ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5

Сжимающие отображения

Необходимые понятия и теоремы*:* *метрическое пространство;полное метрическое пространство; сжимающее отображение;неподвижная точка отображения;метод последовательных приближений;теорема Банаха о неподвижной точке; оценка скорости сходимости метода последовательных приближений.*

Литература: [1]стр. 114-124; [2]стр. 41-47; [8]стр. 63-68; [9]стр. 74-83; [11]стр. 40-46; [14]стр. 389-401; [15]стр.136-146.

1. Является ли отображение F метрического пространства X в себя сжимающим? Найти x_3, где $x_{k+1}=F(x_k),x_0=0$; оценить расстояние от x_3 до неподвижной точки, если F сжимающее отображение.

N	*X*	*F*
1.1	$C[-1,1]$	$(Fx)(t)=1/3\sin x(t)+\exp(t)$
1.2	$L_{11/3}[0,1]$	$(Fx)(t)=1/4x(\sqrt[4]{t})+$
1.3	$l_{8/3}$	$F(t)=\ 0,x(1)/2+\ /2,x(2)/4+\ /3,\dots,$ $x(x)/2^k+\ /(k+\ ),\dots)$
1.4	l_∞	$F(x)=\ \frac{x(2)}{2}+\frac{1}{2},\frac{x(3)}{3}+\frac{1}{4},\dots,\frac{x(k)}{k}+\frac{1}{2^{k-}},\dots)$
1.5	s	$F(x)=\ \frac{x(1)}{2}+1,\frac{x(2)}{2\sqrt{2}}+2,\dots,\frac{x(k)}{2\sqrt{k}}+\ ,\dots)$
1.6	$C[-1,1]$	$(Fx)(t)=tx(t)+\exp(\sin\pi t)$
1.7	$L_4[-1,1]$	$(Fx)(t)=\sqrt{t}x(t)+\ n(t+\ )$
1.8	$L_7[-1,1]$	$(Fx)(t)=1/3t^{1/9}x(\sqrt[3]{t})+\ g(t)$
1.9	$L_{5/2}[0,1]$	$(Fx)(t)=1/5tx(t^3)+\ xp(t)$
1.10	l_{21}	$F(x)=\ \sin(\pi\ \ 6)x(1)+\ ,\dots,(\sin(\pi\ \ 6))^k x(k)+\ /k,\dots)$

1.11	*C[0,1]*	$f(x)(t) = \frac{1}{4}x(t) + 1$
1.12	*C[-1,1]*	$f(x)(t) = \frac{1}{2}x(t^2) +$
1.13	l_2	$f(x) = \left(1, \frac{x_2}{3}, \frac{x_3}{4}, \ldots\right)$
1.14	l_1	$f(x) = \left(1, \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{8}, 0, 0, \ldots\right)$
1.15	c_0	$f(x) = \left(1, \frac{x_2}{2}, 0, \frac{x_4}{2}, 0, \frac{x_6}{2}, \ldots\right)$
1.16	c	$f(x) = \left(\frac{x_1}{4}, 1, 0, 0, \ldots\right)$
1.17	$L_2[0,1]$	$f(x)(t) = \frac{1}{8}x(\sqrt{t}) + 1$
1.18	$L_2[0,1]$	$f(x)(t) = \frac{1}{4}x(\sqrt[3]{t}) + 1$
1.19	l_∞	$f(x) = \left(1, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{4}, 0, 0, \ldots\right)$
1.20	l_3	$f(x) = \left(1, \frac{x_1}{4}, \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{4}, \ldots\right)$
1.21	*C[0,1]*	$f(x)(t) = \frac{1}{5}\sin x(t) + \ \mathrm{in}\, t$
1.22	$C^{(1)}$ *[0,1]*	$f(x)(t) = \frac{1}{6}x(t^2) + 1$
1.23	$C^{(1)}_{[0,1]}$	$f(x)(t) = \frac{1}{8}tx(t) +$
1.24	l_4	$f(x) = \left(1, \frac{x_3}{5}, \frac{x_4}{6}, \frac{x_5}{7}, \ldots\right)$
1.25	l_2	$f(x) = \left(1, \frac{x_1}{2}, 0, \frac{x_3}{4}, 0, \frac{x_5}{6}, \ldots\right)$

3. Найти с точностью 0,01 решения уравнения g(x)=0.

Указание: привести уравнение *g(x)=0* к виду *x=f(x)* и найти точку x_0 и радиус *r* такие, что отрезок $[x_0-r, x_0+r]$ инвариантен относительно f и на этом отрезке отображение *f* – сжимающее.

	g		g
2.1	$3x^2-18x+11$	2.8	x^2-5x+4
2.2	$2x^2+16x-9$	2.9	$2x^2+8x+5$
2.3	$3x^2-10x-14$	2.10	$5x^2-18x+4$
2.4	$2x^2+8x-3$	2.11	$4x^2+12x-1$
2.5	$4x^2+11x-3$	2.12	$5x^2-4x-1$
2.6	x^2+x-2	2.13	$2x^2-5x+3$
2.7	$x^2+\sqrt{2}x-1$	2.14	x^2+7x-8

4. С точностью 0,01 найти решение линейной алгебраической системы Ax=y.

