§ 1. Определение и основные свойства интеграла Римана

Определение
разбиения
⇓

Разбиением отрезка $[a, b]$ называется набор точек

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = b.$$

Разбиение обозначают буквой P. Разбиение может быть снабжено выделенными точками $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Для разбиения с выделенными точками используют обозначение (P, ξ). Максимальная длина отрезков $\lambda(P) = \max_{i=1,\ldots,n} |x_{i+1} - x_i|$ называется *параметром разбиения*.

Определение
интеграла Римана
⇓

Говорят, что функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *интегрируема по Риману* на $[a, b]$ и ее интеграл равен I, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \mid \ \forall (P, \xi) \quad \lambda(P) < \delta \to \left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

Интеграл обозначают через $\int_a^b f(x)\,dx$, а множество интегрируемых функций на $[a, b]$ — через $\mathscr{R}[a, b]$. Сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называют *интегральной суммой Римана*.

Наряду с интегральной суммой Римана для функции можно определить суммы Дарбу.

Определение
интегральных сумм Дарбу
⇓

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция, а P — разбиение. *Верхняя* и *нижняя интегральные суммы Дарбу* определяются как

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} f(\xi) \Delta x_i,$$
$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} f(\xi) \Delta x_i,$$

Следующая теорема утверждает, что подходы, основанные на интегральных суммах Римана и Дарбу эквивалентны.

Теорема 1
критерий Дарбу
⇓

Ограниченная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда найдется такое число I, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \mid \ \forall P \quad \lambda(P) < \delta \to |I - S(f, P)| < \varepsilon,$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \mid \ \forall P \quad \lambda(P) < \delta \to |I - s(f, P)| < \varepsilon,$$

т. е. верхняя и нижняя суммы Дарбу имеют конечные пределы и их значения совпадают. При этом, конечно, будет

$$\int_a^b f(x)\,dx = I.$$

Необходимое условие интегрируемости. Если функция интегрируема по Риману, то она обязательно ограничена.

Теорема 2
об интегрируемости непрерывной и монотонной функций
⇓

(1) Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена и непрерывна на $[a, b]$ (возможно) за исключением конечного числа точек, то она интегрируема по Риману.
(2) Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена и монотонна на $[a, b]$, то она интегрируема по Риману.

Пример неинтегрируемой функции. Функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases}$$

не интегрируема по Риману. Действительно, легко проверить, что ее верхняя сумма Дарбу для любого разбиения равна 1, в то время как нижняя равна 0.

Пример монотонной функции с бесконечным числом разрывов. Нарисовать.

Следующие две теоремы устанавливают основные свойства интеграла, которые мы будем постоянно использовать.

Теорема 3
о линейности и аддитивности интеграла
⇓

(1) Если $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, то
$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

(2) Если $f \in \mathscr{R}[a,b]$, а $c \in [a,b]$ — некоторая точка, то
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Теорема 4
о монотонности интеграла
⇓

(1) Если $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$ и $f(x) \le g(x)$ на $[a,b]$, то
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

(2) Если $f \in \mathscr{R}[a,b]$, то $|f| \in \mathscr{R}[a,b]$ и
$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Замечание. Обратная импликация $|f| \in \mathscr{R}[a,b] \to f \in \mathscr{R}[a,b]$ вообще говоря неверна.

Теорема 5
первая теорема о среднем
⇓

Пусть

(1) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна,
(2) $g \in \mathscr{R}[a,b]$ и $g \ge 0$ (или $g \le 0$)ю

Тогда найдется такая точка $\xi \in [a,b]$, что
$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство Не теряя общности, будем считать, что $g \ge 0$. По теореме

Теорема 1.34 → Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значениях

$$\exists x_{min}, x_{max} \in [a,b] \ \mid \ f(x_{min}) \le f(x) \le f(x_{max}).$$

Умножим это неравенство на $g(x)$, проинтегрируем и воспользуемся монотонностью интеграла:

Теорема 4 →

$$f(x_{min}) \int\limits_a^b g(x)\,dx \le \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \le f(x_{max}) \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Предположим, что $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ (иначе теорема тривиальна). Тогда

$$f(x_{min}) \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le f(x_{max}).$$

Теорема 1.32 → По теореме Больцано — Коши о промежуточных значениях найдется такая точка $\xi \in [a,b]$, что

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = f(\xi).$$

Остается домножить на $\int_a^b (g(x)\,dx$. **Теорема доказана.**

Следствие. В случае $g = 1$ теорема о среднем означает, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ просто равен некоторому промежуточному значению $f(x)$, множенному на длину промежутка $[a,b]$.

