Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

А. П. СТАРОВОЙТОВ, Г. Н. КАЗИМИРОВ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Линейные ограниченные операторы в нормированных пространствах

Практическое пособие
для студентов заочного факультета
специальности I-310301-02 «Математика
(научно-педагогическая деятельность)»

Гомель
УО «ГГУ им. Ф. Скорины»
2011

УДК 517. 9 (075.8)
ББК 22.16 я73
С 773

Рецензенты:

канд. физико-математических наук, профессор В. И. Мироненко;
канд. физико-математических наук, доцент С. П. Новиков

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Старовойтов, А. П.

С 773 Функциональный анализ и интегральные уравнения. Линейные ограниченные операторы в нормированных пространствах : практ. пособие для студ. заочного фак. спец. 1-310301-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)» / А. П. Старовойтов, Г. Н. Казимиров; М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2011. – 48 с.

ISBN 978-985-439-540-1

Предлагаемое пособие предназначено для помощи студентам заочного факультета в самостоятельном изучении раздела «Линейные ограниченные операторы в нормированных пространствах» и при выполнении контрольной работы. Содержит перечень понятий и теорем, которыми необходимо овладеть для усвоения соответствующего раздела курса и типичные задачи, снабжённые подробными решениями, которые могут использоваться студентами для самопроверки готовности к выполнению контрольных заданий.

УДК 517. 9 (075.8)
ББК 22.16 я73

ISBN 978-985-439-540-1

Содержание

Введение.. 4

Тема 1 Полнота и компактность в метрических пространствах 6

Тема 2 Линейные и нормированные пространства…................... 22

Тема 3 Линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах. Норма линейного оператора и функционала …. 33

Литература ………………………………………………………….. 47

Введение

Как самостоятельная математическая дисциплина функциональный анализ оформился в начале 20 века в результате переосмысления и обобщения ряда понятий математического анализа, алгебры и геометрии. Датой рождения функционального анализа считается 1932 год, когда вышла в свет основополагающая монография Стефана Банаха «Теория линейных операций». За последующие десятилетия функциональный анализ глубоко проник почти во все области математики. Основой для широких приложений функционального анализа является то, что большинство задач, возникающих в математике и математической физике, касается не отдельных объектов типа функций, мер или уравнений, а, скорее, обширных классов таких объектов, причём на этих классах обычно существует естественная структура векторного пространства и естественная топология. Среди областей применения функционального анализа можно указать теорию функций, теорию дифференциальных и интегральных уравнений, теорию вероятностей, методы вычислений, квантовую механику, математическую экономику и ряд других разделов математики, физики и естествознания.

Настоящее практическое пособие посвящено важному разделу курса «Функциональный анализ и интегральные уравнения» — линейным операторам и функционалам в нормированных пространствах. Согласно учебному плану подготовки специалистов по этому разделу студент заочного факультета должен выполнить предложенную ему контрольную работу. Помочь ему успешно справиться с этой задачей — цель, которую ставили перед собой авторы.

Учитывая специфику заочного факультета, которая обуславливает небольшое количество учебных часов, отведённых на решение задач по разделу курса «Линейные ограниченные операторы в нормированных пространствах», а также недостаточную обеспеченность учебными пособиями и отсутствием сборников задач с подробным решением вводных задач («решебников»), данное пособие приобрело следующую структуру.

Оно включает 3 темы, каждая из которых посвящена целостному разделу курса. Каждая часть содержит перечень понятий и теорем, которыми необходимо овладеть для усвоения соответствующего раздела курса. Приводятся типичные задачи, снабжённые подробными решениями. Мы надеемся, что они будут использованы студентами для самопроверки готовности к выполнению контрольных заданий.

Процесс изучения функционального анализа на заочном факультете состоит из следующих основных этапов:

1) самостоятельная работа над учебником и учебными пособиями;
2) посещение и проработка установочных и обзорных лекций;
3) работа на практических занятиях;
4) выполнение контрольной работы;
5) сдача зачётов и экзаменов.

При этом в силу специфики заочного обучения, на наш взгляд, основными в этом процессе являются 1-й и 4-й этапы. Хочется думать, что данное пособие поможет студентам как в самостоятельной работе над учебником, так и в овладении практическими навыками решения задач данного раздела курса «Функциональный анализ и интегральные уравнения».

Тема 1

Полнота и компактность в метрических пространствах

Основные понятия и теоремы

Определение 1. Пусть $X \neq \varnothing$. Отображение $\rho : X \times X \to \mathbf{R}$, которое каждой паре $(x, y) \in X \times X$ ставит в соответствие действительное число $\rho(x, y)$, называется **метрикой** на X, если для любых $x, y, z \in X$ выполнены условия:

1) $\rho(x, y) \geq 0$ и $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника);

Определение 2. Множество X с заданной на нём метрикой ρ, т. е. пара (X, ρ), называется **метрическим пространством.**

Число $\rho(x, y)$ обычно называют **расстоянием** между точками x, y множества X. В дальнейшем через (x_n) (или $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$) будем обозначать последовательность точек из X. Выделим два важных класса последовательностей в метрическом пространстве.

Определение 3. Последовательность точек (x_n) метрического пространства (X, ρ) называется **сходящейся**, если для некоторого $x_0 \in X$ числовая последовательность $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Точка x_0 при этом называется **пределом** последовательности (x_n).

Определение 4. Последовательность (x_n) называется **фундаментальной** в (X, ρ), если числовая последовательность $\rho(x_n, x_m) \to 0$, когда $n \to \infty$ и $m \to \infty$.

Определение 5. Множество A точек метрического пространства (X, ρ) называется **ограниченным**, если A содержится в некотором шаре.

Теорема 1. *Пусть* (x_n) − *сходящаяся последовательность точек* (X, ρ). *Тогда она:*

1) ограничена;
2) имеет единственный предел;
3) фундаментальна.

Определение 6. Метрическое пространство, в котором всякая фундаментальная последовательность точек сходится, называется **полным.**

Заметим, что не всякое метрическое пространство полно, но всякое неполное метрическое пространство можно пополнить, т. е. включить некоторым (единственным по существу) способом в полное пространство в качестве всюду плотного подпространства. В полных метрических пространствах имеют место два важных принципа, отражающие существенные свойства таких пространств.

Теорема 2 (принцип вложенных шаров). *Для того чтобы метрическое пространство было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нём всякая убывающая последовательность замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.*

Пусть $f: X \to X$ − отображение метрического пространства X в себя. Точка $a \in X$ называется **неподвижной точкой** отображения f, если $f(a) = a$.

Определение 7. Отображение $f:$ $(X, \rho) \to (X, \rho)$ называется **сжимающим**, если существует константа $0 \le \alpha < 1$ такая, что для $\forall x, y \in X$ $\rho(f(x), f(y)) \le \alpha\rho(x, y)$.

Теорема 3 (принцип сжимающих отображений). *В полном метрическом пространстве сжимающее отображение имеет неподвижную точку и притом только одну.*

Метрические пространства являются частным случаем топологических пространств, имеющих счетную базу в каждой точке. Для них понятия компактности и счетной компактности совпадают. Поэтому компактность в (X, ρ) можно определить на языке последовательностей.

Определение 8. Подмножество К метрического пространства (X, ρ) называется **компактным**, если из любой последовательности $(x_n) \subset$ К можно выделить сходящуюся к элементу из К подпоследовательность.

Компактность в метрическом пространстве тесно связано с понятием **полной ограниченности**.

Определение 9. Подмножество A метрического пространства (X, ρ) называется ε-**сетью** множества $M \subset X$, если $\forall x \in M$ существует $a \in A$ такое, что $\rho(x, a) < \varepsilon$. Если A при этом − конечное множество, то A называют **конечной ε-сетью.**

Определение 10. Множество $M \subset X$ называется **вполне ограниченным** в (X, ρ), если при любом ε > 0 для M существует конечная ε-сеть. То же можно выразить, сказав, что M можно покрыть конечным числом шаров радиуса ε.

Перечислим основные свойства вполне ограниченных множеств:

1) вполне ограниченное множество ограничено;

2) если M вполне ограничено, то его замыкание вполне ограничено;

3) всякое вполне ограниченное метрическое пространство сепарабельно;

4) подмножество вполне ограниченного множества вполне ограничено.

Теорема 4 (Хаусдорф). *Пусть* (X,ρ) *− полное метрическое пространство. Для того чтобы множество* $K \subset X$ *было компактным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

(1) K − замкнуто в (X, ρ);

(2) K − вполне ограничено в (X, ρ).

Из этой общей теоремы можно получить критерии компактности множеств в конкретных метрических пространствах ($\mathbf{R}^n$, l_p, $\mathbf{C}[a,b]$ и др.).

Теорема 5 (Гейне-Борель-Лебег). *Для того чтобы множество* $K \subset \mathbf{R}^n$ *было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым и ограниченным.*

Теорема 6. *Множество* $K \subset l_p$, $1 \le p < \infty$ *компактно тогда и только тогда, когда выполнены условия*:

(1) K − замкнутое множество;

(2) K − ограниченное множество;

(3) для любого ε > 0 *существует номер* $n_0 = n_0(\varepsilon)$ *такой, что*

$$\left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} < \varepsilon \text{ для всех } x = (x_1, x_2, \ldots) \in K.$$

Теорема 7. *Множество* $K \subset \mathbf{C}[a,b]$ *компактно тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(1) K замкнуто в $\mathbf{C}[a,b]$;

(2) K ограничено в $\mathbf{C}[a,b]$;

(3) K равностепенно непрерывно, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ *такое, что* $\forall \ x \in K$ *и* $t_1, t_2 \in [a,b]$ *из неравенства* $|\ t_1 - t_2\ | \le \delta$ *следует неравенство*

$$|\ x(t_2) - x(t_1)\ | \le \varepsilon .$$

Определение 11. Подмножество M метрического пространства $(X,\ \rho)$ называется предкомпактным, если его замыкание компактно. Это равносильно тому, что из любой последовательности $(x_n) \subset M$ можно извлечь сходящуюся в $(X,\ \rho)$ подпоследовательность (но предел этой подпоследовательности не обязательно принадлежит M).

Замечание. Из критериев компактности, сформулированных в трех последних теоремах, получаются критерии предкомпактности множества, если в них опустить требование замкнутости множества.

