МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

Гомельский государственный университет

В.И. Мироненко

ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Гомель 1985

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

Гомельский государственный университет

В.И.Мироненко

ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Гомель 1985

УДК 517. 925

Рецензенты: А.И.Яблонский, доктор физико-математических наук Белорусского института народного хозяйства им. В.В.Куйбышева;
С.С.Белявский, кандидат физико-математических наук кафедры высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета

В учебном пособии с помощью отражающей функции выделяются случаи явного вычисления отображения за период для неинтегрируемых в квадратурах систем. Для выделенных систем находятся начальные данные периодических решений, а сами решения исследуются на устойчивость. Доказываются теоремы существования периодических решений дифференциальных систем. Подробно рассматривается вопрос о существовании и количестве периодических решений уравнения Риккати.

Предлагаемая работа служит элементарным введением в спецкурс "Периодические решения дифференциальных систем".

Предназначается для студентов 3-5 курсов математических факультетов университетов и пединститутов, а также для преподавателей вузов.

$$\text{М}\frac{20201-027}{\text{М }339-85}\quad \text{I}-85\quad 1702050000$$

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая работа содержит результаты исследований автора, относящиеся к периодическим решениям дифференциальных систем. Исключение составляет лишь первый параграф, в котором для полноты и ясности изложения приводятся хорошо известные факты, основополагающие в теории периодических решений дифференциальных уравнений.

Основным инструментом исследований является введенное автором понятие отражающей функции, возникшее в результате переосмысления понятия суперпозиции потоков (введенного Ю.С.Богдановым и изучавшегося С.С.Белявским), а также тех работ советских и зарубежных авторов (В.А.Плисс, А.М.Самойленко, W. S. Loud, D. E. Leach, B. Laloux, B. Mehri, G. Hetzer и др.), в которых при изучении вопросов существования периодических решений дифференциальных систем и уравнений использовались свойства симметричности (четность, нечетность и др.) как функций, задающих изучаемую систему, так и самих решений. Вначале появилось понятие нечетной эквивалентности дифференциальных систем, при изучении которого отражающая функция уже использовалась, но еще не называлась по имени. Значение этой функции было осознано позднее. Главное достоинство отражающей функции состоит в том, что она для многих, вообще говоря, неинтегрируемых в квадратурах, периодических дифференциальных систем позволяет в явном виде найти отображение Пуанкаре. Это обстоятельство можно использовать не только при исследовании периодических решений дифференциальных систем, но и в деле преподавания тех разделов качественной теории дифференциальных уравнений, которые связаны с периодическими решениями и их устойчивостью.

Работа написана таким образом, что, несмотря на оригинальность проводимых в ней исследований, она сможет служить элементарным введением в специальный курс "Периодические решения дифференциальных систем". Этим объясняется наличие упражнений в ней.

При отборе литературы для ссылок автор выбрал наиболее распространенные в нашей стране книги, которые четко или с необходимой для дальнейшего изложения окраской разъясняют соответствующее положение. Учитывалось при этом и то обстоятельство, насколько та или другая книга может быть использована студентом при дальнейшей его работе в той или иной области качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Автор искренне благодарит всех участников семинаров Н.П.Еру-

гина и Ю.С.Богданова, принимавших участие в обсуждении затронутых в настоящей работе вопросов.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в большинстве случаев системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = X(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x^T = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad (1)$$

не могут быть проинтегрированы в элементарных функциях или квадратурах. В связи с этим появляется необходимость исследования решений системы (1) непосредственно по самой системе (1), т.е. по функции X . Важнейшими задачами такого исследования являются задачи о существовании, количестве, устойчивости и определении начальных данных периодических решений системы (1). "... Особая ценность этих переодических решений заключается в том, что они являются единственной брешью, через которую мы могли бы попытаться проникнуть в область, считавшуюся недоступной" [1, с.75] .

В том случае, когда система (1) непериодическая по t ,некоторую информацию о периодических решениях системы (1) можно получить, используя тот факт, что всякое 2ω - периодическое решение $x(t)$ системы (1) обязано удовлетворить соотношению [2, с.487]

$$X(t+2\omega, x(t)) \equiv X(t, x(t)). \qquad (2)$$

В том же случае, когда система (1) сама 2ω-периодическая по t , соотношение (2) выражается в тождество и потому не несет информации о 2ω -периодических решениях системы (1).

При изучении поставленных вопросов о периодических решениях 2ω - периодических по t систем вида (1) важнейшую роль играет отображение за период (отображение Пуанкаре) для системы (1) [3,с.25 , 4, с. 12, 5,с. 74, 6, с. 176] . Если $\varphi(t;\tau,x)$ есть единственное решение соответствующей задачи Коши для системы (1), то отображение Пуанкаре T для 2ω- периодической по t системы (1) определяется формулой

$$T(x) = \varphi(\tau+2\omega; \tau, x).$$

Создается впечатление, что отображение Пуанкаре системы (1) можно найти явным образом только в том случае, когда мы сможем найти общее решение системы (I). Это мнение, как покажет дальнейшее изложение, - ошибочное. Оказывается, что даже неинтегрируемая в квадратурах система (I) может иметь отображение за период, задаваемое с помощью элементарных функций. Причем можно указать такие случаи, когда отображение $T(x)$ неинтегрируемой в квадратурах системы (I) может быть найдено эффективно.

Для явного отыскания отображения Пуанкаре целесообразно использовать различные вспомогательные функции $\Phi(t,x)$, которые, не совпадая с общим решением $\varphi(t;\tau,x)$ системы (I), везде совпадают с ним на гиперплоскостях $t=\tau$ и $t=\tau+2\omega$. Если такая функция $\Phi(t,x)$ будет найдена, то тем самым будет найдено и отображение Пуанкаре. В настоящей работе в качестве такой функции используется так называемая отражающая функция

$$F(t,x)\triangleq\varphi(-t;t,x).$$

Если отражающая функция $F(t,x)$ 2ω - периодической системы (I) известна, то формула

$$F(-\omega,x)\equiv\varphi(\omega;-\omega,x)$$

будет задавать отображение Пуанкаре этой системы. На этом основано применение отражающей функции при изучении решений дифференциальных систем.

Отражающая функция, как и отображение Пуанкаре, системы (I) может задаваться с помощью элементарных функций даже тогда, когда система (I) не интегрируется в квадратурах. Отражающая функция всякой системы вида (I) с нечетной по t правой частью ($X(-t,x)\equiv-X(t,x)$), например, задается формулой $F(t,x)\equiv x$.

Таким образом, различные системы могут иметь одинаковые отражающие функции. В предлагаемой работе построено множество всех систем с одной и той же отражающей функцией $F(t,x)$. Каждая система из этого множества может быть записана в виде

$$\dot{x}=-(F_x+E)^{-1}F_t+F_x^{-1}R(t,x)-R(-t,F), \tag{3}$$

где $R(t,x)$ - есть некоторая вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^n$. При любом выборе вектор-функции R система (3), если только ее решения однозначно определяются своими начальными условиями, имеет F в качестве своей отражающей функции. Все 2ω - периодические системы вида (2) имеют одно и то же отображение Пуанкаре $F(-\omega, x)$.

Так называемое основное соотношение

$$F_t + F_x X(t,x) + X(-t,F) = 0, \quad F(0,x) = x,$$

для отражающей функции F системы (I), несмотря на свою сложность, во многих случаях позволяет найти отражающую функцию системы (I) или установить ее структуру, не интегрируя самой системы (I). Используя это обстоятельство для многих систем вида (I), удается построить отображение Пуанкаре $F(-\omega, x)$.

Как показали проведенные автором и Л.А.Альсевич исследования, отражающая функция позволяет получить новые результаты даже для уже хорошо изученных линейных систем.

Более полное представление об отражающей функции и ее возможностях сложится у читателя после прочтения всей работы и просмотра предлагаемых упражнений.

§ I. ОТОБРАЖЕНИЕ ЗА ПЕРИОД. ОСНОВНОЙ ПРИНЦИП

Этот параграф носит вспомогательный характер. В нем приведены хорошо известные, но необходимые для дальнейшего изложения положения.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(t,x), \; t \in \mathbb{R}, \; x^T = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{I}$$

Всюду в этом параграфе будем считать, что эта система удовлетворяет условиям: А. При всех $(\tau, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$ задача Коши для системы (I) имеет единственное решение $t \mapsto \varphi(t;\tau,x)$, $t \in \mathcal{J}$, а правая часть системы (I) непрерывно дифференцируема.

Б. Система (I) 2ω - периодична по t, т.е. $X(t+2\omega, x) \equiv X(t,x)$.

Отображение $\varphi_{(\beta,\alpha)}: x \mapsto \varphi(\beta; \alpha, x)$ называют оператором или отображением сдвига вдоль решений системы (I). Имеют место следующие известные свойства оператора сдвига вдоль решений системы (I):

1. $\varphi_{(\alpha,\alpha)}(x) = x$; 2. $\varphi_{(\alpha,\beta)} \circ \varphi_{(\beta,\gamma)} = \varphi_{(\alpha,\gamma)}$;

3. $\varphi^{-1}_{(\alpha,\beta)} = \varphi_{(\beta,\alpha)}$; 4. $\varphi_{(\alpha+2\omega,\beta)} = \varphi_{(\alpha,0)} \circ \varphi_{(2\omega,\beta)}$.

Каждое из этих свойств вытекает из свойств функции $\varphi(t;\tau,x)$. Докажем здесь, к примеру, четвертое свойство, которое равносильно тождеству

$$\varphi(\alpha+2\omega; \beta, x) \equiv \varphi(\alpha; 0, \varphi(2\omega; \beta, x)). \qquad (2)$$

Для его доказательства отметим, что в силу 2ω - периодичности системы (I) функция $t \mapsto \varphi(t+2\omega; \beta, x)$, как и функция $t \mapsto \varphi(t; 0, \varphi(2\omega; \beta, x))$, является решением системы (I). При $t = 0$ эти решения совпадают. Поэтому они обязаны совпадать и при всех t, в том числе и при $t = \alpha$, т.е. должно иметь место тождество (2), а с ним и свойство 4.

Отображение $\varphi_{(\alpha+2\omega,\alpha)}: x \mapsto \varphi(\alpha+2\omega; \alpha, x)$ при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ называют отображением за период или отображением Пуанкаре для системы (I). Областью определения отображения Пуанкаре является множество всех тех x, для которых решение $t \mapsto \varphi(t;\alpha,x)$ системы (I) определено при всех $t \in [\alpha, \alpha+2\omega]$.

<u>Общий принцип.</u> [2, с.25 ; 3, с.12]. <u>Для того, чтобы продолжимое на</u> $[\alpha, \alpha+2\omega]$ <u>решение</u> $\varphi(t;\alpha,x)$ <u>системы I было</u> 2ω <u>- периодическим, необходимо и достаточно, чтобы точка</u> x <u>была неподвижной точкой отображения Пуанкаре</u> $\varphi_{(\alpha+2\omega,\alpha)}$.

▷ Необходимость очевидным образом следует из 2ω -периодичности решения

Достаточность. Пусть x есть неподвижная точка отображения за период $\varphi_{(\alpha+2\omega,\alpha)}$. Это означает, что

$$\varphi_{(\alpha+2\omega,\alpha)}(x) = x, \quad \text{или} \quad \varphi(\alpha+2\omega; \alpha, x) = x. \qquad (3)$$

Функция $t \mapsto \varphi(t+2\omega; \alpha, x)$ определена на некотором множестве, содержащем отрезок $[\alpha-2\omega, \alpha]$, и, в силу 2ω - периодичности системы (I), является решением системы (I). Согласно (3), оба решения $\varphi(t; \alpha, x)$ и $\varphi(t+2\omega; \alpha, x)$ при $t=\alpha$ совпадают. Так как решения системы (I) однозначно определяется своими начальными условиями, то

$$\varphi(t+2\omega; \alpha, x) \equiv \varphi(t; \alpha, x).$$

Теорема доказана. ◁

Таким образом, если при каком-то $\alpha \in \mathbb{R}$ удается отыскать отображение за период $T = \varphi_{(\alpha+2\omega; \alpha)}$, то из уравнения $T(x) = x$ будут найдены начальные данные всех 2ω - периодических решений.

Пусть $S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ означает некоторый диффеоморфизм и пусть нам удалось отыскать отображение $S^{-1} \circ T \circ S$. Тогда если y есть решение уравнения $S^{-1} \circ T \circ S(y) = y$, то $x = S(y)$ есть решение уравнения $T(x) = x$. В связи с этим разумно следующее

Определение. Отображения Пуанкаре $\varphi_{(\alpha+2\omega, \alpha)}$ системы (I) и $\psi_{(\beta+2\omega, \beta)}$ системы

$$\dot{y} = Y(t, y), \; t \in \mathbb{R}, \; y^T = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

удовлетворяющей условиям А и Б, называются подобными, если существует диффеоморфизм S, при котором

$$\psi_{(\beta+2\omega, \beta)} = S^{-1} \circ \varphi_{(\alpha+2\omega, \alpha)} \circ S.$$

Верны следующие предложения:

I. Любые два отображения Пуанкаре одной и той же системы подобны.

2. Если отображения Пуанкаре систем (I) и (4) подобны, то между 2ω - периодическими решениями этих систем можно установить взаимно однозначное соответствие.

3. Отношение подобия для отображений Пуанкаре разбивает множество систем вида (I), удовлетворяющих условиям А и Б, на классы эквивалентности таким образом, что две системы принадлежат одному классу эквивалентности, если и только если их отображения Пуанкаре подобны.

▷ В самом деле, для любого отображения Пуанкаре $\varphi_{(\alpha+2\omega,\alpha)}$ в силу свойств оператора сдвига верны соотношения

$$\varphi_{(\alpha+2\omega,\alpha)} = \varphi_{(\alpha,0)} \circ \varphi_{(2\omega,0)} \circ \varphi_{(0,\alpha)} = \varphi^{-1}_{(0,\alpha)} \circ \varphi_{(2\omega,0)} \circ \varphi_{(0,\alpha)},$$

из которых следует, что любое отображение Пуанкаре системы (I) подобно отображению $\varphi_{(2\omega,0)}$. Откуда следует первое утверждение.

Для доказательства второго утверждения достаточно заметить, что нужное соотношение между начальными данными периодических решений систем (I) и (4) устанавливается с помощью формулы $x = S(y)$.

Третье утверждение, как показывает проверка соответствующих условий, также имеет место. ◁

Из предыдущего следует, что множество систем вида (I), все продолжимые на $[-\omega, \omega]$ решения которых 2ω - периодичны, образуют класс эквивалентности. Простейшим представителем этого класса является система $\dot{x} = 0$.

Пусть T есть некоторое отображение, а x_0 - его неподвижная точка. Неподвижная точка x_0 называется устойчивой по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что $\| T^n x - T^n x_0 \| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant 1$ и всех x, для которых $\| x - x_0 \| < \delta$. Если x_0 - устойчива по Ляпунову и $\| T^n x - T^n x_0 \| \to 0$ при $n \to \infty$, то точка x_0 называется асимптотически устойчивой [6, с.177]. Имеет место.

Теорема. Периодическое решение $\varphi(t;\alpha,x)$ системы (I) устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову тогда и только тогда, когда устойчива (асимптотически устойчива) неподвижная точка x отображения Пуанкаре $\varphi_{(\alpha+2\omega,x)}$ системы (I).

Доказательство см. в [6, с. 177].

Для изучения вопросов существования и устойчивости периодических решений системы (I) можно использовать любое отображение Пуанкаре $\varphi_{(\alpha+2\omega,\,\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Мы будем использовать отображение $\varphi_{(-\omega,\,\omega)}$. В дальнейшем поэтому слова "отображение Пуанкаре" (отображение за период) будут означать для нас, если не оговорено противное, только отображение $\varphi_{(-\omega,\,\omega)}: x \mapsto \varphi(\omega; -\omega, x)$, которое для краткости будем обозначать через T.

