)-x(t)\rvert$
2.3	$C[0,1]$	$\rho(x,y)=\left(\int\limits_0^1 \lvert y(t)-x(t)\rvert^2 dt\right)^{1/2}$

2.4	$C^{(1)}[0,1]$	$\rho(x,y)=\int\limits_0^1 \lvert y(t)-x(t)\rvert dt$
2.5	l_∞	$\rho(x,y)=\sup\limits_n \lvert y_n-x_n\rvert$
2.6	$\left\{x\in l_2 : \sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert x_k\rvert^2<1\right\}$	$\rho(x,y)=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert y_k-x_k\rvert^2\right)^{1/2}$
2.7	l_3	$\rho(x,y)=\sup\limits_n \lvert y_n-x_n\rvert$
2.8	l_2	$\rho(x,y)=\sup\limits_n \lvert y_n-x_n\rvert$
2.9	c_0	$\rho(x,y)=\sup\limits_n \lvert y_n-x_n\rvert$
2.10	$C^{(1)}[0,1]$	$\rho(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}\lvert x(t)-y(t)\rvert+\max\limits_{0\le t\le 1}\lvert x'(t)-y'(t)\rvert$
2.11	$C^{(2)}[0,1]$	$\rho(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}\lvert y(t)-x(t)\rvert$
2.12	$l_1\cap l_2$	$\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert y_k-x_k\rvert$
2.13	$l_1\cap l_2$	$\rho(x,y)=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert y_k-x_k\rvert^2\right)^{1/2}$
2.14	$l_1\cap l_3$	$\rho(x,y)=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert y_k-x_k\rvert^3\right)^{1/3}$
2.15	$l_1\cap l_2$	$\rho(x,y)=\sup\limits_n \lvert y_n-x_n\rvert$
2.16	$C^{(1)}[0,1]$	$\rho(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}\lvert y(t)-x(t)\rvert$
2.17	l_1	$\rho(x,y)=\sup\limits_n \lvert y_n-x_n\rvert$

Решение задачи 2.17. Покажем, что данное метрическое пространство не является полным. Для этого рассмотрим последовательность $x^n=(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},0,0,\ldots)\in l_1$ $n=1,2,\ldots$.

При $m<n$ имеем $x^n - x^m = \left(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{m}, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0,0,\ldots\right)$, следовательно $\rho(x^n, x^m) = \frac{1}{m+1} \to 0$, если $m,n\to\infty$. Итак x^n — фундаментальная последовательность в (l_1, ρ). Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ принадлежит l_1 и $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(a, x^n) = 0$. Тогда для любого $k\in\mathbf{N}$ при $n>k$ имеем $\rho(a, x^n) \geq |a_k - \frac{1}{k}|$. Полагая $n\to\infty$, получаем отсюда, что $a_k=1/k$ и поэтому a не принадлежит l_1. Итак, мы построили фундаментальную последовательность x^n в l_1, которая не сходится в рассматриваемом пространстве. •

Решение задачи 2.16. Покажем, что это метрическое пространство также не является полным. Разлагая в ряд Фурье функцию $f(x) = |\sin x|$, имеем

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1} \quad \forall x \in R. \tag{1}$$

В силу равномерной сходимости ряда (1) (признак Веерштрасса) последовательность его частичных сумм

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}$$

равномерно сходится (в частности, на отрезке [–1,1]) к функции $|\sin x|$. Тогда $\rho(f, S_n) \to 0$ при $n\to\infty$. Другого предела у $S_n(x)$ быть не может, а $f \notin C^{(1)}[-1,1]$. Поэтому достаточно показать, что последовательность $S_n(x)$ фундаментальна в рассматриваемом пространстве. А это вытекает из того, что , если $m<n$, то $\rho(S_n, S_m) = \max\limits_{-1\leq t\leq 1} \left| \sum\limits_{k=m+1}^{n} \frac{\cos 2kt}{4k^2-1} \right| \leq \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \to 0$ при $m\to\infty$, как остаток сходящегося ряда . •

3. Выяснить, является ли множество **M** предкомпактным, компактным в пространстве $C[0,1]$.

	M		**M**
3.1	$\{\sin(t+a) : a \in R\}$	3.2	$\{x \in C^{(2)}[0,1] : \lvert x(t)\rvert \leq 1, \lvert x'(t)\rvert \leq 1\}$
3.3	$\{ae^{t+b} : 1 \leq a \leq 2, b \in R\}$	3.4	$\{x \in C^{(2)}[0,1] : \lvert x(t)\rvert \leq \lvert x'(t)\rvert \leq \lvert x''(t)\rvert \leq 1\}$

3.5	$\{bt^{\alpha}: 0<\alpha\le 1, 0\le b\le 2\}$	3.6	$\{x\in C[0,1]: \lvert x(0)\rvert\le 1, \lvert x(t_2)-x(t_1)\rvert\le 4\lvert t_2-t_1\rvert\}$
3.7	$\{\cos at: -1\le a\le 1\}$	3.8	$\{x\in C^{(1)}[0,1]: \lvert x(t)\rvert\le t^{-2}, \lvert x(t_2)-x(t_1)\rvert\le\lvert t_2-t_1\rvert\}$
3.9	$\{x(t): \lvert x(t)\rvert\le\cos t\}$	3.10	$\{x\in C^{(2)}[0,1]: \lvert x(0)\rvert\le 1, \lvert x''(t)\rvert\le 1\}$
3.11	$\{a\sin(t+b): 0\le a,b\le 1\}$	3.12	$\{x\in C^{(2)}[0,1]: \lvert x(0)\rvert\le 2, \lvert x'(t)\rvert\le 2\}$
3.13	$\left\{\dfrac{t+a}{t+b}: 1\le a,b\le 2\right\}$	3.14	$\{x\in C^{(2)}[0,1]: x(0)=1, \lvert x'(0)\rvert\le 1, \lvert x''(t)\rvert\le 1\}$
3.15	$\{t^n: n\in N\}$	3.16	$\{x\in C[0,1]: x(0)=1, \lvert x(t_2)-x(t_1)\rvert\le\lvert t_2-t_1\rvert\}$

Решение задачи 3.16 . Применим теорему Арцела-Асколи. Покажем, что **M** — замкнуто, т.е. содержит все свои предельные точки. Пусть $(x_n)\subset$ **M** и $x_n\to x$ в $C[0,1]$. Тогда по условию $\forall n\in N$ и $\forall t_1,t_2\in[0,1]$

$$x_n(0)=1,\quad \lvert x_n(t_2)-x_n(t_1)\rvert\le\lvert t_2-t_1\rvert. \tag{2}$$

Перейдя в (2) к пределу при $n\to\infty$, получим $x(0)=1$, $\lvert x(t_2)-x(t_1)\rvert\le\lvert t_2-t_1\rvert$, т.е. $x\in$ **M** и **M** — замкнуто. Если в (2) положить $t_1=0$, $t_2=t$, то будем иметь $\lvert x_n(t)-1\rvert\le t\Rightarrow\rho(1,x_n)\le 1$. Откуда $\rho(0,x_n)\le\rho(0,1)+\rho(1,x_n)\le 2$.

Итак, **M**$\subset B[0,2]$, т.е. **M** ограничено. Осталось проверить равностепенную непрерывность множества **M** .

Для любого $\varepsilon>0$ положим $\delta=\varepsilon$. Тогда при любой функции $x\in$**M** и любых $\lvert t_2-t_1\rvert\le\delta$**,** согласно определению множества **M,** получим $\lvert x(t_2)-x(t_1)\rvert\le\lvert t_2-t_1\rvert\le\varepsilon$.

Итак, **M** — компактно, а потому и предкомпактно. •

4. Является ли множество **M** предкомпактным в пространстве l_p? В случае положительного ответа построить для множества **M** конечную ε-сеть при $\varepsilon = 1/10$.

	p	**M**
4.1	1	$\left\{(x_1,x_2,x_3,\dots): \dfrac{1}{k^2}<\lvert x_k\rvert<\dfrac{2}{k^2}, k\in N\right\}$
4.2	2	$\left\{(x_1,x_2,x_3,\dots): \lvert x_k\rvert\le\dfrac{1}{2^k}, k\in N\right\}$

4.3	2	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): \frac{1}{2^k} \le \lvert x_k \rvert \le \frac{1}{2^{k+1}}, k \in N\right\}$
4.4	3	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): x_k = \frac{k}{1+ak^2}, 1 \le a \le 2, k \in N\right\}$
4.5	4	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): x_1 = 1, x_k > 0, x_{k+1} < \frac{1}{2} x_k, k \in N\right\}$
4.6	1	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): x_1 = 1, x_k > 0, x_{k+1} < \frac{1}{4} x_k, k \in N\right\}$
4 .7	1	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): x_{2k} = 0, 0 < x_{2k+1} \le \frac{1}{2^k},\ k \in N\right\}$
4.8	2	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): \lvert x_{2k} \rvert \le \frac{1}{k}, x_{2k+1} = 0, k \in N\right\}$
4.9	4	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): x_k = \frac{1}{2^{ak}}, \frac{1}{4} \le a \le 1, k \in N\right\}$
4.10	3	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): x_k = \frac{a}{k^{2/3}}, 1 \le a \le 5, k \in N\right\}$
4.11	2	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): x_k = \frac{\sin \alpha k}{(\sqrt{2})^k}, 1 \le \alpha < 2, k \in N\right\}$
4.12	1	$\{(x_1, x_2, x_3, \dots): x_1 = \alpha, x_2 = x_3 = \dots = 0, 1 \le \alpha < 10\}$
4.13	2	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): x_{2k} = 0, x_{2k+1} = \frac{1}{1+\alpha k}, 1 \le \alpha \le 2, k \in N\right\}$
4.14	2	$\left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): x_1 = 1, x_k > 0, x_{k+1} \le \frac{1}{2} x_k, k \in N\right\}$

Решение задачи 4.14. Из условий задачи следует, что

$$x_1 = 1, \quad 0 < x_2 \le \frac{1}{2^1}, \quad 0 < x_3 \le \frac{1}{2^2}, \dots, \quad 0 < x_k \le \frac{1}{2^{k-1}}, \dots$$

т.е. имеем $\mathbf{M} \subset \mathbf{M_1} = \left\{(x_1, x_2, x_3, \dots): 0 < x_k \le \frac{1}{2^{k-1}}\right\}$.

Покажем, что $\mathbf{M_1}$ предкомпактно в полном метрическом пространстве l_2. Для этого применим критерий предкомпактности (теорема 6 без условия (1)). Поскольку $\forall x \in \mathbf{M_1}$ $\rho(0,x)=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2(k-1)}}\right)^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} < 2$, то $\mathbf{M_1} \subset B(0,2)$ и, следовательно, оно ограничено.

Проверим условие (2) теоремы 6. Для любого $x \in \mathbf{M_1}$ $I_{n_0} = \left(\sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{1/2} \le$

$\le \left(\sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^{2(k-1)}}\right)^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{2^{n_0}}$. Поэтому, для любого $\varepsilon > 0$ достаточно взять n_0 таким, чтобы $\frac{2}{\sqrt{3}}2^{-n_0} < \varepsilon$ (например, $n_0 = \left[\log_2 \frac{2}{\varepsilon\sqrt{3}}\right] + 1$). Тогда $\forall x \in \mathbf{M}$ $I_{n_0} < \varepsilon$, и условие (2) выполняется, т.е. $\mathbf{M_1}$ — предкомпактно. Так как каждое подмножество предкомпактного множества предкомпактно то $\mathbf{M}$ — предкомпактно.

Приведем другое доказательство предкомпактности $\mathbf{M}$, которое основано на теореме 4. Согласно этой теореме достаточно показать вполне ограниченность множества $\mathbf{M}$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем n так, что $2^{-n+1} < \varepsilon/2$ (например, $n = \left[\log_2 \frac{2}{\varepsilon}\right] + 2$).Рассмотрим множество

$$\mathbf{M}^* = \{x^n = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...) : (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \mathbf{M}\}.$$

Множество точек $\mathbf{M}^*$ вполне ограниченно как множество, изометричное ограниченному множеству из $\mathbf{R}^n$. Значит, для него существует конечная $\varepsilon/2$-сеть. Но для $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \mathbf{M}$ и $x^n := (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...) \in \mathbf{M}^*$

$$\rho(x, x^n) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{4^k}\right)^{1/2} < \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon/2 .$$

Поэтому данная $\varepsilon/2$ – сеть $\mathbf{M}^*$ будет ε-сетью во всем $\mathbf{M}$, т.е. $\mathbf{M}$ — вполне ограничено.

Укажем теперь ε-сеть множества $\mathbf{M}$ для $\varepsilon = \frac{1}{10}$. В этом случае $n = [\log_2 20] + 2 = 6$, и нужно построить конечную $\varepsilon/2$-сеть в множестве

$$\mathbf{M}^* = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_6, 0, 0, \ldots) : 0 < x_k \le \frac{1}{2^{k-1}}, k = 2,3\ldots6; x_1 = 1,0\right\}/$$

Ею будет множество точек вида $y = \left(1, \frac{j_0}{50}, \frac{j_1}{50}, \frac{j_2}{50}, \frac{j_3}{50}, \frac{j_4}{50}, 0, 0, \ldots\right)$, где $j_0 = 1,\ldots,5;\ j_1 = 1,\ldots,13,\ j_2 = 1,\ldots,8;\ j_3 = 1,\ldots,4;\ j_4 = 1,2$ (индексы j_k пробегают свои значения независимо друг от друга) ●

5. Является ли отображение f метрического пространства X в себя сжимающим? Найти x_4, где $x_0 = 0, x_{k+1} = f(x_k)$ и оценить расстояние x_4 до неподвижной точки отображения f.

	X	f
5.1	$C[0,1]$	$f(x)(t) = \frac{1}{4}x(t) + 1$
5.2	$C[-1,1]$	$f(x)(t) = \frac{1}{2}x(t^2) + t$
5.3	l_2	$f(x) = \left(1, \frac{x_2}{3}, \frac{x_3}{4}, \ldots\right)$
5.4	l_1	$f(x) = \left(1, \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{8}, 0, 0, \ldots\right)$
5.5	c_0	$f(x) = \left(1, \frac{x_2}{2}, 0, \frac{x_4}{2}, 0, \frac{x_6}{2}, \ldots\right)$
5.6	c	$f(x) = \left(\frac{x_1}{4}, 1, 0, 0, \ldots\right)$
5.7	$L_2[0,1]$	$f(x)(t) = \frac{1}{8}x(\sqrt{t}) + 1$
5.8	$L_2[0,1]$	$f(x)(t) = \frac{1}{4}x(\sqrt[3]{t}) + 1$
5.9	l_∞	$f(x) = \left(1, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{4}, 0, 0, \ldots\right)$
5.10	l_3	$f(x) = \left(1, \frac{x_1}{4}, \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{4}, \ldots\right)$
5.11	$C[0,1]$	$f(x)(t) = \frac{1}{5}\sin x(t) + \sin t$
5.12	$C^{(1)}[0,1]$	$f(x)(t) = \frac{1}{6}x(t^2) + 1$
5.13	$C^{(1)}_{[0,1]}$	$f(x)(t) = \frac{1}{8}tx(t) + t$

5.14	l_4	$f(x) = \left(1, \frac{x_3}{5}, \frac{x_4}{6}, \frac{x_5}{7}, \ldots\right)$
5.15	l_2	$f(x) = \left(1, \frac{x_1}{2}, 0, \frac{x_3}{4}, 0, \frac{x_5}{6}, \ldots\right)$

Решение задачи 5.15. Пусть $x, y \in l_2$. Тогда

$$\rho(f(x), f(y)) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_{2n-1}}{2n} - \frac{y_{2n-1}}{2n}\right|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n-1} - y_{2n-1}|^2\right)^{1/2} \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\rho(x, y).$$

Следовательно, $\alpha = \frac{1}{2}$ и отображение f является сжимающим в l_2. Найдем

$$x^1, x^2, x^3, x^4\colon\ x^1 = f(x_0) = (1,0,0,\ldots);\ x^2 = f(x^1) = (1,\frac{1}{2},0,0,\ldots);$$

$$x^3 = f(x^2) = (1,\frac{1}{2},0,0,\ldots) \text{ и } x^4 = f(x^3) = (1,\frac{1}{2},0,0,\ldots).$$

Отсюда следует, что неподвижной точкой отображения f является точка $b = x^4$ $(x^4 = f(x^4))$, и поэтому $\rho(x^4, b) = 0$ ●

Заметим, что для оценки расстояния точки x_n от неподвижной точки b применимо неравенство $\rho(x_n, b) \leq \frac{\alpha^4}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1)$.

Варианты задания

Вариант 1	1.1	2.15	3.5	4.10	5.8
Вариант 2	1.2	2.14	3.6	4.9	5.9
Вариант 3	1.3	2.13	3.7	4.8	5.10
Вариант 4	1.4	2.12	3.8	4.7	5.11
Вариант 5	1.5	2.11	3.9	4.6	5.12
Вариант 6	1.6	2.10	3.10	4.5	5.13
Вариант 7	1.7	2.9	3.11	4.4	5.14
Вариант 8	1.8	2.8	3.12	4.3	5.1
Вариант 9	1.9	2.7	3.13	4.2	5.2
Вариант 10	1.10	2.6	3.14	4.1	5.3
Вариант 11	1.11	2.5	3.1	4.11	5.4
Вариант 12	1.12	2.4	3.2	4.12	5.5

Вариант 13	1.13	2.3	3.3	4.13	5.6
Вариант 14	1.14	2.2	3.4	4.1	5.7
Вариант 15	1.13	2.1	3.5	4.2	5.6
Вариант 16	1.12	2.2	3.6	4.3	5.7
Вариант 17	1.11	2.3	3.7	4.4	5.8
Вариант 18	1.10	2.4	3.8	4.5	5.9
Вариант 19	1.9	2.5	3.9	4.6	5.10
Вариант 20	1.8	2.6	3.10	4.7	5.11
Вариант 21	1.7	2.7	3.11	4.8	5.12
Вариант 22	1.6	2.8	3.12	4.9	5.13
Вариант 23	1.5	2.9	3.13	4.10	5.14
Вариант 24	1.4	2.10	3.14	4.11	5.1
Вариант 25	1.3	2.11	3.15	4.12	5.2
Вариант 26	1.2	2.12	3.1	4.13	5.3

3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что сходящаяся последовательность в метрическом пространстве имеет только один предел.