Задачи

1 Проверить, является ли заданная последовательность (x_n) (таблица 1.1) точек метрического пространства $(X,\ \rho)$ ограниченной, фундаментальной, сходящейся (определение метрики ρ на X смотри в таблице А1 Приложения А). Если существует, найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Таблица 1.1

Номер задания	X	x_n
1.1	$C[0, 2]$	$\dfrac{t^2 n}{n+t^2}$
1.2	$L_2[0, 1]$	$\dfrac{nt^2}{1+nt}$
1.3	$C[-1, 1]$	$\sqrt{t^2+\dfrac{1}{n^2}}$
1.4	$L_1[1, 2]$	$\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n$
1.5	$C[0, 1]$	$t^n - t^{n+1}$
1.6	$L_4[-2, 2]$	$n\left(\sqrt{t^2+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{t^2}\right)$
1.7	$C[0, 1]$	$n\left(\sqrt{t+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{t}\right)$
1.8	$L_3[0, 1]$	$n\sin\dfrac{t}{n}$

Окончание таблицы 1.1

Номер задания	X	x_n
1.9	l_4	$\left(\underbrace{\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1}, \ldots, \frac{n}{n+1}}_{n}, 0, 0, \ldots\right)$
1.10	l_2	$\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, ..., \frac{1}{3^n}, 0, 0, ...\right)$
1.11	l_∞	$\left(\underbrace{n\sin\frac{1}{n}, n\sin\frac{1}{n}, \ldots, n\sin\frac{1}{n}}_{n}, 0, 0, \ldots\right)$
1.12	c_0	$\left(\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n}, 0, 0, \ldots\right)$
1.13	$l_{4/3}$	$\left(\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n}, \underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n}, 0, 0, \ldots\right)$
1.14	$L_3[0, 2]$	$\begin{cases} \left(\frac{t}{2}\right)^n, & t \in [0,2] \setminus Q \\ e^{nt}, & t \in [0,2] \cap Q \end{cases}$
1.15	$L_1[-2, 2]$	$\begin{cases} \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}}, & t \in [-2,2] \setminus Q \\ \cos nt, & t \in [-2,2] \cap Q \end{cases}$

Образец решения и оформления задачи 1.15

Мера Лебега множества $[-2, 2] \cap Q$ равна нулю, поэтому $x_n(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}}$ почти всюду на отрезке $[-2, 2]$. Тогда в силу определения метрического пространства $L_1[-2, 2]$ (лабораторная работа 6) в качестве представителя класса x_n можно брать функцию $x_n(t)=\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}$. По определению

$$\forall\, x,y \in \mathrm{L}_1[-2,2] \quad \rho(x,y)=\int\limits_{[-2,2]}|y(t)-x(t)|dt.$$

Поэтому для любого $n\in N$

$$\rho(0,x_n)=\int\limits_{[-2,2]}\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}dt\le\int\limits_{[-2,2]}\sqrt{t^2+1}dt=\int\limits_{-2}^{2}\sqrt{t^2+1}dt\le\int\limits_{-2}^{2}\sqrt{5}dt=4\sqrt{5}$$

и значит последовательность (x_n) ограничена (она лежит в шаре $\mathrm{B}(0,4\sqrt{5})$).

Докажем, что она является фундаментальной:

$$\rho(x_n,x_m)=\int\limits_{[-2,2]}\left|\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{t^2+\frac{1}{m^2}}\right|dt=\int\limits_{[-2,2]}\left|\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}}{\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{t^2+\frac{1}{m^2}}}\right|dt=$$

$$=\left|\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right|\cdot\int\limits_{[-2,2]}\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{t^2+\frac{1}{m^2}}}.$$

Предположим для определенности, что $m<n$. Тогда

$$\int\limits_{[-2,2]}\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{t^2+\frac{1}{m^2}}}=2\int\limits_{0}^{2}\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{t^2+\frac{1}{m^2}}}\le 2\int\limits_{0}^{2}\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{1}{m^2}}}=$$

$$=2m\ln(mt+\sqrt{m^2t^2+1})\Big|_0^2=2m\ln(2m+\sqrt{4m^2+1}).$$

Поэтому

$$\rho(x_m,x_n)\le\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)2m\ln(2m+\sqrt{4m^2+1})\le\frac{4\ln(4m+1)}{m}\to 0$$

при $n,m\to\infty$.

Итак, последовательность (x_n) фундаментальна в L$_1$[–2, 2]. Поскольку L$_1$[–2, 2] − полное пространство, то (x_n) − сходящаяся последовательность. Найдем ее предел.

Покажем, что таковым является $x_0(t)=|t|$ (т. е. поточечный предел $x_n(t)$). Действительно,

$$\rho(x_0,x_m)=\int\limits_{[-2,2]}\left||t|-\sqrt{t^2+\frac{1}{m^2}}\right|dt=\frac{2}{m^2}\int\limits_0^2\frac{dt}{|t|+\sqrt{t^2+\frac{1}{m^2}}}\le\frac{2}{m^2}\int\limits_0^2\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{1}{m^2}}}=$$

$$=\frac{2m\ln(2m+\sqrt{4m^2+1})}{m^2}\to 0,\ \text{при}\ m\to\infty,$$

т. е. $x_m\to x_0$ в метрическом пространстве L$_1$[–2, 2].

2 Проверить, является ли метрическое пространство (X, ρ) полным. В случае отрицательного ответа, привести пример фундаментальной последовательности в (X, ρ), которая не сходится в (X, ρ) (таблица 1.2).

Таблица 1.2

Номер задания	X	$\rho(x,y)$
2.1	$C[0, 1]$	$\rho(x,y)=\int\limits_0^1\lvert y(t)-x(t)\rvert dt$
2.2	$\left\{\ x\in C[0,1]:\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert<1\ \right\}$	$\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert y(t)-x(t)\rvert$
2.3	$C[0, 1]$	$\rho(x,y)=\left(\int\limits_0^1\lvert y(t)-x(t)\rvert^2 dt\right)^{1/2}$
2.4	$C^{(1)}[0,1]$	$\rho(x,y)=\int\limits_0^1\lvert y(t)-x(t)\rvert dt$
2.5	l_∞	$\rho(x,y)=\sup\limits_n\lvert y_n-x_n\rvert$
2.6	$\left\{x\in l_2:\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert x_k\rvert^2<1\right\}$	$\rho(x,y)=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert y_k-x_k\rvert^2\right)^{1/2}$

Окончание таблицы 1.2

Номер задания	X	$\rho(x,y)$
2.7	l_3	$\rho(x,y)=\sup\limits_n\lvert y_n-x_n\rvert$
2.8	l_2	$\rho(x,y)=\sup\limits_n\lvert y_n-x_n\rvert$
2.9	c_0	$\rho(x,y)=\sup\limits_n\lvert y_n-x_n\rvert$
2.10	$C^{(1)}[0,1]$	$\rho(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}\lvert x(t)-y(t)\rvert+\max\limits_{0\le t\le 1}\lvert x'(t)-y'(t)\rvert$
2.11	$C^{(2)}[0,1]$	$\rho(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}\lvert y(t)-x(t)\rvert$
2.12	$l_1\cap l_2$	$\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert y_k-x_k\rvert$
2.13	$l_1\cap l_2$	$\rho(x,y)=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert y_k-x_k\rvert^2\right)^{1/2}$
2.14	$l_1\cap l_3$	$\rho(x,y)=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert y_k-x_k\rvert^3\right)^{1/3}$
2.15	$l_1\cap l_2$	$\rho(x,y)=\sup\limits_n\lvert y_n-x_n\rvert$
2.16	$C^{(1)}[0,1]$	$\rho(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}\lvert y(t)-x(t)\rvert$
2.17	l_1	$\rho(x,y)=\sup\limits_n\lvert y_n-x_n\rvert$

Образец решения и оформления задачи 2.16

Покажем, что это метрическое пространство не является полным. Разлагая в ряд Фурье функцию $f(x)=\lvert\sin x\rvert$, имеем

$$\lvert\sin x\rvert=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}\quad\forall x\in R. \tag{1}$$

В силу равномерной сходимости ряда (1) (признак Вейерштрасса) последовательность его частичных сумм

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$$

равномерно сходится (в частности, на отрезке [–1, 1]) к функции $|\sin x|$. Тогда $\rho(f, S_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Другого предела у $S_n(x)$ быть не может, а $f \notin C^{(1)}[-1,1]$. Поэтому достаточно показать, что последовательность $S_n(x)$ фундаментальна в рассматриваемом пространстве. А это вытекает из того, что, если $m < n$, то $\rho(S_n, S_m) = \max\limits_{-1\le t\le 1}\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n}\frac{\cos 2kt}{4k^2-1}\right| \le \sum\limits_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} \to 0$ при $m \to \infty$, как остаток сходящегося ряда.

Образец решения и оформления задачи 2.17

Покажем, что данное метрическое пространство также не является полным. Для этого рассмотрим последовательность $x^n = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots) \in l_1$ $n = 1, 2, \ldots$.

При $m < n$ имеем $x^n - x^m = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m}, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$,

следовательно $\rho(x^n, x^m) = \frac{1}{m+1} \to 0,$ если $m, n \to \infty$. Итак x^n – фундаментальная последовательность в (l_1, ρ). Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ принадлежит l_1 и $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(a, x^n) = 0.$ Тогда для любого $k \in \mathbf{N}$ при $n > k$ имеем $\rho(a, x^n) \ge | a_k - \frac{1}{k} |$. Полагая $n \to \infty$, получаем отсюда, что $a_k = 1/k$, и поэтому a не принадлежит l_1. Итак, мы построили фундаментальную последовательность x^n в l_1, которая не сходится в рассматриваемом пространстве.

3 Выяснить, является ли множество **M** предкомпактным, компактным в пространстве $C[0, 1]$ (таблица 1.3).

Таблица 1.3

Номер задания	**M**	Номер задания	**M**
3.1	$\{\sin(t+a) : a \in R\}$	3.9	$\{x(t) : \lvert x(t)\rvert \le \cos t\}$
3.2	$\left\{ x \in C^{(2)}[0,1] : \lvert x(t)\rvert \le 1, \lvert x'(t)\rvert \le 1 \right\}$	3.10	$\left\{ x \in C^{(2)}[0,1] : \lvert x(0)\rvert \le 1, \lvert x''(t)\rvert \le 1 \right\}$
3.3	$\{ae^{t+b} : 1 \le a \le 2, b \in R\}$	3.11	$\{a\sin(t+b) : 0 \le a, b \le 1\}$
3.4	$\left\{ x \in C^{(2)}[0,1] : \lvert x(t)\rvert \le \lvert x'(t)\rvert \le \lvert x''(t)\rvert \le 1 \right\}$	3.12	$\left\{ x \in C^{(2)}[0,1] : \lvert x(0)\rvert \le 2, \lvert x'(t)\rvert \le 2 \right\}$
3.5	$\{bt^{\alpha} : 0 < \alpha \le 1, 0 \le b \le 2\}$	3.13	$\left\{ \frac{t+a}{t+b} : 1 \le a, b \le 2 \right\}$
3.6	$\left\{ x \in C[0,1] : \lvert x(0)\rvert \le 1, \lvert x(t_2) - x(t_1)\rvert \le 4\lvert t_2 - t_1\rvert \right\}$	3.14	$\left\{ x \in C^{(2)}[0,1] : x(0) = 1, \lvert x'(0)\rvert \le 1, \lvert x''(t)\rvert \le 1 \right\}$
3.7	$\{\cos at : -1 \le a \le 1\}$	3.15	$\{t^n : n \in N\}$
3.8	$\left\{ x \in C^{(1)}[0,1] : \lvert x(t)\rvert \le t^{-2}, \lvert x(t_2) - x(t_1)\rvert \le \lvert t_2 - t_1\rvert \right\}$	3.16	$\left\{ x \in C[0,1] : x(0) = 1, \lvert x(t_2) - x(t_1)\rvert \le \lvert t_2 - t_1\rvert \right\}$

Образец решения и оформления задачи 3.16

Применим теорему Арцела-Асколи. Покажем, что **M** − замкнуто, т. е. содержит все свои предельные точки. Пусть $(x_n) \subset \mathbf{M}$ и $x_n \to x$ в $C[0, 1]$. Тогда по условию $\forall n \in N$ и $\forall t_1, t_2 \in [0, 1]$

$$x_n(0) = 1, \lvert x_n(t_2) - x_n(t_1)\rvert \le \lvert t_2 - t_1\rvert . \qquad (2)$$

Перейдя в (2) к пределу при $n \to \infty$, получим $x(0) = 1$, $\lvert x(t_2) - x(t_1)\rvert \le \lvert t_2 - t_1\rvert$, т. е. $x \in \mathbf{M}$ и **M** — замкнуто. Если в (2) положить $t_1 = 0,\ t_2 = t,$ то будем иметь $\lvert x_n(t) - 1\rvert \le t \Rightarrow \rho(1, x_n) \le 1$. Откуда $\rho(0, x_n) \le \rho(0, 1) + \rho(1, x_n) \le 2$.