Об оценке значения интеграла.

§ 2. Интеграл и первообразная

Замечание. Распространим определение интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ на случай $a > b$, полагая по определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

В случае $a = b$ будем считать, что значение интеграла просто равно нулю.

Теорема 6
об интеграле
и первообразной
⇓

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ и $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Тогда

(1) $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$;

(2) если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = f(x)$ на $[a,b]$, т. е. $F(x)$ — первообразная $f(x)$ на $[a,b]$.

Доказательство

Шаг 1 (непрерывность $F(x)$). Зафиксируем точку $x \in [a,b]$ и докажем, что
Теорема 4 →
$F(x+h) \to F(x)$ при $h \to 0$. Это легко следует из оценки

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int\limits_x^{x+h} f(y)\,dy \right| \le \int\limits_x^{x+h} |f(y)|\,dy$$

$$\le \sup_{y\in[a,b]} |f(y)| \int\limits_x^{x+h} dy = \sup_{y\in[a,b]} |f(y)|\, h \to 0 \quad \text{при } h \to 0.$$

Теорема 4 →
При этом мы использовали свойство монотонности интеграла и тот факт, что интегрируемая функция обязательно ограничена.

Шаг 2 (дифференцируемость $F(x)$). Предположим, что $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, зафиксируем точку $x \in [a,b]$ и докажем, что

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \to f(x) \quad \text{при } h \to 0.$$

Не теряя общности, в дальнейших выкладках можно считать, что $h > 0$. По
Теорема 5 →
теореме о среднем для каждого h найдется такая точка $\xi(h)$, лежащая между x и $x+h$, что

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\, f(\xi(h)) \int\limits_x^{x+h} dy = f(\xi(h)).$$

Теорема 1.?? →
Очевидно, что $\xi(h) \to x$ при $h \to 0$, и далее в силу непрерывности $f(x)$ имеем $f(\xi(h)) \to f(x)$. **Теорема доказана.**

Замечание. Без требования непрерывности $f(x)$ теорема неверна. Пример — $f(x) = \mathrm{sign}(x)$.

Замечание. Теорема означает, что любая непрерывная функция имеет первообразную. Аналогично, можно доказать, что функция с конечным числом разрывов имеет обобщенную первообразную.

Теорема 7
формула
Ньютона — Лейбница
⇓

Если функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, то верна формула Ньютона — Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — любая из первообразных функции $f(x)$ на $[a,b]$.

Доказательство По предыдущей теореме функция $x \mapsto \int_a^x f(y)\,dy$ — первообразная $f(x)$. Если $F(x)$ — некоторая другая первообразная $f(x)$, то по теореме
теореме 2.??26 →
о множестве первообразных эти первообразные отличаются на константу, т. е.

$$F(x) = \int\limits_a^x f(y)\,dy + C$$

с некоторой константой C. Подставляя $x = a$, находим, что $C = F(a)$, и далее при $x = b$ получаем саму формулу Ньютона — Лейбница. **Теорема доказана.**

Замечание. Формула Ньютона — Лейбница устанавливает фундаментальную связь между первообразной и интегралом. Она дает практический способ нахождения интеграла от непрерывных функций, у которых есть элементарные первообразные. В частности, можно пользоваться интегрированием по частям, заменой переменных и т. д.