2. Показать, что на множестве натуральных чисел **N** функция

$$\rho(m,n) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{m+n}, & m \neq 0 \\ 0, & m = n \end{cases}$$

является метрикой, и что метрическое пространство (**N**,ρ) является полным.

Указать в этом пространстве последовательность замкнутых вложенных шаров с пустым пересечением (сравните с теоремой 2).

3. Пусть ρ — метрика на множестве *X*. Доказать, что функция $\rho(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ тоже является метрикой на *X*.

Пусть *X* — непустое множество. Числовая функция ρ на $X \times X$ называется *квазиметрикой* на *X*, если она удовлетворяет всем условиям метрики, кроме, может быть, условия: $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

4. Пусть $(\rho_n)_{n=1}^{\infty}$ −последовательность квазиметрик на *X* и пусть для любых $x \neq y$ найдется такое n, что $\rho_n(x,y) > 0$. Доказать, что функция $\rho(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{-n}\rho_n(x,y)}{1+\rho_n(x,y)}$ является метрикой на *X*.

5. Пусть X — множество. Обозначим через $B(X)$ множество всех ограниченных числовых функций на X. Доказать, что формула $\rho(f,g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in X\}$ определяет метрику на $B(X)$.

6. Доказать, что метрическое пространство $B(X)$ из предыдущей задачи полно.

7. Доказать, что замкнутое подпространство полного метрического пространства полно.

8. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство.

8.1. Показать, что для любого $z \in X$ числовая функция $f_z(t) = \rho(t,z) - \rho(t,0)$ $(t \in X)$ ограничена на X (другими словами $f_z \in B(X)$).

8.2. Обозначим через π отображение метрического пространства (X,ρ) в метрическое пространство $B(X)$ (из задачи 5), определяемое формулой $\pi(z) = f_z$ $(z \in X)$. Доказать, что для любых z_1, z_2 из X выполняется равенство $\rho(\pi(z_1), \pi(z_2)) = \rho(z_1, z_2)$

8.3. Вывести из задач 5-8 теорему о существовании пополнения для метрических пространств.

9. Пусть метрическое пространство X таково, что для любого $\varepsilon > 0$ в нем существует конечная ε-сеть. Доказать, что пополнение пространства X является компактным метрическим пространством .

10. Доказать, что сжимающее отображение метрического пространства в себя является непрерывным отображением.

11. Доказать, что отображение $f(x) = \dfrac{1}{2}x$ является сжатием подпространства $]0,1]$ числовой прямой **R**, но что это отображение не имеет неподвижной точки .

12. Показать, что для отображения $f(x) = \sin x$ числовой прямой в себя неравенство $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x,y)$ выполняется для любых x, y из **R**, $x \neq y$, и что отображение f не является сжатием.

13. Пусть f и g — два отображения метрического пространства (X,ρ) в себя такие, что f коммутирует с g (т.е. $f \circ g = g \circ f$), а g имеет единственную неподвижную точку. Доказать, что отображение f имеет неподвижную точку.

ТЕМА 2

ЛИНЕЙНЫЕ И НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ.

Определение 1. Непустое множество L называется **линейным (векторным) пространством** над полем $\boldsymbol{K}$, если определены два отображения из $L \times L$ в L и из $\boldsymbol{K} \times L$ в L, называемые сложением и умножением на скаляры соответственно, удовлетворяющие следующим свойствам для любых $x, y \in L$, $\lambda, \mu \in K$:

L есть коммутативная группа по сложению;

$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

$1 \cdot x = x$.

Элементы линейного пространства называются точками или векторами.

Всюду ниже $\boldsymbol{K}$ будет равно **R** или **C**. В этом случае L называют соответственно вещественным или комплексным пространством.

Определение 2. Конечная система векторов $\{x_k \mid 1 \le k \le n\} \subset L$ называется **линейно независимой,** если равенство $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$ влечет равенства $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ В противном случае система $\{x_k \mid 1 \le k \le n\}$ называется **линейно зависимой.**

Определение 3. Бесконечная система векторов называется линейно независимой, если каждая ее конечная подсистема линейно независима.

Определение 4. Линейное пространство L называется **бесконечномерным** (пишут $\dim L = \infty$), если в L существует бесконечная линейно независимая система.

Определение 5. Пусть M есть подпространство линейного пространства L. Для элементов $x, y \in L$ будем писать $x \sim y$, если $x - y \in M$. Это отношение эквивалентности на L. Класс эквивалентности элемента x есть $\tilde{x} = x + M = \{x + m \mid m \in M\}$.

Множество L/M классов эквивалентности элементов из L является линейным пространством над $\boldsymbol{K}$ относительно операций $\tilde{x} + \tilde{y} = x + y + M$, $\lambda\tilde{x} = \lambda x + M$. Оно называется **фактор-пространством** пространства L по подпространству M.

Определение 6. Подмножество A линейного пространства L называется **выпуклым,** если $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ для любых $x, y \in A$ и любого $\lambda \in [0,1]$.

Определение 7. Отображение $p\colon L \to \mathbf{R}_+$, где L — линейное пространство над полем $\boldsymbol{K}$, называется **нормой,** если при любых $x, y \in L$ и любом $\lambda \in \boldsymbol{K}$ выполняются следующие соотношения :

$p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

$p(x + y) \le p(x) + p(y)$ (неравенство треугольника).

Как правило, вместо $p(x)$ пишут $\|x\|$. Каждое нормированное пространство $(L, \|\cdot\|)$ является метрическим относительно метрики $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Определение 8. Полное нормированное пространство, т.е. такое линейное пространство, наделенное нормой, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится, называется **банаховым** пространством.

Определение 9. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, заданные на одном и том же линейном пространстве L, называются **эквивалентными,** если найдутся такие числа $a, b > 0$, что при всех $x \in L$ выполняются неравенства $a\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le b\|x\|_1$.

Смысл этого понятия в том, что топологии, порождаемые этими нормами, совпадают. Другими словами, $x_n \to x$ по норме $\|\cdot\|_1$ тогда и только тогда, когда $x_n \to x$ по норме $\|\cdot\|_2$ $(x_n, x \in L)$ (проверьте !)

Литература : [1], с. 136-139, 157-161 ; [2], с. 114-125, 131-134.

2. З А Д А Ч И.

1. Являются ли векторными пространствами над **R** или **C** (укажите, над какими именно) следующие множества с естественными алгебраическими операциями:

1.1. Множество l_1 вещественных последовательностей (x_n), удовлетворяющих условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$.

1.2. Множество M_α вещественнозначных непрерывных на **R** функций, принимающих в точке 0 значение α.

1.3. Множество всех монотонных (в нестрогом смысле) функций на **R**.

1.4. Множество $C[a,b]$ комплекснозначных непрерывных функций на отрезке $[a,b]$.

1.5. Множество C_α всех вещественнозначных непрерывных функций x на отрезке [0,1], удовлетворяющих условию $\int\limits_0^1 x(t)dt = \alpha$.

1.6. Множество l_2 всех вещественных последовательностей (x_n) таких, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$.

1.7. Множество $C^{(n)}[a,b]$ всех вещественнозначных n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций.

1.8. Множество c всех сходящихся комплексных последовательностей (x_n).

1.9. Множество $C^{\infty}(\boldsymbol{R})$ всех вещественнозначных бесконечно дифференцируемых функций на **R**.

1.10. Множество l_{∞} всех ограниченных вещественнозначных последовательностей (x_n).

1.11. Множество $B(\boldsymbol{R})$ всех ограниченных функций $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$.

1.12. Множество c_0 всех вещественнозначных последовательностей (x_n), таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

1.13. Множество $D(\boldsymbol{R})$ всех вещественнозначных бесконечно дифференцируемых на **R** финитных (равных нулю вне некоторого отрезка, своего для каждой функции) функций.

1.14. Множество k всех комплексных последовательностей (x_n) таких, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n|}{n}<\infty$.

2. Будут ли следующие линейные пространства бесконечномерными (обозначения см. в задаче 1)?

2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
$D(\boldsymbol{R})$	c_0	$B(\boldsymbol{R})$	l_{∞}	$C^{\infty}(\boldsymbol{R})$
2.6	2.7	2.8	2.9	2.10
c	$C^{(1)}[a,b]$	l_2	C_0 из зад. 1.5	l_1
2.11	2.12	2.13	2.14	2.15
M_0 из зад. 1.2	$C[a,b]$	k из зад. 1.14	$L_1[0,2]$	$L_2[0,1]$

Решение задачи 2.15. Докажем, что $\dim L_2[0,1]=\infty$. В соответствии с определением 4 достаточно привести пример бесконечной линейно независимой последовательности функций из $L_2[0,1]$. Укажем даже континуум функций с таким свойством. Для любого $a\in(0,1)$ пусть x_a обозначает характеристическую функцию интервала $(0,a)$. Тогда система $\{x_a \,|\, a\in(0,1)\}\subset L_2[0,1]$ линейно независима.

В самом деле, если числа $a_1<a_2<\ldots<a_n$ принадлежат (0,1) и $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in K$ таковы что $\lambda_1 x_{a_1}(t)+\lambda_2 x_{a_2}(t)+\ldots+\lambda_n x_{a_n}(t)=0$ при почти всех $t\in[0,1]$, то, выбирая t последовательно из интервалов (a_{k-1},a_k) (где a_0=0, a_n = 1), получим

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n=0\\ \qquad \lambda_2+...+\lambda_n=0\\ \qquad\qquad ....\\ \qquad\qquad\qquad \lambda_n=0\end{cases},$$

откуда $\lambda_n=\lambda_{n-1}=...=\lambda_1=0$, что и требовалось доказать. ●

3. Вычислите фактор-пространство L/M, где

	L	M
3.1	$C[-1,1]$	$\{x\in C[-1,1] \mid x(t)=0, t\in[0,1]\}$
3.2	l_2	$\{x\in l_2 \mid x_1=x_3=...=x_{2n-1}=...=0\}$
3.3	$C[0,1]$	$\{x\in C[0,1] \mid x(0)=0\}$
3.4	c	$\{x\in c \mid x_1=x_2=0\}$
3.5	$C^{\infty}[0,1]$	$\{x\in C^{\infty}[0,1] \mid x(0)=x'(0)=0\}$
3.6	l_1	$\{x\in l_1 \mid x_1+x_2=0\}$
3.7	$C^{(1)}[a,b]$	$\{x\in C^{(1)}[a,b] \mid x(a)=x(b)\}$
3.8	l_{∞}	$\{x\in l_{\infty} \mid x_1=x_3=0\}$
3.9	$C^{(2)}[0,1]$	$\{x\in C^{(2)}[0,1] \mid x''(0)=0\}$
3.10	$C[0,1]$	$\left\{x\in C[0,1] \,\middle\vert\, \int_0^1 x(t)dt=0\right\}$
3.11	c_0	$\{x\in c_0 \mid x_1+x_2+x_3=0\}$
3.12	$B([0,2])$	$\{x\in B([0,2]) \mid x(t)=0, t\in[0,1]\}$
3.13	$L_1[-1,1]$	$\left\{x\in L_1[-1,1] \,\middle\vert\, \int_{[-1,1]} x(t)dt=0\right\}$
3.14	$L_2\,[0,1]$	$\left\{x\in L_2[0,1] \,\middle\vert\, \int_0^1 e^t x(t)dt=0\right\}$
3.15	l_2	$\{x\in l_2 \mid x_1=x_2\}$

Решение задачи 3.15. Пусть $x\in l_2$, $\tilde{x}$ — его класс эквивалентности. Имеем $y\in\tilde{x} \Leftrightarrow x-y\in M \Leftrightarrow x_1-y_1=x_2-y_2 \Leftrightarrow x_1-x_2 \Leftrightarrow y_1-y_2$ Итак, для всех элементов $y\in\tilde{x}$, и только для них, разность y_1-y_2 одинакова и равна x_1-x_2. Поэтому естественно рассмотреть отображение $f: l_2 / M \to K, f(\tilde{x}) = x_1 - x_2$ Из сказанного следует, что f инъективно (почему?). Очевидно также, что f — сюръективно. Таким образом, f — биективное отображение. Легко проверяемые равенства $f(\tilde{x} + \tilde{z}) = f(\tilde{x}) + f(\tilde{z}), f(\lambda\tilde{x}) = \lambda f(\tilde{x})$ показывают теперь, что f есть изоморфизм пространств l_2 / M и $\boldsymbol{K}$. Итак, l_2 / M изоморфно $\boldsymbol{K}$. ●

4. Проверьте, является ли функция p нормой в пространстве X.

	X	$p(x)$
4.1	$C^{(n)}[0,1]$	$\sum\limits_{k=0}^{n} \max\limits_{0 \le t \le 1} \lvert x^{(k)}(t) \rvert$
4.2	l_∞	$\sup\{\lvert x_n \rvert \mid n \in \boldsymbol{N}\}$
4.3	$B(\boldsymbol{R})$	$\sup\{\lvert x(t) \rvert \mid t \in \boldsymbol{R}\}$
4.4	$C[0,1]$	$\int\limits_0^1 \lvert x(t) \rvert dt$
4.5	l_1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1} \lvert x_n \rvert$
4.6	$C^{(1)}[a,b]$	$\lvert x(a) \rvert + \max\{\lvert x'(t) \rvert \mid t \in [a,b]\}$
4.7	c_0	$\sup\{\lvert x_n \rvert \mid n \in \boldsymbol{N}\}$
4.8	$C^{(1)}[a,b]$	$\int\limits_0^1 \lvert x(t) \rvert dt + \max\{\lvert x'(t) \rvert \mid t \in [a,b]\}$
4.9	c	$\sup\{n^{-1} \lvert x_n \rvert \mid n \in N\}$
4.10	$\mathbf{R}^n$	$\sum\limits_{k=1}^{n} \lvert x_k \rvert$
4.11	$D(\boldsymbol{R})$	$\sup\{\lvert x(t) \rvert \mid t \in \boldsymbol{R}\}$
4.12	$C^{(1)}[a,b]$	$\max\{\lvert x'(t) \rvert \mid t \in [a,b]\}$
4.13	$C^{(2)}[0,1]$	$\max\{\lvert x''(t) \rvert \mid t \in [0,1]\}$
4.14	$C^{(1)}[0,1]$	$\lvert x(0) \rvert + \max\{\lvert x''(t) \rvert \mid t \in [0,1]\}$
4.15	$C^{(2)}[0,1]$	$\lvert x(0) \rvert + \lvert x(1) \rvert + \max\{\lvert x''(t) \rvert \mid t \in [0,1]\}$

Решение задачи 4.15. Легко проверить, что каждое слагаемое обладает свойствами 2) и 3) определения 7 (проверьте). Следовательно, и функция p обладает этими свойствами. Очевидно также, что $p(0) = 0$. Пусть наконец, $p(x) = 0$. Тогда $x(0) = x(1) = x''(t) = 0 \ \ (t \in [0,1])$. Последнее равенство означает, что $x(t) = kt + b$

— линейная функция. С учетом равенств $x(0)=x(1)=0$ отсюда следует, что $x=0$. Итак данная функция является нормой в пространстве $C^{(2)}[0,1]$. ●

5. Приведите пример последовательности $(x_n)\subset X\cap Y$, сходящейся в X, но не сходящейся в Y (пространства X и Y наделены естественными нормами).

	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5
X	c_0	l_∞	l_∞	$C^{(1)}[0,1]$	c_0
Y	l_1	l_1	l_2	$C^{(2)}[0,1]$	l_4
	5.6	5.7	5.8	5.9	5.10
X	$L_1[0,1]$	c	c	$C[0,1]$	$L_1[0,1]$
Y	$L_2[0,1]$	l_1	l_2	$C^{(2)}[0,1]$	$C[0,1]$
	5.11	5.12	5.13	5.14	5.15
X	l_2	$L_2[0,1]$	$L_1[0,1]$	c_0	$C[0,1]$
Y	l_1	$C[0,1]$	$C^{(1)}[0,1]$	l_2	$C^{(1)}[0,1]$

Решение задачи 5.15. Рассмотрим последовательность $x_n(t)=\dfrac{1}{n}t^n\in$ $\in C[0,1]\cap C^{(1)}[0,1]$. Тогда $\|x_n-0\|_c=\max\left\{\dfrac{t^n}{n}\ \middle|\ t\in[0,1]\right\}=\dfrac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$, т.е. $x_n\to 0$ по норме пространства $C[0,1]$. Поскольку $\|x_n-0\|_{c^1}=\max\left\{\dfrac{t^n}{n}\ \middle|\ t\in[0,1]\right\}+\max\left\{t^{n-1}\ \middle|\ t\in[0,1]\right\}=\dfrac{1}{n}+1\to 1$ при $n\to\infty$, то x_n не сходится к нулю в $C^{(1)}[0,1]$. Предположим теперь, что $\|x_n-a\|_{c^1}\to 0$ при некотором $a\in C^{(1)}[0,1]$. Так как $a\in C[0,1]$ и $\|x_n-a\|_c\le\|x_n-a\|_{c^1}$, то отсюда следует, что $x_n\to a$ в $C[0,1]$. В силу единственности предела имеем $a=0$, что противоречит доказанному выше. ●

6. Будут ли эквивалентны нормы p и q в пространстве E?