Итак, $\mathbf{M} \subset B[0,2]$, т. е. **M** ограничено. Осталось проверить равностепенную непрерывность множества **M** .

Для любого $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \varepsilon$. Тогда при любой функции $x \in \mathbf{M}$ и любых $t_1, t_2 : |t_2 - t_1| \le \delta$, согласно определению множества **M,** получим $|x(t_2) - x(t_1)| \le |t_2 - t_1| \le \varepsilon$.

Итак, **M** — компактно, а потому и предкомпактно.

4 Является ли множество **M** предкомпактным в пространстве l_p? В случае положительного ответа построить для множества **M** конечную ε-сеть при $\varepsilon = 1/10$ (таблица 1.4).

Таблица 1.4

Номер задания	p	**M**
4.1	1	$\left\{ (x_1, x_2, x_3, \dots) : \frac{1}{k^2} < \lvert x_k \rvert < \frac{2}{k^2}, k \in N \right\}$
4.2	2	$\left\{ (x_1, x_2, x_3, \dots) : \lvert x_k \rvert \le \frac{1}{2^k}, k \in N \right\}$
4.3	2	$\left\{ (x_1, x_2, x_3, \dots) : \frac{1}{2^k} \le \lvert x_k \rvert \le \frac{1}{2^{k+1}}, k \in N \right\}$
4.4	3	$\left\{ (x_1, x_2, x_3, \dots) : x_k = \frac{k}{1 + ak^2}, 1 \le a \le 2, k \in N \right\}$
4.5	4	$\left\{ (x_1, x_2, x_3, \dots) : x_1 = 1, x_k > 0, x_{k+1} < \frac{1}{2} x_k, k \in N \right\}$
4.6	1	$\left\{ (x_1, x_2, x_3, \dots) : x_1 = 1, x_k > 0, x_{k+1} < \frac{1}{4} x_k, k \in N \right\}$
4 .7	1	$\left\{ (x_1, x_2, x_3, \dots) : x_{2k} = 0, 0 < x_{2k+1} \le \frac{1}{2^k}, k \in N \right\}$
4.8	2	$\left\{ (x_1, x_2, x_3, \dots) : \lvert x_{2k} \rvert \le \frac{1}{k}, x_{2k+1} = 0, k \in N \right\}$
4.9	4	$\left\{ (x_1, x_2, x_3, \dots) : x_k = \frac{1}{2^{ak}}, \frac{1}{4} \le a \le 1, k \in N \right\}$
4.10	3	$\left\{ (x_1, x_2, x_3, \dots) : x_k = \frac{a}{k^{2/3}}, 1 \le a \le 5, k \in N \right\}$
4.11	2	$\left\{ (x_1, x_2, x_3, \dots) : x_k = \frac{\sin \alpha k}{(\sqrt{2})^k}, 1 \le \alpha < 2, k \in N \right\}$

Окончание таблицы 1.4

Номер задания	p	**M**
4.12	1	$\{(x_1, x_2, x_3, ...) : x_1 = \alpha,\ x_2 = x_3 = ... = 0,\ 1 \le \alpha < 10\}$
4.13	2	$\left\{(x_1, x_2, x_3, ...) : x_{2k} = 0,\ x_{2k+1} = \dfrac{1}{1+\alpha k},\ 1 \le \alpha \le 2,\ k \in N\right\}$
4.14	2	$\left\{(x_1, x_2, x_3, ...) : x_1 = 1,\ x_k > 0, x_{k+1} \le \dfrac{1}{2} x_k,\quad k \in N\right\}$

Образец решения и оформления задачи 4.14

Из условия задачи следует, что

$$x_1 = 1,\ 0 < x_2 \le \frac{1}{2^1},\ 0 < x_3 \le \frac{1}{2^2}, \dots,\ 0 < x_k \le \frac{1}{2^{k-1}}, \dots,$$

т. е. имеем $\mathbf{M} \subset \mathbf{M_1} = \left\{(x_1, x_2, x_3, ...) : 0 < x_k \le \dfrac{1}{2^{k-1}}\right\}$.

Покажем, что $\mathbf{M_1}$ предкомпактно в полном метрическом пространстве l_2. Для этого применим критерий предкомпактности (теорема 6 без условия (1)). Поскольку $\forall x \in \mathbf{M_1}$

$$\rho(0, x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2(k-1)}}\right)^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} < 2,$$

то $\mathbf{M_1} \subset$ B(0, 2) и, следовательно, оно ограничено.

Проверим условие (2) теоремы 6. Для любого $x \in \mathbf{M_1}$

$$I_{n_0} = \left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2(k-1)}}\right)^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{2^{n_0}}.$$

Поэтому, для любого $\varepsilon > 0$ достаточно взять n_0 таким, чтобы $\dfrac{2}{\sqrt{3}} 2^{-n_0} < \varepsilon$ (например, $n_0 = \left[\log_2 \dfrac{2}{\varepsilon\sqrt{3}}\right] + 1$).

Тогда $\forall x \in \mathbf{M}$ $I_{n_0} < \varepsilon$, и условие (2) выполняется, т. е. $\mathbf{M_1}$ предкомпактно. Так как каждое подмножество предкомпактного множества предкомпактно, то **M** предкомпактно.

Приведем другое доказательство предкомпактности **M**, которое основано на теореме 4. Согласно этой теореме достаточно показать вполне ограниченность множества **M**. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем n так, что $2^{-n+1} < \varepsilon/2$ (например, $n = \left[\log_2 \frac{2}{\varepsilon}\right] + 2$). Рассмотрим множество $\mathbf{M}^* = \{x^n = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...) : (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \mathbf{M}\}$.

Множество точек $\mathbf{M}^*$ вполне ограничено как множество, изометричное ограниченному множеству из $\mathbf{R}^n$. Значит, для него существует конечная $\varepsilon/2$-сеть. Но для $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \mathbf{M}$ и $x^n := (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...) \in \mathbf{M}^*$

$$\rho(x, x^n) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4^k}\right)^{1/2} < \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon/2.$$

Поэтому данная $\varepsilon/2$-сеть $\mathbf{M}^*$ будет ε-сетью во всем **M**, т. е. **M** – вполне ограничено.

Укажем теперь ε-сеть множества **M** для $\varepsilon = \frac{1}{10}$. В этом случае $n = [\log_2 20] + 2 = 6$, и нужно построить конечную $\varepsilon/2$-сеть во множестве

$$\mathbf{M}^* = \left\{(x_1, x_2, ..., x_6, 0, 0, ...) : 0 < x_k \le \frac{1}{2^{k-1}}, k = 2,3...6; x_1 = 1{,}0\right\}.$$

Ею будет множество точек вида

$$y = \left(1, \frac{j_0}{50}, \frac{j_1}{50}, \frac{j_2}{50}, \frac{j_3}{50}, \frac{j_4}{50}, 0, 0, ...\right),$$

где $j_0 = 1, ..., 5$; $j_1 = 1, ..., 13$, $j_2 = 1, ..., 8$; $j_3 = 1, ..., 4$; $j_4 = 1, 2$ (индексы j_k пробегают свои значения независимо друг от друга)

5 Является ли отображение f метрического пространства X в себя сжимающим? Найти x_4, где $x_0 = 0, x_{k+1} = f(x_k)$, и оценить расстояние x_4 до неподвижной точки отображения f (таблица 1.5).

Таблица 1.5

Номер задания	X	f
5.1	$C[0, 1]$	$f(x)(t) = \frac{1}{4}x(t) + 1$
5.2	$C[-1, 1]$	$f(x)(t) = \frac{1}{2}x(t^2) + t$
5.3	l_2	$f(x) = \left(1, \frac{x_2}{3}, \frac{x_3}{4}, \ldots\right)$
5.4	l_1	$f(x) = \left(1, \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{8}, 0, 0, \ldots\right)$
5.5	c_0	$f(x) = \left(1, \frac{x_2}{2}, 0, \frac{x_4}{2}, 0, \frac{x_6}{2}, \ldots\right)$
5.6	c	$f(x) = \left(\frac{x_1}{4}, 1, 0, 0, \ldots\right)$
5.7	$L_2[0,1]$	$f(x)(t) = \frac{1}{8}x(\sqrt{t}) + 1$
5.8	$L_2[0,1]$	$f(x)(t) = \frac{1}{4}x(\sqrt[3]{t}) + 1$
5.9	l_∞	$f(x) = \left(1, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{4}, 0, 0, \ldots\right)$
5.10	l_3	$f(x) = \left(1, \frac{x_1}{4}, \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{4}, \ldots\right)$
5.11	$C[0,1]$	$f(x)(t) = \frac{1}{5}\sin x(t) + \sin t$
5.12	$C^{(1)}[0,1]$	$f(x)(t) = \frac{1}{6}x(t^2) + 1$
5.13	$C^{(1)}_{[0,1]}$	$f(x)(t) = \frac{1}{8}tx(t) + t$
5.14	l_4	$f(x) = \left(1, \frac{x_3}{5}, \frac{x_4}{6}, \frac{x_5}{7}, \ldots\right)$
5.15	l_2	$f(x) = \left(1, \frac{x_1}{2}, 0, \frac{x_3}{4}, 0, \frac{x_5}{6}, \ldots\right)$

Образец решения и оформления задачи 5.15

Пусть $x, y \in l_2$. Тогда

$$\rho(f(x), f(y)) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x_{2n-1}}{2n} - \frac{y_{2n-1}}{2n} \right|^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n-1} - y_{2n-1}|^2 \right)^{1/2} \le \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \rho(x, y).$$

Следовательно, $\alpha = \dfrac{1}{2}$ и отображение f является сжимающим в l_2. Найдем

$$x^1, x^2, x^3, x^4: \ x^1 = f(x_0) = (1, 0, 0, ...); \ \ x^2 = f(x^1) = (1, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots);$$

$$x^3 = f(x^2) = (1, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots) \text{ и } x^4 = f(x^3) = (1, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots).$$

Отсюда следует, что неподвижной точкой отображения f является точка $b = x^4$ $(x^4 = f(x^4))$, и поэтому $\rho(x^4, b) = 0$.