Теорема 8
формула Тейлора
с интегральным
остаточным членом
⇓

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(n+1)$ раз дифференцируема и ее $(n+1)$-я производная $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \underbrace{\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n\, dt}_{\text{интегральный ост. член}},$$

где $x, x_0 \in [a, b]$

Теорема 7 →

Доказательство Докажем по индукции с использование интегрирования по частям. По формуле Ньютона — Лейбница

$$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\, dt,$$

что в точности совпадает с доказываемой формулой при $n = 0$. Далее, интегрируя по частям, последовательно получаем

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)(t - x)'\, dt \\
&= f(x_0) + f'(t)(t - x)\big|_{x_0}^{x} + \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x - t)\, dt \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x - t)\, dt \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)\frac{d}{dt}\Big(\frac{-(x - t)^2}{2}\Big)\, dt \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} f'''(t)(x - t)^2\, dt \\
&= \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n\, dt,
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Остаточный член в форме Лагранжа. В качестве следствия из интегральной формы остаточного члена можно получить форму Лагранжа. Действительно,
Теорема 5 → по первой теореме о среднем найдется такая точка ξ между x и x_0, что

$$\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt = f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

§ 3. Несобственный интеграл

Интеграл Римана определен только для ограниченных функций, заданных на конечном отрезке. Можно расширить понятие интеграла на случай неограниченных функций и бесконечных промежутков, используя конструкцию несобственного интеграла.

Определение
несобственного интеграла
⇓

Случай неограниченной функции. Пусть $f : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ интегрируема на каждом отрезке $[a, b] \subset [a, \omega)$ (при этом f может быть неограничена на $[a, \omega)$). Если существует предел

$$\lim_{b \to \omega - 0} \int\limits_a^b f(x)\, dx,$$

то его называют *несобственным интегралом* $f(x)$ по $[a, \omega)$ и обозначают через

$$\int\limits_a^\omega f(x)\, dx.$$

Если же предела не существует или он бесконечен, то будем говорить, что несобственный интеграл *расходится.*

Случай неограниченной функции. Пусть $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ интегрируема на каждом отрезке $[a, b]$. Если существует предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\, dx,$$

то его называют *несобственным интегралом* $f(x)$ по $[a, +\infty)$ и обозначают через

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Если же предела не существует или он бесконечен, то будем говорить, что несобственный интеграл *расходится.*

Аналогично определяется несобственный интеграл в случае, когда функция имеет особенность на левом конце области интегрирования.

Далее мы будем рассматривать случай неограниченной функции и бесконечной области интегрирования вместе, считая, что ω — либо конечная точка, в окрестности которой функция неограничена, либо $\omega = +\infty$. Для определенности ω всегда будет правым концом.

О сходимости. Первый вопрос, который возникает при работе с несобственным интегралом, это сходится он или нет. Лишь потом, если он сходится, мы иногда пытаемся найти его численное значение.

О нахождении несобственного интеграла. Если несобственный интеграл сходится и подынтегральная функция имеет первообразную, то значение интеграла находится по той же самой формуле Ньютона — Лейбница, только вместо значения нужно взять предел:

$$\int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx = \lim_{b\to\omega-0} F(b) - F(a).$$

О причинах сходимости. За счет быстрого убывания или знакопеременности.

Определение
абсолютной и условной сходимости
⇓

Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится абсолютно*, если сходится несобственный интеграл от модуля

$$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

Если сам несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ расходится, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится условно.*

Очевидно, что для знакоопределенных функций несобственный интеграл сходится тогда и только тогда, когда он сходится абсолютно (это просто одно и то же). Несобственный интеграл от знакопеременной функции может сходиться лишь условно.

Теорема 9
критерий Коши сходимости несобственного интеграла
⇓

Пусть $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ интегрируема по любому $[a,b]\subset[a,\omega)$. Тогда

$$\int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx \text{ сходится}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists B\in[a,\omega)\ \mid\ \forall b_1,b_2\in[B,\omega)\quad \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Доказательство Определим функцию

$$F(b) = \int\limits_a^{b} f(x)\,dx.$$

и заметим, что сходимость интеграла $\int_a^{\omega} f(x)\,dx$ это ничто иное, как существование предела функции $F(b)$ при $b\to\omega-0$. По критерию Коши, примененному к $F(b)$, существование $\lim_{b\to\omega-0} F(b)$ равносильно условию

Теорема 1.29 →

$$\forall\varepsilon>0\ \exists B\in[a,\omega)\ \mid\ \forall b_1,b_2\in[B,\omega)\quad |F(b_2)-F(b_1)|<\varepsilon,$$