Упражнения. I. Показать, что для любого 2ω - периодического решения $x(t)$ возможно непериодической системы (I) выполняется соотношение $X(t+2\omega, x(t)) \equiv X(t, x(t))$.

2. Пользуясь первым упражнением, найти 2π -периодические решения (если они существуют) следующих уравнений и систем:

I) $\dot{x} = t\,(x - \sin t)^2 + \cos t$;

2) $\dot{x} = t\,x^2 - \sin t$;

3) $\dot{x} = t\,(y - x) + \cos t,\ \ \dot{y} = t\,(x - \sin t) + \cos t$;

4) $\dot{x} = y + t\,(x^2 + y^2 - 1),\ \ \dot{y} = -x + \sin\pi\,(x^2 + y^2)$;

5) $\ddot{x} + x + t\sin\pi\,(x^2 + \dot{x}^2) = 0$.

3. Записать в виде квадратур 2π - периодические решения следующих линейных уравнений и систем:

I) $\dot{x} = x + e^{\sin t}$;

2) $\dot{x} = y,\ \ \dot{y} = x + \cos\sin t$;

3) $\ddot{x} - x = \cos\sin t$.

4. Показать, что отображение Пуанкаре линейной системы $\dot{x} = P(t)x$ линейно, т.е. $T(x) = Ax$.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Будем рассматривать систему

$$\dot{x} = X(t, x),\ t \in \mathbb{R},\ x^T \in \mathbb{R}^n, \qquad (I)$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью. Тогда ее решения однозначно определяются своими начальными данными (τ, x). Общее решение этой системы в форме Коши будем обозначать через $\varphi(t;\tau,x)$. Через J_x обозначим интервал существования решения $\varphi(t;0,x)$.
Пусть

$$\bar{J}_x = \{t : -t \in J_x\},\ \mathcal{D} = \{(t,x) : x \in \mathbb{R}^n,\ t \in J_x \cap \bar{J}_x\}.$$

Определение. Отражающей функцией системы (I) назовем дифференцируемую функцию $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$, определяемую формулой

$$F(t,x) = \varphi(-t;t,x) \tag{2}$$

или иначе формулами

$$F(t,x) = \varphi_{(-t,t)}(x) = \varphi(-t;0,\varphi(0;t,x)).$$

Последняя форма записи указывает на связь понятия отражающей функции с понятием композиции потоков [7, с. 29-30].

Для отражающей функции справедливы свойства:

I. Для любого решения $x(t),\ t \in J \ni 0$, системы (I) верно тождество

$$F(t,x(t)) \equiv x(-t). \tag{3}$$

2. Для отражающей функции F любой системы выполнены тождества

$$F(-t,F(t,x)) \equiv F(0,x) \equiv x. \tag{4}$$

3. Дифференцируемая функция $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ будет отражающей функцией системы (I) с непрерывно дифференцируемой правой частью тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе уравнений в частных производных

$$F_t + F_x X(t,x) + X(-t,F) = 0 \tag{5}$$

и начальному условию

$$F(0,x) \equiv x. \tag{6}$$

Уравнение (5) будем называть основным уравнением (основным соотношением) для отражающей функции.

▷ Первое свойство следует непосредственно из определения (2).

Для доказательства второго свойства заметим, что согласно первому свойству для любого решения $x(t)$ системы (I) верны тождества

$$F(-t, F(t, x(t))) \equiv F(-t, x(-t)) \equiv x(t).$$

Из этих тождеств, в силу того, что через каждую точку $(t,x)\in D$ проходит некоторое решение $x(t)$ системы (I), и следуют тождества (4).

Приступим к доказательству третьего свойства. Пусть $F(t,x)$ есть отражающая функция системы (I). Тогда для нее верно тождество (3). Продифференцируем это тождество по t и затем воспользуемся тем, что $x(t)$ - решение системы (I), и самим тождеством (3). Получим тождество

$$F_t(t, x(t)) + F_x(t, x(t))X(t, x(t)) \equiv -X(-t, F(t, x(t))),$$

из которого, в силу произвольности решения $x(t)$ и, следует, что F есть решение системы (5). Начальное условие согласно второму свойству также выполняется.

Пусть теперь некоторая функция $\Phi(t,x)$ удовлетворяет системе (5) и условию (6). Так как этой системе и этому условию удовлетворяет также и отражающая функция, то из единственности решения задачи (5) - (6)[8, с.56 ; 9, с.6I] следует, что функция Φ должна совпадать с отражающей функцией. Третье свойство доказано. ◁

Непосредственно из определения отражающей функции следует

Основная лемма. Пусть правая часть системы (I) 2ω- периодична по t, а решение системы (I) однозначно определяется своими начальными данными. Тогда отображение за период для системы (I) можно найти по формуле $\varphi(\omega; -\omega, x) \equiv F(-\omega, x)$ и поэтому решение $\varphi(t; -\omega, x)$ системы (I) будет 2ω - периодическим тогда и только тогда, когда x есть решение недифференциальной системы

$$F(-\omega, x) = x. \qquad (7)$$

В качестве следствия этой леммы докажем следующее [I0, с.37].

Предложение. Пусть непрерывно дифференцируемая функция $X(t,x)$ 2ω - периодична и нечетна по t, т.е.

$$X(t+2\omega,x)\equiv X(t,x) \quad \text{и} \quad X(-t,x)\equiv -X(t,x).$$

Тогда всякое продолжимое на отрезок $[-\omega,\omega]$ решение системы (I) будет 2ω - периодическим и четным по t.

$\triangleright$ Для доказательства достаточно заметить, что функция $F(t,x)\equiv x$ удовлетворяет уравнению (5) и условию (6). Поэтому она, согласно третьему свойству, является отражающей функцией рассматриваемой системы. Уравнение (7) в нашем случае вырождается в тождество и ему удовлетворяет любое x, для которого определено значение $F(-\omega,x)\equiv\varphi(\omega;-\omega,x)$. Поэтому согласно основной лемме любое продолжимое на $[-\omega,\omega]$ решение системы (I) будет 2ω - периодическим.

Четность произвольного решения $x(t)$ системы (I) следует из тождеств $x(-t)\equiv F(t,x(t))\equiv x(t)$, справедливых в силу первого свойства отражающей функции. $\triangleleft$

Как следует из основной леммы, знание отражающей функции 2ω - периодической системы вида (I) позволяет определить отображение за период такой системы и, значит, найти начальные данные периодических решений этой системы и исследовать эти решения на устойчивость. Возникает вопрос: Может ли неинтегрируемая в квадратурах система иметь в качестве своей отражающей функции элементарную функцию? Ответ на этот вопрос положителен. В самом деле, для любой неинтегрируемой в квадратурах системы вида (I), для которой $X(0,x)\equiv 0$, можно построить систему

$$\dot{x}=\begin{cases} X(t,x) & \text{при} \quad t\geq 0, \\ -X(-t,x) & \text{при} \quad t<0 \end{cases}$$

с нечетной по t правой частью. Эта система неинтегрируема в квадратурах, а ее отражающая функция задается формулой $F(t,x)\equiv x$.

В частности, уравнение Риккати

$$\dot{x}=(x^2+\cos^2 t)\sin t$$

неинтегрируемо в квадратурах, а его отражающая функция $F(t,x)\equiv x$.

Теорема I. Пусть все решения системы (I) 2ω - периодичны и однозначно определяются своими начальными данными. Тогда отражающая функция $F(t,x)$ этой системы 2ω - периодична по t.

$\triangleright$ Пусть все решения $\varphi(t;\tau,x)$ системы (I) 2ω - периодичны. Тогда

$$\varphi_{(t,t+2\omega)}(x) \equiv \varphi(t;t+2\omega,x) \equiv \varphi(t+2\omega;t+2\omega,x) \equiv x.$$

Поэтому $F(t+2\omega,x) \equiv \varphi(-t-2\omega;t+2\omega,x) \equiv \varphi(-t;t+2\omega,x) \equiv$

$$\equiv \varphi_{(-t,t+2\omega)}(x) \equiv \varphi_{(-t,t)} \circ \varphi_{(t,t+2\omega)}(x) \equiv \varphi_{(-t,t)}(x) \equiv F(t,x),$$

т.е. отражающая функция 2ω- периодична по t. $\triangleleft$

Теорема 2. Пусть система (I) 2ω- периодична по t, а ее решения однозначно определяются своими начальными данными и существуют при всех $t \in [-2\omega,2\omega]$. Если, кроме того, отражающая функция этой системы 2ω - периодична по t, то все решения системы (I) периодичны с периодом 4ω.

$\triangleright$ Система (I) 2ω-периодична, а поэтому и 4ω- периодична по t. Отображение за период 4ω согласно основной лемме вычисляется по формуле $F(-2\omega,x) \equiv F(0,x) \equiv x$.
Таким образом, любая точка x является неподвижной точкой отображения за период. Ссылка на основной принцип завершает доказательство. $\triangleleft$

Замечание I. Аналогичная теорема имеет место в том случае, когда не все решения системы (I) продолжимы на отрезок $[-2\omega,2\omega]$. При этом заключение о 4ω- периодичности можно сделать лишь для тех решений, которые существуют при всех $t \in [-2\omega,2\omega]$.

Замечание 2. Из ω- периодичности отражающей функции следует 2ω- периодичность всех продолжимых на $[-\omega,\omega]$ решений 2ω- периодической системы (I). Доказательство этого факта аналогично доказательству теоремы 2. Из 2ω- периодичности отражающей функции, как показывает следующий ниже пример, не следует, вообще говоря, 2ω - периодичность решений 2ω-периодической системы.

Пример. Система

$$\dot{x} = y\left(\tfrac{1}{2} - \sin t\right), \quad \dot{y} = -x\left(\tfrac{1}{2} - \sin t\right)$$

2π - периодична и имеет 4π - периодические решения

$$x = x_0 \cos\left[\frac{t-t_0}{2} + \cos t - \cos t_0\right] + y_0 \sin\left[\frac{t-t_0}{2} + \cos t - \cos t_0\right],$$

$$y = -x_0 \sin\left[\frac{t-t_0}{2} + \cos t - \cos t_0\right] + y_0 \cos\left[\frac{t-t_0}{2} + \cos t - \cos t_0\right],$$

хотя ее отражающая функция $F = (F_1, F_2)^T$,

$$F_1 = x\cos t - y\sin t, \quad F_2 = x\sin t + y\cos t$$

2π- периодична по t.

Не следует думать, однако, что если все решения 2ω-периодической системы 2ω-периодичны, то ее отражающая функция обязана быть ω - периодической. Этому противоречит пример уравнения $\dot{x} = x\cos t$ с отражающей функцией $F(t,x) = x e^{2\sin t}$.

В том случае, когда система (I) вырождается в уравнение, т.е. когда $n = 1$, верна.

Теорема 3. Пусть уравнение (I) 2ω- периодично по t, а его решения однозначно определяются своими начальными данными и существуют при всех $t \in [-\omega, \omega]$. Тогда для того, чтобы все решения уравнения (I) были 2ω - периодичны, необходима и достаточна 2ω-периодичность по t отражающей функции этого уравнения.

▷ Необходимость следует из теоремы I. Для доказательства достаточности предположим, что, вопреки утверждению теоремы, некоторое решение $x(t)$ уравнения (I) не является 2ω - периодическим. Тогда последовательность чисел $x(2k\omega)$ (из условий теоремы следует, что любое решение $x(t)$ существует при всех t), k = I,2,..., строго монотонна [3, с.I20-I2I] . Поэтому рассматриваемое решение не может быть и 4ω- периодическим, а это противоречит утверждению теоремы 2. Полученное противоречие доказывает достаточность, а с ней и теорему. ◁

Из доказанных теорем следует, что все решения 2ω-периодической системы (I) с продолжимыми на $\mathbb{R}$ решениями будут периодическими тогда и только тогда, когда отражающая функция этой системы периодична по t.

В заключение отметим, что, благодаря первому свойству, отражающей функции, можно дать физическое толкование как функции, которая каждому будущему состоянию $x(t)$ в момент времени t ставит в соответствие ее прошлое состояние $x(-t)$ в момент времени $-t$ по формуле $F(t,x(t))\equiv x(-t)$. Это первое свойство отражающей функции можно принять и за ее определение. Тогда условие непрерывной дифференцируемости правой части системы во многих случаях можно заменить условием однозначной разрешимости задачи Коши для рассматриваемой дифференциальной системы.

Для каждой непрерывно дифференцируемой функции $X(t,x)$, заданной в полуплоскости $t\leq 0$ и каждой дифференцируемой функции $F(t,x)$, обладающей свойствами (4), можно построить систему $\dot{y}=Y(t,y)$, для которой F является отражающей функцией и $Y(t,x)\equiv X(t,x)$ для $t\leq 0$, а для $t>0$

$$Y(t,x)\equiv -F_t(-t,F)-F_x(-t,F)X(-t,F),$$

если только построенная функция $Y(t,x)$ является непрерывно дифференцируемой.

<u>Упражнения I</u>. Построить отражающие функции для следующих уравнений и систем:

а) $\dot{x}=p(t)x$; б) $\dot{x}=\varphi(x)[a(t)-a(-t)]$,

в) $\dot{x}=y,\ \dot{y}=-x$; г) $\dot{x}=y,\ \dot{y}=x$.

2. Используя понятие отражающей функции, выяснить, когда все решения системы $\dot{x}=X(t,x)$ – четные.

3. Показать, что отражающая функция системы

$$\dot{x}=a(t)x+b(t)y,\quad \dot{y}=c(t)x+a(t)y,$$

(здесь $b(t)$, $c(t)$ - нечетные непрерывные функции, $a(t)$ - непрерывна) задается формулами:

$$F=\binom{F_1}{F_2},\quad F_1=xe^{-\int\limits_0^t(a(\tau)+a(-\tau))d\tau},\quad F_2=ye^{-\int\limits_0^t(a(\tau)+a(-\tau))d\tau}$$

Используя этот факт, в случае когда коэффиценты системы 2ω - периодичны, найти для рассматриваемой системы отображение Пуанкаре, начальные данные периодических решений, исследовать систему на устойчивость.

§ 3. ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМ ПО ДАННОЙ ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Пусть $F(t,x)$, $F: \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$, есть произвольная, определенная в некоторой области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{1+n}$, содержащей гиперплоскость $t=0$, дифференцируемая функция, для которой выполнены тождества

$$F(-t, F(t,x)) \equiv x, \tag{I}$$

$$F(0, x) \equiv x, \tag{2}$$

а E - единичная матрица $n \times n$.

<u>Лемма.</u> Для всякой непрерывно дифференцируемой функции $F: \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$, для которой выполнены тождества (I) и (2), выполнены соотношения

$$F_x(-t, F(t,x)) \equiv F_x^{-1}(t,x), \tag{3}$$

$$F_t(-t, F(t,x)) \equiv F_x^{-1}(t,x) F_t(t,x). \tag{4}$$

▷ Для доказательства леммы продифференцируем тождество (I) по x и по t. Получим тождества

$$F_x(-t,F)F_x \equiv E, \quad -F_t(-t,F) + F_x(-t,F)F_t \equiv 0,$$

из которых следует неравенство $\det F_x \neq 0$ и тождества (3) и (4). ◁

<u>Теорема I.</u> Для всякой дважды непрерывно дифференцируемой функции $F: \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$, определенной в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{1+n}$, содержащей гиперплоскость $t=0$, для которой выполнены тождества (I) и (2), при всех $x \in \mathbb{R}^n$ и достаточно малых $|t|$ существует дифференциальная система

$$\dot{x} = -[F_x + E]^{-1} F_t, \tag{5}$$

отражающая функция которой совпадает с $F(t,x)$, а общий интеграл задается формулой

$$x + F(t,x) = c = const. \tag{6}$$

▷ При $t=0$ собственные значения матрицы $F_x + E$ равны $\lambda_i(0,x) = 2$. Поэтому при каждом x при достаточно малых $|t|$ значения $\lambda_i(t,x) \neq 0$, а матрица $F_x + E$ имеет обратную. Поэтому система (5) существует.