Указание: преобразовать систему к виду x=Bx+y и применить принцип сжимающих отображений.

N	*A*	*y*	*N*	*A*	*y*
3.1	$\begin{bmatrix} 0{,}99 & -0{,}01 & 0{,}03 \\ -0{,}01 & 1{,}02 & 0{,}06 \\ 0{,}1 & -0{,}2 & 1.10 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	3.2	$\begin{bmatrix} -0{,}98 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0 & 1{,}5 & -0{,}01 \\ -0{,}09 & 0{,}01 & -1{,}02 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
3.3	$\begin{bmatrix} -1{,}5 & 0{,}001 & 0{,}08 \\ 0{,}1 & 1{,}02 & -0{,}08 \\ 0{,}08 & 0{,}01 & -1{,}1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	3.4	$\begin{bmatrix} -1{,}1 & 0{,}02 & -0{,}01 \\ 0{,}2 & 0{,}98 & 0{,}02 \\ 0 & -0{,}1 & 1{,}02 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
3.5	$\begin{bmatrix} 0{,}99 & -0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}02 & 0{,}99 & -0{,}3 \\ 0 & 0{,}01 & 0{,}98 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	3.6	$\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0 & -0{,}2 \\ 0 & 1{,}02 & -0{,}01 \\ -0{,}2 & 0{,}3 & 1{,}01 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
3.7	$\begin{bmatrix} 1{,}10 & -0{,}2 & 0{,}1 \\ -0{,}01 & 0{,}99 & 0{,}05 \\ -0{,}03 & 0{,}001 & 1{,}02 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	3.8	$\begin{bmatrix} -1{,}02 & 0{,}04 & 0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}98 & 0{,}07 \\ 0{,}1 & -0{,}2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3.9	$\begin{bmatrix} -0{,}97 & 0{,}1 & 0{,}05 \\ -0{,}02 & 1{,}15 & 0{,}2 \\ -0{,}17 & 0 & 1{,}13 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	3.10	$\begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}01 & 0{,}07 \\ 0{,}27 & 0{,}95 & 0{,}01 \\ -0{,}03 & -0{,}05 & 0{,}95 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Применим ли принцип сжимающих отображений к заданному интегральному уравнению в пространстве X при $\lambda =$ [illegible], $\lambda =$ [illegible], $\lambda =$ [illegible] ? При $\lambda =$ [illegible] с точностью *0,01* найти приближённое решение и сравнить его с точным решением.

N	*X*	λ	λ	λ	*уравнение*
4.1	*C[0,1]*	*1/2*	*-1/3*	*2*	$x(t)=\lambda\int_0^1 t-0.5\vert x(s)ds+$
4.2	*L₂[0,1]*	*1/2*	*-1/5*	$\sqrt{3/2}$	$x(t)=\lambda\int_0^1 t^{-\ /4}sx(s)ds+\ ^2$
4.3	*C[-1,1]*	*1/3*	*-1/2*	*3/2*	$x(t)=\lambda\int_{-1}^1 (\ ^2-1)s^2x(s)ds+$
4.4	*L₂[0,1]*	*1/4*	*-1*	*2*	$x(t)=$ $\lambda\int_0^1 \sin(\pi\ /2)\cos(\pi\ /2)x(s)ds$
4.5	*C[-2,2]*	*1/36*	*-1/25*	*2/15*	$x(t)=$ $\lambda\int_{-2}^2 (\ +\ )(\ -\ )x(s)ds+$
4.6	*L₂[0,1]*	*1/16*	*-1/2*	$\sqrt{2}$	$x(t)=\lambda\int_0^1 \sqrt{1-t}\,x(s)ds+$
4.7	*C[-1,1]*	*1/10*	*-1/8*	*1*	$x(t)=\lambda\int_{-}^1 tsx(s)ds+$
4.8	*L₂[-1,1]*	*1/14*	*-1/20*	$1/\sqrt{12}$	$x(t)=\lambda\int_{-}^1 s^{-\ /5}x(s)ds+\ ^2$

4.9	*C[0,1]*	*1/2*	*-1/3*	*2/3*	*x(t)=* $\lambda \int_{0}^{1} t(\ +s\ )x(s)ds -$
4.10	*L_2[-1,1]*	*1/2*	*1/2*	*5/2*	*x(t)=* $\lambda \int_{-}^{1} t^2 s^2 x(s)ds + \ ^3$