а это и есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in [a, \omega)\ \mid\ \forall b_1, b_2 \in [B, \omega)\quad \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорема 10
о сходимости абсолютно сходящегося интеграла
⇓

Пусть $f : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ интегрируема по любому $[a, b] \subset [a, \omega)$. Тогда

$$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \text{ сходится} \Longrightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ сходится.}$$

Теорема 9 →

Доказательство Заметим, что по критерию Коши сходимость интеграла $\int_a^\omega |f(x)|\,dx$ равносильна тому, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in [a, \omega)\ \mid\ \forall b_1, b_2 \in [B, \omega)\quad \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon.$$

В силу монотонности интеграла имеем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in [a, \omega)\ \mid\ \forall b_1, b_2 \in [B, \omega)\quad \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

Теорема 9 →

а это по критерию Коши дает сходимость интеграла $\int_a^\omega f(x)\,dx$. **Теорема доказана.**

Теорема 11
об интегрировании основных особенностей
⇓

(1) $\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$.
(2) $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $a > 0$, сходится при $\alpha > 1$.
(3) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx$ сходится при $\alpha > 0$.
(4) $\int_0^b \ln x\,dx$ сходится, а $\int_a^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx$ расходится.

Доказательство См. конспект. **Теорема доказана.**

Теорема 12
мажорантный признак
и теорема сравнения
для несобственных интегралов
⇓

Пусть $f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ <u>неотрицательны</u> и интегрируемы на любом отрезке $[a, b] \subset [a, \omega)$.

(1) (мажорантный признак) Пусть $0 \le f(x) \le g(x)$ на $[a, \omega)$. Тогда

$$\int\limits_a^\omega g(x)\,dx \quad \text{сходится} \quad \Longrightarrow \quad \int\limits_a^\omega f(x)\,dx \quad \text{сходится.}$$

(2) (теорема сравнения) Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \to \omega - 0$. Тогда

$$\int\limits_a^\omega g(x)\,dx \quad \text{сходится} \quad \Longleftrightarrow \quad \int\limits_a^\omega f(x)\,dx \quad \text{сходится.}$$

Доказательство

Шаг 1 (мажорантный признак). Если $\int_a^\omega g(x)\,dx$ сходится, то по критерию Коши имеем

Теорема 9 →

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in [a, \omega) \ \mid\ \forall b_1, b_2 \in [B, \omega) \quad \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

Поскольку $f(x) \le g(x)$, аналогичное верно и для $f(x)$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in [a, \omega) \ \mid\ \forall b_1, b_2 \in [B, \omega) \quad \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

Теорема 9 →

которое опять же в силу критерия Коши дает сходимость $\int_a^\omega f(x)\,dx$.

Шаг 2 (теорема сравнения). Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \to \omega - 0$, т. е.

$$f(x) = g(x)(1 + \alpha(x)),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \omega - 0$. По определению предела существует окрестность точки ω, в которой $|\alpha(x)| < 1/2$ и тем самым $(1 + \alpha(x)) > 1/2$. Значит, в этой окрестности $f(x) > \frac{1}{2} g(x)$ и в силу первой части теоремы сходимость $\int_a^\omega f(x)\,dx$ влечет сходимость $\int_a^\omega g(x)\,dx$ (очевидно, умножение на константу $1/2$ не влияет на сходимость). Поскольку $f(x) \sim g(x)$ равносильно $g(x) \sim f(x)$, аналогично доказывается, что сходимость $\int_a^\omega g(x)\,dx$ влечет сходимость $\int_a^\omega f(x)\,dx$. **Теорема доказана.**

Совместное использование двух предыдущих теорем позволяет во многих случаях устанавливать сходимость несобственных интегралов от знакопостоянных функций.

Примеры. (1) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^4)^{1/2}}\,dx$.

(2) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$.
(3) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.
(4) $\int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\varphi}}$.
Условная сходимость

Теорема 13
признаки Абеля и Дирихле для интегралов
$\Downarrow$

Пусть $f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ интегрируемы на любом отрезке $[a, b] \subset [a, \omega)$.