Чтобы показать, что F есть отражающая функция системы (5), воспользуемся третьим свойством отражающей функции. Для этого покажем, что для F и системы (5) выполнено основное соотношение (5, § I). Действительно, используя тождества (3) и (4), получим соотношения

$$F_t + F_x X(t,x) + X(-t,F) = F_t - F_x (F_x + E)^{-1} F_t -$$
$$-[F_x(-t,F) + E]^{-1} F_t(-t,F) = F_t - F_x (F_x + E)^{-1} F_t -$$
$$-(F_x^{-1} + E)^{-1} F_x^{-1} F_t = F_t - F_x (F_x + E)^{-1} F_t - (F_x + E)^{-1} F_t = 0.$$

Тогда по третьему свойству отражающей функции F есть отражающая функция системы (5).

Дифференцируя соотношение (6) в силу системы (5), убедимся в том, что (6) есть общий интеграл этой системы. ◁

Следствие. Дважды непрерывно дифференцируемая функция $F: \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ является отражающей функцией хотя бы одной дифференциальной системы тогда и только тогда, когда для нее выполнены тождества (I) и (2).

▷ Это следствие объединяет теорему I и второе свойство отражающей функции. ◁

Замечание. Как показывает пример функции

$$F(t,x,y) = \begin{pmatrix} x\cos t - y\sin t \\ x\sin t + y\cos t \end{pmatrix}$$

при больших $|t|$ матрица $F_x + E$ может оказаться вырожденной. Если же $n = 1$, то уравнение (5) определено при всех $(t,x) \in \mathcal{D}$. Для доказательства достаточно заметить, что при $n=1$ из $F_x \neq 0$ и $F_x(0,x)=1$ следует неравенство $F_x(t,x)>0$ при всех $(t,x)\in\mathcal{D}$.

Обозначим через G некоторую область в пространстве $\mathbb{R}^{1+n}$, содержащую гиперплоскость $t=0$.

Теорема 2. Пусть $\varphi: G \to \mathbb{R}^n$ есть отражающая функция некоторой дифференциальной системы, решения которой однозначно определяются своими начальными данными, а для непрерывно дифференцируемой функции $F: \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ выполнены тождества (1) и (2). Тогда для того, чтобы в области $\mathcal{D}\cap G$ функция φ совпадала с F необходимо и достаточно, чтобы рассматриваемая система имела вид

$$\dot{x} = -(F_x+E)^{-1}F_t + F_x^{-1}R(t,x) - R(-t,F), \tag{7}$$

где $R: \mathcal{D}\cap G \to \mathbb{R}^n$ есть некоторая непрерывная вектор-функция.

▷ Необходимость. Пусть φ есть отражающая функция некоторой системы $\dot{x} = X(t,x)$ и пусть φ совпадает с F.

Положим

$$R(t,x) = \frac{1}{2} F_x (F_x+E)^{-1}[X(t,x) - X(-t,F)].$$

Тогда, используя тождества (3) и (4) и основное соотношение для отражающей функции $\varphi = F$, получим тождества

$$-(F_x+E)^{-1}F_t + F_x^{-1}R(t,x) - R(-t,F) \equiv -(F_x+E)^{-1}F_t +$$

$$+\frac{1}{2}(F_x+E)^{-1}[X(t,x)-X(-t,F)] - \frac{1}{2}F_x^{-1}(F_x^{-1}+E)^{-1}\cdot$$

$$\cdot[X(-t,F)-X(t,x)] \equiv (F_x+E)^{-1}[F_x^{-1}X(t,x)+X(-t,F)] +$$

$$+(F_x+E)^{-1}[X(t,x)-X(-t,F)] \equiv X(t,x),$$

доказывающие необходимость.

Достаточность. Пусть в системе (7) $R: \mathcal{D}\cap G \to \mathbb{R}^n$ есть такая функция, для которой решения системы (7) однозначно определяются своими начальными данными. Тогда, в чем можно убедиться подстановкой, выполняется основное соотношение для отражающей функции (5, § 2). Поэтому согласно третьему свойству отражающей функции, функция F является отражающей функцией системы (7). ◁

Пример. Все уравнения вида

$$\dot{x} = \frac{x^2 \tau'(t)}{1+(1+x\tau(t))^2} + (1+x\tau(t))^2 R(t,x) - R\left(-t, \frac{x}{1+x\tau(t)}\right),$$

где $\tau(t)$ - нечетная дифференцируемая функция, имеют в качестве своей отражающей функции функцию $F(t,x) = x\,(1+x\tau(t))^{-1}$. Уравнением такого вида является уравнение Риккати

$$\dot{x} = a(t) + 2a(t)b(t)x + c(t)x^2,$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t) - \frac{db}{dt}(t)$ суть непрерывные нечетные функции. Здесь $\tau(t) = 2b(t)$. Убедиться в этом можно используя основное соотношение для отражающей функции.

Из полученных выше результатов следует, что для каждой дифференцируемой функции $F(t,x)$, для которой выполнены тождества

$$F(-t, F(t,x)) \equiv F(0,x) \equiv x$$

можно построить множество систем вида (7), для которых функция $F(t,x)$ является отражающей функцией. Интересно отметить, что сама функция $F(t,x)$ может задаваться неявным образом, а получаемые при этом дифференциальные системы (7) при удачном выборе вектор-функции $R(t,x)$ будут иметь нормальную форму.

Пусть, к примеру, функция $F(t,x)$ задается соотношением вида

$$U(-t, F) \equiv U(t,x), \tag{8}$$

где U - дифференцируемая функция, для которой $\det U_x(t,x) \neq 0$ (соотношением такого вида можно задать любую отражающую функцию). Построим тогда дифференциальную систему

$$\dot{x} = -U_x^{-1}(t,x)\, U_t(t,x). \tag{9}$$

Соотношение $U(t,x) = C$, что нетрудно проверить, представляет собой общий интеграл системы (9). Поэтому для любого решения $x(t)$ этой системы $U(-t, x(-t)) \equiv U(t, x(t))$. А это означает, что отражающая функция системы (9) задается соотношением (8).

Из соотношения (8) найдем

$$F_x = [U_x(-t,F)]^{-1} U_x, \quad F_x^{-1} = U_x^{-1} U_x(-t,F).$$

Тогда, что можно проверить с помощью третьего свойства отражающей функции (см. лемму в § 4), всякая система вида

$$\dot{x} = -U_x^{-1} U_t + U_x^{-1} U_x(-t, F) R(t,x) - R(-t, F) \tag{10}$$

также имеет отражающую функцию F, задаваемую соотношением (8). В качестве $R(t,x)$ возьмем функцию вида

$$R(t,x) = [U_x(-t, F(t,x))]^{-1} S(t, U(t,x)).$$

Тогда

$$R(-t, F) = U_x^{-1} S(-t, U(-t, F)) = U_x^{-1} S(-t, U(t,x)).$$

Поэтому система (10) может быть записана в виде

$$\dot{x} = U_x^{-1} [-U_t + S(t, U) - S(-t, U)]. \tag{11}$$

Правая часть системы (11) уже не содержит F. Таким образом, доказана.

<u>Теорема 3</u>. <u>Каковы бы ни были непрерывно дифференцируемые функции</u> $S(t,x)$ <u>и</u> $U(t,x)$, <u>для которой</u> $\det U_x \neq 0$, <u>отражающая функция системы</u>

$$\dot{x} = U_x^{-1}(t,x) [S(t, U(t,x)) - S(-t, U(t,x)) - U_t(t,x)]$$

задается соотношением $U(-t, F) = U(t, x)$.

<u>Упражнения</u>. 1. Для каждой из нижеследующих функций построить, если это возможно, дифференциальные системы, для которых данные функции являются отражающими функциями:

1) $F(t,x) = x$; 2) $F(t,x) = x e^{\sin t}$;

3) $F(t,x,y) = \begin{pmatrix} x\cos t + y\sin t \\ -x\sin t + y\cos t \end{pmatrix}$.

2. Доказать, что отражающая функция уравнения

$$\dot{x} = \frac{-\cos t + \mathcal{M}(t, 2x + \sin x) - \mathcal{M}(-t, 2x + \sin x + 2\sin t)}{2 + \cos x}$$

задается формулой $2F + \sin F = 2x + \sin x + \sin t$, какова бы ни была непрерывно дифференцируемая функция $\mathcal{M}(t,x)$. Указать начальные данные 2π- периодических решений этого уравнения

§ 4. КЛАССЫ СИСТЕМ С СОВПАДАЮЩИМИ ОТРАЖАЮЩИМИ ФУНКЦИЯМИ

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = X(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

считая, что ее решения однозначно определяются своими начальными данными.

Будем говорить, что множество систем вида (1) образует класс эквивалентности, если существует дифференцируемая функция $F: \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ со свойствами: 1) отражающая функция $\Phi: G \to \mathbb{R}^n$ любой системы из рассматриваемого множества совпадает в области определения G с функцией F; 2) любая система вида (1), отражающая функция $\Phi: G \to \mathbb{R}^n$ которой совпадает в области $\mathcal{D} \cap G$ с функцией F, содержится в рассматриваемом множестве.

Две системы вида (1), принадлежащие одному классу эквивалентности, будем называть эквивалентными. Допуская определенную вольность речи, будем говорить также, что они имеют одну и ту же отражающую функцию. Функцию F при этом будем называть отражающей функцией класса, а класс - соответствующим отражающей функции F.

Из § 3 следует, что если некоторая система принадлежит классу эквивалентности с отражающей функцией F, то эта система имеет вид

$$\dot{x} = -(F_x + E)^{-1} F_t + F_x^{-1} R(t,x) - R(-t, F), \tag{2}$$

где $R(t,x)$ есть произвольная функция со значениями в $\mathbb{R}^n$, при которой решения системы (2) однозначно определяются своими начальными данными. Все системы вида (2) принадлежат одному классу эквивалентности.

Класс систем вида (2) с заданной отражающей функцией F можно записать также в виде

$$\dot{x} = (F_x + E)^{-1} [S(t, x, F) - F_t], \tag{3}$$

где $S(t,x,y)$ есть произвольная функция, для которой $S(-t, y, x) \equiv -S(t, x, y)$, а решения системы (3) однозначно определяются своими начальными условиями.

Для доказательства заметим только, что функции R и S связаны между собой соотношением

$$2R(t,x) \equiv F_x (F_x + E)^{-1} S(t, x, F),$$

а функция S через правую часть $X(t,x)$ системы (I) выражается формулой

$$S(t,x,y)=X(t,x)-X(-t,y).$$

Из третьего свойства отражающей функции (§2) следует, что система (I) и система

$$\dot{y}=Y(t,y),\quad t\in\mathbb{R},\quad y\in\mathbb{R}^n, \tag{4}$$

принадлежат одному классу эквивалентности тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{cases} F_t+F_x\,X(t,x)+X(-t,F)=0, \\ F_t+F_x\,Y(t,x)+Y(-t,F)=0, \\ F(0,x)=x \end{cases} \tag{5}$$

совместна.

При решении вопроса о совместимости системы (5) большую помощь оказывает теорема Фробениуса [II,с.I74 ; I2,с.2I].

В качестве иллюстрации к сказанному рассмотрим уравнения

$$\dot{x}=x^2+\sin t \qquad \text{и} \qquad \dot{y}=y^2-\sin t$$

и попытаемся выяснить, являются ли они эквивалентными. Два первых уравнения системы (5), соответствующей этим уравнениям, имеют вид

$$F_t+F_x\,(x^2+\sin t)+F^2-\sin t=0,$$

$$F_t+F_x\,(x^2-\sin t)+F^2+\sin t=0.$$

Разрешая их относительно F_t и F_x, получим уравнения

$$F_t=-F^2-x^2,\quad F_x=1.$$

Равенство смешанных производных $F_{tx}=F_{xt}$ выполняется лишь для функции $F\equiv -x$, так как $F_{xt}\equiv 0$, а $F_{tx}\equiv -2FF_x-2x\equiv -2(F+x)$. Функция $F\equiv -x$ однако, не может быть решением рассматриваемой системы, ибо для нее $F_x\equiv -1\neq 1$. Поэтому система (5) несовместна, а рассматриваемые уравнения не принадлежат одному классу эквивалентности.

Интересно отметить, что решения этих уравнений связаны простой зависимостью $y(t;\tau,x_0)=-x(-t;-\tau,-x_0)$, а сами уравнения нечетно-эквивалентны [I3, с.88].

Если одна из систем (I) или (4) может быть проинтегрирована, то их эквивалентность или неэквивалентность может быть установлена иначе. Рассмотрим, к примеру, уравнения

$$\dot{x} = \cos t \quad \text{и} \quad \dot{y} = \cos t + e^{y}(1 - e^{-2\sin t}).$$

Отражающую функцию первого уравнения найдем согласно определению §2, проинтегрировав это уравнение. В нашем случае $F(t, x) = x - 2\sin t$. Так как для этой функции и второго уравнения выполнено основное соотношение для отражающей функции, то эти уравнения эквивалентны.

Пусть известно, что системы (I) и (4) принадлежат одному классу эквивалентности и пусть одна из этих систем, скажем, система (I), является 2ω - периодической. Тогда если решения $\varphi(t; -\omega, x)$ и $\psi(t; -\omega, x)$ систем (I) и (4) соответственно продолжимы на отрезок $[-\omega, \omega]$, то отображение за период для системы (I)

$$\varphi(\omega; -\omega, x) \equiv F(-\omega, x) \equiv \psi(\omega; -\omega, x),$$

хотя система (4) может быть непериодической.
Отсюда следует

Теорема I. Пусть система (I) с 2ω - периодической по t правой частью и система (4) принадлежат одному классу эквивалентности, а их решения существуют при всех $t \in [-\omega, \omega]$. Тогда между 2ω - периодическими решениями системы (I) и решениями двухточечной задачи $y(-\omega) = y(\omega)$ для системы (4) можно установить взаимооднозначное соответствие.

Уравнения

$$\dot{x} = (1 + \sin t)x \quad \text{и} \quad \dot{y} = \frac{2e^{-2t}y}{1 + e^{-2t}} + e^{2t}(y^2 + 1) - y^2 e^{-4t} - 1,$$

например, принадлежат одному классу эквивалентности с отражающей функцией $F(t, x) = x e^{-2t}$. Единственное 2ω- периодическое решение $x \equiv 0$ первого уравнения соответствует единственному решению задачи $y(-\omega) = y(\omega)$ второго уравнения.

Следствие. Пусть система (I) с 2ω -периодической по t правой частью и система (4) принадлежат одному классу эквивалентности,

а их решения существуют при всех $t \in [-\omega, \omega]$.
Тогда каждому 2ω - периодическому решению $\varphi(t;-\omega,x)$, вообще говоря, непериодической системы (4) соответствует 2ω-периодическое решение $\varphi(t;-\omega,x)$ системы (I).

Лемма. Все системы класса эквивалентности, содержащего систему (I), с продолжимыми на $\mathbb{R}$ решениями, можно записать в виде

$$\dot{x} = X(t,x) + F_x^{-1} R(t,x) - R(-t,F), \tag{6}$$

где F - отражающая функция системы (I), а R - произвольная функция со значениями в $\mathbb{R}^n$, но такая, что решения системы (6) однозначно определяются своими начальными данными.