Заметим, что для оценки расстояния точки x_n от неподвижной точки b применимо неравенство $\rho(x_n, b) \le \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x_0, x_1)$.

Варианты задания (таблица 1.6)

Таблица 1.6

Номер варианта	Номера заданий				
1	1.1	2.15	3.5	4.10	5.8
2	1.2	2.14	3.6	4.9	5.9
3	1.3	2.13	3.7	4.8	5.10
4	1.4	2.12	3.8	4.7	5.11
5	1.5	2.11	3.9	4.6	5.12
6	1.6	2.10	3.10	4.5	5.13
7	1.7	2.9	3.11	4.4	5.14
8	1.8	2.8	3.12	4.3	5.1
9	1.9	2.7	3.13	4.2	5.2
10	1.10	2.6	3.14	4.1	5.3
11	1.11	2.5	3.1	4.11	5.4

Окончание таблицы 1.6

Номер варианта	Номера заданий				
12	1.12	2.4	3.2	4.12	5.5
13	1.13	2.3	3.3	4.13	5.6
14	1.14	2.2	3.4	4.1	5.7
15	1.13	2.1	3.5	4.2	5.6
16	1.12	2.2	3.6	4.3	5.7
17	1.11	2.3	3.7	4.4	5.8
18	1.10	2.4	3.8	4.5	5.9
19	1.9	2.5	3.9	4.6	5.10
20	1.8	2.6	3.10	4.7	5.11
21	1.7	2.7	3.11	4.8	5.12
22	1.6	2.8	3.12	4.9	5.13
23	1.5	2.9	3.13	4.10	5.14
24	1.4	2.10	3.14	4.11	5.1
25	1.3	2.11	3.15	4.12	5.2
26	1.2	2.12	3.1	4.13	5.3

Тема 2

Линейные и нормированные пространства

Основные понятия и теоремы

Определение 1. Непустое множество L называется **линейным** (**векторным**) **пространством** над полем $\boldsymbol{K}$, если определены два отображения: из $L \times L$ в L и из $\boldsymbol{K} \times L$ в L, – называемые сложением и умножением на скаляры соответственно, удовлетворяющие следующим свойствам для любых $x, y \in L$, $\lambda, \mu \in K$:

L есть коммутативная группа по сложению;

$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

$1 \cdot x = x$.

Элементы линейного пространства называются точками или векторами.

Всюду ниже $\boldsymbol{K}$ будет равно $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. В этом случае L называют соответственно вещественным или комплексным пространством.

Определение 2. Конечная система векторов $\{x_k \mid 1 \le k \le n\} \subset L$ называется **линейно независимой,** если равенство $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$ влечет равенства $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. В противном случае система $\{x_k \mid 1 \le k \le n\}$ называется **линейно зависимой.**

Определение 3. Бесконечная система векторов называется линейно независимой, если каждая ее конечная подсистема линейно независима.

Определение 4. Линейное пространство L называется **бесконечномерным** (пишут $\dim L = \infty$), если в L существует бесконечная линейно независимая система.

Определение 5. Пусть M есть подпространство линейного пространства L. Для элементов $x, y \in L$ будем писать $x \sim y$, если $x - y \in M$. Это отношение эквивалентности на L. Класс эквивалентности элемента x есть $\tilde{x} = x + M = \{x + m \mid m \in M\}$.

Множество L/M классов эквивалентности элементов из L является линейным пространством над $\boldsymbol{K}$ относительно операций $\tilde{x}+\tilde{y}=x+y+M$, $\lambda\tilde{x}=\lambda x+M$. Оно называется **фактор-пространством** пространства L по подпространству M.

Определение 6. Подмножество A линейного пространства L называется **выпуклым,** если $\lambda x+(1-\lambda)y\in A$ для любых $x,y\in A$ и любого $\lambda\in[0,1]$.

Определение 7. Отображение $p:L\to\mathbf{R}_+$, где $L-$ линейное пространство над полем $\boldsymbol{K}$, называется **нормой,** если при любых $x,y\in L$ и любом $\lambda\in\boldsymbol{K}$ выполняются следующие соотношения :

$p(x)=0\Leftrightarrow x=0$;

$p(\lambda x)=|\lambda|p(x)$;

$p(x+y)\le p(x)+p(y)$ (неравенство треугольника).

Как правило, вместо $p(x)$ пишут $\|x\|$. Каждое нормированное пространство $(L,\|\cdot\|)$ является метрическим относительно метрики $\rho(x,y)=\|x-y\|$.

Определение 8. Полное нормированное пространство, т. е. такое линейное пространство, наделенное нормой, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится, называется **банаховым** пространством.

Определение 9. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, заданные на одном и том же линейном пространстве L, называются **эквивалентными,** если найдутся такие числа $a,b>0$, что при всех $x\in L$ выполняются неравенства $a\|x\|_1\le\|x\|_2\le b\|x\|_1$.

Смысл этого понятия в том, что топологии, порождаемые этими нормами, совпадают. Другими словами, $x_n\to x$ по норме $\|\cdot\|_1$ тогда и только тогда, когда $x_n\to x$ по норме $\|\cdot\|_2$ $(x_n,x\in L)$ (проверьте!)

Задачи

1 Являются ли векторными пространствами над **R** или **C** (укажите, над какими именно) следующие множества с естественными алгебраическими операциями:

1.1 Множество l_1 вещественных последовательностей (x_n), удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n| < \infty$.

1.2 Множество M_α вещественнозначных непрерывных на **R** функций, принимающих в точке 0 значение α.

1.3 Множество всех монотонных (в нестрогом смысле) функций на **R**.

1.4 Множество $C[a, b]$ комплекснозначных непрерывных функций на отрезке $[a, b]$.

1.5 Множество C_α всех вещественнозначных непрерывных функций x на отрезке [0, 1], удовлетворяющих условию $\int_0^1 x(t)dt = \alpha$.

1.6 Множество l_2 всех вещественных последовательностей (x_n) таких, что $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$.

1.7 Множество $C^{(n)}[a, b]$ всех вещественнозначных n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций.

1.8 Множество c всех сходящихся комплексных последовательностей.

1.9 Множество $C^{\infty}(\boldsymbol{R})$ всех вещественнозначных бесконечно дифференцируемых функций на **R**.

1.10 Множество l_∞ всех ограниченных вещественнозначных последовательностей (x_n).

1.11 Множество $B(\boldsymbol{R})$ всех ограниченных функций $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$.

1.12 Множество c_0 всех вещественнозначных последовательностей (x_n), таких, что $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

1.13 Множество $D(\boldsymbol{R})$ всех вещественнозначных бесконечно дифференцируемых на **R** финитных (равных нулю вне некоторого отрезка, своего для каждой функции) функций.

1.14 Множество k всех комплексных последовательностей (x_n) таких, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{n} < \infty$.

2 Будут ли следующие линейные пространства бесконечномерными (таблица 2.1, обозначения см. в задаче 1)?

Таблица 2.1

Номер задания	Пространство	Номер задания	Пространство	Номер задания	Пространство
2.1	$D(\boldsymbol{R})$	2.6	C	2.11	M_0 из зад. 1.2
2.2	c_0	2.7	$C^{(1)}[a,b]$	2.12	$C[a,b]$
2.3	$B(\boldsymbol{R})$	2.8	l_2	2.13	k из зад. 1.14
2.4	l_∞	2.9	C_0 из зад. 1.5	2.14	$L_1[0,2]$
2.5	$C^\infty(\boldsymbol{R})$	2.10	l_1	2.15	$L_2[0,1]$

Образец решения и оформления задачи 2.15

Докажем, что $\dim L_2[0,1]=\infty$. В соответствии с определением 4 достаточно привести пример бесконечной линейно независимой последовательности функций из $L_2[0,1]$. Укажем даже континуум функций с таким свойством. Для любого $a\in(0,1)$ пусть x_a обозначает характеристическую функцию интервала $(0,a)$. Тогда система $\{x_a | a\in(0,1)\}\subset L_2[0,1]$ линейно независима.

В самом деле, если числа $a_1<a_2<...<a_n$ принадлежат (0, 1) и $\lambda_1,...,\lambda_n\in K$ таковы что $\lambda_1 x_{a_1}(t)+\lambda_2 x_{a_2}(t)+...+\lambda_n x_{a_n}(t)=0$ при почти всех $t\in[0,1]$, то, выбирая t последовательно из интервалов (a_{k-1}, a_k) (где $a_0=0$, $a_n=1$), получим

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=0\\ \qquad\lambda_2+\ldots+\lambda_n=0\\ \qquad\qquad\ldots\ldots\ldots,\\ \qquad\qquad\lambda_n=0\end{cases}$$

откуда $\lambda_n=\lambda_{n-1}=...=\lambda_1=0$, что и требовалось доказать.

3 Вычислите фактор-пространство L/M (таблица 2.2)

Таблица 2.2

Номер задания	L	M
3.1	$C[-1, 1]$	$\{x \in C[-1,1] \mid x(t) = 0, t \in [0,1]\}$
3.2	l_2	$\{x \in l_2 \mid x_1 = x_3 = \ldots = x_{2n-1} = \ldots = 0\}$
3.3	$C[0, 1]$	$\{x \in C[0,1] \mid x(0) = 0\}$
3.4	c	$\{x \in c \mid x_1 = x_2 = 0\}$
3.5	$C^{\infty}[0, 1]$	$\{x \in C^{\infty}[0,1] \mid x(0) = x'(0) = 0\}$
3.6	l_1	$\{x \in l_1 \mid x_1 + x_2 = 0\}$
3.7	$C^{(1)}[a, b]$	$\{x \in C^{(1)}[a,b] \mid x(a) = x(b)\}$
3.8	l_{∞}	$\{x \in l_{\infty} \mid x_1 = x_3 = 0\}$
3.9	$C^{(2)}[0, 1]$	$\{x \in C^{(2)}[0,1] \mid x''(0) = 0\}$
3.10	$C[0, 1]$	$\left\{x \in C[0,1] \,\middle\vert\, \int_0^1 x(t)dt = 0\right\}$
3.11	c_0	$\{x \in c_0 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
3.12	$B([0, 2])$	$\{x \in B([0,2]) \mid x(t) = 0, t \in [0,1]\}$
3.13	$L_1[-1, 1]$	$\left\{x \in L_1[-1,1] \,\middle\vert\, \int_{[-1,1]} x(t)dt = 0\right\}$
3.14	$L_2\ [0, 1]$	$\left\{x \in L_2[0,1] \,\middle\vert\, \int_0^1 e^t x(t)dt = 0\right\}$
3.15	l_2	$\{x \in l_2 \mid x_1 = x_2\}$

Образец решения и оформления задачи 3.15

Пусть $x \in l_2$, $\tilde{x}$ – его класс эквивалентности. Имеем $y \in \tilde{x} \Leftrightarrow x - y \in M \Leftrightarrow x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = y_1 - y_2$. Итак, для всех элементов $y \in \tilde{x}$, и только для них, разность $y_1 - y_2$ одинакова и равна $x_1 - x_2$. Поэтому естественно рассмотреть отображение $f : l_2 / M \to K,\ f(\tilde{x}) = x_1 - x_2$. Из сказанного следует, что f инъективно (почему?). Очевидно также, что f — сюръективно. Таким образом, f — биективное отображение. Легко проверяемые равенства $f(\tilde{x}+\tilde{z}) = f(\tilde{x}) + f(\tilde{z})$, $f(\lambda\tilde{x}) = \lambda f(\tilde{x})$ показывают теперь, что f есть изоморфизм пространств l_2/M и $\boldsymbol{K}$. Итак, l_2/M изоморфно $\boldsymbol{K}$.