Если (признак Абеля)

(A1) $\int_a^{\omega} f(x)\, dx$ сходится;
(A2) $g(x)$ монотонна и ограничена

или (признак Дирихле)

(Д1) $F(b) = \int_a^b f(x)\, dx$ ограничена на $[a, \omega)$;
(Д2) $g(x)$ монотонно стремится к нулю

то интеграл $\int_a^{\omega} f(x)g(x)\, dx$ сходится.

Доказательство

Теорема 9 →

Шаг 1 (критерий Коши и интегрирование по частям). Докажем теорему, пользуясь критерием Коши. Для этого нам НАДО доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in (a, \omega)\ \mid\ \forall b_1, b_2 \in (B, \omega)\quad \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Для простоты докажем теорему при дополнительном предположении, что функция $g(x)$ дифференцируема, а $f(x)$ непрерывна, и тогда

$$F(b) = \int\limits_a^b f(x)\, dx$$

— ее первообразная. Интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)\, dx = \int\limits_{b_1}^{b_2} F'(x)g(x)\, dx = F(b_2)g(b_2) - F(b_1)g(b_1) - \int\limits_{b_1}^{b_2} F(x)g'(x)\, dx.$$

Теорема 5 →

Поскольку $F(x)$ непрерывна, а $g'(x)$ знакопостоянна, по первой теореме о среднем найдется такая точка ξ между b_1 и b_2, что правая часть последнего равенства равна

$$\begin{aligned} F(b_2)g(b_2) - F(b_1)g(b_1) - F(\xi) \int\limits_{b_1}^{b_2} g'(x)\, dx \\ = F(b_2)g(b_2) - F(b_1)g(b_1) - F(\xi)(g(b_2) - g(b_1)) \\ = (F(b_2) - F(\xi))g(b_2) - (F(b_1) - F(\xi))g(b_1). \end{aligned}$$

Шаг 2 (признак Дирихле). Дано

$$\exists C > 0\ \forall b \in [a,\omega) \quad |F(b)| \le C,$$
$$\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists B_1 \in (a,\omega)\ \forall b \in (B_1,\omega) \quad |g(b)| < \varepsilon_1$$

Надо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in (a,\omega) \ \mid\ \forall b_1, b_2 \in (B,\omega)$$
$$|(F(b_2) - F(\xi))g(b_2) - (F(b_1) - F(\xi))g(b_1)| < \varepsilon.$$

Глядя на элементарную оценку

$$|(F(b_2) - F(\xi))g(b_2) - (F(b_1) - F(\xi))g(b_1)|$$
$$\le \Big(|F(b_2)| + |F(\xi)|\Big)|g(b_2)| + \Big(|F(b_1)| + |F(\xi)|\Big)|g(b_1)|,$$

положим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4C}$ и полученное B_1 возьмем в качестве искомого B.

Шаг 3 (признак Абеля). Признак Абеля сведем к признаку Дирихле следующим образом. В силу монотонности и ограниченности $g(x)$ существует предел $\gamma = \lim_{x\to\omega-0} g(x)$. Тогда для любого $b \in (a,\omega)$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)(g(x)-\gamma)\,dx + \gamma\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Первый интеграл имеет предел по признаку Дирихле, а второй — по первому предположению признака Абеля. **Теорема доказана.**

Сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Случай нескольких особенностей.

Сходимость в смысле главного значения по Коши.

§ 4. Эйлеровы интегралы

Определение
Г-функции и В-функции
⇓

Гамма-функция $\Gamma(\alpha)$ и бета-функция $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ определяются как несобственные интегралы, зависящие от параметра:

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx, \quad \alpha > 0,$$

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt, \quad \alpha,\beta > 0.$$

Теорема 14
о свойствах гамма- и бета-функций
⇓

(1) $\Gamma(\alpha)$ определена при $\alpha > 0$.

(2) Имеет место формула понижения
$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0;$$
в частности, $n! = \Gamma(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(3) Имеет место формула дополнения
$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

(4) $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ определена при $\alpha, \beta > 0$.

(5) Гамма-функция и бета-функции связаны соотношением
$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Доказательство Докажем только (1), (2), (4). Доказательства (3) и (5) слишком сложны.