▷ Как уже отмечалось, все системы рассматриваемого класса, который будем обозначать через $[X]$, можно записать в виде (2). Поэтому, если система $\dot{y} = Y(t,y)$, как и система (I), принадлежит рассматриваемому классу $[X]$, то для некоторых функций R_1 и R_2

$$X(t,x) = -(F_x+E)^{-1}F_t + F_x^{-1} R_1(t,x) - R_1(-t,F),$$

$$Y(t,x) = -(F_x+E)^{-1}F_t + F_x^{-1} R_2(t,x) - R_2(-t,F).$$

Откуда

$$Y(t,x) = X(t,x) + F_x^{-1} R(t,x) - R(-t,F),$$

где $R = R_1 - R_2$.
Таким образом, произвольная система из класса $[X]$ имеет вид (6).

Так как для любой системы (6) удовлетворяется основное соотношение (5, § 2), то каждая система вида (6) принадлежит классу $[X]$. ◁

Теорема 2. Пусть система (I) эквивалентна некоторой стационарной системе. Тогда она эквивалентна системе $\dot{x} = X(0,x)$. Эта система - единственная стационарная система в классе эквивалентности, содержащем систему (I).

▷ Пусть $F(t,x)$ есть отражающая функция системы (I) и пусть некоторая стационарная система $\dot{y} = Y(y)$ принадлежит классу эквивалентности, содержащему систему (I). Тогда согласно лемме для некоторой функции R

$$Y(x) = X(t,x) + F_x^{-1} R(t,x) - R(-t,F).$$

Полагая в этом тождестве $t=0$ и учитывая, что $F_x(0,x)=E$, получим тождество $Y(x) \equiv X(0,x)$, доказывающее теорему. ◁

<u>Следствие. Линейная система $\dot{x}=P(t)x$ с непрерывной матрицей $P(t)$ эквивалентна некоторой стационарной системе тогда и только тогда, когда выполнены соотношения</u>

$$P(-t) + e^{-2P(0)t} P(t) e^{2P(0)t} \equiv 2P(0).$$

<u>Отображение за период линейной системы (с непрерывной 2ω-периодической матрицей $P(t)$), эквивалентной некоторой стационарной системе, задается формулой</u> $T(x) = e^{2P(0)\omega} x$. [I4, с.50,5I].

▷ Из теоремы 2 вытекает, что рассматриваемая линейная система эквивалентна системе $\dot{x} = P(0)x$ с отражающей функцией $F(t,x) = e^{-2P(0)t} x$. Откуда и следует заключение теоремы. ◁

Простейшим представителем класса эквивалентности, соответствующего отражающей функции F, является система

$$\dot{x} = -(F_x + E)^{-1} F_t \triangleq f(t,x). \tag{7}$$

Как следует из § 3, общий интеграл этой системы задается соотношением

$$F(t,x) + x = c. \tag{8}$$

Пусть $x(t)$ есть некоторое решение системы (7), существующее на интервале, содержащем точку $t=0$. Для такого решения из соотношения (8) и тождества $F(t,x(t)) \equiv x(-t)$ следует тождество

$x(t) + x(-t) \equiv c$, т.е. тождество $x(t) + x(-t) \equiv 2x(0)$, доказывающее, что четная часть каждого решения $x(t)$ системы (7) не зависит от t. Поэтому производная $\dot{x}(t) \equiv f(t,x(t))$ является четной функцией, т.е. $f(-t,x(-t)) \equiv f(t,x(t))$. Это тождество убеждает нас в том, что справедлива

Теорема 3. Пусть система $\dot{x}=f(t,x)$ является простейшим представителем класса эквивалентности, соответствующего отражающей функции F. Тогда $f(-t, F(t,x)) \equiv f(t,x)$.

▷ Действительно, используя соотношения (3) и (4) из § 3, получим

$$f(-t, F) \equiv -(F_x(-t,F)+E)^{-1} F_t(-t,F) \equiv -(F_x^{-1}+E)^{-1} F_x^{-1} F_t \equiv f(t,x).$$

Теорема доказана. ◁

Доказанная теорема позволяет в определенных случаях распознавать простейшие системы. Пусть нам, к примеру, задана некоторая система (1). Для того чтобы определить, является ли она простейшей, составим систему недифференциальных уравнений

$$X(-t, y) = X(t, x) \tag{9}$$

и найдем, если это возможно, дифференцируемое решение $y=F(t,x)$ этой системы, удовлетворяющее условию $F(0,x)=x$. Если это решение $F(t,x)$ удовлетворяет основному соотношению для отражающей функции, то рассматриваемая система является простейшей, а $F(t,x)$ является ее отражающей функцией. Если же система (9) не имеет такого решения F, которое удовлетворяет начальному условию $F(0,x)=x$ и основному соотношению для отражающей функции, то рассматриваемая система не является простейшей.

Пример 1. Для уравнения

$$\dot{x} = \frac{x^2 \cos t}{1+(1+x\sin t)^2}$$

соответствующее уравнение (9) имеет два решения:

$$y_1 = \frac{x}{1+x\sin t} \quad \text{и} \quad y_2 = -x.$$

Первое из них удовлетворяет необходимому начальному условию и основному соотношению для отражающей функции. Поэтому рассматриваемое уравнение простейшее.

Пример 2. Для уравнения $\dot{x}=x^2+\cos t$ соотношение (9) имеет вид $y^2+\cos t = x^2+\cos t$. Единственное дифференцируемое решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $F(0,x)\equiv x$ есть $F\equiv x$. Так как это решение не удовлетворяет основному уравнению для отражающей функции, то данное уравнение не является простейшим представителем.

Упражнения I. Доказать, что уравнение $\dot{x}=1+\varphi(x-3t)-\varphi(x+t)$ имеет такую же отражающую функцию, как и некоторое стационарное уравнение. В случае когда это уравнение периодическое, как, например, уравнение $\dot{x}=1+\sin(x-3t)-\sin(t+x)$, доказать отсутствие у него периодических решений.

2. Доказать, что всякая система вида

$\dot{x}=\alpha+\varphi(x+\beta t)-\varphi(x-(\beta+2\alpha)t)$ имеет такую же отражающую функцию, как и система $\dot{x}=\alpha$ (α,β постоянны).

3. Доказать эквивалентность следующих уравнений:

$$\dot{x}=\frac{-xe^{\sin t}\cos t}{1+e^{\sin t}}+e^{-\sin t}\cos x-\cos(xe^{\sin t})+e^{-\sin t}-1,$$

$$\dot{x}=\frac{-xe^{\sin t}\cos t}{1+e^{\sin t}}+e^{-\sin t}\cos x-\cos(xe^{\sin t})$$

и, найдя их общую функцию, доказать 2π - периодичность всех решений рассматриваемых уравнений.

4. Доказать, что уравнение

$$\dot{x}=x(x-1)(x-2)\cos t+(x-1)^3\left[e^{4\sin t}\mathcal{M}\left(t,\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}\right)-\mathcal{M}\left(-t,\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}e^{-4\sin t}\right)\right]$$

имеет такую же отражающую функцию, как уравнение

$$\dot{x}=x(x-1)(x-2)\cos t.$$

§ 5. СИСТЕМЫ С СОВПАДАЮЩИМИ И ПОДОБНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ ЗА ПЕРИОД

Рассмотрим систему

$$\dot{x}=X(t,x),\ t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n. \qquad (1)$$

Будем считать, что X и $\frac{\partial X}{\partial x}$ непрерывны в $\mathbb{R}^{1+n}$ и $X(t+2\omega,x)\equiv X(t,x)$. Наряду с системой (1) рассмотрим систему

$$\dot{x}=\frac{X(t,x)-X(-t,x)}{2}. \qquad (2)$$

Предположим дополнительно, что каждое решение $z(t;\tau,z_0)$ этой системы продолжимо на $[-\omega,\omega]$. Тогда это решение будет продолжимо и на все $\mathbb{R}$.

Так как правая часть системы (2) нечетна по t, то согласно § 2 (см. Предложение на с. 13) каждое решение системы (2) четно и 2ω- периодично.

В системе (I) сделаем замену переменных $x = z(t;-\omega,y)$. Тогда получим систему

$$\dot{y}=\left[\frac{\partial z}{\partial y}(t;-\omega,y)\right]^{-1}\frac{X(t,z(t;-\omega,y))+X(-t,z(t;-\omega,y))}{2}. \qquad (3)$$

Как показывает проверка, правая часть системы (3) четна по t. Через $\varphi(t;\tau,x)$ будем обозначать решения системы (I), а через $\psi(t,\tau,y)$ - решения системы (3).

Теорема I. Пусть непрерывно дифференцируемая функция $X(t,x)$ 2ω - периодична по t, а каждое решение системы (2) определено при всех $t\in[-\omega,\omega]$. Тогда существует система (3) с четной по t правой частью, отображение Пуанкаре которой совпадает с отображением Пуанкаре системы (I), т.е.

$$\varphi(\omega;-\omega,x)\equiv\psi(\omega;-\omega,x)$$

▷ Из предшествующих теореме рассуждений следует соотношение

$$\varphi(t;-\omega,x)\equiv z(t;-\omega,\psi(t;-\omega,x)).$$

Полагая здесь $t=\omega$ и используя 2ω - периодичность решений системы (2), докажем теорему. ◁

Замечание. В том случае, когда система (2) интегрируется в квадратурах или элементарных функциях система (3) для системы (I) может быть построена эффективным образом. Такой случай представится, например, для системы (I) вида

$$\dot{x}=a(t)Ax+b(t)+X_1(t,x),$$

где $X_1(t,x)$ - четная по t вектор-функция, A - постоянная матрица, $a(t)$ - произвольная непрерывная скалярная функция, $b(t)$ - непрерывная вектор-функция. В этом случае система (3) принимает вид $\dot{z}=a_H(t)Az+b_H(t)$.

Дифференцируемую, 2ω - периодическую по t функцию $A(t,x)=A_t(x)$, $A:\mathbb{R}^{1+n}\to\mathbb{R}^n$, для которой при каждом $t\in\mathbb{R}$ функция $A_t:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ есть диффеоморфизм, назовем ω - диффеоморфизмом. Отражающие функции $F(t,x)=F_t(x)$ и $\Phi(t,x)=\Phi_t(x)$ назовем ω- подобными, если существует ω - диффеоморфизм A_t, для которого $\Phi_t=A_{-t}\circ F_t\circ A_t^{-1}$.

Дифференциальные 2ω- периодические по t системы (I) и

$$\dot y = Y(t,y),\quad t\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}^n, \tag{4}$$

назовем ω - эквивалентными, если их отражающие функции ω - подобны.

Теорема 2. Системы (I) и (4), все решения которых продолжимы на $\mathbb{R}$, ω - эквивалентны тогда и только тогда, когда их отображения Пуанкаре подобны (см § I).

$\triangleright$ Достаточность. Пусть отражающие функции $F_t(x)$ и $\Phi_t(x)$ систем (I) и (4) соответственно являются ω- подобными. Тогда $\Phi_t=A_{-t}\circ F_t\circ A_t^{-1}$, где A_t есть ω-диффеоморфизм и потому $A_{t+2\omega}=A_t$ и, в частности, $A_\omega=A_{-\omega}$. Поэтому

$$\Phi_{-\omega}=A_\omega\circ F_{-\omega}\circ A_\omega^{-1}=A_{-\omega}\circ F_{-\omega}\circ A_{-\omega}^{-1},$$

а значит, отображение Пуанкаре $F_{-\omega}(x)=F(-\omega,x)$ системы (I) подобно отображению Пуанкаре $\Phi_{-\omega}(x)=\Phi(-\omega,x)$ системы (4). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть отображения Пуанкаре систем (I) и (4) подобны. Так как любые два отображения Пуанкаре одной и той же системы подобны (см §I), то мы не нарушим общности, если будем считать подобными отображения $\varphi(2\omega,0)$ и $\psi(2\omega,0)$ (обозначения §I). Тогда для некоторого диффеоморфизма S верно соотношение $\psi(2\omega,0)=S\circ\varphi(2\omega,0)\circ S^{-1}$.
Пусть $A_t=\psi(t,0)\circ S\circ\varphi(0,t)$. Покажем, что A_t есть ω - диффеоморфизм. Для этого достаточно показать, что $A_{t+2\omega}=A_t$. Имеем

$$A_{t+2\omega}=\psi(t+2\omega,0)\circ S\circ\varphi(0,t+2\omega)=\psi(t,0)\circ\psi(2\omega,0)\circ S\circ\varphi(0,t+2\omega)=$$

$$=\psi(t,0)\circ S\circ\varphi(2\omega,0)\circ S^{-1}\circ S\circ\varphi(0,t+2\omega)=\psi(t,0)\circ S\circ\varphi(2\omega,0)\circ\varphi^{-1}(t+2\omega,0)=$$
$$=\psi(t,0)\circ S\circ\varphi(2\omega,0)\circ[\varphi(t,0)\circ\varphi(2\omega,0)]^{-1}=\psi(t,0)\circ S\circ\varphi(0,t)=A_t.$$

Таким образом, A_t есть ω - диффеоморфизм. Вычислим

$$A_{-t}\circ F_t\circ A_t^{-1}=\Psi_{(-t,0)}\circ S\circ\varphi_{(0,-t)}\circ\varphi_{(-t,0)}\circ\varphi_{(0,t)}\circ$$

$$\circ\varphi^{-1}_{(0,t)}\circ S^{-1}\circ\Psi^{-1}_{(t,0)}=\Psi_{(-t,0)}\circ\Psi^{-1}_{(t,0)}=\Phi_t .$$

Необходимость, а с ней и теорема доказаны. ◁

Следствие I. Если 2ω - периодические системы (I) и (4) ω - эквивалентны, то между периодическими решениями этих систем можно установить взаимно однозначное соответствие.

▷ Следует из подобия отображений Пуанкаре (см. §I). ◁

Следствие 2. Для того, чтобы 2ω - периодическая система (I) с продолжимыми на $[-\omega,\omega]$ решениями имела только 2ω - периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы она была ω -эквивалентна системе $\dot{x}=0$.

Доказательство очевидно.

Упражнение. Для уравнения

$$\dot{x}=(a(t)-\alpha^2 z(t))+b(t)x+(c(t)+\beta z(t))x^2$$

с непрерывными коэффицентами, где $a(t), b(t), c(t)$ четные, а $z(t)$ - нечетная функция, построить уравнение с четной правой частью и тем же отображением за период, что и у первоначально данного уравнения (α, β - постоянны).

§ 6. ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему

$$\dot{x}=P(t)x,\ t\in R,\ x^T=(x_1,\dots,x_n)\in R^n, \qquad (I)$$

с непрерывной матрицей $P(t)$. Пусть $X(t)$ есть фундаментальная матрица решений этой системы. Тогда общее решение системы (I) можно записать в виде

$$\varphi(t;\tau,x)=X(t)X^{-1}(\tau)x.$$

Поэтому отражающая функция системы (I) линейна и имеет вид

$$F(t,x)=F(t)x,\qquad F(t)\triangleq X(-t)X^{-1}(t)$$

Матрицу $F(t)$ будем называть отражающей матрицей системы (I). Из свойств отражающей функции, определения отражающей матрицы и теорем § 3 вытекают следующие свойства:

I. Для любой отражающей матрицы $F(t)$ справедливы соотношения

$$F(-t)F(t) \equiv F(0) = E. \qquad (2)$$

2. Дифференцируемая матрица F будет отражающей матрицей системы (I) тогда и только тогда, когда она является решением уравнения

$$F' + FP(t) + P(-t)F = 0 \qquad (3)$$

и удовлетворяет начальному условию $F(0) = E$.

3. Для каждой неособой дифференцируемой матрицы $F(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям (2), существует линейная система

$$\dot{x} = -\left(F(t) + E\right)^{-1} F'(t)\, x, \qquad (4)$$

отражающая матрица которой совпадает с $F(t)$, а общий интеграл задается формулой $x + F(t)x = c$. Всякое решение $x(t)$ системы (4) имеет постоянную во времени четную часть, т.е. $x(t) + x(-t) \equiv 2x(0)$. Система (I) имеет вид (4) тогда и только тогда, когда для отражающей матрицы $F(t)$ этой системы выполняется тождество $P(t) \equiv P(-t)F(t)$. Это свойство позволяет выделить систему (4) из множества других систем.