	E	p	q
6.1	l_1	$\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\lvert x_n\rvert$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert x_n\rvert$
6.2	l_2	$\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\lvert x_n\rvert$	$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert x_n\rvert^2\right)^{1/2}$

6.3	$C[0,1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]} \lvert x(f)\rvert$	$\left(\int_0^1 \lvert x(t)\rvert^2 dt\right)^{1/2}$
6.4	$L_2[0,1]$	$\int_{[0,1]} \lvert x(f)\rvert dt$	$\left(\int_{[0,1]} \lvert x(t)\rvert^2 dt\right)^{1/2}$
6.5	$C^{(1)}[0,1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]} \lvert x(t)\rvert$	$\lvert x(0)\rvert + \max\limits_{t\in[0,1]} \lvert x'(t)\rvert$
6.6	$C^{(1)}[0,1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]} \lvert x(t)\rvert + \max\limits_{t\in[0,1]} \lvert x'(t)$	$\int_0^1 \lvert x(t)\rvert dt$
6.7	c	$\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} \lvert x_n\rvert$	$\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} \dfrac{n\lvert x_n\rvert}{n+1}$
6.8	$\mathbf{R}^n$	$\sup\limits_{1\le k\le n} \lvert x_k\rvert$	$\sum\limits_{k=1}^{n} \lvert x_k\rvert$
6.9	$\mathbf{C}^n$	$\sup\limits_{1\le k\le n} \lvert x_k\rvert$	$\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lvert x_k\rvert^2\right)^{1/2}$
6.10	$\mathbf{R}^n$	$\sum\limits_{k=1}^{n} \lvert x_k\rvert$	$\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k{}^2\right)^{1/2}$
6.11	$C^{(1)}[0,1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]} \lvert x(t)\rvert$	$\max\limits_{t\in[0,1]} \lvert x(t)\rvert + \max\limits_{t\in[0,1]} \lvert x'(t)\rvert$
6.12	$L_2[0,1]$	$\int_{[0,1]} \lvert x(t)\rvert dt$	$\int_{[0,1]} e^t \lvert x(t)\rvert dt$
6.13	$C^{(2)}[0,1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]} \lvert x(t)\rvert$	$\sum\limits_{k=0}^{2} \max \lvert x^k(t)\rvert$
6.14	$C[0,1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]} \lvert x(t)\rvert$	$\lvert x(0)\rvert + \max\limits_{t\in[0,1]} \lvert x(t)\rvert$
6.15	$C[0,1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]} \lvert x(t)\rvert$	$\int_0^1 \lvert x(t)\rvert dt$

Решение задачи 6.15. Предположим, с целью получить противоречие, что при некотором $b > 0$ неравенство $p(x) \le bq(x)$ верно при всех $x\in C[0,1]$. Полагая здесь $x(t) = t^b$, получаем неверное неравенство $1 \le \dfrac{b}{b+1}$. Итак, эти нормы не эквивалентны.

Другой способ решения этой задачи состоит в указании последовательности, сходящейся по одной норме, но расходящейся по другой. Например, этим условием удовлетворяет последовательность $x_n(t) = t^n$. ●

7. Будет ли множество A выпуклым в пространстве X ?

	X	A
7.1	$C[0,1]$	неубывающие функции
7.2	l_2	$\{x \in l_2 \mid \lvert x_n\rvert < 2^{-n}, n \in \boldsymbol{N}\}$
7.3	$C[a,b]$	многочлены степени n
7.4	l_1	$\left\{x \in l_1 \mid \lvert x_n\rvert \le \frac{1}{n^2}, n \in \boldsymbol{N}\right\}$
7.5	$C^{(1)}[0,1]$	многочлены степени $\le k$
7.6	$L_1[0,1]$	$\left\{x \in L_1[0,1] \mid \int\limits_{[0,1]} t\lvert x(t)\rvert dt \le 1\right\}$
7.7	$C^{(1)}[a,b]$	$\{x \in C^{(1)}[a,b] \mid \lvert x(t)\rvert + \lvert x'(t)\rvert \le 1, t \in [a,b]\}$
7.8	c_0	$\{x \in l_2 \mid \lvert x_1\rvert + \lvert x_2\rvert \le 1\}$
7.9	$C^{(2)}[0,1]$	$\{x \in C^{(3)}[0,1] \mid x(0) = \alpha, \max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert \le 1\}$
7.10	l_1	$\left\{x \in l_1 \mid \sum\limits_{k=1}^{\infty} n\lvert x_n\rvert \le 1\right\}$
7.11	$C[0,1]$	$\left\{x \in C_{[0,1]} \mid \int\limits_0^1 \lvert x(t)\rvert^2 dt \le 1\right\}$
7.12	l_2	$\left\{x \in l_2 \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\lvert x_n\rvert^2 < 1\right\}$
7.13	l_∞	$\left\{x \in c \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\lvert x_n\rvert}{n^2} \le 1\right\}$
7.14	$C^{(1)}[a,b]$	$\{x \in C^{(2)}[a,b] \mid \lvert x(a)\rvert + \lvert x'(t)\rvert \le 1\ ,\ t \in [a,b]\}$
7.15	$L_2[0,1]$	$\left\{x \in L_3[0,1] \mid \int\limits_{[0,1]} t^2\lvert x(t)\rvert^2 dt \le 2\right\}$

Решение задачи 7.15. Прежде всего заметим, что $A \subset L_2[0,1]$, так как $L_3[0,1] \subset L_2[0,1]$ (см. зад. 5.10 из лабораторной работы 6). Далее, если $x,y \in A$, то при любом $\lambda \in [0,1]$ $\lambda x + (1-\lambda)y \in L_3[0,1]$, поскольку $L_3[0,1]$ есть линейное пространство, и с учетом неравенства имеем

$$\left(\int\limits_{[0,1]} t^2 \,|\lambda x(t) + (1-\lambda)y(t)|^2 dt\right)^{1/2} = \left(\int\limits_{[0,1]} |t\lambda x(t) + t(1-\lambda)y(t)|^2 dt\right)^{1/2} \le$$

$$\lambda\left(\int\limits_{[0,1]} t^2 \,|\lambda x(t)|^2 dt\right)^{1/2} + (1-\lambda)\left(\int\limits_{[0,1]} t^2 \,|y(t)|^2\, dt\right)^{1/2} \le \lambda\sqrt{2} + (1-\lambda)\sqrt{2} = \sqrt{2}\,.$$

Отсюда $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$, т.е. множество A выпукло. ●

Варианты задания

Вариант 1	1.13	2.2	3.3	4.12	5.4	6.7	7.1
Вариант 2	1.11	2.3	3.4	4.10	5.12	6.6	7.2
Вариант 3	1.10	2.4	3.5	4.2	5.11	6.1	7.3
Вариант 4	1.9	2.7	3.6	4.3	5.1	6.8	7.4
Вариант 5	1.8	2.5	3.7	4.1	5.2	6.14	7.5
Вариант 6	1.7	2.6	3.8	4.4	5.3	6.13	7.6
Вариант 7	1.6	2.10	3.9	4.8	5.5	6.12	7.7
Вариант 8	1.5	2.11	3.10	4.9	5.6	6.2	7.8
Вариант 9	1.4	2.12	3.11	4.13	5.8	6.3	7.9
Вариант 10	1.3	2.13	3.2	4.14	5.9	6.5	7.10
Вариант 11	1.2	2.8	3.1	4.11	5.10	6.4	7.11
Вариант 12	1.1	2.9	3.12	4.2	5.7	6.3	7.12
Вариант 13	1.14	2.14	3.14	4.14	5.14	6.14	7.14
Вариант 14	1.13	2.13	3.13	4.13	5.13	6.13	7.13
Вариант 15	1.12	2.12	3.12	4.12	5.12	6.12	7.12
Вариант 16	1.11	2.11	3.11	4.11	5.11	6.11	7.11
Вариант 17	1.10	2.10	3.10	4.10	5.10	6.10	7.10
Вариант 18	1.9	2.9	3.9	4.9	5.9	6.9	7.9
Вариант 19	1.8	2.8	3.8	4.8	5.8	6.8	7.8
Вариант 20	1.7	2.7	3.7	4.7	5.7	6.7	7.7
Вариант 21	1.6	2.6	3.6	4.6	5.6	6.6	7.6
Вариант 22	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5
Вариант 23	1.4	2.4	3.4	4.4	5.4	6.4	7.4
Вариант 24	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3	7.3
Вариант 25	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2

3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ.

14. В пространстве $C[0,1]$ указать бесконечную систему линейно независимых функций , которая несчетна.

15. Доказать , что пересечение любого числа выпуклых множеств выпукло . Всегда ли выпукло объединение выпуклых множеств?
16. Справедливо ли равенство $\lambda A+\mu A=(\lambda+\mu)A$, где λ,μ — числа, A - подмножество линейного пространства? Показать , что если A выпукло и $\lambda\geq 0,\mu\geq 0$, то $\lambda A+\mu A=(\lambda+\mu)A$.
17. Пусть A и B выпуклы . Показать , что $\alpha A+\beta B$ выпукло для любых чисел α,β .
18. Пусть E — нормированное пространство. Доказать, что отображения $(x,y)\to x+y$ и $(\lambda,x)\to\lambda x$ непрерывны.
19. Доказать , что две нормы на линейном пространстве эквивалентны тогда и только тогда, когда они порождают одну и ту же топологию.
20. Доказать, что $C^{(1)}[0,1]$ — незамкнутое подпространство в $C[0,1]$.
21. Доказать, что все нормы на $\mathbf{R}^n$ эквивалентны.
22. Доказать, что конечномерное подпространство нормированного пространства замкнуто.
23. Доказать, что нормированное пространство E является банаховым тогда и только тогда, когда всякий ряд $\sum x_i$ для которого $\sum\|x_i\|<\infty$ сходится в E.

ТЕМА 3

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. НОРМА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА И ФУНКЦИОНАЛА

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

Определение 1. Пусть E_1 и E_2 — векторные пространства над одним и тем же полем K ($\mathrm{K}=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$). Отображение $\mathrm{A}:\mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_2$ с областью определения $D(\mathrm{A}) \subset \mathrm{E}_1$ и областью значений $R(\mathrm{A}) \subset \mathrm{E}_2$ называется **линейным оператором** из E_1 в E_2, если для любого $x, y \in \mathrm{E}_1$ и $\lambda \in \mathrm{K}$:

1) $\mathrm{A}(x+y) = \mathrm{A}x + \mathrm{A}y$ (аддитивность);

2) $\mathrm{A}(\lambda x) = \lambda \mathrm{A}x$ (однородность).

Обозначим через $\mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ множество всех линейных операторов из E_1 в E_2, область определения которых совпадает с E_1. Для $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ и $\lambda \in \mathrm{K}$ определим операторы $\mathrm{A}+\mathrm{B}, \lambda\mathrm{A} \in \mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ формулами :

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})x := \mathrm{A}x + \mathrm{B}x\,;\,(\lambda\cdot\mathrm{A})x := \lambda\cdot\mathrm{A}x\,.$$

Тогда $\mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ становится векторным пространством. В частном случае, когда $\mathrm{E}_2 = \mathrm{K}$ (поле K является векторным пространством), элементы $\mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1,\mathrm{K})$ называется линейными функционалами на E_1.

Пусть теперь на E_i определены нормы $\|\cdot\|_i (i=1,2)$, т.е. $\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2$ — нормированные пространства ($\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2 \in Norm$).

Определение 2. Оператор $\mathrm{A} \in \mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ называется ограниченным оператором из E_1 в E_2, если существует такая постоянная $c \ge 0$, что для любого $x \in \mathrm{E}_1$ имеет место **неравенство ограниченности**

$$\|\mathrm{A}x\|_2 \le c\|x\|_1.$$

Определение 3. Нормой оператора $\mathrm{A} \in \mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ называется число

$$\|\mathrm{A}\| := \sup_{\|x\|_1 \le 1} \|\mathrm{A}x\|_2\,.$$

Можно показать, что $\|\mathrm{A}\|$ есть наименьшая из всех констант c в неравенстве ограниченности.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\mathrm{A} \in \mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$, *где* $\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2 \in Norm$.

Тогда следующие утверждения эквивалентны :

1) оператор A *является непрерывным оператором из* E_1 *в* E_2;

2) оператор A *является ограниченным оператором из* E_1 *в* E_2;

3) $\|\mathrm{A}\| < +\infty$.

4) оператор A *является непрерывным в точке 0.*

Пусть $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$, где $\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2 \in Norm$. Справедливы соотношения:

1) $\|\mathrm{A}+\mathrm{B}\| \le \|\mathrm{A}\| + \|\mathrm{B}\|$;

2) $\|\lambda \mathrm{A}\| = |\lambda| \cdot \|\mathrm{A}\|$;

3) $\|\mathrm{A}\| \ge 0, \quad \|\mathrm{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{A} = 0$.

Поэтому, если A,B — ограниченные операторы, то операторы $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, $\lambda \cdot \mathrm{A}$ тоже ограничены. Следовательно, если обозначать через $L(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ множество всех линейных ограниченных операторов из E_1 в E_2, то $L(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ является векторным подпространством $\mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$.

ТЕОРЕМА 2. *Если* $\mathrm{E}_1 \in Norm$, *а* E_2 *— банахово* ($\mathrm{E}_2 \in Ban$), *то* $L(\mathrm{E}_2,\mathrm{E}_2) \in Ban$.

Все сказанное относится и к функционалам. В этом случае $\mathrm{E}_2 = \mathrm{K}$, норма на K есть модуль ($\|x\|_2 = |x|$), поэтому функционал $f \in \mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E},\mathrm{K})$ называется ограниченным на $\mathrm{E} \in Norm$, если существует такая постоянная $c \ge 0$, что $|f(x)| \le c\|x\|$ для любых $x \in \mathrm{E}$.

Тогда норма функционала *f* есть число

$$\|f\| := \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)| = \min \{c : \forall x \in \mathrm{E} \; |f(x)| < c\|x\|\}.$$

Так как $\mathrm{K} \in Ban$, то по теореме 2 $L(\mathrm{E},\mathrm{K}) \in Ban$.

Определение 4. Банахово пространство $L(\mathrm{E},\mathrm{K})$, состоящее из линейных ограниченных функционалов на E, будем обозначать через E^* и называть сопряженным пространством к E .

Литература: [1] стр. 179-188, 149-156; [2] стр. 218-253; [5] стр. 98-101.

2. З А Д А Ч И

1. Пусть $\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2 \in Norm$. Найти область определения $D(\mathrm{A}) := \{x \in \mathrm{E}_1 : \exists \mathrm{A}x \in \mathrm{E}_2\}$ оператора A и установить, совпадает ли она с E_1. Выяснить, является ли оператор A линейным ограниченным оператором из $D(\mathrm{A})$ в E_2.

	E_1	E_2	A
1.1	l_∞	c_0	$\mathrm{A}x = x$
1.2	c_0	l_∞	$\mathrm{A}x = x$

1.3	$L_4[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \int_0^1 t^2 x^2(s)ds$
1.4	$L_2[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \lvert x(t)\rvert$
1.5	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = x^2(t)$
1.6	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = (x'(t))^2$
1.7	$C[0,1]$	$C^{(1)}[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = x'(t)$
1.8	$C^{(1)}[0,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \lvert x'(t)\rvert$
1.9	c_0	$\mathbf{R}$	$\mathrm{A}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$
1.10	l_2	l_1	$\mathrm{A}x = (x_1+1, x_2, x_3, \ldots)$
1.11	l_1	l_2	$\mathrm{A}x = (\;, x_2, x_3, \ldots)$
1.12	$L_2[-1,1]$	$L_2[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = x(\sqrt[5]{t})$
1.13	$C[0,1]$	$\mathbf{R}$	$(\mathrm{A}x)(t) = \lvert x'(0) + x(0)\rvert$
1.14	$L_1[-1,1]$	$L_1[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \int_{-1}^{1} tx^2(s)ds$
1.15	$L_1[0,1]$	$L_4[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = x^2(t)$

Решение задачи 1.15. Найдем $D(\mathrm{A}) = \{x \in L_{1[0,1]} : \exists \mathrm{A}x \in L_{4[0,1]}\}$ — область определения оператора A. Поскольку $\|\mathrm{A}x\|_{L_4\{0,1]} = \left(\int_{[0,1]} \left|x^2(t)\right|^4 dt\right) = \left(\int_{[0,1]} |x(t)|^8 dt\right)^{1/4}$, то $D(A)=L_8[0,1] \neq L_1[0,1]$. Итак, область определения оператора A совпадает с нормированным пространством $L_8[0,1]$, отличным от исходного. Проверим линейность A на $D(\mathrm{A})$: возьмем функцию $x \neq 0$ из $L_8[0,1]$. Тогда

$$\mathrm{A}(2x) = 2^2 Ax \neq 2\mathrm{A}x.$$

Поэтому оператор A не является линейным на $D(\mathrm{A})$, а следовательно и ограниченным. ●

В задачах 2-5 выяснить, задает ли данная формула линейный ограниченный оператор $\mathrm{A}: \mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_2$. В случае ограниченности оператора, найти его норму.

2. Оператор умножения

	E_1	E_2	A

2.1	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = (t^2 - t)x(t)$
2.2	$C[-1,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = (t^4 - t^2)x(t)$
2.3	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = t^2 x(t)$
2.4	$L_1[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = (t^2 - t)x(t)$
2.5	$L_2[-1,1]$	$L_2[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = t^2 x(t)$
2.6	$L_2[-1,1]$	$L_1[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = tx(t)$
2.7	$L_3[0,1]$	$L_3[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = (1 - t^2)x(t)$
2.8	$C[-1,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = (t^2 - \lvert t\rvert)x(t)$
2.9	$L_3[-1,1]$	$L_2[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \lvert t\rvert x(t)$
2.10	$C^{(1)}[-1,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \sin \pi t x(t)$
2.11	$L_4[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \sqrt{t}\,x(t)$
2.12	$C[-1,1]$	$C[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \begin{cases} (t^2+1)x(t), & t \in [-1,0[\\ (t^2+4t+1)x(t), & t \in [0,1] \end{cases}$
2.13	$C[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = t^2 x(t)$
2.14	$L_2[-1,1]$	$L_2[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \begin{cases} tx(t), & t \in [0,1] \\ 0, & t \in [-1,0[\end{cases}$

Решение задачи 2.14. Область определения оператора A есть $D(\mathrm{A}) = L_2[-1,1]$, поскольку умножение на непрерывную функцию не выводит из $L_2[-1,1]$ (почему?). Линейность оператора A очевидна. Так как $\forall x \in L_2[-1,1]$

$$\|\mathrm{A}x\|_{L_2[-1,1]} = \left(\int_0^1 |tx(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \le \left(\int_0^1 |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2} = 1\cdot\|x\|_{L_2\{-1,1]},$$

то в качестве константы ограниченности (константы c в определении 2) можно взять 1. Итак, A — ограниченный оператор и $\|\mathrm{A}\| \le 1$.