4 Проверьте, является ли функция p нормой в пространстве X (таблица 2.3)

Таблица 2.3

Номер задания	X	$p(x)$
4.1	$C^{(n)}[0,1]$	$\sum_{k=0}^{n} \max_{0\le t\le 1} \lvert x^{(k)}(t)\rvert$
4.2	l_∞	$\sup\{\lvert x_n\rvert \mid n\in \boldsymbol{N}\}$
4.3	$B(\boldsymbol{R})$	$\sup\{\lvert x(t)\rvert \mid t\in \boldsymbol{R}\}$
4.4	$C[0,1]$	$\int_0^1 \lvert x(t)\rvert dt$
4.5	l_1	$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\lvert x_n\rvert$
4.6	$C^{(1)}[a,b]$	$\lvert x(a)\rvert + \max\{\lvert x'(t)\rvert \mid t\in[a,b]\}$
4.7	c_0	$\sup\{\lvert x_n\rvert \mid n\in \boldsymbol{N}\}$
4.8	$C^{(1)}[a,b]$	$\int_0^1 \lvert x(t)\rvert dt + \max\{\lvert x'(t)\rvert \mid t\in[a,b]\}$
4.9	c	$\sup\{n^{-1}\lvert x_n\rvert \mid n\in N\}$
4.10	$\mathbf{R}^n$	$\sum_{k=1}^{n} \lvert x_k\rvert$
4.11	$D(\boldsymbol{R})$	$\sup\{\lvert x(t)\rvert \mid t\in \boldsymbol{R}\}$
4.12	$C^{(1)}[a,b]$	$\max\{\lvert x'(t)\rvert \mid t\in[a,b]\}$
4.13	$C^{(2)}[0,1]$	$\max\{\lvert x''(t)\rvert \mid t\in[0,1]\}$
4.14	$C^{(1)}[0,1]$	$\lvert x(0)\rvert + \max\{\lvert x''(t)\rvert \mid t\in[0,1]\}$
4.15	$C^{(2)}[0,1]$	$\lvert x(0)\rvert + \lvert x(1)\rvert + \max\{\lvert x''(t)\rvert \mid t\in[0,1]\}$

Образец решения и оформления задачи 4.15

Легко проверить, что каждое слагаемое обладает свойствами 2) и 3) определения 7 (проверьте). Следовательно, и функция p обладает этими свойствами. Очевидно также, что $p(0)=0$. Пусть наконец, $p(x)=0$. Тогда $x(0)=x(1)=x''(t)=0 \quad (t\in[0,1])$. Последнее равенство означает, что $x(t)=kt+b$ – линейная функция. С учетом равенств $x(0)=x(1)=0$ отсюда следует, что $x=0$. Итак данная функция является нормой в пространстве $C^{(2)}[0, 1]$.

5 Приведите пример последовательности $(x_n)\subset X\cap Y$, сходящейся в X, но не сходящейся в Y (пространства X и Y наделены естественными нормами) (таблица 2.4).

Таблица 2.4

Номер здания	X	Y	Номер здания	X	Y
5.1	c_0	l_1	5.9	$C[0, 1]$	$C^{(2)}[0, 1]$
5.2	l_∞	l_1	5.10	$L_1[0, 1]$	$C[0, 1]$
5.3	l_∞	l_2	5.11	l_2	l_1
5.4	$C^{(1)}[0, 1]$	$C^{(2)}[0, 1]$	5.12	$L_2[0, 1]$	$C[0, 1]$
5.5	c_0	l_4	5.13	$L_1[0, 1]$	$C^{(1)}[0, 1]$
5.6	$L_1[0,1]$	$L_2[0,1]$	5.14	c_0	l_2
5.7	c	l_1	5.15	$C[0, 1]$	$C^{(1)}[0, 1]$
5.8	c	l_2			

Образец решения и оформления задачи 5.15

Рассмотрим последовательность $x_n(t)=\dfrac{1}{n}t^n \in C[0,1]\cap C^{(1)}[0,1]$.

Тогда $\|x_n-0\|_c = \max\left\{\dfrac{t^n}{n}\ \middle|\ t\in[0,1]\right\} = \dfrac{1}{n} \to 0$ при $n\to\infty$,

т. е. $x_n\to 0$ по норме пространства $C[0, 1]$. Поскольку $\|x_n-0\|_{c^1} = \max\left\{\dfrac{t^n}{n}\ \middle|\ t\in[0,1]\right\} + \max\{t^{n-1}\ |\ t\in[0,1]\} = \dfrac{1}{n}+1\to 1$ при

$n \to \infty$, то x_n не сходится к нулю в $C^{(1)}[0,1]$. Предположим теперь, что $\|x_n - a\|_{c^1} \to 0$ при некотором $a \in C^{(1)}[0, 1]$. Так как $a \in C[0, 1]$ и $\|x_n - a\|_c \le \|x_n - a\|_{c^1}$, то отсюда следует, что $x_n \to a$ в $C[0, 1]$. В силу единственности предела имеем $a = 0$, что противоречит доказанному выше.

6 Будут ли эквивалентны нормы p и q в пространстве E? (таблица 2.5).

Таблица 2.5

Номер задания	E	p	q
6.1	l_1	$\sup\limits_{n\in N}\|x_n\|$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$
6.2	l_2	$\sup\limits_{n\in N}\|x_n\|$	$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2\right)^{1/2}$
6.3	$C[0, 1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\|x(f)\|$	$\left(\int\limits_0^1\|x(t)\|^2 dt\right)^{1/2}$
6.4	$L_2[0, 1]$	$\int\limits_{[0,1]}\|x(f)\|dt$	$\left(\int\limits_{[0,1]}\|x(t)\|^2 dt\right)^{1/2}$
6.5	$C^{(1)}[0, 1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\|x(t)\|$	$\|x(0)\| + \max\limits_{t\in[0,1]}\|x'(t)\|$
6.6	$C^{(1)}[0, 1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\|x(t)\| + \max\limits_{t\in[0,1]}\|x'(t)\|$	$\int\limits_0^1\|x(t)\|dt$
6.7	c	$\sup\limits_{n\in N}\|x_n\|$	$\sup\limits_{n\in N}\dfrac{n\|x_n\|}{n+1}$
6.8	$\mathbf{R}^n$	$\sup\limits_{1\le k\le n}\|x_k\|$	$\sum\limits_{k=1}^{n}\|x_k\|$
6.9	$\mathbf{C}^n$	$\sup\limits_{1\le k\le n}\|x_k\|$	$\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\|x_k\|^2\right)^{1/2}$
6.10	$\mathbf{R}^n$	$\sum\limits_{k=1}^{n}\|x_k\|$	$\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^{\ 2}\right)^{1/2}$

Окончание таблицы 2.5

Номер задания	E	p	q
6.11	$C^{(1)}[0,\ 1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert + \max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x'(t)\rvert$
6.12	$L_2[0,\ 1]$	$\int\limits_{[0,1]}\lvert x(t)\rvert dt$	$\int\limits_{[0,1]} e^t \lvert x(t)\rvert dt$
6.13	$C^{(2)}[0,\ 1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert$	$\sum\limits_{k=0}^{2} \max \lvert x^k(t)\rvert$
6.14	$C[0,\ 1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert$	$\lvert x(0)\rvert + \max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert$
6.15	$C[0,\ 1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert$	$\int\limits_0^1 \lvert x(t)\rvert dt$

Образец решения и оформления задачи 6.15

Предположим, с целью получить противоречие, что при некотором $b > 0$ неравенство $p(x) \le bq(x)$ верно при всех $x \in C[0,\ 1]$. Полагая здесь $x(t) = t^b$, получаем неверное неравенство $1 \le \dfrac{b}{b+1}$. Итак, эти нормы не эквивалентны.

Другой способ решения этой задачи состоит в указании последовательности, сходящейся по одной норме, но расходящейся по другой. Например, этим условием удовлетворяет последовательность $x_n(t) = t^n$.

7 Будет ли множество A выпуклым в пространстве X (таблица 2.6)?

Таблица 2.6

Номер задания	X	A
7.1	$C[0,\ 1]$	неубывающие функции
7.2	l_2	$\{x \in l_2 \mid \lvert x_n\rvert < 2^{-n}, n \in \mathbf{N}\}$
7.3	$C[a,\ b]$	многочлены степени n

Окончание таблицы 2.6

Номер задания	X	A
7.4	l_1	$\left\{ x \in l_1 \mid \lvert x_n \rvert \le \dfrac{1}{n^2}, n \in \mathbf{N} \right\}$
7.5	$C^{(1)}[0,1]$	многочлены степени $\le k$
7.6	$L_1[0, 1]$	$\left\{ x \in L_1[0,1] \mid \int_{[0,1]} t \lvert x(t) \rvert dt \le 1 \right\}$
7.7	$C^{(1)}[a, b]$	$\{x \in C^{(1)}[a,b] \mid \lvert x(t) \rvert + \lvert x'(t) \rvert \le 1, t \in [a,b]$
7.8	c_0	$\{x \in l_2 \mid \lvert x_1 \rvert + \lvert x_2 \rvert \le 1$
7.9	$C^{(2)}[0, 1]$	$\left\{ x \in C^{(3)}[0,1] \mid x(0) = \alpha, \ \max\limits_{t \in [0,1]} \lvert x(t) \rvert \le 1 \right\}$
7.10	l_1	$\left\{ x \in l_1 \mid \sum\limits_{k=1}^{\infty} n \lvert x_n \rvert \le 1 \right\}$
7.11	$C[0, 1]$	$\left\{ x \in C_{[0,1]} \mid \int_0^1 \lvert x(t) \rvert^2 dt \le 1 \right\}$
7.12	l_2	$\left\{ x \in l_2 \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \lvert x_n \rvert^2 < 1 \right\}$
7.13	l_∞	$\left\{ x \in c \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\lvert x_n \rvert}{n^2} \le 1 \right\}$
7.14	$C^{(1)}[a, b]$	$\{x \in C^{(2)}[a,b] \| \lvert x(a) \rvert + \lvert x'(t) \rvert \le 1, t \in [a,b]$
7.15	$L_2[0, 1]$	$\left\{ x \in L_3[0,1] \mid \int_{[0,1]} t^2 \lvert x(t) \rvert^2 dt \le 2 \right\}$