4. Непрерывно дифференцируемая неособая матрица $F(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является отражающей матрицей хотя бы одной линейной системы вида (I) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет соотношениям (2).

5. Всякая линейная система с отражающей функцией $F(t)$ может быть записана в виде

$$\dot{x} = -\left(F(t) + E\right)^{-1} F'(t)\, x + \left[F(-t)R(t) - R(-t)F(t)\right] x,$$

где $R(t)$ есть произвольная непрерывная на $\mathbb{R}$ матрица. Простейшей в классе систем с одной и той же матрицей $F(t)$ является система (4).

Теорема I. Для каждой системы (I) с непрерывной матрицей P существует при достаточно малых $|t|$ единственная система

$$\dot{y} = Q(t)y \tag{5}$$

с той же отражающей матрицей $F(t)$ что и у системы (I) и четной матрицей $Q(t)$. Если системы (I) и (5) 2ω - периодические, то отображения Пуанкаре этих двух систем одинаковы.

▷ Пусть $F(t)$ есть отражающая матрица системы (I). Тогда согласно второму свойству отражающей матрицы искомая матрица Q, учитывая ее четность, удовлетворяет уравнению

$$F'(t) + F(t)Q(t) + Q(t)F(t) = 0. \tag{6}$$

Непрерывные корни $\lambda_i(t)$ уравнения $|F(t) - \lambda E| = 0$ при $t=0$ становятся равными единице. Поэтому при достаточно малых $|t|$ матрицы $F(t)$ и $F(-t)$ не имеют общих характеристических чисел. Отсюда согласно [I5, с.207] следует, что уравнение (6) имеет единственное решение $Q(t)$.

Покажем, что это решение $Q(t)$ четное. С этой целью в соотношении (6) заменим t на $-t$ и полученное соотношение умножим слева на $F(t)$. Получим соотношение

$$F(t)F'(-t) + Q(-t) + F(t)Q(-t)F(-t) \equiv 0.$$

Из тождества $F(t)F(-t) \equiv E$ следует, что $F(t)F'(-t) \equiv F'(t)F(-t)$. Поэтому предыдущее соотношение можно переписать в виде

$$F'(t)F(-t) + Q(-t) + F(t)Q(-t)F(-t) \equiv 0.$$

Умножим это тождество на $F(t)$ справа и получим тождество

$$F'(t) + F(t)Q(-t) + Q(-t)F(t) \equiv 0,$$

из которого следует, что как $Q(t)$ так и $Q(-t)$ являются решениями уравнения (6). Но уравнение (6) имеет единственное решение [I5, с. 207], поэтому $Q(-t) \equiv Q(t)$. ◁

Теорема 2. Пусть для непрерывной на $\mathbb{R}$ матрицы $P(t)$ выполнено тождество

$$P(t)\int_0^t [P(\tau) + P(-\tau)]d\tau \equiv \int_0^t [P(\tau) + P(-\tau)]d\tau \, P(t). \tag{7}$$

Тогда отражающая матрица системы (I) задается формулой

$$F(t) = \exp\left[-\int_0^t (P(\tau) + P(-\tau))d\tau\right].$$

▷ Согласно второму свойству отражающей матрицы достаточно показать, что функция $F(t)$ является решением уравнения (3). По условию матрица $P(t)$ коммутирует с матрицей $\int\limits_0^t P_2(\tau)d\tau$, где $2P_2(\tau)=P(\tau)+P(-\tau)$. Поэтому матрица $P(-t)$ коммутирует с матрицей $\int\limits_0^{-t} P_2(\tau)d\tau=-\int\limits_0^t P_2(\tau)d\tau$. Откуда следует, что матрица $P_2(t)$ коммутирует с матрицей $\int\limits_0^t P_2(\tau)d\tau$. Тогда [16, с. 117]. производная

$$F'(t)=\frac{d}{dt}e^{-2\int\limits_0^t P_2(\tau)d\tau}=-2P_2(t)F(t).$$

Кроме того, $F(t)P(t)\equiv P(t)F(t)$. Поэтому

$$F'(t)+F(t)P(t)+P(-t)F(t)\equiv-2P_2(t)F(t)+P(t)F(t)+P(-t)F(t)\equiv 0,$$

т.е. $F(t)$ удовлетворяет уравнению (3). Теорема доказана. ◁

Теорема 3. Пусть для непрерывной на $\mathbb{R}$ 2ω - периодической матрицы $P(t)$ выполнено тождество (7). Тогда отображение за период для системы (I) задается формулой

$$\varphi(\omega;-\omega,x)=e^{\int\limits_0^\omega (P(\tau)+P(-\tau))d\tau}x.$$

При этом система (I) асимптотически устойчива, если для всех корней λ_k уравнения

$$\det\left[\int\limits_0^\omega (P(\tau)+P(-\tau))d\tau-\lambda E\right]=0$$

выполнено неравенство $Re\,\lambda_k<0$. Система (I) неустойчива, если хотя бы для одного корня $Re\,\lambda_k>0$.

▷ Теорема 2 устанавливает вид отражающей функции рассматриваемой системы. Поэтому отображение за период для этой системы найдем, опираясь на основную лемму §2. При этом следует учесть, что функция $t\mapsto\int\limits_0^t P_2(\tau)d\tau$ - нечетная. Зная отображение за период, докажем утверждения теоремы об устойчивости и неустойчивости (см. § I) и [15, с. 189]. ◁

Замечание. В работе [14] Л.А. Альсевич показано, что отражающую матрицу любой системы вида (I) можно записать в виде $F(t)=e^{S(t)}$, где $S(t)$ есть некоторая дифференцируемая нечетная матрица. В ее же работах [17, с.5-87], [18, с. 1446 - 1449] указаны различные случаи, когда для линейной системы вида (I), а также для систем с квадратичными правыми частями отражающая функция может быть построена в явном виде.

Теорема 4. Системы

$$\dot{x} = P(t) \qquad \text{и} \qquad \dot{y} = Q(t)y$$

имеют одну и ту же отражающую матрицу $F(t)$ тогда и только тогда, когда совместна система уравнений

$$\begin{cases} F' + FP(t) + P(-t)F = 0, \\ F' + FQ(t) + Q(-t)F = 0, \\ F(0) = E. \end{cases}$$

▷ Следует из второго свойства отражающей матрицы, а также из § 4. ◁

Упражнения. I. Доказать, что системы

$$\dot{x} = P(t)x \qquad \text{и} \qquad \dot{y} = [P(t) + \varphi(t)E]y,$$

где $\varphi(t)$ - нечетная скалярная функция. имеют одну и ту же отражающую матрицу.

2. Используя теоремы 2 и 3 найти отражающую матрицу и отображение за период для системы $\dot{x} = P(t)x$ с 2ω- периодической непрерывной матрицей $P(t)$, для которой $P(t) + P(-t) = E\alpha(t)$, где $\alpha(t)$ - некоторая скалярная функция. Сформулировать признаки устойчивости и неустойчивости этой системы в зависимости от величины $\int\limits_0^\omega \alpha(t)\,dt$.

3. Пользуясь теоремами 2 и 3, найти отражающую матрицу системы

$$\dot{x}_1 = a(t)x_1 + b(t)x_2, \; \dot{x}_2 = b(t)x_1 + (a(t) + b(t))x_2,$$

где $a(t)$- непрерывная, а $b(t)$-непрерывная и нечетная функции. В том случае, когда коэффициенты этой системы 2ω -периодичны, найти отображение за период для этой системы.

4. Показать, что для отражающей матрицы F двумерной линейной системы выполняется условие $\|F(t)x\|^2 = m(t)\|x\|^2$ тогда и только тогда, когда $F(t)$ имеет вид

$$F(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ -\beta(t) & \alpha(t) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad m(t) = \alpha^2(t) + \beta^2(t).$$

5. Выделить множество линейных двумерных систем с диагональной отражающей матрицей $F(t) = \operatorname{diag}(\alpha(t), \beta(t))$.

§ 7. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Рассмотрим уравнение Риккати

$$\dot{x} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2 \tag{I}$$

с непрерывными на $\mathbb{R}$ коэффициентами $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$.
Для каждой функции $\varphi(t)$ введем обозначения

$$\varphi_{\text{ч}}(t) = \frac{\varphi(t) + \varphi(-t)}{2}, \quad \varphi_{\text{н}}(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{2}.$$

Лемма. Отражающая функция уравнения (I) имеет вид

$$F(t,x) = \frac{[z(t)+n(t)]x + r(t)}{s(t)x + z(t) - n(t)} = \frac{m(t)x + r(t)}{s(t)x + m(-t)}, \tag{2}$$

где $m(t) = z(t) + n(t)$, а функции r, s, n, z являются решениями линейной системы

$$\begin{aligned} r' &= b_{\text{н}}(t)r - 2a_{\text{н}}(t)n - 2a_{\text{ч}}(t)z, \\ s' &= -b_{\text{н}}(t)s - 2c_{\text{н}}(t)n + 2c_{\text{ч}}(t)z, \\ n' &= c_{\text{н}}(t)r + a_{\text{н}}(t)s - b_{\text{ч}}(t)z, \\ z' &= c_{\text{ч}}(t)r - a_{\text{ч}}(t)s - b_{\text{ч}}(t)n \end{aligned} \tag{3}$$

с начальными условиями

$$r(0) = s(0) = n(0) = 0, \quad z(0) = 1. \tag{4}$$

При этом функции r, s, n - нечетны, а z—четная функция. Область определения отражающей функции есть подмножество всех точек (t, x), для которых $m(t) + s(t)x > 0$.

$\triangleright$ Функции

$$y_1(t) \triangleq r(t) + r(-t), \quad y_2(t) \triangleq s(t) + s(-t),$$

$$y_3(t) \triangleq n(t) + n(-t), \quad y_4(t) \triangleq z(t) - z(-t)$$

образуют решение линейной системы

$$\dot{y}_1 = \dot{r}(t) - \dot{r}(-t) = b_{\text{н}}(t) y_1 - 2a_{\text{н}}(t) y_3 - 2a_{\text{ч}}(t) y_4(t),$$

$$\dot{y}_2 = \dot{s}(t) - \dot{s}(-t) = -b_{\text{н}}(t) y_2 - 2c_{\text{н}}(t) y_3 - 2c_{\text{ч}}(t) y_4(t),$$

$$\dot{y}_3 = \dot{n}(t) - \dot{n}(-t) = c_{\text{н}}(t) y_1 + a_{\text{н}}(t) y_2 - b_{\text{ч}}(t) y_4,$$

$$\dot{y}_4 = \dot{z}(t) + \dot{z}(-t) = c_{\text{ч}}(t) y_1 - a_{\text{ч}}(t) y_2 - b_{\text{ч}}(t) y_3$$

с начальными условиями $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = 0$.
По теореме существования и единственности это решение совпадает с тривиальным (нулевым) решением. Откуда и следует четность $z(t)$ и нечетность остальных функций.

Для того, чтобы показать, что функция (2), там где она определена, совпадает с отражающей функцией уравнения (I), достаточно показать, что она удовлетворяет основному соотношению для отражающей функции (§3, свойство 3). А это можно сделать, подставив функцию (2) в основное соотношение и воспользовавшись соотношениями (3). При этом уравнение (I) целесообразно переписать в виде

$$\dot{x} = (a_{\text{ч}}(t) + a_{\text{н}}(t)) + (b_{\text{ч}}(t) + b_{\text{н}}(t))x + (c_{\text{ч}}(t) + c_{\text{н}}(t))x^2.$$

Ввиду элементарности производимых при этой подстановке операций саму подстановку проводить здесь не будем.

Покажем теперь, что область определения отражающей функции (2) содержит в себе область определения отражающей функции уравнения (I). С этой целью заметим, что эта область может сузиться только за счет того, что числитель и знаменатель функции (2) при некотором $t = \tau$ одновременно обращается в нуль. Тогда функция (2) будет неопределена при $t = \tau$, хотя отражающая функция (I) и определена при этом τ. Покажем, что эта возможность не может осуществиться, так как $m(-t)$ и $s(t)$ одновременно в нуль не обращаются. Действительно, система (3) в чем нетрудно убедиться, имеет первый интеграл $z^2 - n^2 - rs = C$ из которого для решений системы (3) с начальными условиями (4) следуют, справедливые при всех t, тождества

$$z^2(t) - n^2(t) - r(t)s(t) \equiv m(t)m(-t) - r(t)s(t) \equiv 1.$$

Эти тождества показывают, что $m(-t)$ и $S(t)$ одновременно в нуль обратиться не могут, а область определения функции F содержит в себе область определения $\mathcal{D}$ отражающей функции уравнения (I). Область $\mathcal{D}$, как известно, содержит в себе точки прямой $t=0$. На этой прямой $m(0)+xS(0)=1>0$. Поэтому, учитывая, что отражающая функция есть непрерывная функция, неравенство $m(t)+S(t)x>0$ выполнено во всей области $\mathcal{D}$. $\lhd$

Замечание 1. Пусть уравнение (I) имеет хотя бы одно решение, определенное при всех $t\in[-\alpha,\alpha]$ и $S(\alpha)\neq 0$. Тогда при всяком x, для которого $m(\alpha)-S(\alpha)x>0$, решение $\varphi(t;-\alpha,x)$ уравнения (I) определено при всех $t\in[-\alpha,\alpha]$.

$\rhd$ Рассмотрим множество решений $\varphi(t;-\alpha,x)$, $x\in\mathbb{R}$, уравнения (I). Пусть продолжимому на $[-\alpha,\alpha]$ решению, существование которого обеспечивается условием доказываемого утверждения соответствует x_0. Будем изменять x, начиная с $x=x_0$. Тогда, если не все рассматриваемые решения продолжимы на $[-\alpha,\alpha]$, то найдем такое $\bar{x}$, при котором решение $\varphi(t;-\alpha,\bar{x})$ существует при всех $t\in[-\alpha,\alpha[$, но не существует при $t=\alpha$, а для всякого x, удовлетворяющего неравенству $|x-x_0|<|\bar{x}-x_0|$, решение $\varphi(t;-\alpha,x)$ существует при всех $t\in[-\alpha,\alpha]$. В этом случае $\lim\limits_{t\to\alpha-0}\varphi(t;-\alpha,\bar{x})=\infty$ [19, с.58]. Поэтому, применяя первое свойство отражающей функции, получим равенства

$$\bar{x}=\lim_{t\to\alpha}\varphi(-t;-\alpha,\bar{x})=\lim_{t\to\alpha-0}F(t,\varphi(t;-\alpha,\bar{x}))=\frac{m(\alpha)}{S(\alpha)}.$$

Откуда следует, что такое $\bar{x}$ может быть только одно. Будем для определенности считать, что $\bar{x}>x_0$. Тогда всем $x<\bar{x}=\dfrac{m(\alpha)}{S(\alpha)}$ и только им соответствуют решения $\varphi(t;-\alpha,x)$, существующие при всех $t\in[-\alpha,\alpha]$ (см.рис.1). Так как точка $(-\alpha,x)$, для которой $x<\bar{x}$, принадлежит области определения отражающей функции уравнения (I), то по лемме $m(\alpha)-S(\alpha)x>0$. С другой стороны, $m(\alpha)-S(\alpha)\bar{x}=m(\alpha)-S(\alpha)\dfrac{m(\alpha)}{S(\alpha)}=0$. В связи с этим неравенству $m(\alpha)-S(\alpha)x>0$ удовлетворяют только те x, для которых $x<\bar{x}$ и, значит, только те x, для которых решение $\varphi(t;-\alpha,x)$ существует при всех $t\in[-\alpha,\alpha]$. $\lhd$

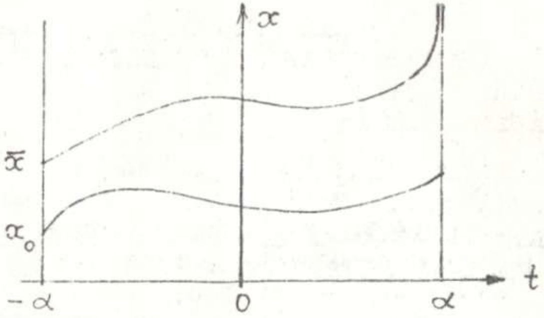

Рис. I.