Шаг 1 ($\Gamma(\alpha)$ определена при $\alpha > 0$). Нам нужно показать, что интеграл в определении $\Gamma(\alpha)$ сходится при всех $\alpha > 0$. Этот интеграл имеет две особенности:
$$\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \int\limits_0^c x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx + \int\limits_c^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx,$$
где $c \in (0, \infty)$ — некоторая точка. Сходимость первого интеграла следует из того, что
$$x^{\alpha-1}e^{-x} \sim x^{\alpha-1} \quad \text{при } x \to +0,$$
Теоремы , → теоремы сравнения и интегрируемости особенности $x^{\alpha-1}$ в нуле при $\alpha > 0$.

Для доказательства сходимости второго интеграла представим подынтегральную функцию в виде
$$x^{\alpha-1}e^{-x} = \underbrace{\left(x^{\alpha-1}e^{-x/2}\right)}_{=g(x)} e^{-x/2}.$$

Теоремы , → Функция $g(x)$ ограничена на $[c, \infty)$. Действительно, по теореме о сравнении показательной и степенной функций
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0,$$
и значит по определению предела на некотором отрезке $[d, \infty)$ не превосходит, например, 1. С другой стороны, будучи непрерывной на отрезке $[c, d]$ она также ограничена. Пусть
$$C = \max\Big\{1, \max_{[c,d]} |g(x)|\Big\}.$$

В итоге,
$$|x^{\alpha-1}e^{-x}| \leq Ce^{-x/2}.$$
Теорема 15 → и второй интеграл сходится по мажорантному признаку.

Шаг 2 ($\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ определена при $\alpha,\beta > 0$). По аналогии с шагом 1, достаточно заметить, что
$$t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} \sim t^{\alpha-1} \quad \text{при } x \to +0$$
$$t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} \sim (1-t)^{\beta-1} \quad \text{при } x \to 1-0$$
Теорема 15 → и снова привлечь теорему сравнения.

Шаг 3 ($\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$). Проинтегрируем по частям:
$$\Gamma(\alpha+1) = \int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx = \int\limits_0^\infty x^\alpha\,d(-e^{-x})$$
$$= \underbrace{-x^\alpha e^{-x}\Big|_0^\infty}_{=0} + \int\limits_0^\infty \alpha x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \alpha\Gamma(\alpha).$$
Значения $\Gamma(1) = 1$ вычисляется явно
$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty x^0 e^{-x}\,dx = 1.$$
Далее по индукции получается $n! = n(n-1)! = n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$. **Теорема доказана.**

Замечание. Если гамма-функция связана с факториалом, то бета-функция связана с биномиальными коэффициентами. Действительно, при целых неотрицательных n, m
$$\mathrm{B}(n+1,m+1) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+m+2)} = \frac{n!\,m!}{(n+m+1)!} = \frac{1}{n+m+1}\;C^n_{n+m}.$$
Пример $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Сделаем замену $y = x^2$:
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-y}\,d\sqrt{y} = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-y}\frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy = \Gamma(1/2).$$
С другой стороны,
$$\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\;\Gamma\Big(1-\frac{1}{2}\Big) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi,$$
и значит $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Пример $\int_0^{\pi/2}\sin^\alpha x\cos^\beta x\,dx$. Выполняя замену $\sin^2 x = t$, при которой
$$\cos^2 x = 1-t,\;\; 2\sin x\cos x = dt,$$

получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1}x\cos^{\beta-1}x\,\underbrace{2\sin x\cos x\,dx}_{=dt} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{\alpha-1}{2}}(1-t)^{\frac{\beta-1}{2}}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{B}\Big(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\Big).$$

Для натуральных α и β можно получить выражение в виде числа.

§ 5. Применение интеграла для вычисления длин, площадей, объемов и т. д.

Площадь подграфика. Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная неотрицательная функция. Площадь $S(F)$ фигуры

$$F = \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ 0 \le y \le f(x)\}$$

находится как интеграл

$$S(F) = \int\limits_1^b f(x)\,dx.$$

Это следует из определения интеграла и наших интуитивных представлений о площади:

$$S(F) \underbrace{\leftarrow}_{\text{инт. сообр.}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \underbrace{\rightarrow}_{\text{опр. интегр.}} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Здесь и далее как обычно $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$ — разбиение отрезка $[a,b]$, а $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ — выделенные точки.