Пусть $x_n(t) = \sqrt{n}\chi_{[1-\frac{1}{n},1]}(t)$. Тогда $\|x_n\|_{L_2[-1,1]} = 1$ и

$$\|\mathrm{A}\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|\mathrm{A}x\| \ge \sup_n \|\mathrm{A}x_n\| = \sup_n \left(\int_{1-\frac{1}{n}}^{1} \left|\sqrt{n}t\right|^2 dt\right)^{1/2} =$$

$$= \sup_n \sqrt{n} \left(\int_{1-\frac{1}{n}}^{1} t^2 dt \right)^{1/2} = \sup_n \sqrt{\frac{n}{3} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^3 \right\}}^{1/2} = \sup_n \left\{ 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2} \right\}^{1/2} = 1 .$$

Следовательно $\|A\| = 1$ ●

3. Оператор замены переменной

	E_1	E_2	A
3.1	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = t^2 x(\sqrt{t})$
3.2	$C[-1,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = (t^2 - t)x(t^2)$
3.3	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t) = tx(\sqrt{t})$
3.4	$L_2[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t) = x(\sqrt[4]{t})$
3.5	$L_3[-1,1]$	$L_3[-1,1]$	$(Ax)(t) = x(\sqrt[3]{t})$
3.6	$L_3[-1,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t) = t^2 x(t^2)$
3.7	$L_2[-1,1]$	$L_1[-1,1]$	$(Ax)(t) = x(t^2)$
3.8	$C[0,2]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = (t-1)tx(t^2+1)$
3.9	$L_4[0,2]$	$L_4[0,1]$	$(Ax)(t) = tx(t+1)$
3.10	$L_2[-1,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t) = t^2 x(t^2 - 1)$
3.11	$C^{(1)}[0,2]$	$C^{(1)}[0,2]$	$(Ax)(t) = tx(t^2+1)$
3.12	$L_{3/2}[0,1]$	$L_{3/2}[0,1]$	$(Ax)(t) = (t^2 - t)x(\sqrt{t})$
3.13	$L_4[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t) = tx(\sqrt{t})$
3.14	$L_2[-1,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t) = t^2 x(t^2 - 1)$

Решение задачи 3.14. Пусть $x \in L_2[-1,1]$. Тогда

$$\|Ax\|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 t^4 \left| x(t^2 - 1) \right|^2 dt \right)^{1/2} = \begin{bmatrix} u = t^2 - 1 \\ du = 2tdt \\ t = \sqrt{u+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\int_{-1}^{0} (u+1)^2 |x(u)|^2 \frac{du}{2\sqrt{u+1}} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^{0} (u+1)^{3/2} |x(u)|^2 du \right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\int_{-1}^{1}|x(u)|^2\,du\right)^{1/2} \le \frac{\sqrt{2}}{2}\|x\|_{L_2[-1,1]}.$$

Из последнего соотношения следует, что $D(\mathrm{A}) = L_2[-1,1]$. Очевидно, что оператор A линеен, а из доказанного неравенства вытекает, что A ограничен и $\|\mathrm{A}\| \le \frac{\sqrt{2}}{2}$. Рассмотрим последовательность функций $x_n(t) = \sqrt{n}\chi_{[-\frac{1}{n},0]}(t) \in L_2[-1,1]$, $\|x_n\|_{L_2[-1,1]} = 1$. Тогда

$$\|\mathrm{A}\| = \sup_{\|x\|_{L_2[-1,1]}\le 1}\|\mathrm{A}x\|_{L_2[0,1]} \ge \sup_n \|\mathrm{A}x_n\|_{L_2[0,1]} = \sup_n \frac{1}{\sqrt{2}}\left(n\int_{-\frac{1}{n}}^{0}(u+1)^{3/2}\,du\right)^{1/2} =$$

$$= \sup_n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{5/2}\right]^{1/2} = \sup_n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\left[1-\left\{1-\frac{5}{2}\frac{1}{n}+\frac{1}{2!}\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}+1\right)\frac{1}{n^2}-\ldots\right\}\right]^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Итак $\|\mathrm{A}\| \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$. Учитывая предыдущее, имеем $\|\mathrm{A}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ●

4. Операторы в пространствах последовательностей

	E_1	E_2	A
4.1	l_2	l_2	$\mathrm{A}x = (0, x_1, x_2, \ldots)$
4.2	l_3	l_3	$\mathrm{A}x = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$
4.3	c_0	c_0	$\mathrm{A}x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$
4.4	l_4	l_4	$\mathrm{A}x = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right)$
4.5	l_2	l_2	$\mathrm{A}x = \left(0, \frac{x_1}{2^0}, \frac{x_2}{2^1}, \frac{x_3}{2^2}, \ldots\right)$
4.6	l_1	l_1	$\mathrm{A}x = \left(0, 0, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \ldots\right)$
4.7	l_2	l_2	$\mathrm{A}x = \left((1+1)x_1, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x_n, \ldots\right)$
4.8	c	c	$\mathrm{A}x = \left(\frac{1}{1+1}x_1, \ldots, \frac{n}{n+1}x_n, \ldots\right)$

4.9	c_0	c	$Ax = \left(1\cdot\sin\frac{1}{1}x_1,\dots,n\sin\frac{1}{n}x_n,\dots\right)$
4.10	l_∞	l_∞	$Ax = (x_1,0,x_2,0,x_3,0,\dots)$
4.11	l_2	c	$Ax = \left(\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\frac{x_4}{4},\dots\right)$
4.12	l_2	l_∞	$Ax = \left(\frac{x_1}{1},\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\dots\right)$
4.13	l_1	c_0	$Ax = (0,x_1,x_2,\dots)$
4.14	l_2	l_2	$Ax = (\lambda_1 x_1,\lambda_2 x_2,\lambda_3 x_3,\dots)$ где $\lvert\lambda_n\rvert \le M, n\in \boldsymbol{N}$

Решение задачи 4.14. Так как $\forall x \in l_2$

$$\|Ax\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\lvert\lambda_n x_n\rvert^2\right)^{1/2} \le \sup_n\lvert\lambda_n\rvert\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lvert x_n\rvert^2\right)^{1/2} = \sup_n\lvert\lambda_n\rvert\cdot\|x\|,$$

то $D(A) = l_2$ и линейность оператора A проверяется без труда. Отсюда же имеем $\|A\| \le \sup_n\lvert\lambda_n\rvert = s$. В силу определения точной верхней грани, $\forall\varepsilon > 0$ существует такое n, что $\lvert\lambda_n\rvert > s-\varepsilon$. Тогда для вектора $e_n = (0,0,\dots,1,0,\dots)\in l_2$, $\|e_n\| = 1$ и $\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\| \ge \|Ae_n\| = \lvert\lambda_n\rvert > s-\varepsilon$.

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим $\|A\| \ge s = \sup_n\lvert\lambda_n\rvert$. Итак, $\|A\| = \sup_n\lvert\lambda_n\rvert$ ●

5. Интегральный оператор

	E_1	E_2	A
5.1	$L_2[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^1 t^2 s x(s)ds$
5.2	$L_1[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^1 (t+1)s x(\sqrt{s})ds$
5.3	$C[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^1 (t+s) x(\sqrt{s})ds$
5.4	$L_3[0,1]$	$C[-1,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^1 t s^2 x(s^{1/3})ds$

5.5	$L_1[0,1]$	l_2	$\mathrm{A}x=\left(\frac{1}{2}\int_0^1 tx(t),\ldots,\frac{1}{2^k}\int_0^1 t^k x(t)dt,\ldots\right)$
5.6	$L_1[0,1]$	l_1	$\mathrm{A}x=\left(\frac{1}{2}\int_0^1 tx(t),\ldots,\frac{1}{2^k}\int_0^1 t^k x(t)dt,\ldots\right)$
5.7	$L_3[0,1]$	$L_2[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=\int_0^1 t^2 sx(s)ds$
5.8	$C[-1,1]$	$L_1[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=\int_{-1}^1 t\operatorname{sgn} s x(s)ds$
5.9	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=\int_0^1 \lvert t\cdot s\rvert x(\sqrt[4]{s})ds$
5.10	$L_2[0,2]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=\int_0^2 (t+1)s^2 x(s^2)ds$
5.11	$C[0,2]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=\int_0^2 \operatorname{sgn}(s-1)x(s)ds+tx(0)$
5.12	$L_2[-1,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=\int_{-1}^1 (t+1)s^2 x(s^2)ds$
5.13	$C[0,1]$	$C[0,2]$	$(\mathrm{A}x)(t)=\int_0^1 (t^2+s^2)x(s)ds$
5.14	$L_1[0,1]$	l_4	$\mathrm{A}x=\left(\frac{1}{3}\int_0^1 tx(t)dt,\ldots,\frac{1}{3^k}\int_0^1 t^k x(t)dt,\ldots\right)$

Решение задачи 5.14. Пусть $x \in L_1[0,1]$. Тогда

$$\|\mathrm{A}x\|_{l_4}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{3^k}\int_0^1 t^k x(t)dt\right|^4\right)^{1/4}\leq$$

$$\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^k}\int_0^1 \lvert x(t)\rvert dt\right)^4\right)^{1/4}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{4k}}\right)^{1/4}\cdot\|x\|_{L_1[0,1]}.$$

Поэтому $D(\mathrm{A}) = L_1[0,1]$ и линейность оператора A следует из линейности интеграла. Из установленного неравенства следует также, что

$$\|\mathrm{A}\| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{4k}}\right)^{1/4} = 80^{-\frac{1}{4}}.$$

С другой стороны, если $x_n(t) = n\chi_{\left[1-\frac{1}{n},1\right]}(t)$, то $\|x_n\|_{L_1[0,1]} = 1$, и

$$\|\mathrm{A}\| = \sup_{\|x\|_{L_1[0,1]}\le 1} \|\mathrm{A}x\|_{l_4} \ge \sup_n \|\mathrm{A}x_n\|_{l_4} = = \sup_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{n}{3^k} \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} t^k \, dt \right|^4 \right)^{1/4} =$$

$$= \sup_n \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^{4k}(k+1)^4} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k+1} \right\}^4 \right]^{1/4} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{4k}} \right)^{1/4} = 80^{-\frac{1}{4}}.$$

Следовательно, $\|\mathrm{A}\| = 80^{-\frac{1}{4}}$ ●

Пусть $\mathrm{E} \in Ban$, $\mathrm{K} = \mathrm{R}$ или $\mathbf{C}$. В задачах 6-7 выяснить, задает ли данная формула линейный ограниченный функционал $f : \mathrm{E} \to \mathrm{K}$. В случае положительного ответа, найти его норму.

	E	K	f
6.1	c	**C**	$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$
6.2	l_∞	**R**	$f(x_1) = x_1 + x_3$
6.3	l_2	**R**	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$
6.4	c_0	**C**	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (i)^k \frac{x_k}{k^2}$
6.5	l_1	**R**	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k^2+1}$
6.6	c	**R**	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} x_k$
6.7	l_3	**C**	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{2k}}{k}$
6.8	c_0	**R**	$f(x) = 4x_{10} - 2x_2 + 5x_{100}$

6.9	l_∞	**R**	$f(x)=x_1-x_2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{2^k}$
6.10	l_2	**R**	$f(x)=x_1-x_0$
6.11	l_1	**C**	$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}ix_{4k+1}$
6.12	l_4	**C**	$f(x)=x_1+\frac{1}{2}x_2$
6.13	c	**R**	$f(x)=x_1+\lim\limits_{n\to\infty}x_n$
6.14	l_2	**C**	$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{2^k}$

Решение задачи 6.14. Линейность функционала проверяется без труда. Пусть $x\in l_2$. Тогда применяя неравенство Коши-Буняковского, будем иметь $\forall x\in l_2$

$$|f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{2^k}\right|\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\|x\| \tag{1}$$

Отсюда $D(f)=l_2$, функционал f ограничен на l_2 и $\|f\|\le\frac{1}{\sqrt{3}}$. Покажем, что константа $c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ является наименьшей из всех возможных в неравенстве (1). Для этого достаточно указать такой ненулевой элемент $x^*\in l_2$, для которого в (1) все неравенства превращаются в равенства. Равенство в (1) может нарушаться после применения неравенства Коши-Буняковского. Последнее превращается в равенство, если векторы пропорциональны, т. е. $\forall k\in \boldsymbol{N}\ x_k=\beta\cdot\frac{1}{2^k}$. Возьмем $\beta=\sqrt{3}$, тогда для $x^*=\sqrt{3}\cdot(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots)$, имеем $\|x^*\|=1$ и $|f(x^*)|=\beta\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\|x^*\|$. Следовательно, $\|f\|=\frac{1}{\sqrt{3}}$.(Более короткое решение данной задачи получается с использованием теоремы Ф.Рисса об общем виде линейного функционала).●

	E	K	f
7.1	$L_2[0,1]$	**R**	$f(x)=\int_0^1 t^{-1/3}x(t)dt$
7.2	$L_1[0,2]$	**C**	$f(x)=i\int_0^1 t^2x(\sqrt{t})dt$

7.3	$C[0,1]$	**R**	$f(x)=x(0)-2x(1)$
7.4	$C[0,1]$	**R**	$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x(t^n)dt$
7.5	$L_1[2,4]$	**C**	$f(x)=\int_2^4 tx(t^2)dt$
7.6	$L_2[-1,1]$	**R**	$f(x)=\int_{-1}^1 t^2x(\sqrt{t})dt$
7.7	$L_1[0,1]$	**R**	$f(x)=\int_{-1}^1 t^4x(t^2)dt$
7.8	$L_6[0,2]$	**R**	$f(x)=\int_0^2 t^2x(t^3)dt$
7.9	$C^{(1)}[0,1]$	**C**	$f(x)=x(0)+ix'(0)$
7.10	$C^{(1)}[0,2]$	**R**	$f(x)=\int_0^1 x(t)dt+\int_1^2 x'(t)dt$
7.11	$C^{(1)}[-1,1]$	**C**	$f(x)=x'(0)$
7.12	$C^{(2)}[0,1]$	**C**	$f(x)=ix(0)+x''(1)$
7.13	$L_2[0,1]$	**R**	$f(x)=\int_0^1 t^{-1/4}x(t)dt$
7.14	$L_2[0,1]$	**C**	$f(x)=i\int_0^1 t^{-\frac{3}{2}}x(\sqrt{t})dt$

Решение задачи 7.14. Линейность функционала вытекает из линейности интеграла. Пусть $x\in L_2[0,1]$. Тогда, произведя замену переменных в интеграле, а затем применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$|f(x)|=\left|\int_0^1 t^{-2/3}x(\sqrt{t})dt\right|=\begin{bmatrix} u=\sqrt{t}\\ t=u^2\\ dt=2udu\end{bmatrix}=$$

$$=\left|\int_0^1 2u^{-1/3}x(u)du\right|\le 2\left(\int_0^1 u^{-2/3}du\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |x(u)|^2du\right)^{1/2}=2\sqrt{3}\|x\| \;. \qquad (2)$$

Следовательно, $D(f) = l_2$, функционал ограничен и $\|f\| \le 2\sqrt{3}$. Возьмем $x^*(u) = \frac{1}{\sqrt{3}} u^{-1/3}$ (почему?), тогда из (2) имеем

$$\left|f(x^*)\right| = 2\left|\int_0^1 u^{-1/3} \frac{1}{\sqrt{3}} u^{-1/3} du\right| = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 u^{-2/3} du = 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left\|x^*\right\|.$$

Отсюда следует, что константа $c = 2\sqrt{3}$ в (2) является наименьшей из всех возможных. Поэтому $\|f\| = 2\sqrt{3}$. (См. также примечание в решении задачи 6.14).

●

Варианты задания

Вариант 1	1.1	2.1	3.7	4.5	5.10	6.12	7.2
Вариант 2	1.2	2.13	3.8	4.6	5.9	6.13	7.1
Вариант 3	1.3	2.12	3.9	4.7	5.8	6.11	7.3
Вариант 4	1.4	2.11	3.10	4.8	5.7	6.10	7.4
Вариант 5	1.5	2.10	3.11	4.9	5.6	6.9	7.5
Вариант 6	1.6	2.9	3.12	4.10	5.5	6.8	7.6
Вариант 7	1.7	2.8	3.13	4.11	5.4	6.7	7.7
Вариант 8	1.8	2.7	3.6	4.12	5.3	6.6	7.8
Вариант 9	1.9	2.6	3.5	4.13	5.2	6.5	7.9
Вариант 10	1.10	2.5	3.4	4.4	5.1	6.4	7.10
Вариант 11	1.11	2.4	3.3	4.3	5.13	6.3	7.11
Вариант 12	1.12	2.3	3.1	4.2	5.12	6.2	7.12
Вариант 13	1.13	2.2	3.2	4.1	5.11	6.1	7.13
Вариант 14	1.14	2.3	3.13	4.2	5.10	6.3	7.1
Вариант 15	1.13	2.4	3.12	4.3	5.9	6.4	7.2
Вариант 16	1.12	2.5	3.11	4.4	5.8	6.5	7.3
Вариант 17	1.11	2.6	3.10	4.5	5.7	6.6	7.4
Вариант 18	1.10	2.7	3.9	4.6	5.6	6.7	7.5
Вариант 19	1.9	2.8	3.8	4.7	5.5	6.8	7.6
Вариант 20	1.8	2.9	3.7	4.8	5.4	6.10	7.7
Вариант 21	1.7	2.10	3.6	4.9	5.3	6.9	7.8
Вариант 22	1.8	2.11	3.5	4.10	5.2	6.13	7.9
Вариант 23	1.9	2.12	3.4	4.11	5.1	6.12	7.10
Вариант 24	1.11	2.13	3.3	4.12	5.11	6.1	7.11
Вариант 25	1.12	2.1	3.2	4.13	5.12	6.2	7.12
Вариант 26	1.14	2.2	3.1	4.1	5.13	6.11	7.13

3. Д О П О Л Н И Т Е Л Ь Н Ы Е З А Д А Ч И И У П Р А Ж Н Е Н И Я

24. Доказать, что функционал $f : x \mapsto x'(t_0)$ в пространстве $C^{(1)}[0,1]$ непрерывен.

25. Доказать, что функционал $f : x \mapsto x'(0)$ линеен и неограничен на линейном подпространстве $C^{(1)}[0,1]$ нормированного пространства $C[0,1]$.

26. При каких $\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots$ диагональный оператор $\mathrm{A}(x_1,\ldots, x_n,\ldots) = (\alpha_1 x_1,\ldots, \alpha_n x_n,\ldots)$ ограничен на l_2? В случае ограниченности найти его норму.

27. Пусть A - оператор умножения на ограниченную измеримую функцию $a(x)$, действующий в пространстве $L_p(\mathrm{X},\mu)$. Доказать, что A ограничен и найти его норму.

28. Найти норму тождественного оператора, действующего из $L_p[a,b]$ в $L_q[a,b]$ при $p \ge q$.