Образец решения и оформления задачи 7.15

Прежде всего заметим, что $A \subset L_2[0, 1]$, так как $L_3[0, 1] \subset L_2[0, 1]$ (см. зад. 5.10 из лабораторной работы 6). Далее, если $x, y \in A$, то при любом $\lambda \in [0, 1]$ $\lambda x + (1-\lambda) y \in L_3[0, 1]$, поскольку $L_3[0, 1]$ есть линейное пространство, и с учетом неравенства Минковского имеем

$$\left(\int_{[0,1]} t^2 \mid \lambda x(t) + (1-\lambda) y(t) \mid^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_{[0,1]} \mid t\lambda x(t) + t(1-\lambda) y(t) \mid^2 dt \right)^{1/2} \le$$

$$\le \lambda \left(\int_{[0,1]} t^2 \mid \lambda x(t) \mid^2 dt \right)^{1/2} + (1-\lambda) \left(\int_{[0,1]} t^2 \mid y(t) \mid^2 \, dt \right)^{1/2} \le$$

$$\le \lambda\sqrt{2} + (1-\lambda)\sqrt{2} = \sqrt{2}\,.$$

Отсюда $\lambda x + (1-\lambda) y \in A$, т. е. множество A выпукло.

Варианты задания (таблица 2.7)

Таблица 2.7

Номер варианта	Номера заданий						
1	1.13	2.2	3.3	4.12	5.4	6.7	7.1
2	1.11	2.3	3.4	4.10	5.12	6.6	7.2
3	1.10	2.4	3.5	4.2	5.11	6.1	7.3
4	1.9	2.7	3.6	4.3	5.1	6.8	7.4
5	1.8	2.5	3.7	4.1	5.2	6.14	7.5
6	1.7	2.6	3.8	4.4	5.3	6.13	7.6
7	1.6	2.10	3.9	4.8	5.5	6.12	7.7
8	1.5	2.11	3.10	4.9	5.6	6.2	7.8
9	1.4	2.12	3.11	4.13	5.8	6.3	7.9
10	1.3	2.13	3.2	4.14	5.9	6.5	7.10
11	1.2	2.8	3.1	4.11	5.10	6.4	7.11
12	1.1	2.9	3.12	4.2	5.7	6.3	7.12
13	1.14	2.14	3.14	4.14	5.14	6.14	7.14
14	1.13	2.13	3.13	4.13	5.13	6.13	7.13
15	1.12	2.12	3.12	4.12	5.12	6.12	7.12
16	1.11	2.11	3.11	4.11	5.11	6.11	7.11
17	1.10	2.10	3.10	4.10	5.10	6.10	7.10
18	1.9	2.9	3.9	4.9	5.9	6.9	7.9
19	1.8	2.8	3.8	4.8	5.8	6.8	7.8
20	1.7	2.7	3.7	4.7	5.7	6.7	7.7
21	1.6	2.6	3.6	4.6	5.6	6.6	7.6
22	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5
23	1.4	2.4	3.4	4.4	5.4	6.4	7.4
24	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3	7.3
25	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2

Тема 3

Линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах. Норма линейного оператора и функционала

Основные понятия и теоремы

Определение 1. Пусть E_1 и E_2 векторные пространства над одним и тем же полем K ($\mathrm{K} = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$). Отображение $\mathrm{A} : \mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_2$ с областью определения $D(\mathrm{A}) \subset \mathrm{E}_1$ и областью значений $R(\mathrm{A}) \subset \mathrm{E}_2$ называется **линейным оператором** из E_1 в E_2, если для любых $x, y \in \mathrm{E}_1$ и $\lambda \in \mathrm{K}$:

1) $\mathrm{A}(x + y) = \mathrm{A}x + \mathrm{A}y$ (аддитивность);

2) $\mathrm{A}(\lambda x) = \lambda \mathrm{A}x$ (однородность).

Обозначим через $\mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ множество всех линейных операторов из E_1 в E_2, область определения которых совпадает с E_1. Для $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ и $\lambda \in \mathrm{K}$ определим операторы $\mathrm{A} + \mathrm{B}, \lambda\mathrm{A} \in \mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ формулами :

$$(\mathrm{A} + \mathrm{B})x := \mathrm{A}x + \mathrm{B}x \,; (\lambda \cdot \mathrm{A})x := \lambda \cdot \mathrm{A}x .$$

Тогда $\mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ становится векторным пространством. В частном случае, когда $\mathrm{E}_2 = \mathrm{K}$ (поле K является векторным пространством), элементы $\mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1, \mathrm{K})$ называются линейными функционалами на E_1.

Пусть теперь на E_i определены нормы $\|\cdot\|_i$ ($i = 1,2$), т. е. $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ — нормированные пространства ($\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2 \in Norm$).

Определение 2. Оператор $\mathrm{A} \in \mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ называется ограниченным оператором из E_1 в E_2, если существует такая постоянная $c \geq 0$, что для любого $x \in \mathrm{E}_1$ имеет место **неравенство ограниченности**

$$\|\mathrm{A}x\|_2 \leq c\|x\|_1 .$$

Определение 3. Нормой оператора $\mathrm{A} \in \mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ называется число

$$\|\mathrm{A}\| := \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|\mathrm{A}x\|_2 .$$

Можно показать, что $\|\mathrm{A}\|$ есть наименьшая из всех констант c в неравенстве ограниченности.

Теорема 1. *Пусть* $\mathrm{A} \in \mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$*, где* $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2 \in Norm$.

Тогда следующие утверждения эквивалентны :

1) оператор A *является непрерывным оператором из* E_1 *в* E_2;

2) оператор A *является ограниченным оператором из* E_1 *в* E_2;

3) $\|\mathrm{A}\| < +\infty$;

4) оператор A *является непрерывным в точке 0.*

Пусть $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$, где $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2 \in Norm$. Справедливы соотношения:

1) $\|\mathrm{A} + \mathrm{B}\| \le \|\mathrm{A}\| + \|\mathrm{B}\|$;

2) $\|\lambda \mathrm{A}\| = |\lambda| \cdot \|\mathrm{A}\|$;

3) $\|\mathrm{A}\| \ge 0, \ \ \|\mathrm{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{A} = 0$.

Поэтому, если A, B — ограниченные операторы, то операторы $\mathrm{A} + \mathrm{B}, \ \ \lambda \cdot \mathrm{A}$ тоже ограничены. Следовательно, если обозначать через $L(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ множество всех линейных ограниченных операторов из E_1 в E_2, то $L(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ является векторным подпространством $\mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$.

Теорема 2. *Если* $\mathrm{E}_1 \in Norm$*, а* E_2 *— банахово (*$\mathrm{E}_2 \in Ban$*), то* $L(\mathrm{E}_2, \mathrm{E}_2) \in Ban$.

Все сказанное относится и к функционалам. В этом случае $\mathrm{E}_2 = \mathrm{K}$, норма на K есть модуль ($\|x\|_2 = |x|$), поэтому функционал $f \in \mathscr{L}^{\#}(\mathrm{E}, \mathrm{K})$ называется ограниченным на $\mathrm{E} \in Norm$, если существует такая постоянная $c \ge 0$, что $|f(x)| \le c\|x\|$ для любых $x \in \mathrm{E}$.

Тогда норма функционала *f* есть число

$$\|f\| := \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)| = \min \{ c : \forall x \in \mathrm{E} \ |f(x)| < c\|x\| \}.$$

Так как $\mathrm{K} \in Ban$, то по теореме 2 $L(\mathrm{E}, \mathrm{K}) \in Ban$.

Определение 4. Банахово пространство $L(\mathrm{E}, \mathrm{K})$, состоящее из линейных ограниченных функционалов на E, будем обозначать через E^* и называть сопряженным пространством к E.

Задачи

1 Пусть $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2 \in Norm$. Найти область определения $D(\mathrm{A}) := \{x \in \mathrm{E}_1 : \exists \mathrm{A}x \in \mathrm{E}_2\}$ оператора A и установить, совпадает ли она с E_1. Выяснить, является ли оператор A линейным ограниченным оператором из $D(\mathrm{A})$ в E_2 (таблица 3.1).

Таблица 3.1

Номер задания	E_1	E_2	A
1.1	l_∞	c_0	$\mathrm{A}x = x$
1.2	c_0	l_∞	$\mathrm{A}x = x$
1.3	$L_4[0, 1]$	$L_1[0, 1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \int_0^1 t^2 x^2(s)ds$
1.4	$L_2[0, 1]$	$L_1[0, 1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \lvert x(t) \rvert$
1.5	$L_2[0, 1]$	$L_2[0, 1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = x^2(t)$
1.6	$C[0, 1]$	$C[0, 1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \left(x'(t)\right)^2$
1.7	$C[0, 1]$	$C^{(1)}[0, 1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = x'(t)$
1.8	$C^{(1)}[0, 1]$	$C[0, 1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \lvert x'(t) \rvert$
1.9	c_0	$\mathbf{R}$	$\mathrm{A}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$
1.10	l_2	l_1	$\mathrm{A}x = \left(x_1 + 1, x_2, x_3, \ldots\right)$
1.11	l_1	l_2	$\mathrm{A}x = \left(1, x_2, x_3, \ldots\right)$
1.12	$L_2[-1,1]$	$L_2[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = x(\sqrt[5]{t})$
1.13	$C[0,1]$	$\mathbf{R}$	$(\mathrm{A}x)(t) = \lvert x'(0) + x(0) \rvert$
1.14	$L_1[-1,1]$	$L_1[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \int_{-1}^{1} t x^2(s)ds$
1.15	$L_1[0,1]$	$L_4[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = x^2(t)$

Образец решения и оформления задачи 1.15

Найдем $D(\mathrm{A}) = \{x \in L_{1[0,1]} : \exists \mathrm{A}x \in L_{4[0,1]}\}$ — область определения оператора A. Поскольку $\|\mathrm{A}x\|_{L_4\{0,1\}} = \left(\int_{[0,1]} \lvert x^2(t) \rvert^4 dt \right) = \left(\int_{[0,1]} \lvert x(t) \rvert^8 dt \right)^{1/4}$, то

$D(A) = L_8[0, 1] \neq L_1[0, 1]$. Итак, область определения оператора A совпадает с нормированным пространством $L_8[0, 1]$, отличным от исходного. Проверим линейность A на $D(\mathrm{A})$: возьмем функцию $x \neq 0$ из $L_8[0,1]$. Тогда

$$\mathrm{A}(2x) = 2^2 Ax \neq 2\mathrm{A}x.$$

Поэтому оператор A не является линейным на $D(\mathrm{A})$, а, следовательно, и ограниченным.