Замечание 2. Соотношение $z^2 - n^2 - zs = c$ определяет стационарный первый интеграл системы (3). Поэтому для функций, входящих в формулу (2), справедливо тождество

$$z^2(t) - n^2(t) - z(t)S(t) \equiv 1,$$

показывающее, что дробь (2) несократима.

Замечание 3. Зададим произвольным образом непрерывно дифференцируемые нечетные функции $z(t)$, $S(t)$, $n(t)$ и непрерывные нечетные функции $a_н(t)$, $b_н(t)$, $c_н(t)$. Тогда, положив

$$z(t) = \sqrt{1 + n^2(t) + z(t)S(t)},$$

из соотношений (3) определим единственным образом четные функция $a_z(t)$, $b_z(t)$, $c_z(t)$. Тем самым будут построены все уравнения Риккати вида (I), для которых функция (2) является отражающей.

Теорема I. Пусть непрерывные на $\mathbb{R}$ функции $a(t), b(t), c(t)$ – 2ω-периодичны, а функции $z(t), S(t), n(t), z(t)$ образуют решение линейной системы (3) с начальными условиями(4). Тогда отображение за период для уравнения (I), с хотя бы одним продолжимым на $[-\omega, \omega]$ решением, задается формулой

$$F(-\omega, x) = \frac{[z(\omega) - n(\omega)]x - z(\omega)}{-S(\omega)x + z(\omega) + n(\omega)} = \frac{m(-\omega)x - z(\omega)}{m(\omega) - S(\omega)x}, \quad (5)$$

где $m(\omega)-S(\omega)x>0$. При этом решение $x(t)$ уравнения (I) будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда оно продолжимо на отрезок $[-\omega,\omega]$ и $\lambda=x(\omega)$ есть решение алгебраического уравнения

$$S(\omega)\lambda^2-2n(\omega)\lambda-\gamma(\omega)=0. \tag{6}$$

В том случае, когда $S(\omega)\neq 0$, решение $x(t)$ будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда $\lambda=x(\omega)$ есть решение уравнения (6) и $m(\omega)-S(\omega)x(\omega)>0$.

▷ Если λ - корень уравнения (6), то, что нетрудно проверить, $F(-\omega,\lambda)=\lambda$. Поэтому, если решение $x(t)$, $x(-\omega)=\lambda$, продолжимо на $[-\omega,\omega]$, то λ есть неподвижная точка отображения Пуанкаре $F(-\omega,x)$ (см.основную лемму в § 2) и, значит, решение $x(t)$ есть 2ω- периодическое и для него $\lambda=x(-\omega)=x(\omega)$.

Пусть теперь $S(\omega)\neq 0$ и $m(\omega)-S(\omega)\lambda>0$. Тогда, как следует из замечания I, решение $x(t)$, $x(-\omega)=\lambda$, обязано быть продолжимым на $[-\omega,\omega]$ и, значит, по только что доказанному, 2ω-периодическим. ◁

Замечание I. Величины $\gamma(\omega), S(\omega), n(\omega), z(\omega)$ можно вычислить с любой наперед заданной точностью δ как значение решения линейной системы (3) с начальными условиями (4). Пусть при этом для корней λ_1, λ_2 уравнения (6) выполняются неравенства

$$|\lambda_1-\lambda_2|=\frac{2\sqrt{n^2(\omega)+\gamma(\omega)S(\omega)}}{|S(\omega)|}=\frac{2\sqrt{z^2(\omega)-1}}{|S(\omega)|}>2\delta,$$

$$z(\omega)+n(\omega)-S(\omega)\lambda_i>0.$$

Тогда уравнение (I) имеет ровно два 2ω- периодических решения $x_1(t), x_2(t)$ с начальными условиями $x_1(\omega)\approx\lambda_1$ и $x_2(\omega)\approx\lambda_2$.

Замечание 2. Теорема I дает возможность приближенно, а в некоторых случаях и точно, найти отображение за период и, значит, исследовать периодические решения уравнения (I) на устойчивость.

Замечание 3. Как показывает пример уравнения $\dot{x} = x^2 \sin t$ с отражающей функцией $F(t,x) \equiv x$ в том случае, когда $S(\omega) = 0$, от требования продолжимости решения $x(t)$, $x(\omega) = \lambda$, отказаться, вообще говоря, нельзя.

Следствие. Для уравнения (I) с 2ω-периодическими непрерывными коэффицентами имеет место лишь один из следующих случаев:

I) уравнение (I) не имеет периодических решений;

2) уравнение (I) имеет только одно 2ω-периодическое решение;

3) уравнение (I) имеет ровно два 2ω- периодических решения;

4) все решения уравнения (I), определенные на отрезке $[-\omega,\omega]$, являются 2ω- периодическими.

$\triangleright$ Алгебраическое уравнение (7) может не иметь действительных решений, иметь один или два действительных корня или вырождаться в тождество. В соответствии с этим будем иметь один из четырех случаев, указанных в формулировке следствия. $\triangleleft$

Нижеследующие примеры показывают, что каждый из указанных случаев может осуществиться

Примеры.

I. $\dot{x} = (x^2+1)(2+\sin t)$, 2. $\dot{x} = x^2(2+\sin t)$,

3. $\dot{x} = (x^2-1)(2+\sin t)$, 4. $\dot{x} = x^2 \sin t$.

Остроумное доказательство того, что уравнение Риккати (I) при $C(t) \neq 0$ не может иметь более двух изолированных периодических решений, приведено в [3, с.128].

Используя теорему I можно выделить случаи, когда о периодических решениях уравнения (I) можно высказать более определенные суждения. Приведем на этот счет несколько теорем.

Теорема 2. Пусть I) коэффициенты $a(t), b(t), c(t)$ уравнения (I) суть непрерывные 2ω - периодические функции; 2) функция $b(t)$ - нечетная, а функции $a(t), c(t)$- четные; 3) при всех t выполнены неравенства $a(t) \leq 0$, $c(t) \geq 0$, а при некотором τ — строгое неравенство $a(\tau)c(\tau) < 0$ 4) уравнение (I) имеет хотя бы одно решение, продолжимое на $[-\omega,\omega]$. Тогда уравнение (I) имеет ровно два 2ω - периодических решения.

▷ В рассматриваемом случае система (3) равносильна системе

$$
\begin{aligned}
r' &= b(t)r - 2a(t)z,\\
s' &= -b(t)s + 2c(t)z,\\
z' &= c(t)r - a(t)s
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

и соотношению $n(t) \equiv 0$. Матрица системы (7) обладает дорожкой невырожденности [4, с. 60-61] и поэтому [4, с.65] выполняются неравенства $r(\omega) > 0,\ s(\omega) > 0$ и $z(\omega) > 0$. А это значит, что уравнение (6) для определения λ, которое в рассматриваемом случае принимает вид $\lambda^2 s(\omega) = r(\omega)$, имеет ровно два различных корня

$$\lambda_i = (-1)^i \frac{\sqrt{r(\omega)s(\omega)}}{s(\omega)} \quad (i = 1, 2).$$

Для каждого из этих корней

$$m(\omega) - s(\omega)\lambda_i = \sqrt{1 + r(\omega)s(\omega)} + (-1)^i \sqrt{r(\omega)s(\omega)} > 0.$$

Поэтому согласно теореме I уравнение (I) имеет ровно два 2ω-периодических решения. ◁

<u>Замечание</u>. Третье условие в формулировке теоремы 2 можно заменить условием 3о) при всех t выполнены неравенства $a(t) \geq 0$, $c(t) \leq 0$, а при некотором τ — строгое неравенство $a(\tau)c(\tau) < 0$. При этом заключение теоремы останется верным.

<u>Теорема 3. Пусть коэфициенты уравнения (I) суть 2ω-периодические непрерывные функции; 2) функция b - нечетная, а функции $a(t), c(t)$ - четные; 3) при всех t выполнены неравенства $a(t) \geq 0,\ c(t) \geq 0$ (или неравенства $a(t) \leq 0, c(t) \leq 0$), а при некотором τ — строгое неравенство $a(\tau)c(\tau) > 0$. Тогда уравнение (I) не имеет 2ω-периодических решений.</u>

▷ В уравнении (I) сделаем замену переменных $y = x\, e^{-\int_0^t b(\alpha)d\alpha}$. Эта замена сведет уравнение (I) к уравнению

$$\dot y = a(t)e^{-\int_0^t b(\alpha)d\alpha} + y^2 c(t) e^{\int_0^t b(\alpha)d\alpha}. \qquad (8)$$

Так как при этом $\int_{-\omega}^{\omega} b(\alpha)\,d\alpha = 0$, и, значит, функция $\int_0^t b(\alpha)\,d\alpha$ есть 2ω-периодическая, то 2ω-периодическим решения уравнения (I) соответствуют 2ω-периодические решения уравнения (8) и, наоборот, 2ω- периодическим решениям уравнения (8) соответствуют 2ω-периодические решения уравнения (1). Все решения (8), однако, монотонны, так как правая часть уравнения (8) не меняет знака. Поэтому они не могут быть периодическими, а значит, и уравнение (1) не имеет периодических решений. ◁

Теорема 4. Пусть 2ω- периодические непрерывные коэффиценты $a(t), b(t), c(t)$ уравнения (I) при некотором постоянном $\alpha > 0$ удовлетворяют соотношениям

$$c(-t) \equiv -\alpha a(t), \quad b(-t) \equiv b(t),$$

а решение $\varphi(t; -\omega, 0)$ уравнения (I) продолжимо на отрезок $[-\omega, \omega]$. Тогда уравнение (1) имеет хотя бы одно 2ω-периодическое решение.

▷ В этом случае, как следует из системы (3), $s(-t) \equiv \alpha z(t)$. Поэтому для дискриминанта уравнения (6) выполнено неравенство

$$4n^2(\omega) + 4\alpha z^2(\omega) \geq 0,$$

а, значит, само уравнение (6) имеет хотя бы один действительный корень.

Если $z(\omega) \neq 0$, то $s(\omega) \neq 0$ и корни уравнения (6) находятся по формуле

$$\lambda_i = \frac{n(\omega) + (-1)^i \sqrt{n^2(\omega) + \alpha z^2(\omega)}}{s(\omega)} = \frac{n(\omega) + (-1)^i \sqrt{z^2(\omega) - 1}}{s(\omega)}.$$

При этом непрерывная функция

$$z(t) = \sqrt{1 + n^2(t) + \alpha z^2(t)}$$

всегда положительна, так как $z(0) = 1$. Поэтому

$m(\omega) - s(\omega)\lambda_i = z(\omega) + (-1)^i \sqrt{z^2(\omega) - 1} > 0$ и, значит, по теореме 1 уравнение (1) имеет ровно два 2ω-периодических решения.

При $z(\omega) = 0$, $n(\omega) \neq 0$ уравнение (6) имеет единственный корень $\lambda = 0$, которому соответствует продолжимое на $[-\omega, \omega]$ решение $\varphi(t; -\omega, 0)$, которое и будет согласно основной лемме 2ω-периодическим.

В этом случае, когда $z(\omega) = n(\omega) = 0$, уравнение (6) обращается в тождество. Поэтому любое продолжимое на $[-\omega, \omega]$ решение уравнения (I) является 2ω-периодическим. ◁

Теорема 5.

Пусть для непрерывной нечетной 2ω-периодической функции $a(t)$ и непрерывных 2ω-периодических функций $b(t)$ и $c(t)$ выполнено тождество $\frac{db_н}{dt}(t) \equiv 2c_ч(t) - a(t)b_ч(t)b_н(t)$.

Тогда уравнение Риккати

$$\dot{x} = a(t) + a(t)b(t)x + c(t)x^2$$

имеет отражающую функцию

$$F(t,x) = \frac{x}{1 + x\,b_н(t)}.$$

Всякое продолжимое на $[-\omega,\omega]$ решение рассматриваемого уравнения является 2ω-периодическим.

$\triangleright$ В рассматриваемом случае система уравнений (3) имеет вид

$$r' = a(t)b_ч(t)r - 2a(t)n,\quad s' = -a(t)b_ч(t)s - 2c_н(t)n - 2c_ч(t)z,$$
$$z' = c_ч(t)r - a(t)b_н(t)n,\quad n' = c_н(t)r + a(t)s - a(t)b_н(t)z$$

и обладает решением $r(t) \equiv n(t) \equiv 0$, $s(t) \equiv b_н(t)$, $z(t) \equiv 1$. Отсюда следует вид отражающей функции рассматриваемого уравнения.

Так как $b_н(t)$ нечетная и 2ω-периодическая функция, то

$$b_н(\omega) = -b_н(-\omega) = -b_н(-\omega + 2\omega) = -b_н(\omega).$$

Поэтому $b_н(\omega) = b_н(-\omega) = 0$, а отображение Пуанкаре для рассматриваемого уравнения

$$F(-\omega, x) \equiv \frac{x}{1 + x\,b_н(-\omega)} \equiv x.$$

Отсюда и следует утверждение теоремы о периодических решениях. $\triangleleft$

Аналогично доказывается

Теорема 6. Пусть в уравнении

$$\dot{x} = a(t) + c(t)b(t)x + c(t)x^2$$

с непрерывными 2ω- периодическими коэффицентами функция $c(t)$ — нечетная и $\frac{db_н}{dt} \equiv c b_н b_ч - 2a_ч$. Тогда отражающая функция рассматриваемого уравнения имеет вид $F = x + b_н(t)$, а все его решения, продолжимые на $[-\omega,\omega]$, суть 2ω-периодические.

Количество случаев явного вычисления отображения Пуанкаре для уравнения Риккати (I) с помощью системы (4) можно было бы увеличить. Не намереваясь делать это, приведем здесь результат, полученный студенткой Гомельского университета О.В. Щекотихиной.

Теорема 7. Пусть непрерывные 2ω-периодические коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям

$$b(t)\cos 2\int_0^t a_2(\tau)d\tau \equiv [a(t)-c(t)]\sin 2\int_0^t a_2(\tau)d\tau,$$

$$c_2(t) \equiv a_2(t).$$

Тогда если $2\int_0^{\omega} a_2(\tau)d\tau = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, то любое продолжимое на $[-\omega,\omega]$ решение уравнения (1) будет 2ω-периодическим. Если же $2\int_0^{\omega} a_2(\tau)d\tau \neq k\pi$, то уравнение (1) не имеет 2ω-периодических решений.

▷ Доказательство следует из того, что уравнение (1) в этом случае имеет отражающую функцию вида

$$F(t,x)=\frac{x\cos 2\int_0^t a_2(\tau)d\tau - \sin 2\int_0^t a_2(\tau)d\tau}{x\sin 2\int_0^t a_2(\tau)d\tau + \cos 2\int_0^t a_2(\tau)d\tau}. \ \triangleleft$$

Дальнейшие результаты, относящиеся к периодическим решениям уравнения Риккати (см. в §8).

Упражнения. 1. Показать, что для уравнения Риккати

$$\dot{x} = a(t) + (\alpha a_2(t) + b_H(t))x + (\beta a_2(t) + c_H(t))x^2,$$

где α, β — постоянные, а $a(t), b(t), c(t)$ -непрерывные 2ω- периодические функции, система (3) удовлетворяет условиям теоремы 3 § 6. Используя этот факт, найти отображение за период для рассматриваемого уравнения.