ТЕМА 4

ОБРАТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. СХОДИМОСТЬ В $L(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ.

Определение 1. Пусть $\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2$ — линейные пространства и $\mathrm{A}\in\mathcal{L}(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$. Оператор $\mathrm{B}:\mathrm{E}_2\to\mathrm{E}_1$ называется **правым обратным** к оператору $\mathrm{A}:\mathrm{E}_1\to\mathrm{E}_2$, если $\mathrm{AB}=1_{\mathrm{E}_2}$. Оператор $\mathrm{B}:\mathrm{E}_2\to\mathrm{E}_1$ называется **левым обратным** к оператору A, если $\mathrm{BA}=1_{\mathrm{E}_1}$. Оператор $\mathrm{B}:\mathrm{E}_2\to\mathrm{E}_1$ называется **обратным оператором** к оператору A, если $\mathrm{AB}=1_{\mathrm{E}_2}$, $\mathrm{BA}=1_{\mathrm{E}_1}$, т.е. B является одновременно левым обратным и правым обратным (1_E обозначает единичный оператор в пространстве E).

В определении обратного оператора не выдвигается требование его линейности. Однако нетрудно показать, что оператор, обратный к линейному, всегда линеен.

Нижеследующие утверждения дают необходимые и достаточные условия существования левого и правого обратного оператора.

ТЕОРЕМА 1. *Следующие утверждения равносильны:*

1) *для оператора* A *существует левый обратный оператор;*
2) $Ker\mathrm{A}=\{0\}$*;*
3) *решение уравнения* $\mathrm{A}x=y$ *единственно для любого* $y\in R(\mathrm{A})$.

ТЕОРЕМА 2. *Следующие утверждения равносильны:*

1) *для оператора* A *существует правый обратный оператор;*
2) $\mathrm{A}(\mathrm{E}_1)=\mathrm{E}_2$*;*
3) *решение уравнения* $\mathrm{A}x=y$ *существует для любого* $y\in\mathrm{E}_2$.

Пусть теперь $\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2\in Ban$ и $\mathrm{A}\in L(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$.

Определение 2. Оператор A называется обратимым, если для него существует ограниченный обратный оператор.

ТЕОРЕМА (Банаха об обратном операторе). *Пусть* A *— линейный ограниченный оператор, действующий из банахова пространства* E_1 *в банахово пространство* E_2. *Если* A *- биекция, то* A *обратим (т.е. существует ограниченный обратный оператор* A^{-1}*).*

Приведем еще три утверждения, дающие достаточные условия обратимости оператора.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\mathrm{E}\in Ban$, $\mathrm{A}\in L(\mathrm{E},\mathrm{E})$ *и* $\|\mathrm{A}\|<1$. *Тогда оператор* $T=I-\mathrm{A}$ *обратим.*

ТЕОРЕМА 4. *Пусть,* $E_1, E_2 \in Ban$, $A \in L(E_1,E_2)$. *Оператор* A *обратим тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия*

1) *образ R(A) всюду плотен в* E_2*;*

2) *существует постоянная* $c > 0$ *такая, что* $\forall x \in E_1$ $\|Ax\|_2 \ge c\|x\|_1$ *(энергетическое неравенство).*

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $E_1, E_2 \in Ban$, $A \in L(E_1,E_2)$ *и оператор* A *обратим. Если оператор* $B \in L(E_1,E_2)$ *удовлетворяет условию* $\|A - B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, *то* B *тоже обратим.*

В пространстве линейных ограниченных операторов $L(E_1,E_2)$ введем различные виды сходимости.

Определение 3. Последовательность операторов $\{A_n\} \subset L(E_1,E_2)$ называется **сходящейся по норме (равномерно сходящейся)** к оператору $A \in L(E_1,E_2)$ (обозначение : $A_n \rightrightarrows A$), если $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Определение 4. Последовательность операторов $\{A_n\} \subset L(E_1,E_2)$ будем называть **поточечно (сильно)** сходящейся к оператору $A \in L(E_1,E_2)$ (обозначение: $A_n \to A$), если для любого $x \in E_1$ $\|A_n x - Ax\|_2 \to 0$ при $n \to \infty$.

Очевидно, что из сходимости по норме последовательности операторов, следует ее поточечная сходимость.

ТЕОРЕМА 6. *Если* $E_1 \in Ban, E_2 \in Norm$, *то из поточечной сходимости последовательности* $\{A_n\} \subset L(E_1,E_2)$ *к оператору* $A \in \mathscr{L}^{\#}(E_1,E_2)$ *следует, что* $A \in L(E_1,E_2)$.

Литература: [1] с.149-156,179-194 ; [2] с. 206-213,224-230 ; [3] с. 106-109.

2. З А Д А Ч И

1. Для данного оператора $A \in L(E_1,E_2)$ решить следующие задачи.
   i) Определить область значений оператора A, т.е. найти $R(A)$.
   ii) Если существуют левый и правый обратные операторы для A, то найти их.
   iii) Существует ли обратный оператор для а) $A: E_1 \to E_2$;
   б) $A: E_1 \to R(A)$?
   iv) Является ли оператор $A^{-1}: R(A) \to E_1$ ограниченным, если он существует?

	E$_1$	E$_2$	A
1.1	l_2	l_2	$Ax=(0,x_1,x_2,...)$
1.2	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_0^t x(s)ds$
1.3	$C[0,1]$	$C^{(1)}[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_0^t x(s)ds$
1.4	l_1	l_1	$Ax=(x_2,x_3,x_4,...)$
1.5	$C^{(1)}[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t)=x'(t)$
1.6	l_2	l_2	$Ax=(2x_1,4x_2,2x_3,4x_4,...)$
1.7	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t)=x(\sqrt{t})$
1.8	c_0	c_0	$Ax=\left(\frac{1}{1+1}x_1,\frac{2}{2+1}x_2,\frac{3}{3+1}x_3,...\right)$
1.9	c	c	$Ax=\left(0,\left(1-\frac{1}{2}\right)x_1,\left(1-\frac{1}{3}\right)x_2,\left(1-\frac{1}{4}\right)x_3,...\right)$
1.10	l_∞	l_2	$Ax=\left(\frac{x_1}{1},\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\ldots\right)$
1.11	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_0^1 tx(s)ds$
1.12	$C[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t)=tx(1)$
1.13	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_0^t (t-s)x(s)ds$
1.14	l_1	l_1	$Ax=(x_3,x_1,x_4,x_3,x_6,x_5,...)$
1.15	$C[0,1]$	$C^{(2)}[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_0^t (t-s)x(s)ds$

Решение задачи 1.15. Ясно, что $D(A)=C[0,1]$. Пусть $y(t)=(Ax)(t)$. По правилу дифференцирования интеграла, зависящего от параметра, $y'(t)=\int_0^t x(s)ds,\quad y''(t)=x(t)$. Поэтому

$$R(A)=A(C[0,1])\subset\{y\in C^{(2)}[0,1]: y(0)=y'(0)=0\}.$$

Поскольку $\mathrm{A}(C[0,1]) \neq C^{(2)}[0,1]$, то по теореме 2 оператор $\mathrm{A}: C[0,1] \to C^{(2)}[0,1]$ не может иметь правого обратного. Положим $(\mathrm{B}x)(t) = x''(t)$. Из сказанного выше следует, что $\forall x \in C[0,1]$ $(\mathrm{BA})x(t) = \left(\int_0^t (t-s)x(s)ds\right)'' = x(t)$.

Итак, левый обратный для оператора $\mathrm{A}: C[0,1] \to C^{(2)}[0,1]$ существует и равен B. Ясно, что он является и левым обратным для оператора $\mathrm{A}: C[0,1] \to R(\mathrm{A})$.

Пусть теперь $y \in C^{(2)}[0,1], y(0) = y'(0) = 0$. Тогда

$$(\mathrm{AB})y(t) = \int_0^t (t-s)y''(s)ds =$$

$$= \int_0^t (t-s)dy'(s) = (t-s)y'(s)\Big|_{s=0}^{s=t} + \int_0^t y'(s)ds = y(t) - y(0) = y(t),$$

т.е. $\mathrm{AB} = 1_{R(\mathrm{A})}$. Следовательно, оператор B является обратным оператором для оператора A, действующего из нормированного пространства $C[0,1]$ в нормированное пространство $\mathrm{E} := \{y \in C^{(2)}[0,1] : y(0) = y'(0) = 0\}$, которое является подпространством $C^{(2)}[0,1]$.

Проверим ограниченность оператора $\mathrm{B}: R(\mathrm{A}) \to C[0,1]$.

Пусть $y \in E$. Тогда

$$\|\mathrm{B}y\|_{C_{[0,1]}} = \|y''(t)\| = \max_{0\le t\le 1}|y''(t)| \le$$

$$\le \max_{0\le t\le 1}|y(t)| + \max_{0\le t\le 1}|y'(t)| + \max|y''(t)| = 1 \cdot \|y\|_{C^{(2)}[0,1]}.$$

Таким образом, оператор B ограничен, а потому оператор A обратим . ●

2. Пусть $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2 \in Ban$. Доказать, что оператор $\mathrm{A}:\mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_2$ обратим и найти A^{-1}. (В каждом варианте оператор A ограничен и его ограниченность можно не доказывать.)

	E_1	E_2	A
2.1	c_0	c_0	$\mathrm{A}x = \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{3}x_2, \frac{1}{2}x_3, \frac{1}{3}x_4, \ldots\right)$
2.2	l_2	l_2	$\mathrm{A}x = \left(1\left(\sin\frac{1}{1}\right)x_1, 2\left(\sin\frac{1}{2}\right)x_2, 3\left(\sin\frac{1}{3}\right)x_3, \ldots\right)$

2.3	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 e^{t+s} x(s)ds$
2.4	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 (1 - st)(s)ds$
2.5	$C^{(1)}[0,1]$	$C^{(1)}[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 (t + s)x(s)ds$
2.6	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 t^2 sx(s)ds$
2.7	$C^{(2)}[0,1]$	$C^{(2)}[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 e^{t-s} x(s)ds$
2.8	l_1	l_1	$Ax = \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 x_1, \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 x_2, \left(1 - \frac{1}{4}\right)^4 x_3, \ldots\right)$
2.9	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 (t + s)x(s)ds$
2.10	l_2	l_2	$Ax = \left(\left(1 + \frac{1}{2}\right)x_1, \left(1 + \frac{1}{3}\right)x_2, \left(1 + \frac{1}{4}\right)x_3, \ldots\right)$
2.11	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 tsx(s)ds$
2.12	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 (t + s)^2 x(s)ds$
2.13	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 (1 - ts)x(s)ds$
2.14	$C^{(1)}[0,1]$	$C^{(1)}[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 ts^2 x(s)ds$
2.15	$C^{(2)}[0,1]$	$C^{(2)}[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 tsx(s)ds$

Решение задачи 2.15. Применим теорему Банаха об обратном операторе. Пусть $x(t), y(t) \in C^{(2)}[0,1]$ и $x \neq y$.

Тогда и $Ax \neq Ay$. Действительно, если $Ax = Ay$, то

$$x(t)-y(t)+\int_0^1 ts(x(s)-y(s))ds\equiv 0. \qquad (1)$$

Обозначив $x(t)-y(t)=u(t)$, получим $u(t)+t\int_0^1 su(s)ds\equiv 0$. Отсюда $u(t)$ имеет вид: $u(t)=\alpha t$. Подставляя это в последнее тождество, будем иметь

$$\alpha t+t\int_0^1 s\alpha s ds\equiv 0\Leftrightarrow \alpha t\left(1+\frac{1}{3}\right)\equiv 0\Leftrightarrow \alpha=0.$$

Итак, равенство (1) возможно только тогда, когда $u=0$, т.е. $x=y$, что противоречит предположению. Следовательно, мы доказали инъективность A. Докажем, что A — сюръекция. Возьмем произвольную функцию $y\in C^{(2)}[0,1]$ и покажем, что существует решение $x\in C^{(2)}[0,1]$ уравнения

$$x(t)+\int_0^1 tsx(s)ds=y(t)\Leftrightarrow x(t)=y(t)-t\int_0^1 sx(s)ds. \qquad (2)$$

Если решение $x(t)$ есть, то оно имеет вид: $x(t)=y(t)+\alpha t$. Подставим данное $x(t)$ в последнее уравнение и получим:

$$y(t)+\alpha t=y(t)-t\int_0^1 s(y(s)+\alpha s)ds\Leftrightarrow \alpha t=-t\left\{\int_0^1 sy(s)ds+\frac{\alpha}{3}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha=-\frac{\alpha}{3}-\int_0^1 sy(s)ds\Leftrightarrow \alpha=-\frac{3}{4}\int_0^1 sy(s)ds.$$

Итак, решением (2) будет функция

$$x(t)=y(t)-\frac{3}{4}\int_0^1 tsy(s)ds. \qquad (3)$$

Поэтому A — сюръекция, и по теореме Банаха оператор A обратим. Более того, из (2) и (3) следует, что $(\mathrm{A}^{-1}y)(t)=y(t)-\frac{3}{4}\int_0^1 tsy(s)ds$ (а потому ограниченность A^{-1} легко доказать и непосредственно).●

3. Пусть $A_\lambda \in L(E_1, E_2)$; $E_1, E_2 \in Ban$. Выяснить, при каких λ существует обратный оператор к оператору A_λ и построить его, если он существует. При каких λ оператор A_λ обратим? (Как и в предыдущей задаче, оператор A ограничен.)

	E_1	E_2	A_λ
3.1	l_2	l_2	$A_\lambda x = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, \ldots)$ $\lambda = (\lambda_n)_1^{\infty}, \lvert\lambda_n\rvert < M$
3.2	$\{x \in l_2 : x_1 = 0\}$	$\{x \in l_2 : x_1 = 0\}$	$A_\lambda x = (0, \lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, \ldots)$ $\lambda = (\lambda_n)_1^{\infty}, \lvert\lambda_n\rvert < M$
3.3	$\{x \in C^{(1)}[0,1] : x(0) = 0\}$	$C[0,1]$	$(A_\lambda x)(t) = \lambda x(t) + x'(t)$
3.4	$\{x \in C^{(1)}[0,1] : x(0) = 0\}$	$C[0,1]$	$(A_\lambda x)(t) = \lambda t^2 x(t) + x'(t)$
3.5	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(A_\lambda x)(t) = \lambda x(t) + x^n(t)$
3.6	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(A_\lambda x)(t) = \lambda x(t) + \int_0^1 e^{t+s} x(s) d(s)$
3.7	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(A_\lambda x)(t) = x(t) + \lambda \int_0^1 t^2 s^2 x(s) d(s)$
3.8	$C^{(1)}[0,1]$	$C^{(1)}[0,1]$	$(A_\lambda x)(t) = x(t) + \lambda \int_0^1 (t+s) x(s) d(s)$
3.9	$\{x \in C^{(2)}[0,1]:$ $x(0) = x'(0) = 0\}$	$C[0,1]$	$(A_\lambda x)(t) = \lambda x(t) + 2x'(t) + x''(t)$
3.10	l_2	l_2	$A_\lambda x =$ $= \left((\lambda+1)x_1, (\lambda + \frac{1}{2^1})x_2, (\lambda + \frac{1}{2^2})x_3, \ldots\right)$
3.11	$\{x \in C^{(2)}[0,1]:$ $x(0) = x'(1) = 0\}$	$C[0,1]$	$(A_\lambda x)(t) = \lambda x(t) + x''(t)$
3.12	$C[0,1]$	$\{x \in C^{(2)}[0,1]:$ $x(0) = x'(0) = 0\}$	$(A_\lambda x)(t) = \lambda \int_0^1 (t-s) x(s) d(s)$

3.13	$\{x \in C^{(2)}[0,1]:$ $x(0) = x'(0) = 0\}$	$C[0,1]$	$(A_\lambda x)(t) = \lambda x''(t)$
3.14	c	c	$A_\lambda x =$ $= \left((\lambda+1)x_1, (\lambda+\frac{1}{2})x_2, (\lambda+\frac{1}{3})x_3, \ldots \right)$
3.15	$\{x \in C^{(2)}[0,1]:$ $x(0) = x'(0) = 0\}$	$C[0,1]$	$(A_\lambda x)(t) = \lambda x(t) + x''(t)$

Решение задачи 3.15. Так как $\left\| \frac{d^2}{dt^2} \right\| \le 1$ (доказать), то в силу теоремы 3 из представления A в виде: $A = \lambda\left(I + \frac{1}{\lambda}\frac{d^2}{dt^2} \right)$ следует, что A является обратимым при $|\lambda|>1$ (ибо $\left\| \frac{1}{\lambda}\frac{d^2}{dt^2} \right\| < 1$). Случай $|\lambda|\le 1$ с помощью теоремы 3 исследовать не представляется возможным. Для его исследования возьмем произвольную функцию $y \in C[0,1]$ и рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda x(t) = y(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases} . \tag{3}$$

Как известно из теории дифференциальных уравнений, данная задача имеет единственное решение в $C^{(2)}[0,1]$. Тем самым определен оператор B_λ: $y(t) \to x(t)$, действующий из $C[0,1]$ в $E_1 = \{x \in C^{(2)}[0,1]: x(0) = x'(0) = 0\}$. Поэтому из его определения следует, что $A_\lambda B_\lambda = 1_{E_1}, B_\lambda A_\lambda = 1_{C[0,1]}$. Поэтому B_λ — обратный оператор для A_λ. Чтобы его найти, нужно решить задачу Коши (3). Последнее осуществляется, например, с помощью метода вариации произвольных постоянных:

$$(A_\lambda^{-1} y)(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}}\left[e^{\sqrt{-\lambda}t}\int_0^t e^{-\sqrt{-\lambda}s} y(s)ds - e^{-\sqrt{-\lambda}t}\int_0^t e^{\sqrt{-\lambda}s} y(s)ds \right], \quad \lambda < 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\cos\sqrt{\lambda}t \int_0^t \sin\sqrt{\lambda}s y(s)ds - \sin\sqrt{\lambda}t \int_0^t \cos\sqrt{\lambda}s y(s)ds \right], \quad \lambda > 0 \\ \int_0^t (t-s) y(s)ds, \quad \lambda = 0 \end{cases}$$

Из теорем 1 и 2 следует, что B_λ — биекция из $C[0,1]$ в E_1. Так как E_1 — замкнутое подпространство банахова пространства $C^{(2)}[0,1]$, то оно является банаховым, и по теореме Банаха оператор A_λ^{-1} является ограниченным при любых $\lambda\in\mathbf{R}$, т.е. для любых $\lambda\in\mathbf{R}$ оператор A_λ обратим (это можно доказать и непосредственно, оценивая норму A_λ^{-1}). ●

4. Для последовательности операторов $(A_n)\subset L(E_1,E_2)$ ($E_1,E_2\in Norm$) и оператора $A\in L(E_1,E_2)$ установить:

i) сходится ли (A_n) поточечно к оператору A;

ii) сходится ли (A_n) по норме к оператору A?