В задачах 2–5 выяснить, задает ли данная формула линейный ограниченный оператор $\mathrm{A} : \mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_2$. В случае ограниченности оператора, найти его норму.

2 Оператор умножения (таблица 3.2)

Таблица 3.2

Номер задания	E_1	E_2	A
2.1	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = (t^2 - t)x(t)$
2.2	$C[-1,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = (t^4 - t^2)x(t)$
2.3	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = t^2 x(t)$
2.4	$L_1[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = (t^2 - t)x(t)$
2.5	$L_2[-1,1]$	$L_2[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = t^2 x(t)$
2.6	$L_2[-1,1]$	$L_1[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = tx(t)$
2.7	$L_3[0,1]$	$L_3[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = (1 - t^2)x(t)$
2.8	$C[-1,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = (t^2 - \lvert t\rvert)x(t)$
2.9	$L_3[-1,1]$	$L_2[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \lvert t\rvert x(t)$
2.10	$C^{(1)}[-1,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \sin \pi t x(t)$
2.11	$L_4[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \sqrt{t}\, x(t)$
2.12	$C[-1,1]$	$C[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \begin{cases} (t^2+1)x(t), & t \in [-1, 0] \\ (t^2+4t+1)x(t), & t \in [0, 1] \end{cases}$
2.13	$C[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = t^2 x(t)$
2.14	$L_2[-1,1]$	$L_2[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \begin{cases} tx(t), & t \in [0,1] \\ 0, & t \in [-1,0] \end{cases}$

Образец решения и оформления задачи 2.14

Область определения оператора A есть $D(\mathrm{A}) = L_2[-1,\ 1]$, поскольку умножение на непрерывную функцию не выводит из $L_2[-1,\ 1]$ (почему?). Линейность оператора A очевидна. Так как $\forall x \in L_2[-1,\ 1]$

$$\|\mathrm{A}x\|_{L_2[-1,1]} = \left(\int_0^1 |tx(t)|^2\, dt \right)^{1/2} \le \left(\int_0^1 |x(t)|^2\, dt \right)^{1/2} = 1 \cdot \|x\|_{L_2\{-1,1]},$$

то в качестве константы ограниченности (константы c в определении 2) можно взять 1. Итак, A — ограниченный оператор и $\|\mathrm{A}\| \le 1$.

Пусть $x_n(t) = \sqrt{n}\chi_{[1-\frac{1}{n},1]}(t)$. Тогда $\|x_n\|_{L_2[-1,1]} = 1$ и

$$\|\mathrm{A}\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|\mathrm{A}x\| \ge \sup_n \|\mathrm{A}x_n\| = \sup_n \left(\int_{1-\frac{1}{n}}^{1} \left|\sqrt{n}t\right|^2 dt \right)^{1/2} =$$

$$= \sup_n \sqrt{n} \left(\int_{1-\frac{1}{n}}^{1} t^2 dt \right)^{1/2} = \sup_n \sqrt{\frac{n}{3}} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3 \right\}^{1/2} = \sup_n \left\{ 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2} \right\}^{1/2} = 1.$$

Следовательно, $\|\mathrm{A}\| = 1$.

3 Оператор замены переменной (таблица 3.3)

Таблица 3.3

Номер задания	E_1	E_2	A
3.1	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = t^2 x(\sqrt{t})$
3.2	$C[-1,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = (t^2 - t)x(t^2)$
3.3	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = tx(\sqrt{t})$
3.4	$L_2[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = x(\sqrt[4]{t})$
3.5	$L_3[-1,1]$	$L_3[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = x(\sqrt[3]{t})$
3.6	$L_3[-1,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = t^2 x(t^2)$
3.7	$L_2[-1,1]$	$L_1[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = x(t^2)$
3.8	$C[0,2]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = (t-1)tx(t^2+1)$

Окончание таблицы 3.3

Номер задания	E_1	E_2	A
3.9	$L_4[0,2]$	$L_4[0,1]$	$(Ax)(t)=tx(t+1)$
3.10	$L_2[-1,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t)=t^2x(t^2-1)$
3.11	$C^{(1)}[0,2]$	$C^{(1)}[0,2]$	$(Ax)(t)=tx(t^2+1)$
3.12	$L_{3/2}[0,1]$	$L_{3/2}[0,1]$	$(Ax)(t)=(t^2-t)x(\sqrt{t})$
3.13	$L_4[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t)=tx(\sqrt{t})$
3.14	$L_2[-1,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t)=t^2x(t^2-1)$

Образец решения и оформления задачи 3.14

Пусть $x\in L_2[-1,1]$. Тогда

$$\|Ax\|_{L_2[0,1]}=\left(\int_0^1 t^4\left|x(t^2-1)\right|^2dt\right)^{1/2}=\begin{bmatrix} u=t^2-1\\ du=2tdt\\ t=\sqrt{u+1}\end{bmatrix}=$$

$$=\left(\int_{-1}^0(u+1)^2|x(u)|^2\frac{du}{2\sqrt{u+1}}\right)^{1/2}=\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^0(u+1)^{3/2}|x(u)|^2du\right)^{1/2}\le$$

$$\le\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\int_{-1}^1|x(u)|^2du\right)^{1/2}\le\frac{\sqrt{2}}{2}\|x\|_{L_2[-1,1]}.$$

Из последнего соотношения следует, что $D(A)=L_2[-1,1]$. Очевидно, что оператор A линеен, а из доказанного неравенства вытекает, что A ограничен и $\|A\|\le\frac{\sqrt{2}}{2}$. Рассмотрим последовательность функций $x_n(t)=\sqrt{n}\chi_{[-\frac{1}{n},0]}(t)\in L_2[-1,1]$, $\|x_n\|_{L_2[-1,1]}=1$. Тогда

$$\|A\|=\sup_{\|x\|_{L_2[-1,1]}\le1}\|Ax\|_{L_2[0,1]}\ge\sup_n\|Ax_n\|_{L_2[0,1]}=\sup_n\frac{1}{\sqrt{2}}\left(n\int_{-\frac{1}{n}}^0(u+1)^{3/2}du\right)^{1/2}=$$

$$=\sup_n\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{5/2}\right]^{1/2}=$$

$$
=\sup_n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\left[1-\left\{1-\frac{5}{2}\frac{1}{n}+\frac{1}{2!}\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}+1\right)\frac{1}{n^2}-\ldots\right\}\right]^{1/2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.
$$

Итак $\|A\| \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Учитывая предыдущее, имеем $\|A\| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4 Операторы в пространствах последовательностей (таблица 3.4).

Таблица 3.4

Номер задания	E_1	E_2	A
4.1	l_2	l_2	$Ax=(0,x_1,x_2,\ldots)$
4.2	l_3	l_3	$Ax=(x_2,x_3,x_4,\ldots)$
4.3	c_0	c_0	$Ax=(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n,\,0,\,0,\ldots)$
4.4	l_4	l_4	$Ax=\left(\frac{x_1}{1},\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\ldots\right)$
4.5	l_2	l_2	$Ax=\left(0,\frac{x_1}{2^0},\frac{x_2}{2^1},\frac{x_3}{2^2},\ldots\right)$
4.6	l_1	l_1	$Ax=\left(0,0,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\frac{x_4}{4},\ldots\right)$
4.7	l_2	l_2	$Ax=\left((1+1)x_1,\ldots,\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x_n,\ldots\right)$
4.8	c	c	$Ax=\left(\frac{1}{1+1}x_1,\ldots,\frac{n}{n+1}x_n,\ldots\right)$
4.9	c_0	c	$Ax=\left(1\cdot\sin\frac{1}{1}x_1,\ldots,\,n\sin\frac{1}{n}x_n,\ldots\right)$
4.10	l_∞	l_∞	$Ax=(x_1,\,0,\,x_2,\,0,\,x_3,\,0,\ldots)$
4.11	l_2	c	$Ax=\left(\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\frac{x_4}{4},\ldots\right)$
4.12	l_2	l_∞	$Ax=\left(\frac{x_1}{1},\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\ldots\right)$
4.13	l_1	c_0	$Ax=(0,x_1,x_2,\ldots)$
4.14	l_2	l_2	$Ax=(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,\lambda_3x_3,\ldots)$, где $\lvert\lambda_n\rvert\leq M, n\in \boldsymbol{N}$

Образец решения и оформления задачи 4.14

Так как $\forall x \in l_2$

$$\|Ax\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n x_n|^2\right)^{1/2} \le \sup_n |\lambda_n| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} = \sup_n |\lambda_n| \cdot \|x\|,$$

то $D(A) = l_2$ и линейность оператора A проверяется без труда. Отсюда же имеем $\|A\| \le \sup_n |\lambda_n| = s$. В силу определения точной верхней грани, $\forall \varepsilon > 0$ существует такое n, что $|\lambda_n| > s - \varepsilon$. Тогда для вектора $e_n = (0, 0,..., 1, 0,...) \in l_2$, $\|e_n\| = 1$ и $\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| \ge \|Ae_n\| = |\lambda_n| > s - \varepsilon$.

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим $\|A\| \ge s = \sup_n |\lambda_n|$. Итак, $\|A\| = \sup_n |\lambda_n|$.

5 Интегральный оператор (таблица 3.5).

Таблица 3.5

Номер задания	E_1	E_2	A
5.1	$L_2[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^1 t^2 s x(s) ds$
5.2	$L_1[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^1 (t+1) s x(\sqrt{s}) ds$
5.3	$C[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^1 (t+s) x(\sqrt{s}) ds$
5.4	$L_3[0,1]$	$C[-1,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^1 t s^2 x(s^{1/3}) ds$
5.5	$L_1[0,1]$	l_2	$Ax = \left(\frac{1}{2}\int_0^1 t x(t),\dots,\frac{1}{2^k}\int_0^1 t^k x(t) dt,\dots\right)$
5.6	$L_1[0,1]$	l_1	$Ax = \left(\frac{1}{2}\int_0^1 t x(t),\dots,\frac{1}{2^k}\int_0^1 t^k x(t) dt,\dots\right)$
5.7	$L_3[0,1]$	$L_2[-1,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^1 t^2 s x(s) ds$

Окончание таблицы 3.5

Номер задания	E_1	E_2	A
5.8	$C[-1,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_{-1}^{1} t\,\mathrm{sgn}\,s\,x(s)ds$
5.9	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_{0}^{1} \lvert t\cdot s\rvert x(\sqrt[4]{s})ds$
5.10	$L_2[0,2]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_{0}^{2}(t+1)s^2x(s^2)ds$
5.11	$C[0,2]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_{0}^{2}\mathrm{sgn}(s-1)x(s)ds+tx(0)$
5.12	$L_2[-1,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_{-1}^{1}(t+1)s^2x(s^2)ds$
5.13	$C[0,1]$	$C[0,2]$	$(Ax)(t)=\int_{0}^{1}(t^2+s^2)x(s)ds$
5.14	$L_1[0,1]$	l_4	$Ax=\left(\frac{1}{3}\int_{0}^{1}tx(t)dt,\dots,\frac{1}{3^k}\int_{0}^{1}t^kx(t)dt,\dots\right)$

Образец решения и оформления задачи 5.14

Пусть $x\in L_1[0, 1]$. Тогда

$$\|Ax\|_{l_4}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{3^k}\int_{0}^{1}t^kx(t)dt\right|^4\right)^{1/4}\le$$

$$\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^k}\int_{0}^{1}|x(t)|dt\right)^4\right)^{1/4}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{4k}}\right)^{1/4}\cdot\|x\|_{L_1[0,1]}.$$

Поэтому $D(A)=L_1[0,1]$ и линейность оператора A следует из линейности интеграла. Из установленного неравенства следует также, что $\|A\|\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{4k}}\right)^{1/4}=80^{-\frac{1}{4}}$.