2. Показать, что если для постоянных α и β $c_H(t)\equiv\alpha b_H(t),\ a_H(t)\equiv\beta b_H(t),\ b_2(t)\equiv 2\alpha a_2(t)+2\beta b_2(t)$, то система (3) имеет интегральное многообразие $n=\alpha z-\beta s$. При этом, если $4\alpha\beta<1$, то уравнение (6) для определения начальных значений периодических решений уравнения (1) имеет хотя бы один действительный корень.

3. Показать, что замена переменных $y=\dfrac{1}{x+\alpha(t)}$ в уравнении Риккати (1) меняет это уравнение на уравнение Риккати с линейной отражающей функцией, если только четная функция $\alpha(t)$ выбрана так, что $s\alpha^2+2n\alpha\equiv z$.

4. Показать, что если для произвольно выбранных нечетных 2ω-периодических непрерывных функций $a_H(t), b_H(t), c_H(t)$ — периодические функции $a_2(t), b_2(t), c_2(t)$ удовлетворяют системе

$$a_r' = k\,a_r + b_н a_r - a_н b_r,$$
$$b_r' = k\,b_r + 2\,c_н a_r - 2a_н c_r,$$
$$c_r' = k\,c_r - b_н c_r + c_н b_r$$

и при $t=0$ условию $b_r^2(0) = 4a_r(0)c_r(0)$, то уравнение $\dot{x} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2$, где $a(t) = a_r(t) + a_н(t)$ и т.п. не может иметь более одного 2ω-периодического решения.

Указание. Показать в начале, что $n^2 + rs \equiv 0$ и $b_r^2 \equiv 4a_r c_r$..

5. Пользуясь результатом задачи 4, показать, что при любых непрерывных 2ω- периодических нечетных функциях $\alpha(t)$, $\beta(t)$ уравнение
$$\dot{x} = (1+\alpha(t)) + (\alpha(t) + \beta(t) \pm 2)x + (1+\beta(t))x^2$$
не может более одного 2ω-периодического решения.

§8. УРАВНЕНИЯ С ЛИНЕЙНОЙ ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ

В этом параграфе выделим все те уравнения первого порядка, для которых отражающая функция имеет вид
$$F(t,x) = \mathcal{M}(t)x + \mathcal{N}(t). \qquad (1)$$

Лемма. Для того, чтобы дифференцируемая функция вида (1) была отражающей функцией некоторого дифференциального уравнения необходимо и достаточно, чтобы ее можно было записать в виде
$$F(t,x) = x e^{2m(t)} + n(t) e^{m(t)}, \qquad (2)$$
где $m(t)$, $n(t)$ – некоторые нечетные дифференцируемые функции.

▷ Необходимость. Пусть функция (1) является отражающей функцией для некоторого уравнения. Тогда из второго свойства отражающей функции следует тождество
$$\mathcal{M}(-t)\left[\mathcal{M}(t)x + \mathcal{N}(t)\right] + \mathcal{N}(-t) \equiv x,$$
которое равносильно тождествам
$$\mathcal{M}(-t)\mathcal{M}(t) \equiv 1, \quad \mathcal{M}(-t)\mathcal{N}(t) + \mathcal{N}(-t) \equiv 0. \qquad (3)$$

Из этих тождеств следует, что $\mathcal{M}(t)$ отлично от нуля при всех t. Кроме того, тождество $F(0,x)\equiv x$ позволяет заключить, что $\mathcal{M}(0)=1$. Поэтому в силу непрерывности функции $\mathcal{M}(t)$ при всех t обязано выполняться неравенство $\mathcal{M}(t)>0$. Положим $2m(t)=\ln\mathcal{M}(t)$. Тогда $\mathcal{M}(t)=e^{2m(t)}$, а из первого тождества в (3) после его логарифмирования следует, что $m(t)$ есть нечетная функция. Второе из тождеств (3) при этом примет вид $e^{-2m(t)}N(t)+N(-t)\equiv 0.$

Положим $n(t)=N(t)e^{-m(t)}$. Тогда из полученного тождества будет следовать нечетность $n(t)$, а с ней и необходимость.

<u>Достаточность</u>. Функция (2) является отражающей функцией линейного уравнения

$$\dot{x}=-m'(t)x-\frac{n'(t)}{2}e^{-m(t)}. \qquad (4)$$

В этом можно убедиться либо с помощью третьего свойства отражающей функции, либо,найдя отражающую функцию уравнения (4), исходя из ее определения. ⊲

Впрочем, вместо приведенного доказательства достаточности можно было сослаться на замечание к теореме I § 3.

<u>Следствие. Для того, чтобы дифференцируемая функция</u> $F(t,x)=x+n(t)$ <u>была отражающей функцией некоторого дифференциального уравнения, необходимо и достаточно, чтобы функция</u> $n(t)$ <u>была нечетной</u>.

▷ В формулировке леммы полагаем $m(t)\equiv 0$. ⊲

<u>Замечание.</u> Как лемма, так и следствие справедливы и для систем дифференциальных уравнений. При этом $m(t)$ – матрица, $n(t)$ – вектор.

<u>Теорема I. Отражающая функция дифференциального уравнения в нормальной форме с непрерывно дифференцируемой правой частью задается формулой (2) тогда и только тогда, когда это уравнение можно записать в виде</u>

$$\dot{x}=-m'(t)x-\frac{n'(t)}{2}e^{-m(t)}+e^{-2m(t)}R(t,x)-\\-R(-t,e^{2m(t)}x+n(t)e^{m(t)}), \qquad (5)$$

где $R(t,x)$ есть произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

$\triangleright$ Доказательство следует из леммы § 4. $\triangleleft$

Следствие. Всякое дифференциальное уравнение с непрерывно дифференцируемой правой частью, отражающая функция которого задается формулой $F(t,x) = x + n(t)$, можно записать в виде

$$\dot{x} = R(t,x) - R(-t, x+n(t)) - \frac{n'(t)}{2},$$

где $R(t,x)$ - непрерывно дифференцируемая функция.

$\triangleright$ Для доказательства в формулировке теоремы полагаем $m(t) \equiv 0$. $\triangleleft$

Теорема 2. Пусть 1) правая часть уравнения (5) 2ω- периодична по t ; 2) $m(t), n(t)$ — нечетные и непрерывно дифференцируемые функции; 3) $R(t,x)$ - непрерывно дифференцируемая в $\mathbb{R}^2$ функция; 4) все решения уравнения (5) продолжимы на $[-\omega, \omega]$. Тогда а) при $m(\omega) \neq 0$ уравнение (5) имеет единственное 2ω - периодическое решение, которое асимптотически устойчиво при $m(\omega) > 0$ и неустойчиво при $m(\omega) < 0$ б) при $m(\omega) = n(\omega) = 0$ все решения уравнения (5) суть 2ω-периодические и устойчивые; в) при $m(\omega) = 0$, $n(\omega) \neq 0$ уравнение (5) не имеет 2ω -периодических решений.

$\triangleright$ Так как отражающая функция уравнения (5) согласно теореме 1 задается формулой (2), то отображение за период $T(x)$ этой системы имеет вид

$$T(x) = x e^{-2m(\omega)} - n(\omega) e^{-m(\omega)}.$$

Откуда согласно [6, с. 177] и следует утверждение теоремы. $\triangleleft$

Замечание 1. В том случае, когда выполнены условия теоремы 2 и $m(\omega) > 0$, уравнение (5) оказывается диссипативным уравнением с конвергенцией [3, с.29, с. 93].

Замечание 2. Утверждения, аналогичные теореме 2 и замечанию 1, можно сформулировать и для систем дифференциальных уравнений.

Прежде чем привести алгоритм распознавания уравнения (системы) (5) среди остальных уравнений (систем), приведем два примера.

Пример I. Уравнение вида

$$\dot{x} = a(t) + b(t)\cos x + c(t)\sin x$$

с непрерывными коэффициентами имеет линейную отражающую функцию тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$b(t) + b(-t)\cos\alpha(t) + c(-t)\sin\alpha(t) \equiv 0,$$

$$c(t) - b(-t)\sin\alpha(t) + c(-t)\cos\alpha(t) \equiv 0,$$

где $\alpha(t) = -\int_0^t (a(\tau) + a(-\tau))\,d\tau$. При этом отражающая функция рассматриваемого уравнения задается формулой $F(t,x) = x + \alpha(t)$. Примером уравнений такого вида является уравнение

$$\dot{x} = a(t) + b(t)\sin\alpha(t)\cos x + (b(t)\cos\alpha(t) - b(-t))\sin x,$$

в котором $a(t)$ и $b(t)$ – произвольные непрерывные функции, а $\alpha(t) = -\int_0^t (a(\tau) + a(-\tau))\,d\tau$.

Пример 2. Уравнение

$$\dot{x} = a(t)\ln\frac{b(t) + (x + \alpha(t))^2}{b(-t) + x^2} - \frac{\alpha'(t)}{2},$$

где $a(t)$ - любая четная, $\alpha(t)$ - любая нечетная, $b(t)$ - произвольная непрерывная функции, также имеет $F(t,x) = x + \alpha(t)$ в качестве своей отражающей функции.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\dot{x} = X(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

в котором непрерывная в $\mathbb{R}^2$ функция $X(t,x)$ аналитична по отношению к переменной x.

Поставим вопросы: Когда отражающая функция уравнения (6) линейна по переменной x и как найти эту линейную отражающую функцию?

Согласно третьему свойству отражающей функции, если функция (I) является отражающей функцией уравнения (6), то

$$M'(t)x + N'(t) + M(t)X(t,x) + X(-t, M(t)x + N(t)) \equiv 0. \tag{7}$$

Пользуясь тем, что функция $X(t,x)$ аналитична по второму аргументу, разложим левую часть тождества (7) в ряд по степеням x и приравняем коэффициенты полученного ряда к нулю. Тогда получим тождества

$$\left.\begin{aligned} &N'(t)+M(t)X(t,0)+X(-t,N(t))\equiv 0,\\ &M'(t)+M(t)X^{(1)}(t,0)+M(t)X^{(1)}(-t,N(t))\equiv 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$M(t)X^{(i)}(t,0)+M^{i}(t)X^{(i)}(-t,N(t))\equiv 0,\ i=2,3,\dots, \tag{9}$$

где $X^{(i)}(t,x)$ означает i-ю частную производную по x порядка i от функции $X(t,x)$.

Таким образом, функция (I) будет отражающей функцией уравнения (6) тогда и только тогда, когда выполнены тождества (8), (9).

Будем считать, что уравнение (6) не является линейным. Тогда хотя бы одно из соотношений (9) не вырождается в тождество относительно M и N, а это дает нам возможность из соотношений (8)- (9) определить функции $M(t)$, $N(t)$. В том случае, когда уравнение (6) линейно, оно интегрируется в квадратурах, и его отражающая функция также может быть найдена.

Таким образом, всякий раз, когда выполнены соотношения (8) - (9) отражающая функция находится эффективным образом.

В качестве примера рассмотрим уравнение Риккати

$$\dot{x}=a(t)+b(t)x+c(t)x^2. \tag{10}$$

Система (8)- (9) для этого уравнения имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &N'+M a(t)+a(-t)+b(-t)N+c(-t)N^2\equiv 0,\\ &M'+M\,[b(t)+b(-t)+2c(-t)N]\equiv 0,\\ &M\,2c(t)+M^2\,2c(-t)\equiv 0. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Последнее из тождеств (II) равносильно тождеству

$$c(t)+c(-t)e^{2m(t)}\equiv 0$$

(см. формулу (2) лемму). Полагая $\gamma(t)=c(t)e^{-m(t)}$, из этого тождества получим тождество $\gamma(t)\equiv-\gamma(-t)$, доказывающее нечетность $\gamma(t)$.

Тогда
$$\gamma^2(t) \equiv -\gamma(t)\gamma(-t) \equiv -c(t)c(-t).$$

Поэтому $c(t)c(-t) \le 0$, а

$$\gamma(t) = \pm\sqrt{-c(t)c(-t)}\,\mathrm{sign}\,t, \tag{12}$$

где знак плюс или минус выбирается таким образом, чтобы отношение $c(t)/\gamma(t)$ было положительным. Тогда из соотношения $\gamma(t) = c(t)e^{-m(t)}$ найдем

$$m(t) = \ln\frac{c(t)}{\gamma(t)}. \tag{13}$$

Таким образом, если по формулам (12)-(13) удается определить непрерывную функцию $\gamma(t)$ и дифференцируемую функцию $m(t)$, то тем самым будет определена функция

$$\mathcal{M}(t) = e^{2m(t)} = \frac{c(t)}{c(-t)}.$$

Второе тождество из тождеств (11) дает возможность определить функцию $N(t)$ (в том случае, когда она существует). Если найденные функции $\mathcal{M}(t)$ и $N(t)$ удовлетворяют первому тождеству из (11), то функция (2) действительно является отражающей функцией рассматриваемого уравнения Риккати.

В том случае, когда нас интересует существование отражающей функции вида $F(t,x) = \mathcal{M}(t)x$, для уравнения Риккати (10) можно сформулировать результат в более законченном виде.

Теорема 3. Уравнение Риккати (10) с непрерывными коэффициентами имеет отражающую функцию вида $F(t,x) = \mathcal{M}(t)x$ тогда и только тогда, когда нечетны функции

$$a(t)\,e^{-\int_0^t b_r(\tau)d\tau}, \quad c(t)\,e^{\int_0^t b_r(\tau)d\tau} \tag{14}$$

где $2b_r(t) \triangleq b(t) + b(-t)$. При этом

$$F(t,x) = x\,e^{-2\int_0^t b_r(\tau)d\tau}.$$

на отражающую. Проверка покажет, является эта линейная функция отражающей для рассматриваемой системы или нет.

Упражнения. Пусть $a(t), b(t)$ – произвольные непрерывные нечетные 2π - периодические функции. Для следующих уравнений и систем найти отражающие функции, если известно, что они линейны. Найти также отображения Пуанкаре для этих систем и уравнений:

I) $\dot{x} = 8x^3 \sin t + 24x^2 \sin^2 t + 32x \sin^3 t + 16 \sin^4 t - \cos t$;

2) $\dot{x} = a(t) e^{\sin t} + x \cos t + x^3 b(t) e^{-2\sin t}$;

3) $\begin{cases} \dot{x} = a(t)(2xy^2 + 2xy \sin t + x \sin^2 t), \\ \dot{y} = 2b(t) x^2 y + b(t) x^2 \sin t - 0{,}5 \cos t. \end{cases}$

Ответы: $F_1 = x + 2\sin t$; $F_2 = x e^{-2\sin t}$;

$F_3^T = (x,\ y + \sin t)$.

§ 9. ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РАЗЛИЧНЫХ СВОЙСТВ ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

В предыдущих параграфах приведено много примеров уравнений и систем, для которых отражающая функция может быть найдена в явном виде. Естественно, что в общем случае искать отражающую функцию в квадратурах или элементарных функциях нецелесообразно. Тем не менее можно попытаться искать отражающую функцию изучаемой системы

$$\dot{x} = X(t,x),\ t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ X^T = (X_1, \dots, X_n), \qquad (I)$$

решения $\varphi(t; \tau, x)$ которой однозначно определяются с помощью своих начальных данных, заранее задавшись видом отражающей функции.

Пусть, к примеру, нас интересует вопрос: Можно ли утверждать, что отражающая функция F данной нам системы (I) диагональна, т.е. имеет вид

$$F(t,x) = (F_1(t,x_1), F_2(t,x_2), \dots, F_n(t,x_n))^T,$$

и если да, то как ее найти?