	E_1	E_2	A_n	A
4.1	l_1	l_1	$A_nx=(x_1,\dots,x_n,0,0,\dots)$	1_{l_1}
4.2	l_2	l_2	$A_nx=\left((1+\frac{1}{n})x_1,\dots,(1+\frac{1}{n}x_n,\dots\right)$	1_{l_1}
4.3	c_0	c_0	$A_nx=(0,\dots,0,x_n,0,0,\dots)$	0
4.4	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(A_nx)(t)=x\left(t^{1+\frac{1}{n}}\right)$	$1_{C[0,1]}$
4.5	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(A_nx)(t)=(t^n-t^{2n})x(t)$	0
4.6	$C^{(1)}[0,1]$	$C[0,1]$	$(A_nx)(t)=(t^n-t^{2n})x(t)$	0
4.7	$C^{(1)}[0,3]$	$C[1,2]$	$(A_nx)(t)=n\left[x\left(t+\frac{1}{n}\right)-x(t)\right]$	$\frac{d}{dt}$
4.8	$C^{(2)}[0,3]$	$C[1,2]$	$(A_nx)(t)=n\left[x\left(t+\frac{1}{n}\right)-x(t)\right]$	$\frac{d}{dt}$
4.9	$C^{(1)}[0,2]$	$C[0,1]$	$(A_nx)(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}x\left(t+\frac{k}{n^2}\right)$	$Ax=x$
4.10	l_2	l_2	$A_nx=(0,\dots,0,x_{n+1},x_{n+2},\dots)$	0
4.11	$L_2[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(A_nx)(t)=(1-t^n)x(t)$	$Ax=x$
4.12	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(A_nx)(t)=(1-t^n)x(t)$	$1_{L_2[0,1]}$
4.13	$C^{(1)}[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(A_nx)(t)=x\left(t^{1+\frac{1}{n}}\right)$	$Ax=x$
4.14	$C[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(A_nx)(t)=\frac{[nx(t)]}{n}$	$Ax=x$

4.15	$C^{(2)}$ [0,3]	C[1,2]	$(\mathrm{A}_n x)(t)=$ $= n\left[x\left(t-\frac{1}{n}\right)-2x(t)+x\left(t+\frac{1}{n}\right)\right]$	0

Решение задачи 4.15. Пусть $x\in C^{(2)}$ [0,3]. Тогда, два раза применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях, имеем

$$\|(\mathrm{A}_n x)(t)\|_{C[0,1]} = \max_{1\le t\le 2}\left| n\left(x\left(t-\frac{1}{n}\right) - x(t) + x\left(t+\frac{1}{n}\right) - x(t)\right)\right| = \max_{1\le t\le 2}|x'(\tau_1) - x'(\tau_2)| =$$

$$= \max_{1\le t\le 2}|x''(\tau_3)(\tau_1-\tau_2)|,$$

где τ_1 лежит между t и $t+\frac{1}{n}$, τ_2 — между $t-\frac{1}{n}$ и t, а τ_3 — между τ_1 и τ_2. Следовательно, $\|(\mathrm{A}_n x)(t)\|_{C[0,1]}\le \frac{2}{n}\|x\|_{C^{(2)}[0,3]}$ и $\|\mathrm{A}_n\|\le 2/n\to 0$ при $n\to\infty$, т.е. данная последовательность операторов сходится по норме к нулевому оператору, а следовательно, сходится и поточечно. ●

Варианты задания

Вариант 1	1.14	2.1	3.5	4.9
Вариант 2	1.13	2.2	3.6	4.8
Вариант 3	1.12	2.3	3.7	4.7
Вариант 4	1.11	2.4	3.8	4.6
Вариант 5	1.10	2.5	3.9	4.5
Вариант 6	1.9	2.6	3.10	4.4
Вариант 7	1.8	2.7	3.11	4.3
Вариант 8	1.7	2.8	3.12	4.2
Вариант 9	1.6	2.9	3.13	4.1
Вариант 10	1.5	2.10	3.14	4.10
Вариант 11	1.4	2.11	3.4	4.11
Вариант 12	1.3	2.12	3.3	4.12
Вариант 13	1.2	2.13	3.2	4.13
Вариант 14	1.1	2.14	3.1	4.14
Вариант 15	1.2	2.5	3.12	4.3
Вариант 16	1.3	2.6	3.11	4.4
Вариант 17	1.4	2.7	3.13	4.5
Вариант 18	1.5	2.8	3.2	4.6
Вариант 19	1.6	2.9	3.1	4.7
Вариант 20	1.7	2.10	3.3	4.8

Вариант 21	1.8	2.11	3.4	4.9
Вариант 22	1.9	2.12	3.5	4.10
Вариант 23	1.10	2.13	3.6	4.11
Вариант 24	1.1	2.14	3.7	4.12
Вариант 25	1.11	2.1	3.8	4.13
Вариант 26	1.12	2.2	3.9	4.14

3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

29. Доказать, что если оператор является левым (правым) обратным к линейному оператору, то он также линеен.

30. Доказать, что каждый линейный оператор, действующий в конечномерном пространстве и имеющий левый (правый) обратный, имеет обратный.

31. Привести пример линейного ограниченного необратимого оператора, действующего в банаховом пространстве и имеющего левый обратный.

32. Показать, что утверждение теоремы Банаха об обратном операторе неверно без предположения о полноте рассматриваемых пространств.

33. Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства, а оператор $A: E_1 \to E_2$ линеен, непрерывен и сюръективен. Показать, что если $y_n \to y_0$ в E_2, то существует $c>0$ и $x_n \to x_0$ в E_1 такие, что $A(x_n)=y_n$ и $\|x_n\| \le c\|y_n\|$.

34. Пусть L и N — замкнутые подпространства банахова пространства E, и для любого $x \in E$ имеет место единственное представление $x = y + z$, где $y \in L$, $z \in N$. Доказать существование постоянной $c>0$ такой, что $\|y\| \le c\|x\|$, $\|z\| \le \|x\|$.

35. Доказать, что множество всех обратимых операторов в банаховом пространстве E открыто в пространстве L(E) всех непрерывных операторов в E.

36. Пусть E,F,G — нормированные пространства. Доказать, что если $S_n,S \in L(E,F)$, $T_n,T \in L(F,G)$, $S_n \rightrightarrows S$ и $T_n \rightrightarrows T$, то $T_n \circ S_n \rightrightarrows T \circ S$.

37. Пусть E,F — нормированные пространства. Доказать, что если S_n,S, $T_n,T \in L(E,F)$ и T_n, сильно сходится к T, S_n, сильно сходится к S, то T_nS_n — сильно сходится к TS.

ТЕМА 5

СПЕКТР ОПЕРАТОРА

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

Пусть $A: E \to E$ — ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве E над полем. $\mathbf{C}$.

<u>Определение 1.</u> Точка $\lambda \in \mathbf{C}$ называется **регулярной точкой** оператора A, если оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ существует и является ограниченным оператором на E, т.е. оператор $(A - \lambda I): E \to E$ — обратим . Множество всех регулярных точек обозначается через $\rho(A)$ и называется **резольвентным множеством оператора** A.

<u>Определение 2.</u> Комплексное число λ, не являющееся регулярным, называется **спектральным**. Множество спектральных точек $\sigma(A)$ оператора A называется **спектром** оператора A, т.е. $\sigma(A) = \mathbf{C} \setminus \rho(A)$.

<u>Определение 3.</u> Операторнозначная функция $R(\lambda; A) \overset{def}{=} (A - \lambda I)^{-1}, \lambda \in \rho(A)$ называется **резольвентой** оператора A.

ТЕОРЕМА 1. *Резольвентное множество* $\rho(A)$ *оператора* A *открыто в* $\mathbf{C}$, *а резольвента* $R(\lambda; A)$ *является аналитической функцией в* $\rho(A)$.

Отметим следующие важные свойства спектра $\sigma(A)$ оператора A :

$\sigma(A) \neq \varnothing$;

$\sigma(A)$ есть компактное подмножество $\mathbf{C}$;

$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbf{C}: |Z| \le \|A\|\}$.

Из теоремы Банаха об обратном операторе следует , что если $\lambda \in \sigma(A)$, то возможны две ситуации :

I. Оператор $A - \lambda I$ не является инъекцией. Тогда существует $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$ такое, что $(A - \lambda I)x_0 = 0 \Leftrightarrow Ax_0 = \lambda x_0$.

<u>Определение 4.</u> Комплексное число λ при котором уравнение $Ax = \lambda x$ имеет ненулевое решение называется **собственным значением оператора** A, а множество $\sigma_g(A)$ всех собственных значений оператора A — **дискретным спектром** оператора A. Ненулевые решения уравнения $Ax = \lambda x$ называются **собственными векторами** оператора A, отвечающими собственному значению λ оператора A.

II. Оператор $A - \lambda I: E \to E$ — инъективен, но не является сюръекцией.

<u>Определение 5.</u> Множество всех таких $\lambda \in \sigma(A)$, при которых оператор $A - \lambda I$ является инъекцией, но не является сюрьекцией, называется непрерывным спектром оператора A. Обозначим его через $\sigma_H(A)$.

Ясно , что $\sigma(\mathrm{A})=\sigma_{g}(\mathrm{A})\coprod\sigma_{\text{н}}(\mathrm{A})$. Понятие спектра оператора обобщает хорошо известное из алгебры понятие множества собственных чисел матрицы.

<u>Литература :</u> [1] с.238-242 ; [2] с. 219-222 ; [5] с. 218-222.

2. З А Д А Ч И

1. Найти дискретный и непрерывный спектр оператора $\mathrm{A}\in L(\mathrm{E},\mathrm{E})$, где $\mathrm{E}=C[0,1]$.

	A	N	A
1.1	$(\mathrm{A}x)(t)=tx(0)$	1.2	$(\mathrm{A}x)(t)=t^2x(1)$
1.3	$(\mathrm{A}x)(t)\equiv 0$	1.4	$(\mathrm{A}x)(t)=x(t)$
1.5	$(\mathrm{A}x)(t)=tx(t)$	1.6	$(\mathrm{A}x)(t)=x(1)+tx(0)$
1.7	$(\mathrm{A}x)(t)=\int\limits_0^t x(\tau)d\tau$	1.8	$(\mathrm{A}x)(t)=\left\{\lvert 2t-1\rvert-\lvert 2t-\tfrac{1}{2}\rvert\right\}x(t)$
1.9	$(\mathrm{A}x)(t)=tx(0)+t^2x(1)$	1.10	$(\mathrm{A}x)(t)=\left\{\lvert 3t-1\rvert-\lvert 2-3t\rvert\right\}x(t)$
1.11	$(\mathrm{A}x)(t)=2x(0)+3tx(\tfrac{1}{2})$	1.12	$(\mathrm{A}x)(t)=t^2x(t)$
1.13	$(\mathrm{A}x)(t)=(2t+1)x(t)$	1.14	$(\mathrm{A}x)(t)=tx(0)$
1.15	$(\mathrm{A}x)(t)=t(x(0)+x(1))$	1.16	$(\mathrm{A}x)(t)=t^2(x(0)-x(1))$

Решение задачи 1.16. Найдем дискретный спектр оператора A. Он состоит из всех таких комплексных чисел λ, для которых существует ненулевое решение уравнения:

$$\mathrm{A}x=\lambda x \Leftrightarrow t^2(x(0)-x(1))=\lambda x(t). \tag{1}$$

Рассмотрим случай, когда $\lambda=0$. Тогда уравнение (1) перепишется в виде $t^2(x(0)-x(1))\equiv 0$ и ненулевым его решением будет, например, функция $x(t)=t(t-1)$ (ибо $x(0)-x(1)=0$). Итак $\lambda=0$ - точка дискретного спектра . Пусть $\lambda\neq 0$, тогда (1) перепишем в виде

$$x(t)=\frac{1}{\lambda}t^2(x(0)-x(1)). \tag{2}$$

Отсюда видно, что если ненулевое решение уравнения (1) есть, то его можно записать в форме $x(t)=\alpha t^2$. Для нахождения α, положим в (2) $t=1$:

$$x(1)=\frac{1}{\lambda}(x(0)-x(1))\Leftrightarrow \alpha=\frac{-\alpha}{\lambda}\ .$$

Теперь, если $\lambda\neq -1$, то $\alpha=0$ и $x(t)\equiv 0$, т.е. (1) имеет только нулевое решение. Если же $\lambda=-1$, то ненулевым решением (1) будет, например, $x(t)=t^2$. Поэтому $\sigma_g(\mathrm{A})=\{-1\}$.

Найдем $\sigma_H(\mathrm{A})$. Он состоит из тех $\lambda\in\mathbf{C}\setminus\sigma_g(\mathrm{A})$, для которых при некотором $y\in C[0,1]$ уравнение $(\mathrm{A}x)(t)-\lambda x(t)=y(t)$ не имеет решения в $C[0,1]$. Последнее для данного оператора запишется в виде

$$t^2(x(0)-x(1))-\lambda x(t)=y(t). \tag{3}$$

Поскольку $\lambda\neq 0$, его можно переписать в виде $x(t)=\dfrac{x(0)-x(1)}{\lambda}t^2-\dfrac{1}{\lambda}y(t)$.

Положим $t=0$ и $t=1$. Тогда

$$\begin{cases} x(0)=-\dfrac{1}{\lambda}y(0),\\ x(1)=\dfrac{x(0)-x(1)}{\lambda}-\dfrac{1}{\lambda}y(1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x(0)=-\dfrac{1}{\lambda}y(0),\\ x(1)=\dfrac{1}{\lambda+1}\left(-\dfrac{1}{\lambda}y(0)-y(1)\right)\end{cases}$$

и при любом $y\in C[0,1]$ уравнение (3) имеет решение

$$x(t)=\frac{t^2}{\lambda}\left[-\frac{1}{\lambda}y(0)+\frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{1}{\lambda}y(0)+y(1)\right)\right]-\frac{1}{\lambda}y(t)$$

из $C[0,1]$. Поэтому $\sigma_H(\mathrm{A})=\varnothing$. ●

2. Найти дискретный и непрерывный спектр оператора $\mathrm{A}\in L(\mathrm{E},\mathrm{E})$.

	E	A		E	A
2.1	l_2	$\mathrm{A}x=2(x_2,x_3,x_4,\ldots)$	2.2	l_2	$\mathrm{A}x=(0,x_1,x_2,x_3,\ldots)$
2.3	l_2	$\mathrm{A}x=\left(\frac{x_1}{1},\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\ldots\right)$	2.4	l_2	$\mathrm{A}x=(x_1,0,x_3,0,x_5,\ldots)$
2.5	c_0	$\mathrm{A}x=(0,x_1,x_2,0,0,\ldots)$	2.6	l_1	$\mathrm{A}x=(x_1,\ldots,x_n,0,0,\ldots)$
2.7	l_∞	$\mathrm{A}x=\left(0,\frac{x_1}{1},\frac{x_2}{2},\ldots\right)$	2.8	c	$\mathrm{A}x=(x_1,x_2,0,0,\ldots)$

2.9	l_4	$\mathrm{A}x=(2x_2,3x_3,0,0,\ldots)$	2.10	l_2	$\mathrm{A}x=\left(\left(1+\frac{1}{1}\right)x_1,\ldots,\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n,\ldots\right)$
2.11	c_0	$\mathrm{A}x=(0,x_1,0,0,\ldots)$	2.12	l_∞	$\mathrm{A}x=(x_1,0,x_2,0,0,\ldots)$
2.13	l_2	$\mathrm{A}x=(0,0,x_1,x_2,0,0,\ldots)$	2.14	l_2	$\mathrm{A}x=(x_1,0,x_2,x_3,\ldots)$
2.15	l_1	$\mathrm{A}x=(x_3,x_4,0,0,\ldots)$	2.16	l_2	$\mathrm{A}x=(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,\ldots)$ $\lambda=(\lambda_n)$, $\lvert\lambda_n\rvert\le\mathrm{M}$

Решение задачи 2.16. Из лабораторной работы 9 (см. решенную там задачу) следует, что $\|\mathrm{A}\|=\sup\limits_n\lvert\lambda_n\rvert\le\mathrm{M}$, т.е. A — ограниченный оператор. Найдем $\sigma_g(\mathrm{A})$. Уравнение $\mathrm{A}x=\lambda x$ примет вид $(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,\lambda_3x_3,\ldots)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3,\ldots)$. Оно эквивалентно бесконечной системе уравнений $\lambda_1x_1=\lambda x_1,\lambda_2x_2=\lambda x_2,\ldots,\lambda_nx_n=\lambda x_n,\ldots$.

Эта система имеет ненулевое решение $x^*\in l_2$ только в том случае, когда $\lambda=\lambda_i$ при некотором $i\in\mathbf{N}$. Поэтому $\sigma_g(\mathrm{A})=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots\}$.

Найдем $\sigma_{\text{н}}(\mathrm{A})$. Поскольку из свойства 2 следует, что спектр $\sigma(\mathrm{A})$ является замкнутым множеством, то все предельные точки последовательности $\{\lambda_n\}_1^\infty$, не совпадающие с точками самой этой последовательности , принадлежит $\sigma_{\text{н}}(\mathrm{A})$.

Покажем , что других точек в $\sigma_{\text{н}}(\mathrm{A})$ нет. Действительно, если λ_0 не является предельной точкой последовательности $\{\lambda_n\}$ и не совпадает ни с одной точкой самой этой последовательности, то $\lvert\lambda_n-\lambda_0\rvert>c>0$ и последовательность $1/\lvert\lambda_n-\lambda_0\rvert$ $(n=1,2,\ldots)$ — ограничена. Но

$$(\mathrm{A}-\lambda_0I)^{-1}y=\left(\frac{1}{\lambda_1-\lambda_0}y_1,\frac{1}{\lambda_2-\lambda_0}y_2,\ldots,\frac{1}{\lambda_n-\lambda_0}y_n,\ldots\right)$$

и, следовательно, оператор $(\mathrm{A}-\lambda_0I)^{-1}$ также является оператором диагонального вида, причем $\left\|(\mathrm{A}-\lambda_0I)^{-1}\right\|=\sup\limits_n\frac{1}{\lvert\lambda_n-\lambda_0\rvert}\le\frac{1}{c}$, т.е. он ограничен. Поэтому $\lambda_0\in\rho(\mathrm{A})$. ●

3. Найти спектр и резольвенту интегрального оператора $(\mathrm{A}x)(t)=$ $=\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$ в пространствах $L_2[a,b]$ и $C[a,b]$.

	a	b	$K(t,s)$		a	b	$K(t,s)$
3.1	0	1	t^2s^2	3.2	0	1	e^{t+s}
3.3	–1	1	$t+s$	3.4	0	2	t^2s

3.5	–1	2	s^2t	3.6	0	1	e^{t-s}
3.7	0	π	$\sin(t-s)$	3.8	0	π	$\cos(t+s)$
3.9	0	1	$t-s$	3.10	0	1	$1+ts$
3.11	–1	1	ts^2+t^2s	3.12	0	$\frac{\pi}{2}$	$\sin t + t\cos s$
3.13	0	1	$1-ts$	3.14	–1	1	$ts+t^2s^2$
3.15	0	1	$t-t^2s$	3.16	0	1	ts

Решение задачи 3.16. Найдем дискретный спектр оператора A в $C[0,1]$, т.е. те $\lambda\in\mathbf{C}$, для которых уравнение

$$\int_0^1 stx(s)ds = \lambda x(t) \tag{4}$$

имеет ненулевое решение $x(t)\in C[0,1]$. Пусть $\lambda = 0$, тогда (4) примет вид $t\int_0^1 sx(s)ds \equiv 0$ и ненулевым решением (4) при $\lambda = 0$ будет, например, функция $x_1(t) = \frac{1}{3}(3t-2)$. Пусть $\lambda \neq 0$. Тогда уравнение (4) можно переписать в виде

$$x(t) = \frac{1}{\lambda} t\int_0^1 sx(s)ds. \tag{5}$$

Следовательно, если решение уравнения (4) есть, то оно имеет вид $x(t) = \frac{\alpha}{\lambda}t$. Константу α находим, подставляя такое $x(t)$ в (5) :

$$\frac{\alpha}{\lambda}t = \frac{1}{\lambda}t\int_0^1 s\frac{\alpha}{\lambda}sds \Leftrightarrow \alpha t \equiv \frac{\alpha}{3\lambda}t \Leftrightarrow \alpha = \frac{\alpha}{3\lambda} \Leftrightarrow \alpha\left(1-\frac{1}{3\lambda}\right) = 0.$$

Если $\lambda \neq 1/3$, то $\alpha = 0$ и $x(t)\equiv 0$, т.е. уравнение (4) имеет только нулевое решение, а следовательно, такие λ не принадлежат $\sigma_g(\mathrm{A})$. Если $\lambda = 1/3$, то ненулевым решением уравнения (4) будет, например, $x_2(t) = t$, поэтому дискретный спектр A в $C[0,1]$ равен $\sigma_g(\mathrm{A}) = \{0, 1/3\}$. Поскольку функции $x_1(t)$ и $x_2(t)\in L_2[0,1]$, то анализ приведенных выше рассуждений позволяет заменить $C[0,1]$на $L_2[0,1]$, и поэтому таким же будет дискретный спектр A в $L_2[0,1]$.

Найдем $\sigma_н(A)$ в $C[0,1]$. Для этого при $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1/3\}$ и $y \in C[0,1]$ рассмотрим уравнение

$$\int_0^1 stx(s)ds - \lambda x(t) = y(t) \tag{6}$$

Покажем, что оно имеет решение в $C[0,1]$ для любой функции $y(t)$ из $C[0,1]$. Действительно, переписав (6) следующим образом

$$x(t) = \frac{1}{\lambda} t \int_0^1 sx(s)ds - \frac{1}{\lambda} y(t), \tag{7}$$

видим, что если решение для (6) есть, то оно имеет вид $x(t) = \frac{\alpha t}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} y(t)$. Константу α находим, подставляя $x(t)$ в (7) :

$$\frac{\alpha}{\lambda} t - \frac{1}{\lambda} y(t) = \frac{1}{\lambda} t \int_0^1 s\left(\frac{\alpha}{\lambda} s - \frac{1}{\lambda} y(s)\right) ds - \frac{1}{\lambda} y(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha t = t\left[\frac{\alpha}{3\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_0^1 sy(s)ds\right] \Leftrightarrow \alpha = \frac{\alpha}{3\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_0^1 sy(s)ds \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\lambda - 1/3}\int_0^1 sy(s)ds \ .$$

Итак уравнение (6) при $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1/3\}$ и любом $y \in C[0,1]$ имеет решение

$$x(t) = \frac{1}{\lambda(\lambda - 1/3)} \int_0^1 tsy(s)ds - \frac{1}{\lambda} y(t), \tag{8}$$

которое также принадлежит $C[0,1]$. Поэтому $\sigma_н(A) = \varnothing$. Очевидно, что если бы $y \in L_2[0,1]$, то решение (8) также бы находилось в $L_2[0,1]$. Поэтому и в $L_2[0,1]$ непрерывный спектр оператора A равен $\sigma_н(A) = \varnothing$.

Осталось найти резольвенту A. Поскольку формула (8) дает решение уравнения (6), то тем самым мы нашли оператор $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$, если $\lambda \neq 0, 1/3$:

$$R(\lambda, A) y(t) = (A - \lambda I)^{-1} y(t) = \frac{1}{\lambda(\lambda - 1/3)} \int_0^1 tsy(s)ds - \frac{1}{\lambda} y(t) . \bullet$$

4. Если следующие множества $\mathrm{M} \subset \mathbf{C}$ могут быть спектром некоторого линейного ограниченного оператора, то привести пример такого оператора A, для которого $\sigma(\mathrm{A}) = \mathrm{M}$.

	M		M
4.1	$\{0,1,2\}$	4.2	$\{\lambda \in \boldsymbol{C}: -1 \le \lambda \le 1\}$
4.3	$\{\lambda \in \boldsymbol{C}: \lvert\lambda\rvert \le 2\}$	4.4	$\{\lambda \in \boldsymbol{C}: \lambda = it, 0 \le t \le 1\}$
4.5	$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$	4.6	$\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$
4.7	$\{\lambda \in \boldsymbol{C}: \lambda = t^2 + it, 0 \le t \le 1\}$	4.8	$\{\lambda \in \boldsymbol{C}: \lvert\lambda\rvert = 1\}$
4.9	$\{0\}$	4.10	$\{\lambda \in \boldsymbol{C}: \lvert I_m \lambda\rvert \le 1\}$
4.11	$\{0, i\}$	4.12	$\{\lambda \in \boldsymbol{C}: 1 \le \lvert\lambda\rvert \le 2\}$
4.13	$\{\lambda \in \boldsymbol{C}: \lambda = it^2, 0 < t \le 1\}$	4.14	$\{0, 1, i\}$
4.15	$\{\lambda \in \boldsymbol{C}: \lambda = t + it, 0 \le t \le 1\}$	4.16	$\{\lambda \in \boldsymbol{C}: \lvert\lambda\rvert \le 1\}$

Решение задачи 4.16. Приведем три различных решения этой задачи :

I. Рассмотрим оператор $\mathrm{A}: l_1 \to l_1$, определенный равенством $\mathrm{A}x = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$.

Так как уравнение $\mathrm{A}x = \lambda x$ в данном случае имеет вид

$$(x_2, x_3, x_4, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots), \tag{9}$$

а последнее равносильно бесконечной системе уравнений $x_2 = \lambda x_1, x_3 = \lambda x_2$, $x_4 = \lambda x_3, \ldots$; то ненулевым решением (9) может быть только последовательность вида $x^* = (z, \lambda z, \lambda^2 z, \lambda^3 z, \ldots)$ $\quad (z \in \boldsymbol{C}, \quad z \ne 0)$, если $x^* \in l_1$. Но

$$x^* \in l_1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left| z\lambda^n \right| < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \lvert\lambda\rvert^n < +\infty .$$

Последний ряд сходится только при $\lvert\lambda\rvert < 1$. Итак, только при $\lvert\lambda\rvert < 1$ уравнение (9) имеет ненулевое решение из l_1. Поэтому $\sigma_g(\mathrm{A}) = \{\lambda: \lvert\lambda\rvert < 1\}$.

Поскольку $\lVert \mathrm{A} \rVert = 1$ (доказать!), то в силу свойства 3 спектра имеем $\sigma(\mathrm{A}) \subset \{\lambda \in C: \lvert\lambda\rvert \le 1\}$. С другой стороны, спектр оператора (свойство 2) — замкнутое множество. Поэтому $\sigma_{\text{н}}(\mathrm{A}) = \{\lambda: \lvert\lambda\rvert = 1\}$ и $\sigma(\mathrm{A}) = \{\lambda: \lvert\lambda\rvert \le 1\}$.

II. Рассмотрим оператор нормального вида в l_2: $\mathrm{A}x = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, \ldots), |\lambda_i| \le 1$.

Из решения задачи 2.16 следует, что $\sigma_g(\mathrm{A}) = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$. Поскольку множество $D = \{\lambda : |\lambda| < 1, \lambda = a + ib; a, b \in \mathbf{Q}\}$ является счетным и всюду плотным в замкнутои множестве М$= \{\lambda : |\lambda| \le 1\}$, то выбирая в качестве последовательности λ_i все элементы множества *D*, будем иметь $\sigma_g(\mathrm{A}) = \mathrm{M}$, а $\sigma_{\text{н}}(\mathrm{A}) = \overline{\mathrm{M}} \setminus \mathrm{M} = \{\lambda : |\lambda| \le 1\} \setminus \mathrm{M}$. Итак, $\sigma(\mathrm{A}) = \{\lambda : |\lambda| \le 1\}$.

III. Пусть *C*(М) — множество всех непрерывных комплексных функций на заданном множестве М, наделенное равномерной нормой. Положим $(\mathrm{A}x)(z) = zx(z)$ в *C*(М). Тогда $\sigma(\mathrm{A})$ =М (смотри задачу 39). ●

Варианты задания

Вариант 1	1.15	2.10	3.5	4.1
Вариант 2	1.14	2.9	3.6	4.2
Вариант 3	1.13	2.8	3.7	4.3
Вариант 4	1.12	2.7	3.8	4.4
Вариант 5	1.11	2.6	3.9	4.5
Вариант 6	1.10	2.5	3.10	4.6
Вариант 7	1.9	2.4	3.11	4.7
Вариант 8	1.8	2.3	3.12	4.8
Вариант 9	1.7	2.2	3.13	4.9
Вариант 10	1.6	2.1	3.14	4.10
Вариант 11	1.5	2.11	3.15	4.11
Вариант 12	1.4	2.12	3.4	4.12
Вариант 13	1.3	2.13	3.3	4.13
Вариант 14	1.2	2.14	3.2	4.14
Вариант 15	1.1	2.15	3.1	4.15
Вариант 16	1.5	2.15	3.5	4.10
Вариант 17	1.6	2.14	3.6	4.9
Вариант 18	1.7	2.13	3.7	4.8
Вариант 19	1.8	2.12	3.8	4.7
Вариант 20	1.9	2.11	3.9	4.6
Вариант 21	1.10	2.10	3.10	4.5
Вариант 22	1.11	2.9	3.11	4.4
Вариант 23	1.12	2.8	3.12	4.3
Вариант 24	1.13	2.7	3.13	4.2
Вариант 25	1.14	2.6	3.14	4.1
Вариант 26	1.15	2.5	3.15	4.11
Вариант 27	1.4	2.4	3.1	4.12
Вариант 28	1.3	2.3	3.2	4.13
Вариант 29	1.2	2.2	3.3	4.14

Вариант 30 1.1 2.1 3.4 4.15

3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

38. Пусть E — конечномерное нормированное пространство над **C**. Доказать, что непрерывный спектр линейного оператора $A: E \to E$ пуст.

39. Пусть X - компактное топологическое пространство и $C(X)$ — банахово пространство комплексных непрерывных функций на X с нормой $\|x(t)\| = \sup\{|x(t)| : x \in X\}$. Найти спектр оператора A действующего в $C(X)$ по формуле $Ax(t) = a(t)x(t)$, где $a(t) \in C(X)$.

40. Может ли дискретный спектр быть не замкнутым множеством ?

41. Показать , что любое компактное множество комплексной плоскости **C** может быть спектром некоторого оператора.

42. Показать, что если λ — собственное значение оператора A такое, что $|\lambda| = \|A\|$, то сопряженное к нему число $\overline{\lambda}$ является собственным значением сопряженного оператора A^*.

43. Доказать что :

а) если λ — собственное значение оператора A, то λ^n — собственное значение оператора $A^n (n \in \boldsymbol{N})$;

б) если λ — собственное значение оператора A^2, то $\sqrt{\lambda}$ или $-\sqrt{\lambda}$ является собственным значением оператора A

44. Пусть оператор $A \in L(E,E)$ обратим. Доказать, что $\sigma(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} | \ \lambda \in \sigma(A)\}$.

45. Пусть $A, B \in L(E,E)$. Доказать что ненулевые элементы $\sigma(AB)$ и $\sigma(BA)$ совпадают .

46. Пусть A — ограниченный линейный оператор, действующий в комплексном банаховом пространстве E, $\lambda \in \mathbf{C}$ и существует такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$, что $\|x_n\| = 1$ и $Ax_n - \lambda x_n \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\lambda \in \sigma(A)$.

ТЕМА 6

КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

Определение 1. Пусть $E_1, E_2 \in Ban$. Линейный оператор $A: E_1 \to E_2$ называется **компактным** (или **вполне ограниченным**), если он переводит каждое ограниченное множество из E_1 в предкомпактное множество из E_2.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы линейный оператор* A *был компактным, необходимо и достаточно, чтобы образ* $A(B[0,1])$ *замкнутого единичного шара пространства E_1 был предкомпактным множеством в* E_2.

ТЕОРЕМА 2. *Множество* $K(E_1, E_2)$ *всех компактных операторов* $A: E_1 \to E_2$ *является замкнутым линейным подпространством банахова пространства* $L(E_1, E_2)$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $E \in Ban$. *Единичный оператор* $I: E \to E$ *компактен тогда и только тогда, когда* E *конечномерно*.

ТЕОРЕМА 4. *Ограниченный линейный оператор* $A: E_1 \to E_2$ *является компактным, если* $\dim R(A) < \infty$.

Оператор, удовлетворяющий условиям теоремы 4, называется оператором конечного ранга.

ТЕОРЕМА 5. *Оператор, сопряженный к компактному, компактен.*

ТЕОРЕМА 6. *Пусть* $E_1, E_2, E_3 \in Ban$, $B \in L(E_1, E_2)$, $A \in L(E_2, E_3)$. *Оператор* AB *является компактным, если хотя бы один из операторов* A *или* B *компактен.*

ТЕОРЕМА 7. *Спектр компактного оператора конечен или счетен. Все ненулевые точки его спектра являются собственными значениями. Ненулевые собственные значения имеют конечную кратность, причем, если их бесконечно много, то они образуют последовательность, сходящуюся к нулю.*

Литература : [1] с.245-249 ; [2] с. 237-250 ; [4] с. 205-207.

2. З А Д А Ч И .

1. Доказать компактность интегрального оператора $(\mathrm{A}x)(t)=\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$ в пространствах $C[a,b]$ и $L_2[a,b]$.

	a	b	$K(t,s)$		a	b	$K(t,s)$
1.1	0	2	t^2e^s	1.2	–1	1	$ts+1$
1.3	0	π	$\cos(t-s)$	1.4	0	π	$\cos(t+s)$
1.5	–1	1	t^2-s^2	1.6	0	1	t^2+s^2
1.7	0	$\frac{\pi}{2}$	$t\sin(t+s)$	1.8	1	2	te^{t+s}
1.9	0	1	t^2e^{t-s}	1.10	–1	1	ts^2-st^2
1.11	0	1	t^4s-s^2t	1.12	0	1	t^3s+s^2t
1.13	0	π	$\sin(t+s)$	1.14	0	π	$\cos s+t\sin s$
1.15	0	1	t^2s^2+ts	1.16	0	1	st^2+ts^2

Решение задачи 1.16. Воспользуемся теоремой 4. Так как

$$(\mathrm{A}x)(t)=\int\limits_0^1(st^2+ts^2)x(s)ds=t\int\limits_0^1 s^2x(s)ds+t^2\int\limits_0^1 sx(s)ds,$$

то $\mathrm{A}(C_{[0,1]})\subset \mathrm{E}_2, \mathrm{A}(L_{2[0,1]})\subset \mathrm{E}_2$, где $\mathrm{E}_2=\{\alpha t+\beta t^2:\alpha,\beta\in \boldsymbol{R}\}$. Поскольку $\dim \mathrm{E}_2=2$, для доказательства компактности A в пространствах $C[0,1]$ и $L_2[0,1]$ достаточно показать, что A — линейный и ограниченный оператор в этих пространствах.

Линейность A следует из линейности интеграла. Остановимся на доказательстве ограниченности оператора A, например, в $L_2[0,1]$. Для любой функции $x\in L_2[0,1]$ имеем

$$\|\mathrm{A}x\|_{L_{2[0,1]}}=\left(\int\limits_0^1\left|\int\limits_0^1(st^2+ts^2)x(s)ds\right|^2dt\right)^{1/2}\le\left(\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^1(s+s^2)|x(s)|ds\right]^2dt\right)^{1/2}=$$

$$=\int\limits_0^1(s+s^2)|x(s)|ds\le\left(\int\limits_0^1(s+s^2)^2ds\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^1|x(s)|^2ds\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{47}{60}}\|x\|_{L_{2[0,1]}},$$

т.е. A — ограниченный оператор в $L_2[0,1]$. Аналогично доказывается ограниченность A в $C[0,1]$. По теореме 4 оператор A компактен. ●

2. Будет ли оператор A компактным в пространстве $C[0,1]$?

	A	N	A
2.1	$(\mathrm{A}x)(t) = x(t^2)$	2.2	$(\mathrm{A}x)(t) = t^{3/2} x(\sqrt{t})$
2.3	$(\mathrm{A}x)(t) = t^2 x(t)$	2.4	$(\mathrm{A}x)(t) = e^t x(t)$
2.5	$(\mathrm{A}x)(t) = t^2 x(0)$	2.6	$(\mathrm{A}x)(t) = 2x(t)$
2.7	$(\mathrm{A}x)(t) = \int\limits_0^t (t-s)x(s)ds$	2.8	$(\mathrm{A}x)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$
2.9	$(\mathrm{A}x)(t) = x(\sqrt{t})$	2.10	$(\mathrm{A}x)(t) = t^2 x(0) + tx(1)$
2.11	$(\mathrm{A}x)(t) = \int\limits_0^1 \lvert t+s\rvert x(s)ds$	2.12	$(\mathrm{A}x)(t) = \int\limits_0^1 e^{\lvert t-s\rvert} x(s)ds$
2.13	$(\mathrm{A}x)(t) = x(0) - tx(1)$	2.14	$(\mathrm{A}x)(t) = x(t) + \int\limits_0^1 tsx(s)ds$
2.15	$(\mathrm{A}x)(t) = x(t) - \int\limits_0^1 t^2 sx(s)ds$	2.16	$(\mathrm{A}x)(t) = \int\limits_0^1 \lvert t-s\rvert x(s)ds$

Решение задачи 2.16. Представим оператор A в виде суммы двух операторов.

$$(\mathrm{A}x)(t) = \int\limits_0^1 |t-s| x(s)ds = \int\limits_0^t (t-s)x(s)ds + \int\limits_t^1 (s-t)x(s)ds = (\mathrm{A}_1 x)(t) + (\mathrm{A}_2 x)(t).$$

Если мы докажем, что каждый из операторов A_i компактен, то из теоремы 2 будет следовать компактность оператора A. Остановимся на проверке компактности оператора A_2 (компактность A_1 доказывается аналогично). Поскольку A_2 — линейный и ограниченный оператор (докажите), то по теореме 1 достаточно проверить предкомпактность множества

$$\mathrm{A}_2(B[0,1]) = \left\{ \int\limits_t^1 (s-t)x(s)ds : \|x\| = \max_{0\le t\le 1} |x(t)| \le 1 \right\}$$

в $C[0,1]$. Докажем это с помощью теоремы Арцела-Асколи.

1) так как $\left\| \int\limits_t^1 (s-t)x(s)ds \right\| \le \max\limits_{0\le t\le 1} \int\limits_0^1 |s-t| |x(s)| ds \le \|x\| \le 1$, то множество $\mathrm{A}_2(B[0,1])$ ограниченно;

2) для любого $\varepsilon > 0$ и $\delta = \varepsilon$, если $|t_1 - t_2| < \delta$, то для любой $x \in B[0,1]$ при $t_1<t_2$ имеем

$$\left| \int_{t_1}^{1} (s - t_1)x(s)ds - \int_{t_2}^{1} (s - t_2)x(s)ds \right| =$$

$$= \left| \int_{t_1}^{t_2} (s - t_1)x(s)ds + \int_{t_2}^{1} (t_2 - t_1)x(s)ds \right| \le |t_2 - t_1| \cdot \|x\| < \varepsilon,$$

т.е. множество $\mathrm{A}_2(B[0,1])$ равностепенно непрерывно в $C[0,1]$. Итак, оператор A_2 компактен в $C[0,1]$. ●

3. Какие из следующих операторов $\mathrm{A}: l_2 \to l_1$ являются компактными?

	A		A
3.1	$\mathrm{A}x = (0, x_3, x_4, \ldots)$	3.2	$\mathrm{A}x = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$
3.3	$\mathrm{A}x = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right)$	3.4	$\mathrm{A}x = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, \ldots)$
3.5	$\mathrm{A}x = (x_2, x_4, x_5, \ldots)$	3.6	$\mathrm{A}x = \left(0, 0, \frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right)$
3.7	$\mathrm{A}x = \left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \ldots\right)$	3.8	$\mathrm{A}x = \left(0, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \ldots\right)$
3.9	$\mathrm{A}x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$	3.10	$\mathrm{A}x = (x_1, x_4, x_5, \ldots)$
3.11	$\mathrm{A}x = \left(\frac{x_1}{1}, 0, \frac{x_3}{3}, 0, \frac{x_5}{5}, 0, \ldots\right)$	3.12	$\mathrm{A}x = \left(0, \frac{x_2}{2}, 0, \frac{x_4}{4}, 0, \ldots\right)$
3.13	$\mathrm{A}x = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, x_3, \frac{x_4}{4}, \ldots\right)$	3.14	$\mathrm{A}x = \left(\frac{x_1}{1}, x_2, \frac{x_3}{3}, x_4, \ldots\right)$
3.15	$\mathrm{A}x = \left(\frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \frac{x_5}{5}, \ldots\right)$	3.16	$\mathrm{A}x = \left(0, \frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right)$

Решение задачи 3.16. Оператор $\mathrm{A} = BC$, где $Cx = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right)$ действует из l_2 в l_1, а $Bx = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ — из l_1 в l_1 (докажите это).

Покажем, что оператор C компактен, а оператор B ограничен. Тогда по теореме 6 оператор A будет компактным как произведение компактного оператора на ограниченный.

Пусть $x \in l_1$. Тогда $\|Bx\| = \|(0, x_1, x_2, \ldots)\| = 1 \cdot \|x\|$, т.е. B — ограниченный оператор.

Докажем компактность оператора C с помощью теоремы 2. Рассмотрим последовательность операторов C_n: $C_n x = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, 0, 0, \ldots\right)$, $n = 1,2,\ldots$(они компактны по теореме 4 как операторы конечного ранга) и покажем, что $\|C - C_n\| \to 0$, при $n \to \infty$. Пусть $x \in l_2$. Тогда, применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$\|(C - C_n)x\| = \left\|\left(0, \ldots, 0, \frac{x_{n+1}}{n+1}, \frac{x_{n+2}}{n+2}, \ldots\right)\right\|_{l_1} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{x^k}{k}\right| \le$$

$$\le \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} \le \frac{1}{n+1} \|x\|_{l_2}.$$

Отсюда $\|C - C_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, и оператор C компактен как предел сходящейся по норме последовательности компактных операторов C_n. ●

4. Будет ли компактным оператор $\mathrm{A}: \mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_2$?

	E_1	E_2	A
4.1	$C^{(1)}[0,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = x'(t)$
4.2	$C^{(2)}[0,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = x'(t)$
4.3	$C^{(2)}[0,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = x''(t)$
4.4	$C^{(1)}[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = x'(t)$
4.5	$C[0,1]$	l_2	$\mathrm{A}x = \left(\frac{1}{2}\int_0^1 tx(t)dt, \ldots, \frac{1}{2^k}\int_0^1 t^k x(t)dt, \ldots\right)$
4.6	$C[0,1]$	l_2	$\mathrm{A}x = \left(\frac{1}{2}\int_0^1 tx(t)dt, \ldots, \frac{1}{n}\int_0^1 t^{n-1} x(t)dt, \ldots\right)$
4.7	$L_1[0,1]$	l_1	$\mathrm{A}x = \left(\frac{1}{2}\int_0^1 tx(t)dt, \ldots, \frac{1}{2^k}\int_0^1 t^k x(t)dt, \ldots\right)$
4.8	$C^{(1)}[0,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = x(t)$
4.9	$C[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = x(t)$
4.10	$C^{(2)}[0,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = x(t) + \int_0^t (t-s)x(s)ds$

4.11	$L_4[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=x(t)$
4.12	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=\int\limits_0^t x(s)ds+x(t)$
4.13	$C^{(2)}[0,1]$	$C^{(1)}[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=x(t)$
4.14	$L_1[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=x(t)$
4.15	$C^{(2)}[0,1]$	$C^{(1)}[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t)=x(t)$
4.16	$L_1[0,1]$	l_1	$\mathrm{A}x=\left(\frac{1}{3}\int\limits_0^1 tx(t)dt,\dots,\frac{1}{3^k}\int\limits_0^1 t^k x(t)dt,\dots\right)$

Решение задачи 4.16. Линейность оператора A следует из линейности интеграла. Если $x\in L_1[0,1]$, то

$$\|\mathrm{A}x\|_{l_1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\left|\int\limits_0^1 t^k x(t)dt\right|\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\right)\|x\|_{L_1[0,1]},$$

и оператор A является ограниченным

В силу теоремы 1 оператор A будет компактным, если множество $\mathrm{A}(B[0,1])$ будет предкомпактно в l_1 ($B[0,1]$ — единичный шар в $L_1[0,1]$). Для доказательства предкомпактности этого множества воспользуемся критерием предкомпактности в l_1.

1) оператор A ограничен, поэтому $\mathrm{A}(B[0,1])$ — ограниченное множество в l_1;

2) для $\varepsilon>0$ пусть $n_0=\left[\log_3\frac{2}{3}\varepsilon\right]+1$. Тогда $\forall x\in B[0,1]$ имеем

$$\sum_{k=n_0}^{\infty}\frac{1}{3^k}\left|\int\limits_0^1 t^k x(t)dt\right|\le\|x\|_{L_1[0,1]}\cdot\sum_{k=n_0}^{\infty}\frac{1}{3^k}\le\frac{1}{3^{n_0}}\frac{3}{2}\le\varepsilon,$$

и множество $\mathrm{A}(B[0,1])$ является предкомпактным по критерию предкомпактности в l_1. ●

5. Решить следующие задачи

5.1. Может ли компактный оператор A, действующий в бесконечномерном банаховом пространстве E, удовлетворять алгебраическому уравнению $I+a_1\cdot\mathrm{A}+a_2\cdot\mathrm{A}^2+\dots+a_n\cdot\mathrm{A}^n=0$?

5.2. Может ли компактный оператор $\mathrm{A}:\mathrm{E}\to\mathrm{E}$ иметь ограниченный обратный, если а) $\dim\mathrm{E}=\infty$; б) $\dim\mathrm{E}<\infty$?

5.3. Пусть $E_1, E_2 \in Ban$. Что можно сказать о компактности линейного оператора $A: E_1 \to E_2$, если множество *R(A)* не является сепарабельным метрическим подпространством E_2?

5.4. Пусть A — компактный оператор в бесконечномерном банаховом пространстве E. Доказать, что существует $y \in E$ такое, что уравнение $Ax = y$ не имеет решения.

5.5. Пусть E_1 — замкнутое подпространство банахова пространства E. Доказать, что оператор вложения $Ax = x, x \in E_1$ компактен тогда и только тогда, когда $\dim E_1 < \infty$.

5.6. Привести пример не компактного оператора A такого, что оператор A^2 является компактным.

5.7. Доказать, что если линейный оператор $A: l_2 \to l_1$ ограничен, то A компактен.

5.8. Пусть A — компактный оператор, действующий в банаховом пространстве E. Можно ли утверждать, что у него нет ограниченного левого обратного оператора, если а) $\dim E = \infty$; б) $\dim E < \infty$?

5.9. Может ли существовать правый обратный оператор для компактного оператора A, действующего в бесконечномерном банаховом пространстве E?

5.10. Может ли компактный оператор $A: E \to E$, где $E \in Ban, \dim E = \infty$, являться инъективным отображением?

5.11. Линейный оператор A, действующий в банаховом пространстве E, $\dim E = \infty$, является отображением на E. Может ли он быть компактным оператором?

5.12. Оператор $A \in L(E,E), E \in Ban$ не является компактным. При каких $n \in \boldsymbol{N}$ оператор A^n может быть компактным?

5.13.Линейный оператор A, действующий в бесконечномерном банаховом пространстве E, каждое замкнутое множество переводит в замкнутое. Может ли A быть компактным оператором?

5.14. Линейный оператор A, действующий в бесконечномерном банаховом пространстве E, каждое открытое множество переводит в замкнутое. В каком случае A является компактным оператором?

5.15. Пусть A — линейный оператор, действующий в бесконечномерном банаховом пространстве E. Предположим, что A некоторый открытый шар $B(x^*, r)$ переводит в открытое множество. Что можно сказать о компактности оператора A?

Решение задачи 5.15. Поскольку множество $A\left(B(x^*, r)\right)$ открыто, то существует шар $B(x_0, k) \subset A\left(B(x^*, r)\right)$. Шар $B(0,1)$ предкомпактен в E тогда и только тогда, когда $\dim E < +\infty$. Следовательно, из условий задачи вытекает, что $B(0,1)$ не предкомпактен в E. Но $B(0,1) = -x_0 + k^{-1}B(x_0, k)$, поэтому $B(x_0, k)$ тоже не предкомпактен в E. Тогда и содержащее его множество $\mathrm{A}\left(B(x^*, r)\right)$ не предкомпактно. Так как множество $B(x^*, r)$ ограничено, то А не является компактным оператором. ●

Варианты задания

Вариант1	1.15	2.10	3.7	4.5	5.1
Вариант2	1.14	2.9	3.6	4.6	5.2
Вариант3	1.13	2.8	3.5	4.7	5.3
Вариант4	1.12	2.7	3.4	4.8	5.4
Вариант5	1.11	2.6	3.3	4.9	5.5
Вариант6	1.10	2.5	3.2	4.10	5.6
Вариант7	1.9	2.4	3.1	4.11	5.7
Вариант8	1.8	2.3	3.8	4.12	5.8
Вариант9	1.+7	2.2	3.9	4.13	5.9
Вариант10	1.6	2.1	3.10	4.14	5.15
Вариант11	1.5	2.11	3.11	4.15	5.14
Вариант12	1.4	2.12	3.12	4.4	5.13
Вариант13	1.3	2.13	3.13	4.3	5.12
Вариант14	1.2	2.14	3.14	4.2	5.11
Вариант15	1.1	2.15	3.15	4.1	5.10
Вариант16	1.1	2.3	3.5	4.15	5.2
Вариант17	1.2	2.4	3.6	4.14	5.3
Вариант18	1.3	2.5	3.7	4.13	5.4
Вариант19	1.4	2.6	3.8	4.12	5.15
Вариант20	1.5	2.7	3.9	4.11	5.12
Вариант21	1.6	2.8	3.10	4.4	5.11
Вариант22	1.7	2.9	3.11	4.3	5.10
Вариант23	1.8	2.15	3.12	4.2	5.9
Вариант24	1.9	2.14	3.13	4.1	5.8
Вариант25	1.10	2.13	3.14	4.10	5.7
Вариант26	1.11	2.12	3.15	4.9	5.5
Вариант27	1.12	2.11	3.4	4.8	5.6
Вариант28	1.13	2.2	3.2	4.5	5.13
Вариант29	1.14	2.10	3.2	4.6	5.1
Вариант30	1.15	2.1	3.1	4.7	5.14

3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

47. Пусть А — компактный оператор в банаховом пространстве Е и $T = \mathrm{A} - I$. Доказать, что Е разлагается в прямую сумму $\mathrm{E} = KerT \oplus L$, причем оператор T инъективен.

48. Пусть A — компактный оператор в банаховом пространстве E и $T = \mathrm{A} - I$. Доказать, что в цепочке вложенных подпространств $G_1 \subset G_2 \subset ... G_k \subset ...$, где $C_k = KerT^k$, $k \in \boldsymbol{N}$, начиная с некоторого n выполнено равенство $G_n = G_{n+1} = ...$

49. Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства, $\mathrm{A} \in L(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$. Доказать, что из компактности сопряженного оператора A^* следует компактность A.

Некоторые из основных банаховых и гильбертовых пространств функционального анализа

	E	Вид элементов в E	Размерность	Норма в E $\|x\|=$	Скалярное произведение
1	**R**	действительное число	1	$\lvert x\rvert$	$(x,y)=xy$
2	**C**	комплексное число	1	$\lvert x\rvert$	$(x,y)=x\,\overline{y}$
3	$\mathbf{R}^n$	$(x_1,...,x_n)$, $x_i\in\mathbf{R}$	n	$\left(\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i\rvert^2\right)^{1/2}$	$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$
4	$\mathbf{C}^n$	$(x_1,...,x_n)$, $x_i\in\mathbf{C}$	n	$\left(\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i\rvert^2\right)^{1/2}$	$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_i \overline{y_i}$
5	$C[a,b]$	$x(t)$ — непрерывная на $[a,b]$ функция	∞	$\max_{a\le t\le b}\lvert x(t)\rvert$	—
6	$C^{(1)}[a,b]$	$x(t)$ — непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция	∞	$\max_{a\le t\le b}\lvert x(t)\rvert+\max_{a\le t\le b}\lvert x'(t)\rvert$	—
7	l_2	$(x_1,x_2,...)$, $\sum_{i=1}^{\infty}\lvert x_i\rvert^2<\infty$	∞	$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lvert x_i\rvert^2\right)^{1/2}$	$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i \overline{y_i}$
8	l_p, $p\neq 2$	$(x_1,x_2,...)$, $\sum_{i=1}^{\infty}\lvert x_i\rvert^p<\infty$	∞	$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lvert x_i\rvert^p\right)^{1/p}$	—
9	l_∞	$(x_1,x_2,...)$ — ограниченная последовательность	∞	$\sup\lvert x_i\rvert$	—
10	c	$(x_1,x_2,...)$, $\exists\ \lim_{n\to\infty}x_n<\infty$	∞	$\sup\lvert x_i\rvert$	—
11	c_0	$(x_1,x_2,...)$, $\exists\ \lim_{n\to\infty}x_n=0$	∞	$\sup\lvert x_i\rvert$	—
12	$L_p[a,b]$	$x(t)$ — измеримая на $[a,b]$ функция и $\int_a^b\lvert x(t)\rvert^p dt<\infty$	∞	$\left(\int_{[a,b]}\lvert x(t)\rvert^p dt\right)^{1/p}$	$(x,y)=\int_{[a,b]}x(t)\overline{y(t)}dt$

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

МИРОТИН Адольф Рувимович
МУХИН Владимир Васильевич
СТАРОВОЙТОВ Александр Павлович
КАЗИМИРОВ Григорий Николаевич

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
(линейные ограниченные операторы в нормированных пространствах)

Практическое пособие

В авторской редакции

Подписано в печать 01.06. 2004г.(46) Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс». Усл.п.л. 4,4 Уч.-изд.л. 3,9 Тираж 35 экз.

Учреждение образования «Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины»
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104

Отпечатано на полиграфической технике
Учреждения образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104