Площадь эллипса. Через $\Gamma(x)$.

Площадь фигуры в полярных координатах.

$$S(F) \underbrace{\leftarrow}_{\text{инт. сообр.}} \sum_{i=1}^n \pi f^2(\xi_i)\frac{\Delta\varphi_i}{2\pi} \underbrace{\rightarrow}_{\text{опр. интегр.}} \frac{1}{2}\int\limits_a^b f^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Масса стержня. Пусть $\rho : [0,l] \to \mathbb{R}$ — неотрицательная непрерывная функция, представляющая линейную плотность стержня длины l. (Линейная плотность — это плотность погонного метра, которая измеряется в г/см.) Тогда масса стержня равна интегралу

$$m = \int\limits_0^l \rho(x)\,dx.$$

Это как обычно следует из определения интеграла и интуитивных соображений о массе:

$$m \underbrace{\leftarrow}_{\text{инт. сообр.}} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i)\Delta x_i \underbrace{\rightarrow}_{\text{опр. интегр.}} \int\limits_0^l \rho(x)\,dx.$$

Здесь $\rho(\xi_i)\Delta x_i$ — приближенная масса части стержня между точками x_i и x_{i+1}.

Центр тяжести стержня. Пусть $c \in [0, l]$ — некоторая точка стержня из предыдущего примера. Предположим, что стержень находится горизонтально в однородном вертикальном поле силы тяжести. Посчитаем момент M этой силы относительно точки c, считая положительным направлением вращение по часовой стрелке:

$$M \underbrace{\leftarrow}_{\text{инт. сообр.}} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)(\xi_i - c)\Delta x_i \underbrace{\rightarrow}_{\text{опр. интегр.}} \int\limits_0^l \rho(x)(x-c)\,dx.$$

Здесь для простоты ξ_i — середины отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, а $\rho(\xi_i)(\xi_i - c)\Delta x_i$ — приближенный момент части стержня между точками x_i и x_{i+1}. Если задаться целью найти точку, относительно которой момент будет нулевым, то для этой точки получается формула

$$c = \frac{\int_0^l \rho(x)x\,dx}{\int_0^l \rho(x)\,dx}.$$

Эта точка называется центром масс стержня. (В случае однородного силового поля центр масс совпадает с центром тяжести.)

Второй момент. Величина $\int_0^l \rho(x)x\,dx$ называется у математиков первым моментом функции $\rho(x)$, $\int_0^l \rho(x)\,dx$ — естественно нулевым моментом. Их физический смысл нам ясен. А какой физический смысл у второго момента $\int_0^l \rho(x)x^2\,dx$? Это момент инерции относительно левого конца стержня. Момент инерции относительно произвольной точки c равен $\int_0^l \rho(x)(x-c)^2\,dx$. Докажите, что момент относительно центра масс стержня минимален.

Объем фигур вращения. Пусть непрерывная неотрицательная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ задает тело вращения

$$B = \{(x, y, z) \mid x \in [a, b],\ 0 \le \sqrt{y^2 + z^2} \le f(x)\}.$$

Его объем находится по формуле

$$V(B) = \int\limits_a^b \pi f^2(x)\,dx.$$

Это следует из определения интеграла и интуитивных соображений об объеме:

$$V(B) \underbrace{\leftarrow}_{\text{инт. сообр.}} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i \underbrace{\rightarrow}_{\text{опр. интегр.}} \int\limits_a^b \pi f^2(x)\,dx.$$

Здесь $\pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$ — приближенный объем части тела между точками x_i и x_{i+1}.

Объем шара. Объем шара $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$ радиуса R равен

$$V(B) = \int\limits_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,dx = \pi\Big(R^2 x - \frac{x^3}{3}\Big)\Big|_{-R}^{R} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Длина кривой.

Независимость длины кривой от параметризации.

Длина графика.

Длина кривой в полярных координатах.

Длина дуги эллипса.