Для ответа на поставленный вопрос запишем основное соотношение для отражающей функции, которое в нашем случае представляет собой n тождеств $(i = \overline{1,n})$

$$\frac{\partial F_i}{\partial t}(t,x_i)+\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(t,x_i)\,X_i(t,x_1,\ldots,x_n)+$$

$$+X_i(-t,F_1(t,x_1),\ldots,F_n(t,x_n))\equiv 0 \qquad (2)$$

относительно переменных $t, x_1, \ldots, x_n$. Выберем точку $(t, a_1, \ldots, a_n)$ произвольным образом, а затем в каждом из тождеств (2) положим $x_i = a_i$, если номер этого тождества есть i . Тогда получим n соотношений вида

$$\alpha_i'(t)+\beta_i(t)X_i(t,x_1,\ldots,x_{i-1},a_i,x_{i+1},\ldots,x_n)+$$

$$+X_i(-t,F_1,\ldots,F_{i-1},\alpha_i(t),F_{i+1},\ldots,F_n)\equiv 0,$$

из которых в определенных случаях можно установить вид отражающей функции рассматриваемой системы (I), а затем из тождеств (2) определить и саму эту функцию.

Если функции X_i дифференцируемы, то, дифференцируя i-е тождество в (2) по каждому $x_s \neq x_i$ и учитывая, что F_i зависит только от t и x_i и не зависит от $x_s \neq x_i$, получим тождества

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\frac{\partial X_i}{\partial x_s}(t,x)+\frac{\partial X_i}{\partial x_s}(-t,F)\frac{\partial F_s}{\partial x_s}\equiv 0 \quad (i=\overline{1,n};\ s\neq i),$$

которые также могут быть использованы при нахождении диагональной отражающей функции.

<u>Пример</u>. Рассмотрим систему

$$\dot{x}=a(t)(2y-\sin 2t),\quad \dot{y}=b(t)\varphi(x)+\cos 2t,$$

где $a(t)$, $b(t)$ – непрерывные 2π – периодические нечетные, а $\varphi(x)$ – непрерывно дифференцируемая функции. Будем искать для этой системы диагональную отражающую функцию $(F(t,x),\ \Phi(t,y))$. Основное соотношение для отражающей функции в нашем случае имеет вид

$$F_t+F_x\,a(t)(2y-\sin 2t)-a(t)(2\Phi+\sin 2t)\equiv 0,$$

$$\Phi_t+\Phi_y\,(b(t)\varphi(x)+\cos 2t)+(-b(t)\varphi(F)+\cos 2t)\equiv 0. \qquad (3)$$

Продифференцируем первое из этих тождеств по y , а второе по x . Тогда, учитывая что F не зависит от y , а Φ не зависит от x , получим соотношения

$$2a(t)(F_x-\varphi_y)\equiv 0,\quad b(t)[\varphi_y\varphi(x)-\varphi'(F)F_x]\equiv 0.$$

Эти соотношения выполняются, если

$$F_x\equiv\varphi_y,\quad F_x[\varphi'(x)-\varphi'(F)]\equiv 0$$

и, значит, если $F(t,x)\equiv x$, а $\varphi(t,y)\equiv y+\alpha(t)$, где $\alpha(t)$ есть некоторая дифференцируемая функция.

Из соотношений (3) тогда следует, что формулы

$$F(t,x)\equiv x,\quad \varphi(t,y)\equiv y-\sin 2t$$

задают отражающую функцию рассматриваемой системы. Все продолжимые на $[-\pi,\pi]$ решения этой системы — 2π-периодичны.

Можно ожидать успеха также и на пути выделения систем с треугольной отражающей функцией. Рассуждениями, аналогичными рассуждениям, проведенным при рассмотрении предыдущего примера, например, можно показать, что система

$$\dot x=r(t,x)(2y-x\sin 2t),$$
$$\dot y=x\cos 2t-r(t,x)y\sin 2t+R(t,x)(2y-x\sin 2t),$$

где $r(t,x)$, $R(t,x)$ — непрерывно дифференцируемые нечетные по t функции, имеет отражающую функцию вида

$$F(t,x,y)=(x,\ y-x\sin 2t)^T.$$

Л.А.Альсевич [17,18] построила все линейные системы с диагональной или треугольной отражающей функцией, а также все те системы с квадратичными относительно координат фазового вектора правыми частями, отражающая функция которых линейна и диагональна. Так как отображение Пуанкаре $F(-\omega,x)$ для этих систем линейно, то вопросы нахождения начальных данных периодических решений рассматриваемых систем, а также их устойчивости в указанных работах решаются особенно просто.

Структура правой части системы (I), ее свойства, индуцируют соответствующие свойства отражающей функции. Иногда удается установить прямую зависимость между свойствами правой части системы (I) и свойствами отражающей функции этой системы. Это обстоятельство можно затем использовать при изучении вопросов существования периодических решений у дифференциальных систем. Иллюстрацией к сказанному может служить доказательство следующей теоремы.

Теорема. Пусть для непрерывно дифференцируемой 2ω - периодической по t функции $X : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$ выполнено тождество

$$X(t, x) + X(\omega - t, x) \equiv 0. \qquad (4)$$

Тогда все решения системы (I), продолжимые на отрезок $[-\omega, \omega]$, суть 2ω -периодические.

$\triangleright$ Пусть $F(t,x)$ есть отражающая функция системы (I), а $\varphi(t,x) \triangleq F(\omega - t, x)$. Тогда, используя основное соотношение для отражающей функции F, соотношение (4) и периодичность функции $X(t,x)$, получим тождества

$$\varphi_t + \varphi_x X(t,x) + X(-t, \varphi) \equiv$$

$$\equiv - F_t(\omega - t, x) - F_x(\omega - t, x) X(\omega - t, x) + X(-t, \varphi) \equiv$$

$$\equiv X(t - \omega, F(\omega - t, x)) + X(-t, \varphi) \equiv X(\omega + t, \varphi) + X(-t, \varphi) \equiv 0.$$

Связывая начало цепочки полученных тождеств с концом ее, убедимся в том, что функция $\varphi(t,x)$, как и функция $F(t,x)$ удовлетворяет основному соотношению для отражающей функции системы (I). Так как, кроме того,

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}, x\right) \equiv F\left(\omega - \frac{\omega}{2}, x\right) \equiv F\left(\frac{\omega}{2}, x\right),$$

то в силу единственности решения задачи Коши для уравнения (I)

$$\varphi(t,x) \equiv F(t,x), \text{ т.е. } F(\omega - t, x) \equiv F(t,x).$$

Полагая в этом тождестве $t = 0$, получим тождество

$$F(\omega, x) \equiv x.$$

Поэтому

$$F(-\omega, x) \equiv F(-\omega, F(\omega, x)) \equiv x.$$

Откуда согласно основной лемме и следует утверждение теоремы. $\triangleleft$

Следствие. Пусть $a_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ есть непрерывно дифференцируемые функции, а ряд, стоящий в правой части системы

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}(x) \cos(2k-1)t + a_{2k}(x) \sin 2kt,$$

сходится к непрерывно дифференцируемой функции $X(t,x)$.

Тогда любое продолжимое на $[-\pi,\pi]$ решение этой системы будет 2π-периодическим.

▷ Доказательство состоит в проверке условий теоремы. ◁

Упражнения. Пусть $a(t)$, $b(t)$ — непрерывные 2π-периодические нечетные функции, а $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Найти отражающую функцию и отображение за период

1) для системы

$$\dot{x}=x\cos t+a(t)e^{\sin t}\varphi(xy),$$
$$\dot{y}=-y\cos t+b(t)e^{-\sin t}\psi(xy),$$

если известно, что ее отражающая функция диагональна;

2) для системы

$$\dot{x}=2a(t)ye^{-x\sin t},$$
$$\dot{y}=xy\cos t+a(t)(1-y\sin t)y\varphi(x)e^{-x\sin t},$$

если известно, что ее отражающая функция треугольна.

Ответы:

$$F_1^T=(xe^{-2\sin t},\ ye^{2\sin t});\ F_2^T=(x,\ ye^{-2a\sin t});$$

$$T_1(x,y)\equiv T_2(x,y)\equiv(x,y)^T.$$

§ 10. ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Рассмотрим систему с малым параметром

$$\dot{x}=X(t,x,\varepsilon),\ t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n,\ |\varepsilon|<\varepsilon_0, \tag{1}$$

решения которой будем обозначать через $\varphi(t;\tau,x,\varepsilon)$.

Наряду с системой (1) рассмотрим систему

$$\dot{x}=X(t,x,0), \tag{2}$$

получающуюся из системы (1) при $\varepsilon=0$. Пусть решение $\varphi(t;\tau,x,0)$ системы (2) существует на отрезке $[\alpha,\beta]$. Широко известно [20, с. 39-41, с.70-73, 21, с. 47-57 ; 22, с. 178-196], что если функция $X(t,x,\varepsilon)$ непрерывна вместе со своими частными производными по x, то при достаточно малых $|\varepsilon|$ решение $\varphi(t;\tau,x,\varepsilon)$ определено на отрезке $[\alpha,\beta]$ и равномерно по $t\in[\alpha,\beta]$ стремится к $\varphi(t;\tau,x,0)$ при $\varepsilon\to 0$.

Если правая часть системы (I) непрерывна вместе со своими частными производными по переменным x,ε порядка $m\geqslant 1$ включительно, то при достаточно малом $|\varepsilon|$ решение $\varphi(t;\tau,x,\varepsilon)$ дифференцируемо m раз по ε и его можно представить в виде

$$\varphi(t;\tau,x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon^k\varphi_k(t;x)+R_m(t;x,\varepsilon),$$

где $R_m(t;x,\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ как величина порядка ε^m равномерно по $t\in[\alpha,\beta]$.

Отражающую функцию системы (I) будем обозначать через $\Phi(t,x,\varepsilon)$, а системы (2) - через $F(t,x)$. Пусть при каждом x из некоторой замкнутой области $D\subset R^n$ функция $t\mapsto F(t,x)$ определена при всех $t\in[-\omega,\omega]$. Тогда из вышесказанного следует, что если $X(t,x,\varepsilon)$ непрерывна вместе со своими частными производными по x,ε до порядка m включительно, то при достаточно малом $|\varepsilon|$ отражающая функция $\Phi(t,x,\varepsilon)=\varphi(-t;t,x,\varepsilon)$ дифференцируема m раз по ε и ее можно представить в виде

$$\Phi(t,x,\varepsilon)=F(t,x)+\sum_{k=1}^{m-1}\varepsilon^k\varphi_k(t,x)+R_m(t,x,\varepsilon),$$

где $R_m(t,x,\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ как величина порядка ε^m равномерно по $t\in[-\omega,\omega]$.

Теорема. Пусть 1) система (2) имеет 2ω-периодическое решение $\varphi(t;-\omega,\bar{x})$; 2) 2ω-периодическая по t функция $X(t,x,\varepsilon)$ непрерывна вместе со своими частными производными по x и ε; 3) для отражающей функции $F(t,x)$ системы (2) выполнено неравенство $\det[F_x(-\omega,\bar{x})-E]\neq 0$. Тогда для любого достаточно малого $|\varepsilon|$ система (I) имеет 2ω-периодическое решение $\varphi(t;-\omega,x(\varepsilon),\varepsilon)$ где $x(\varepsilon)$ зависит от ε непрерывным образом и $x(0)=\bar{x}$.

▷ Рассмотрим уравнение

$$\Phi(-\omega,x,\varepsilon)=x \tag{3}$$

для начальных данных 2ω-периодических решений системы (I).

Так как

$$\Phi(-\omega, \bar{x}, 0) = F(-\omega, \bar{x}) = \bar{x},$$

$$\det\left[\Phi_x(-\omega, \bar{x}, 0) - E\right] = \det\left[F_x(-\omega, \bar{x}) - E\right] \neq 0,$$

то по теореме о существовании неявно заданной функции [23, с.672, 24, с. 487] уравнение (3) имеет единственное дифференцируемое по ε решение $x(\varepsilon)$, для которого $x(0)=\bar{x}$. Согласно основной лемме (§2) решение $\varphi(t;-\omega, x(\varepsilon), \varepsilon)$ обязано быть 2ω-периодическим. $\triangleleft$

Примером системы, удовлетворяющей условиям доказанной теоремы, может служить уравнение

$$\dot{x} = x^2 - x + \varepsilon f(t, x, \varepsilon),$$

где f - непрерывно дифференцируемая по всем переменным и 2ω - периодическая по t функция. При $\varepsilon = 0$ рассматриваемое уравнение имеет отражающую функцию $F = x/[x(1-e^{-2t}) + e^{-2t}]$, для которой $F_x(t, x) \neq 0$, и два периодических решения $x_1 \equiv 0$, $x_2 \equiv 1$. Поэтому при достаточно малом $|\varepsilon|$ рассматриваемое уравнение имеет два 2ω-периодических решения $\varphi(t; -\omega, x_i(\varepsilon), \varepsilon)$, где функции $x_i(\varepsilon)$, $i = 1, 2$, непрерывны и $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$. При $\varepsilon \to 0$ эти решения равномерно по t стремятся к решениям $x_1 \equiv 0$ и $x_2 \equiv 1$ соответственно.

Литература

I. Пуанкаре А. Избранные труды: В 3-х т. Т.I. Новые методы небесной механики. М.:Наука,1971.

2. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. 3-е изд. Мн.: Наука и техника,1979.

3. Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука,1964.

4. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.:Наука,1966.

5. Рейсиг Р.,Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.:Наука,1974.

6. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:Наука,1971.

7. Богданов Ю.С. Пятая Международная конференция по нелинейным колебаниям. Тезисы докладов. Киев,1969.

8. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.:Наука,1978.

9. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.:Наука,1978.

10. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. Киев: Вища школа,1976.

II. Шилов Г.Е. Математический анализ (функции нескольких вещественных переменных). М.:Наука,1972, ч.I,2.

I2. Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Мн.: Наука и техника, 1983.

I3. Мироненко В.И. Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений. Минск: Изд- во БГУ им. В.И.Ленина,1981.

I4. Альсевич Л.А. О начальных данных периодических решений линейных систем дифференциальных уравнений. - Вестн.Белорусского ун -та. Сер. I., 1982, №3.

I5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.:Наука,1967.

I6. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука,1967.

I7. Альсевич Л.А. О системах с линейной диагональной отражающей функцией: Доклады АН БССР.1983, т.27, № I.

18. Альсевич Л.А. О линейных системах с треугольной отражающей функцией. - Дифференц.уравнения, 1983, 19, №8, с. 1446 - 1449.

19. Бибиков Ю.Н. Общий курс дифференциальных уравнений: Учебное пособие. Л.: ЛГУ, 1981.

20. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во ИЛ, 1958.

21. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: Изд-во ИЛ, 1961.

22. Потрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения М.: Наука, 1970.

23. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. - Главная редакция физико-математической литературы. М.: Наука, 1979.

24. Зорич В.А. Математический анализ. М.:Наука, 1981, ч.I.

Обозначения

$\mathbb{R}$ - множество действительных чисел;

$\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел;

$\triangleq$ - равно по определению;

$\stackrel{t}{\equiv}$ - равно тождественно по t;

$\triangleright$ - начало доказательства;

$\triangleleft$ - конец доказательства;

E - единичная матрица $n \times n$;

A^{T} - матрица, полученная транспонированием матрицы ;

$x(t),\ t \in J$, - функц: с интервалом определения ;

$x(t),\ x(t_0) = x_0$,- функция, удовлетворяющая условию $x(t_0) = x_0$;

Если $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $F = (F_1, \dots, F_n)^T$, то

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

$$\varphi_{r}(t) \triangleq \frac{\varphi(t)+\varphi(-t)}{2}, \quad \varphi_{H}(t) \triangleq \frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{2}.$$

Содержание

Владимир Иванович Мироненко

Отражающие функции и периодические решения дифференциальных систем
Учебное пособие

Редактор Е.Ф.Зайцева

Подписано к печати 21.06.1985 г.
Формат 60х84 I/I6. Бумага писчая №I. Печать офсетная.
Усл.п.л. 3,7. Уч.-изд.л. 3,I. Тираж 250. Заказ 237.
Цена I0 к.

Отпечатано на ротапринте ГГУ, г.Гомель,ул.Советская, I04.