С другой стороны, если $x_n(t) = n\chi_{\left[1-\frac{1}{n},1\right]}(t)$, то $\|x_n\|_{L_{1[0,1]}} = 1$, и

$$\|\mathrm{A}\| = \sup_{\|x\|_{L_1[0,1]}\le 1} \|\mathrm{A}x\|_{l_4} \ge \sup_n \|\mathrm{A}x_n\|_{l_4} = \sup_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{n}{3^k} \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} t^k dt \right|^4 \right)^{1/4} =$$

$$= \sup_n \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^{4k}(k+1)^4} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k+1} \right\}^4 \right]^{1/4} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{4k}} \right)^{1/4} = 80^{-1/4}.$$

Следовательно, $\|\mathrm{A}\| = 80^{-1/4}$

Пусть $\mathrm{E} \in Ban$, $\mathrm{K} = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. В задачах 6–7 выяснить, задает ли данная формула линейный ограниченный функционал $f : \mathrm{E} \to \mathrm{K}$. В случае положительного ответа, найти его норму (таблицы 3.6, 3.7).

Таблица 3.6

Номер задания	E	K	f
6.1	c	**C**	$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$
6.2	l_∞	**R**	$f(x_1) = x_1 + x_3$
6.3	l_2	**R**	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$
6.4	c_0	**C**	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (i)^k \frac{x_k}{k^2}$
6.5	l_1	**R**	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k^2+1}$
6.6	c	**R**	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} x_k$
6.7	l_3	**C**	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{2k}}{k}$
6.8	c_0	**R**	$f(x) = 4x_{10} - 2x_2 + 5x_{100}$
6.9	l_∞	**R**	$f(x) = x_1 - x_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$
6.10	l_2	**R**	$f(x) = x_1 - x_0$
6.11	l_1	**C**	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} i x_{4k+1}$

Окончание таблицы 3.6

Номер задания	E	K	f
6.12	l_4	**C**	$f(x) = x_1 + \frac{1}{2} x_2$
6.13	c	**R**	$f(x) = x_1 + \lim\limits_{n\to\infty} x_n$
6.14	l_2	**C**	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$

Образец решения и оформления задачи 6.14

Линейность функционала проверяется без труда. Пусть $x \in l_2$. Тогда применяя неравенство Коши-Буняковского, будем иметь $\forall x \in l_2$

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}\right| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \|x\|. \qquad (1)$$

Отсюда $D(f) = l_2$, функционал f ограничен на l_2 и $\|f\| \le \frac{1}{\sqrt{3}}$. Покажем, что константа $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ является наименьшей из всех возможных в неравенстве (1). Для этого достаточно указать такой ненулевой элемент $x^* \in l_2$, для которого в (1) все неравенства превращаются в равенства. Равенство в (1) может нарушаться после применения неравенства Коши-Буняковского. Последнее превращается в равенство, если векторы пропорциональны, т. е. $\forall k \in \boldsymbol{N}\ x_k = \beta \cdot \frac{1}{2^k}$. Возьмем $\beta = \sqrt{3}$, тогда для $x^* = \sqrt{3} \cdot (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$, имеем $\|x^*\| = 1$ и $|f(x^*)| = \beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \|x^*\|$. Следовательно, $\|f\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. (Более короткое решение данной задачи получается с использованием теоремы Ф. Рисса об общем виде линейного функционала).

Таблица 3.7

Номер задания	E	K	f
7.1	$L_2[0,1]$	**R**	$f(x) = \int_0^1 t^{-1/3} x(t)dt$

Окончание таблицы 3.7

Номер задания	E	K	f
7.2	$L_1[0,2]$	**C**	$f(x)=i\int_0^1 t^2 x(\sqrt{t})dt$
7.3	$C[0,1]$	**R**	$f(x)=x(0)-2x(1)$
7.4	$C[0,1]$	**R**	$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x(t^n)dt$
7.5	$L_1[2,4]$	**C**	$f(x)=\int_2^4 tx(t^2)dt$
7.6	$L_2[-1,1]$	**R**	$f(x)=\int_{-1}^1 t^2 x(\sqrt{t})dt$
7.7	$L_1[0,1]$	**R**	$f(x)=\int_{-1}^1 t^4 x(t^2)dt$
7.8	$L_6[0,2]$	**R**	$f(x)=\int_0^2 t^2 x(t^3)dt$
7.9	$C^{(1)}[0,1]$	**C**	$f(x)=x(0)+ix'(0)$
7.10	$C^{(1)}[0,2]$	**R**	$f(x)=\int_0^1 x(t)dt+\int_1^2 x'(t)dt$
7.11	$C^{(1)}[-1,1]$	**C**	$f(x)=x'(0)$
7.12	$C^{(2)}[0,1]$	**C**	$f(x)=ix(0)+x''(1)$
7.13	$L_2[0,1]$	**R**	$f(x)=\int_0^1 t^{-1/4}x(t)dt$
7.14	$L_2[0,1]$	**C**	$f(x)=i\int_0^1 t^{-3/2}x(\sqrt{t})dt$

Образец решения и оформления задачи 7.14

Линейность функционала вытекает из линейности интеграла. Пусть $x\in L_2[0,1]$. Тогда, произведя замену переменных в интеграле, а затем применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\left| f(x) \right| = \left| \int_0^1 t^{-2/3} x(\sqrt{t})dt \right| = \begin{bmatrix} u = \sqrt{t} \\ t = u^2 \\ dt = 2udu \end{bmatrix} =$$

$$= \left| \int_0^1 2u^{-1/3} x(u)du \right| \le 2\left(\int_0^1 u^{-2/3} du \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \left| x(u) \right|^2 du \right)^{1/2} = 2\sqrt{3}\|x\| . \qquad (2)$$

Следовательно, $D(f) = l_2$, функционал ограничен и $\|f\| \le 2\sqrt{3}$. Возьмем $x^*(u) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} u^{-1/3}$ (почему?), тогда из (2) имеем

$$\left| f(x^*) \right| = 2\left| \int_0^1 u^{-1/3} \frac{1}{\sqrt{3}} u^{-1/3} du \right| = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 u^{-2/3} du = 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\|x^*\|.$$

Отсюда следует, что константа $c = 2\sqrt{3}$ в (2) является наименьшей из всех возможных. Поэтому $\|f\| = 2\sqrt{3}$ (см. также примечание в решении задачи 6.14).

Варианты задания (таблица 3.8)

Таблица 3.8

Номер варианта	Номера заданий						
1	1.1	2.1	3.7	4.5	5.10	6.12	7.2
2	1.2	2.13	3.8	4.6	5.9	6.13	7.1
3	1.3	2.12	3.9	4.7	5.8	6.11	7.3
4	1.4	2.11	3.10	4.8	5.7	6.10	7.4
5	1.5	2.10	3.11	4.9	5.6	6.9	7.5
6	1.6	2.9	3.12	4.10	5.5	6.8	7.6
7	1.7	2.8	3.13	4.11	5.4	6.7	7.7
8	1.8	2.7	3.6	4.12	5.3	6.6	7.8
9	1.9	2.6	3.5	4.13	5.2	6.5	7.9
10	1.10	2.5	3.4	4.4	5.1	6.4	7.10
11	1.11	2.4	3.3	4.3	5.13	6.3	7.11
12	1.12	2.3	3.1	4.2	5.12	6.2	7.12
13	1.13	2.2	3.2	4.1	5.11	6.1	7.13
14	1.14	2.3	3.13	4.2	5.10	6.3	7.1
15	1.13	2.4	3.12	4.3	5.9	6.4	7.2

Окончание таблицы 3.8

Номер варианта	Номера заданий					
16	1.12	2.5	3.11	4.4	5.8	6.5	7.3
17	1.11	2.6	3.10	4.5	5.7	6.6	7.4
18	1.10	2.7	3.9	4.6	5.6	6.7	7.5
19	1.9	2.8	3.8	4.7	5.5	6.8	7.6
20	1.8	2.9	3.7	4.8	5.4	6.10	7.7
21	1.7	2.10	3.6	4.9	5.3	6.9	7.8
22	1.8	2.11	3.5	4.10	5.2	6.13	7.9
23	1.9	2.12	3.4	4.11	5.1	6.12	7.10
24	1.11	2.13	3.3	4.12	5.11	6.1	7.11
25	1.12	2.1	3.2	4.13	5.12	6.2	7.12
26	1.14	2.2	3.1	4.1	5.13	6.11	7.13

Литература

1. Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения: учебное пособие для ун-тов по спец. «Математика» / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. – Мн. : Изд-во «Университетское», 1984. – 351 с., ил.

2. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1976. – 543 с., ил.

3. Мухин, В. В. Лабораторные работы по функциональному анализу для студентов специальности 2013 : в 2 ч. Ч. 1 / В. В. Мухин, А. Р. Миротин, А. П. Старовойтов. – Гомель, 1987. – 65 с.

4. Мухин, В. В. Лабораторные работы по функциональному анализу для студентов специальности 2013 : в 2 ч. Ч. 2 / В. В. Мухин, А. Р. Миротин, А. П. Старовойтов. – Гомель, 1988. – 67 с.

5. Садовничий, В. А. Теория операторов / В. А. Садовничий. – 2-е изд. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 368 с.

6. Функциональный анализ и интегральные уравнения: Лабораторный практикум : учеб. пособие / А. Б. Антоневич [и др.]. ; под ред. А. Б. Антоневича и Я. В. Радыно – Мн. : БГУ, 2003. – 179 с.

Производственно-практическое издание

СТАРОВОЙТОВ Александр Павлович
КАЗИМИРОВ Григорий Николаевич

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Линейные ограниченные операторы в нормированных пространствах

Практическое пособие
для студентов заочного факультета специальности I-310301-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)»

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 10.06.2011. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,8.
Уч.-изд. л. 3,05. Тираж 100. Заказ № 351.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
ЛИ № 02330/0549481 от 14.05.2009.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель.