МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

А.П.Старовойтов

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

по функциональному анализу и интегральным уравнениям

ЧАСТЬ 1

Гомель 2014

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие предназначено для студентов математических специальностей университетов. В нем собраны наиболее типичные задачи по курсу "Функциональный анализ и интегральные уравнения". Предлагаемый материал отражает тот необходимый минимум практических навыков, которым должен овладеть каждый студент, изучающий данный курс.

Предлагаемая в пособии форма проведения занятий в виде лабораторных работ рассчитана на выполнение каждой работы как одним студентом, так и группой студентов, состоящей не более чем из трех человек.

Структура пособия и его терминология следуют учебному пособию Ф.Б.Антоневича и Я.В.Радыно "Функциональный анализ и интегральные уравнения".

Особенностью пособия является подбор в каждом задании серии однотипных и примерно одинаковых по сложности задач (как правило не менее 15), что позволяет по усмотрению преподавателя давать задания по лабораторным работам либо индивидуально, либо группе студентов. Однако, учитывая то, что в пособии собраны наиболее типичные задачи, для более глубокого изучения и усвоения курса "Функциональный анализ и интегральные уравнения" целесообразно использовать имеющиеся сборники задач.

ЧАСТЬ I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ.
ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

ГЛАВА 1. Теория меры.

А. Основные понятия и теоремы

1. Множества. Операции над множествами

Если A и B — множества, то множество A называется подмножеством множества B ($A\subset B$), если каждый элемент множества A является элементом множества B.

Множество всех подмножеств множества X обозначается $\mathsf{P}(X)$. Множество, состоящее из одной точки x, обозначается $\{x\}$. Множество, не содержащее элементов, называется **пустым множеством** и обозначается $\varnothing$. Для любого множества X выполнено $\varnothing\subset X$.

Пусть X — множество и пусть $\alpha(x)$ — некоторое свойство, которое для каждого конкретного элемента x из X может быть истинным или не быть таковым. Совокупность всех элементов x из X, для которых $\alpha(x)$ истинно, является подмножеством множества X. Это множество записывается так:

$$\{x \mid x\in X,\ \alpha(x)\} \quad \text{или} \quad \{x\in X \mid \alpha(x)\}$$

В тех случаях, когда ясно, о каком множестве X идет речь, используют еще более краткое обозначение — $\{x \mid \alpha(x)\}$.

Например, если A и B некоторые множества и $\alpha(x)$ есть $x\notin B$, то $\{x\in A \mid \alpha(x)\}$ является множеством всех элементов из A, которые не принадлежат B. Оно называется **разностью** множеств A и B и обозначается $A\backslash B$.

Пересечением двух множеств A и B называется множество $A\cap B=\{x|x\in A, x\in B\}$. **Объединением** двух множеств A и B называется множество $A\cup B$, состоящее из всех точек, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B. Множество $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ называется **симметрической разностью** множеств A и B и обозначается $A\Delta B$. Аналогично определяется объединение и пересечение множеств $A_1,\ldots,A_n$, которые соответственно обозначают $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ и $\bigcap\limits_{i=}^{n} A_i$.

Если $A_1,\ldots,A_n,\ldots$ — бесконечная последовательность множеств, то их объединение обозначают $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ или $\bigcup\limits_{n\in} A_n$.

Пусть I — некоторое множество и $\{A_i \mid i\in I\}$ — семейство множеств, т.е. каждое A_i является множеством. Совокупность всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A_i, называется **объединением семейства** $\{A_i \mid i\in I\}$ и обозначается $\bigcup\limits_{i\in} A_i$ или $\cup\{A_i \mid i\in I\}$. Множество I называют множеством индексов рассматриваемого семейства. Добавим, что по определению объединение пустого семейства множеств (т.е. такого, что $I=\varnothing$) является пустым множеством.

Объединение $\bigcup\limits_{i\in} A_i$ семейства попарно непересекающихся множеств (т.е. таких множеств, что $A_i\cap A_j=\varnothing$ при $i\neq j,\ i,j\in I$) обозначают также символом $\coprod\limits_{i\in} A_i$ или $\coprod\{A_i | i\in\ \}$.

Если множество индексов I не пусто, то совокупность всех элементов, которые принадлежат одновременно каждому множеству A_i $(i\in I)$, обозначается $\bigcap\limits_{i\in} A_i$ или $\cap\{A_i \mid i\in I\}$ и называется **пересечением** семейства $\{A_i \mid i\in I\}$.

Пересечение бесконечной последовательности множеств $A_1,\ldots,A_n,\ldots$ обозначается $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

Справедливы следующие формулы, которые называют принципом двойственности или формулами де Моргана.

Если $\{A_i \mid i\in I\}$ — непустое семейство подмножеств множества X, то

$$X\setminus\cup\{A_{\mathrm{i}} \mid i\in I\} = \cap\{X\setminus A_i \mid i\in I\}$$

и

$$X\setminus\cap\{A_i \mid i\in I\} = \cup\{X\setminus A_i \mid i\in I\}.$$

2.Отображения

Пусть X и Y — множества, $f: X\to Y$ — отображение множества X в множество Y. Если A — подмножество множества X, то множество $\{f(x) \mid x\in A\}$ называют **образом** множества A при отображении f и обозначают $f(A)$. Если $B\subset Y$, то множество $\{x\in X \mid f(x)\in B\}$ называют **прообразом** множества B при отображении f и обозначают $f^{-1}(B)$.

Ввиду важности понятий образа и прообраза множества еще раз их переформулируем.

Итак, образом $f(A)$ множества $A\subset X$ называется такое множество, которое получится если мы “соберем вместе” все элементы вида $f(x)$ для $x\in A$. (Так как $f(x)\in Y$, то образ множества A есть подмножество множества Y.) Прообраз $f^{-1}(B)$ множества $B\subset Y$ при отображении $f: X\to Y$ есть совокупность всех элементов x из X таких, что $f(x)\in B$; ясно, что $f^{-1}(B)\subset X$.

Отображение f называется **инъективным**, если разные элементы из X оно переводит в разные элементы множества Y, т.е. $f(x) = f(y)$ тогда и только тогда, когда $x=y$.

Отображение f называется **сюръективным**, если $f(X)=Y$. Отображение, которое сюръективно и инъективно, называется **биективным** отображением или биекцией.

Говорят, что два множества X и Y имеют одинаковую мощность или **равномощны**, если существует биекция между X и Y.

Множество называется **счетным**, если оно равномощно множеству $\mathbf{N}$ (множеству натуральных чисел). Множество, которое не является ни конечным, ни счетным, называется несчетным. Множество $[0,1]$ несчетно, его мощность называют **континуум**.

Из свойств счетных и несчетных множеств отметим следующие:

1. Любое подмножество счетного множества конечно или счетно.
2. Объединение конечного или счетного числа счетных множеств является счетным множеством.
3. Конечное или счетное объединение множеств мощности континуум является множеством мощности континуум.
4. Объединение счетного множества и множества мощности континуум является множеством мощности континуум.

3. <u>Кольца, алгебры и полукольца множеств</u>

Множество, элементы которого являются подмножествами фиксированного множества X, называют системой подмножеств множества X.

<u>Определение 1.</u> Непустая система $\mathbf{K}$ подмножеств множества X называется **кольцом**, если выполнено следующее условие:

если $A,B\in\mathbf{K}$, то $A\cap B\in\mathbf{K}$ и $A\Delta B\in\mathbf{K}$.

Кольцо $\mathbf{K}$ называется **алгеброй**, если $X\in \mathbf{K}$.

Так как $A\Delta A=\varnothing$, то из определения кольца следует, что $\varnothing\in \mathbf{K}$. Каждое кольцо замкнуто относительно операций объединения, пересечения, разности, симметрической разности, т.е. если $A,B\in\mathbf{K}$, то $A\cap B\in\mathbf{K}$, $A\cup B\in\mathbf{K}$, $A\setminus B\in\mathbf{K}$ и $A\Delta B\in \mathbf{K}$.

Если непустая система K подмножеств множества X замкнута относительно одной из следующих пар операций над множествами $(\cup,\Delta)$, $(\setminus,\Delta)$, $(\cup,\setminus)$, то она также является кольцом.

Пересечение любого семейства колец подмножеств множества X является кольцом. Поэтому, если $\boldsymbol{A}$ — некоторая непустая система подмножеств множества X, то пересечение всех колец, содержащих $\boldsymbol{A}$ и содержащихся в $\mathsf{P}(X)$, является наименьшим кольцом, содержащим $\boldsymbol{A}$. Оно обозначается $\mathsf{K}(\boldsymbol{A})$ и называется кольцом, порожденным системой $\boldsymbol{A}$.

<u>Определение 2.</u> Система $\boldsymbol{S}$ подмножеств множества X называется **полукольцом,** если выполнены следующие условия:

(i) $\varnothing\in\boldsymbol{S}$;

(ii) если A и B принадлежат $\boldsymbol{S}$, то $A\cap B\in\boldsymbol{S}$;

(iii) если A и B принадлежат $\boldsymbol{S}$, и $A\subset B$, то существует конечный набор $A_k\in\boldsymbol{S}$, $k=1,2,\ldots,n$ такой, что $B\setminus A=\coprod\limits_{k=1}^{n}A_k$.

Любое кольцо является полукольцом. Обратное неверно. Например:

1. Пусть $X=\mathbf{R}^2$, семейство $\boldsymbol{S}=\{[a,b[\ |\ a,b\in\mathbf{R};\ a\leq b\}$ — полукольцо, но не кольцо.

2. Пусть $X=\mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{S}=\{[a_1,b_1[\ \times[a_2,b_2[\ |\ a_i,b_i\in\mathbf{R};\ a_i\leq b_i,\ i=1,2\}$— полукольцо, но не кольцо.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $\mathbf{S}$ — полукольцо подмножеств множества X. Тогда кольцо $\mathsf{K}(\mathbf{S})$, порожденное системой подмножеств $\mathbf{S}$, состоит из всех множеств, являющихся конечными дизъюнктивными объединениями множеств из $\mathbf{S}$; т.е.

$$\mathsf{K}(\mathbf{S})=\{\coprod_{k=1}^{n}A_k\ |\ \mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_n\in\mathbf{S},\ \mathrm{n}\in\mathbf{N}\}.$$

<u>Определение 3</u>. Кольцо K называется **σ-кольцом**, если объединение счетного числа множеств из K принадлежит K; т.е. если $A_i\in\mathsf{K}$, $i=1,2,\ldots$, то объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ принадлежит K .

Кольцо K называется **δ-кольцом**, если пересечение счетного числа множеств из K принадлежит K; т.е. если $A_i\in\mathsf{K}$, $i=1,2,\ldots$, то $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathsf{K}$.

Если σ-кольцо является алгеброй, то его называют **σ-алгеброй,** аналогично, **δ-алгебра** — это δ-кольцо, которое является алгеброй.

Любое σ-кольцо является **δ**-кольцом. Не всякое **δ**-кольцо является σ-кольцом.

Любая σ-алгебра является σ-алгеброй и наоборот.

Определение 4. Пусть $\boldsymbol{A}$ — непустая система подмножеств множества X. Наименьшее σ-кольцо из всех σ-колец, содержащих систему A, называется **σ-кольцом, порожденным системой** $\boldsymbol{A}$. Это σ-кольцо будем обозначать $S(\boldsymbol{A})$.

Можно показать, что $S(\boldsymbol{A})$ совпадает с пересечением всех σ-колец, содержащих систему A и содержащихся в $P(X)$.

Пусть X=**R** и пусть τ — естественная топология на **R** (т.е. τ состоит из открытых интервалов и всевозможных объединений таких интервалов). σ-кольцо $S(\tau)$, порожденное топологией τ, является σ-алгеброй. Ее элементы называются **борелевскими** множествами на прямой. $S(\tau)$ не допускает такого простого описания, как, например, кольцо, порожденное полукольцом. Борелевскими множествами являются открытые множества, замкнутые множества — как дополнение до открытых, счетные пересечения открытых множеств (их называют множествами типа G_δ), счетные объединения замкнутых множеств (их называют множествами F_σ). Отметим, что эти классы не исчерпывают σ-алгебру борелевских множеств.

Если X — хаусдорфовое топологическое пространство, то σ-кольцо, порожденное топологией на X, является σ-алгеброй. Ее элементы называют **борелевскими** множествами топологического пространства X.

5. Мера и ее свойства

Определение 5. Пусть $\boldsymbol{S}$ — полукольцо подмножеств множества X. Функция $\mu : \boldsymbol{S}\to \mathbf{R}$ называется **мерой** на полукольце $\boldsymbol{S}$, если она неотрицательна на $\boldsymbol{S}$ и аддитивна, т.е. $\mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} (A_k)$ всякий раз, когда $A,A_1,\ldots,A_n\in\boldsymbol{S}$ и $A = \coprod\limits_{k=1}^{n} A_k$.

Если μ — мера, $A\in\boldsymbol{S}$, то значение $\mu(A)$ функции μ называется мерой множества A.

Определение 6. Мера μ, определенная на полукольце $\boldsymbol{S}$, удовлетворяющая условию: если $A = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $A,A_1,\ldots,A_n,\ldots\in\boldsymbol{S}$, то $\mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (A_k)$, называется **счетно-аддитивной мерой** (или **σ-аддитивной мерой**).

Мера μ, определенная на полукольце $\boldsymbol{S}$, обладает следующими свойствами:
1. Если $A,B\in\boldsymbol{S}$ и $A\subset B$, то $\mu(A)\leq \mu(B)$ (монотонность меры);

2. Если $A, A_1,\ldots,A_n,\ldots\in\boldsymbol{S}$ и $A \supset \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\mu(A) \geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} (A_k)$;

Каждое из следующих трех условий равносильно σ-аддитивности меры μ:

3. Если $A, A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \boldsymbol{S}$ и $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, то $\mu(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \ (A_k)$;

4. Пусть (E_n) — возрастающая последовательность элементов из $\boldsymbol{S}$ (т.е. $E_n \subset E_{n+1}$ для всякого $n \in \mathbf{N}$) и $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \boldsymbol{S}$. Тогда $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$;

5. Пусть (E_n) — убывающая последовательность элементов из $\boldsymbol{S}$ (т.е. $E_n \supset E_{n+1}$ для всякого $n \in \mathbf{N}$) и $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \boldsymbol{S}$. Тогда $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

Пусть $\boldsymbol{S} = \{[a,b[\subset \mathbf{R} \mid a \le b\}$ — полукольцо всех открытых справа ограниченных интервалов числовой прямой. Каждую меру m, определенную на $\boldsymbol{S}$, можно представить в виде

$$m_F([a,b[\,) = F(b) - F(a),$$

где F — неубывающая функция на $\mathbf{R}$.

С другой стороны, для любой неубывающей на $\mathbf{R}$ функции F эта формула задает меру. Если $F(x) = x$ $(x \in \mathbf{R})$, то меру m_F называют длиной.

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть F — неубывающая на* $\mathbf{R}$ *функция. Мера m_F σ-аддитивна тогда и только тогда, когда F непрерывна слева на* $\mathbf{R}$.

СЛЕДСТВИЕ. *Длина является σ-аддитивной мерой.*

<u>Определение 7</u>. Пусть μ — мера, определенная на полукольце $\boldsymbol{S}$. Мера μ_1, определенная на полукольце $\boldsymbol{S}_1$, называется **продолжением** меры μ, если $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{S}_1$ и $\mu_1(A) = \mu(A)$ для любого $A \in \boldsymbol{S}$.

7. <u>Лебегово продолжение меры</u>

Пусть m — мера, заданная на алгебре K подмножеств множества X. Конструкция продолжения меры по Лебегу опирается на понятия внешней меры и измеримого множества.

<u>Определение 8.</u> **Внешней мерой** множества $A \subset X$ называется число $\mu^*(A)$, определяемое равенством

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_n m(A_n) | A \subset \bigcup_n A_n\},$$

где точная нижняя грань вычисляется по всевозможным конечным или счетным покрытиям множества A алгебры **K.** Элементы алгебры **K** называют также элементарными множествами.

Определение 9. Множество $A\subset X$ называется **измеримым по Лебегу** относительно меры m, если

$$\mu^*(A) + \mu^*(X\backslash A) = m(X).$$

Определение 10. **Мерой Лебега** измеримого множества называется его внешняя мера.

ТЕОРЕМА 1.4. *Если исходная мера m, заданная на алгебре **K**, является σ-аддитивной, то система L(**K**, m) — измеримых по Лебегу множеств образует σ-алгебру подмножеств множества X; функция μ; L(**K**, m) $\mapsto$ **R**, задаваемая равенством $\mu(A) = \mu^*(A)$ является σ-аддитивной мерой на L(**K**, m); каждое множество $A\in$ **K** измеримо и $\mu(A) = m(A)$.*

Так определенная мера μ называется **лебеговым продолжением** меры m. Лебегово продолжение μ меры m обладает свойством полноты: если множеств A измеримо и $\mu(A) = 0$, то каждое его подмножество измеримо и имеет меру нуль.

ТЕОРЕМА 1.5. (Критерий измеримости множества) *Множество $A\subset X$ измеримо тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарное множество B такое, что $\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon$.*

Определение 11. **Внутренней мерой** множества $A\subset X$ называется число $\mu_*(A) = m(X) - \mu^*(X \setminus A)$.

Определение 12. Пусть **K** — кольцо, на котором задана мера m. **Внешней мерой Жордана множества** $A\subset X$ называется отображение μ из $P(X)$ в **R**, определяемое равенством $\mu(A)=\inf\{m(B) \mid A\subset B, B\in$ **K**$\}$. **Внутренней мерой Жордана множества** $A\subset X$ называется отображение μ из $P(X)$ в **R**, определяемое равенством $\underline{\mu}(A)=\sup\{m(B) \mid B\subset A, B\in$ **K**$\}$.

Множества $A\subset X$ называется **измеримым по Жордану**, если $\mu(A)= \underline{\mu}(A)$.

Каждое множество измеримое по Жордану является измеримым по Лебегу. Обратное утверждение неверно: существуют измеримые по Лебегу множества, которые являются неизмеримыми по Жордану множествами.

Определение 13. Пусть μ и ν — две меры, заданные на одной и той же σ-алгебре подмножеств множества X. Будем говорить, что мера ν **абсолютно непрерывна** относительно меры μ, если из того, что A — множество μ-меры нуль, следует, что A есть множество ν-меры нуль, т.е. если $\mu(A)=0$, то $\nu(A)=0$.

7. Множества бесконечной меры

Лебегово продолжение меры построено в предположении, что мера m задана на алгебре подмножеств множества X и $m(X)<+\infty$. Однако важные классы мер (например длина на прямой) не удовлетворяют этому требованию. Понятие меры можно естественным образом расширить, допуская возможность мере принимать значения равные $+\infty$. Покажем, как строится Лебегово продолжение меры в некоторых случаях не удовлетворяющих требованию конечности меры.

Определение 14. Мера m заданная на кольце **K** подмножеств множества X, называется σ-конечной, если существует разбиение $X=\coprod_{i=1}^{\infty} X_i$, где $X_i\in$ **K**, $i\in\mathbf{N}$ и $m(X_i)<+\infty$.

Если мера m является σ-конечной, то для каждого $i\in\mathbf{N}$ строится лебегово продолжение сужения меры m на алгебру $\{X_i \cap \quad\}$, где A пробегает кольцо **K.**

Определение 15. Множество $A\subset X$ называется **измеримым по Лебегу** относительно меры m, если для любого $i\in\mathbf{N}$ множество $X_i\cap A$ измеримо в X_i.

Обозначив $A_i= X_i\cap A$, $i\in\mathbf{N}$, получаем, что $A=\coprod_{i=1}^{\infty} A_i$, и если A измеримо по Лебегу, то мера Лебега $\mu(A)$ этого множества определяется с помощью равенства $\mu(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$.

Если ряд сходится, то A называется множеством конечной меры; если ряд расходится, то множество A называется множеством бесконечной меры. Записывается $\mu(A)=+\infty$.

8. Меры на прямой

Определение 16. Лебегово продолжение длины называют мерой Лебега на прямой. Если F — неубывающая на **R** функция, непрерывная слева в каждой точке из **R**, то лебегово продолжение меры m_F называют мерой Лебега-Стилтьеса на прямой.

ТЕОРЕМА 1.5. *Каждое борелевское подмножество числовой прямой измеримо относительно меры Лебега на прямой и для любого измеримого* $A\subset\mathbf{R}$ *существует борелевское множество* B *такое, что* $A\subset B$ *и* $\mu(B\backslash A)=0$.

Перечислим некоторые свойства мер на прямой:

1. Мера Лебега одноточечного множества равна нулю.
2. Мера Лебега-Стилтьеса одноточечного множества равна

$$\mu_F(\{a\}) = F(a\text{-}0) - F(a).$$

Если a — точка разрыва функции F, то $\mu_F(\{a\})>0$.

3. Мера Лебега любого числового промежутка равна его длине.
4. Мера Лебега-Стилтьеса числовых промежутков вычисляется по формулам:

$\mu_F([a,b[\,) = F(b) - F(a)$;

$\mu_F([a,b]\,) = F(b+0) - F(a)$;

$\mu_F(]a,b]\,) = F(b+0) - F(a+0)$;

$\mu_F(]a,b[\,) = F(b) - F(a+0)$.

5. Относительно меры Лебега существуют неизмеримые подмножества прямой.
6. Если мера Лебега-Стилтьеса порождена кусочно-постоянной функцией, имеющей конечное число точек разрыва, то любое подмножество прямой измеримо.

<u>Определение 17.</u> Пусть функция g определена на отрезке $[a,b]$. Функция g называется абсолютно непрерывной, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любого конечного набора попарно непересекающихся интервалов $(\alpha_i,\beta_i)\subset[a,b]$, $i=1,\ldots,n$ с $\sum\limits_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)<\delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\sum\limits_{i=1}^{n}|g(\beta_i)-g(\alpha_i)|<\varepsilon$.

ТЕОРЕМА 1.6. *Мера Лебега-Стилтьеса μ_F на $[a,b]$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда ее производящая функция F является абсолютно непрерывной на $[a,b]$.*

<u>Определение 18.</u> Пусть $\{a_k\}$ — произвольная числовая последовательность такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|<+\infty$, $\{t_k\}$ — любое конечное или счетное подмножество отрезка $[a,b]$. **Функцией скачков** называется функция g вида: $g(t)=\sum\limits_{k}a_k H(t-t_k)$, где $H(t)$ — функция Хевисайда: $H(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ 1, & t>0\end{cases}$.

<u>Определение 18.</u> Непрерывная неубывающая на отрезке $[a,b]$ функция g называется **сингулярной**, если ее производная почти всюду на $[a,b]$ равна нулю.

ТЕОРЕМА 1.7. *Любая неубывающая непрерывная слева функция F может быть представлена в виде суммы трех компонент — функции скачков, абсолютно непрерывной функции и сингулярной функции.*

Следовательно, и любая мера Лебега-Стилтьеса μ_F может быть представлена в виде суммы трех компонент — дискретной меры, порожденной функцией скачков, абсолютно непрерывной меры, порожденной абсолютно непрерывной функцией, и сингулярной меры, порожденной сингулярной функцией.

9. Канторово множество и его свойства

Канторовым множеством K называется пересечение множеств $K_n \subset [0.1]$ ($n \in \mathbf{N}$), которые определяются следующим образом. Множество K_1 получается из отрезка [0,1] делением его на три равные части и удалением среднего интервала, т.е. удалением интервала $]\frac{1}{3}, \frac{2,}{3}[$. Далее по индукции, если K_n уже построено и представимо в виде объединения конечного числа (2^n) попарно непересекающихся отрезков, то для получения K_{n+1} необходимо каждый отрезок, входящий в K_n, разделить на три равные части и удалить из него средний интервал.

Канторово множество имеет следующие свойства:

1. Канторово множество K имеет мощность континуум.
2. Канторово множество K замкнуто и не имеет изолированных точек.
3. Мера Лебега канторова множества равна нулю.
4. Элементы канторова множества характеризуются тем, что в троичном разложении у них не встречается единица, т.е. для любого $t \in K$ число t имеет вид $t = \sum_k \frac{2\varepsilon_k}{3^k}$, где ε_k равно нулю или единице.
5. Канторово множество является нигде не плотным множеством, а его дополнение до [0,1] — всюду плотно в [0,1].

10.Канторова лестница и ее свойства

Функцию $\varphi(t)$ на отрезке [0,1] определим следующим образом:

положим $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$;

на 2^{n-1} интервалах, которые удаляются при построении множества K_n полагаем $\varphi(t)$ последовательно равной $\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \frac{5}{2^n}, \ldots, \frac{2^{n-} -}{2^n}$. Таким образом $\varphi(t)$ задана на $K \backslash [0,1]$, непрерывна и возрастает на этом множестве.

Пусть $t_0 \in K$. Положим $\varphi(t_0) = \sup\{\varphi(t) \mid t \in [0,1] \backslash K, t < t_0\}$.

Построенная на отрезке [0,1] функция φ называется **канторовой лестницей.**

Выделим следующие свойства канторовой лестницы:

1. Канторова лестница является непрерывной неубывающей функцией, производная которой почти всюду равна нулю, т.е. $\varphi(t)$ — это сингулярная функция.

2. Если $t \in K$ и имеет вид $t = \sum_k \frac{2\varepsilon_k}{3^k}$, где ε_k равно нулю или единице, то

$$\varphi(t) = \sum_k \frac{\varepsilon_k}{2^k}.$$

Б. Задания к лабораторным работам

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Элементы теории множеств

Необходимые понятия и теоремы : Множества, операции над множествами: разность, объединение, пересечение, симметрическая разность, дополнение. Инъективные, сюръективные и биективные отображения, образ и прообраз множества, формулы двойственности, мощность, счетные и несчетные множества, множества мощности континуум.

Литература:[1] стр. 5-10, [4] стр. 13-31, [5] стр. 9-26, [6] стр. 4-16, [3] стр. 5-12.

1. Найти разность и симметрическую разность множеств A и B (привести геометрическое решение задачи).

	A	B
1.1	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \lvert x\rvert < 1/2\}$
1.2	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \ge 1\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4\}$
1.3	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \lvert x\rvert+\lvert y\rvert \le 1\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$
1.4	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \max(\lvert x\rvert,\lvert y\rvert) \le 1\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$
1.5	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 2xy \le 1\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$
1.6	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \sin(x)-y > 0\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x>0,\ y>0\}$
1.7	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \sin(x)-y > 0\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x>0,\ y<0\}$
1.8	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \sin(x) < y\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x<0,\ y>0\}$
1.9	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2+2x \le 0\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2+2y \le 0\}$
1.10	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 1\le x^2+y^2 \le 4\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x-y=1\}$
1.11	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 9x^2-4y \le 36\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \lvert x\rvert\le 2,\ 0<y<1\}$
1.12	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<\sin x<1\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \lvert x\rvert\le 2,\ \lvert y\rvert<2\}$
1.13	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<\cos x<1\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \lvert x\rvert\le\pi/2,\ \lvert y\rvert<\pi 2\}$

1.14	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid xy <1/4, x>0\}$
1.15	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0\le x^2+y^2 <4\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \lvert x-3\rvert <2, 0<y<1\}$
1.16	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \lvert x+1\rvert+\lvert y\rvert <1\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 4x^2+9y^2 \le 9\}$
1.17	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y^2 <2x\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \lvert x\rvert+\lvert y\rvert <3\}$
1.18	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 9x^2-4y^2 \le 36\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \lvert x\rvert<1, 4<y <5\}$
1.19	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<xy <1, x>0\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y<x^2+x+1\}$
1.20	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y<\mathrm{arctg}x\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid tgx<y, \lvert x\rvert<\pi/2\}$

2. Для каких множеств из набора L их симметрическая разность совпадает с их а) объединением, в) разностью:

№	L	№	L
2.1	$\{]-\infty, a] \mid a\in\mathbf{R}\}$	2.2	$\{[a, b] \mid a,b\in\mathbf{R}\}$
2.3	$\{]a, b] \mid a,b\in\mathbf{R}\}$	2.4	$\{]m, n[\mid m,n\in\mathrm{N}\}$
2.5	$\{]a, +\infty] \mid a\in\mathbf{R}\}$	2.6	$\{]-\infty, m] \mid m\in\mathbf{Z}\}$
2.7	$\{]m, n[\mid m,n\in\mathbf{Z} \}$	2.8	$\{[m, n[\mid m\in\mathbf{Z}, n\in\mathrm{N}\}$
2.9	$\{]p,q[\mid p,q\in\mathbf{Q}\}$	2.10	$\{[a, b[\mid a,b\in\mathbf{R}, a<0, b>0\}$
2.11	$\{]0,q[\mid q\in\mathbf{Q}\}$	2.12	$\{]a, b[\mid a,b\in\mathbf{R}, a<0\}$
2.13	$\{[a, b] \mid a,b\in\mathbf{Q}\}$	2.14	$\{]a, b] \mid a,b\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\}$
2.15	$\{]a, b[\mid a\notin\mathbf{Q}, b\in\mathbf{Q}\}$	2.16	$\{[m, n[\mid m,n\in\mathrm{N}\}$
2.17	$\{[0,q[\mid q\notin\mathbf{Q}\}$	2.18	$\{]n, +\infty[\mid n\in\mathbf{N}\}$
2.19	$\{[a, b[\mid a,b\in\mathbf{R}\}$	2.20	$\{]a, b] \mid a<0, b>0, a,b\in\mathbf{R}\}$

3. Пусть A,B,C,D — произвольные множества. Находятся ли множества U и V в одном из соотношений $=$, $\supset$, $\subset$?

№	U	V	№	U	V
3.1	$(A\Delta B)\cap C$	$(A\cap C)\Delta(B\cap C)$	3.2	$A\Delta B$; $A,B\subset C$	$(C\backslash A)\Delta(C\backslash B)$
3.3	$A\cup B$	$(A\cap B)\Delta(A\Delta B)$	3.4	$A\Delta(B\cup C)$	$(A\Delta B)\cup(A\Delta C)$
3.5	$(A\cap B)\Delta C$	$(A\Delta C)\cap (C\Delta B)$	3.6	$A\Delta(B\backslash C)$	$(A\Delta B)\backslash(A\Delta C)$
3.7	$(A\Delta B)\backslash C$	$(A\backslash C)\Delta(B\backslash C)$	3.8	$A\cup(B\Delta C)$	$(A\cup B)\Delta (A\cup C)$
3.9	$A\backslash(B\Delta C)$	$(A\backslash B)\Delta (A\backslash C)$	3.10	$(A\cup B)\Delta (C\cup D)$	$(A\Delta C)\cup(B\Delta D)$
3.11	$(A\Delta B)\cap C$	$(A\cap C)\Delta (B\cap C)$	3.12	$A\Delta(B\cap C)$	$A\Delta(B\cap C)$
3.13	$(A\backslash B)\cap(C\backslash D)$	$(A\cap C)\backslash(B\cap D)$	3.14	$A\backslash(B\cup C)$	$(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$
3.15	$A\cap B$	$A\backslash(A\backslash B)$	3.16	$A\backslash(B\cap C)$	$(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$
3.17	$A\backslash(B\backslash C)$	$(A\backslash B)\cup(A\cap C)$	3.18	$(A\backslash B)\cap C$	$(A\cap C)\backslash(B\cap C)$
3.19	$(A\backslash B)\backslash C$	$A\backslash(B\cup C)$	3.20	$(A\cup B)\backslash C$	$(A\backslash C)\cup(B\backslash C)$

4. Пусть $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $A, B \subset \mathbf{R}^2$, C=[0,1]. Найти и изобразить множества $f(A)$, $f(B)$, $f(A \cap B)$, $f^{-1}(C)$; выяснить, является ли отображение f инъективным, сюръективным, биективным, если:

	f	A	B
4.1	$f(x,y) = x$	$\{(x,0) \mid x \in [0,1]\}$	$\{(x,1) \mid x \in [0,1]\}$
4.2	$f(x,y) = y$	$\{(1,y) \mid y \in [0,1]\}$	$\{(2,y) \mid y \in [0,1]\}$
4.3	$f(x,y) = x^2+y^2$	$\{(x,x) \mid x \in [0,1]\}$	$\{(x,-x) \mid x \in [0,1]\}$
4.4	$F(x,y) = \sin x$	$\{(x,1) \mid x \in [0,\pi]\}$	$\{(x,2) \mid x \in [0,\pi]\}$
4.5	$F(x,y) = \sin y$	$\{(1,y) \mid y \in [0,\pi]\}$	$\{(2,y) \mid y \in [0,\pi]\}$
4.6	$f(x,y) = x+y$	$\{(x,y) \mid x,y \in [0,1]\}$	$\{(-1,y) \mid y \in [1,3]\}$
4.7	$f(x,y) = x - y$	$\{(x,y) \mid x,y \in [0,1]\}$	$\{(x,2) \mid x \in [0,3]\}$
4.8	$f(x,y) = \mathrm{e}^{x}$	$\{(x,y) \mid x,y \in [0,1]\}$	$\{(x,2) \mid x \in [0,1]\}$
4.9	$f(x,y) = \mathrm{e}^{-x}$	$\{(x,y) \mid x,y \in [0,1]\}$	$\{(x,5) \mid x \in [0,1]\}$
4.10	$f(x,y) = \mathrm{e}^{y}$	$\{(x,y) \mid x,y \in]-\infty,0]\}$	$\{(3,y) \mid y \in]-\infty,0]\}$
4.11	$f(x,y) = \mathrm{e}^{-y}$	$\{(x,y) \mid x,y \in]-\infty,0]\}$	$\{(4,y) \mid y \in]-\infty,0]\}$
4.12	$f(x,y) = xy$	$\{(x,y) \mid x,y \in [0,1]\}$	$\{(x,2) \mid x \in [0,1/2]\}$
4.13	$f(x,y) = x^3$	$\{(x,y) \mid x \in [0,1]\}$	$\{(x,4) \mid x \in [0,2]\}$
4.14	$f(x,y) = y^3$	$\{(3,y) \mid y \in [0,1]\}$	$\{(1,y) \mid y \in [0,1]\}$

5. Пусть A, B, A_α ($\alpha \in \mathrm{I}$)— произвольные подмножества множества X, пусть C, D, C_α ($\alpha \in \mathrm{I}$) — произвольные подмножества множества Y и $f: X \to Y$ произвольное отображение. В каком из соотношений =, $\subset$, $\subset$ находятся множества U и V? Если некоторое соотношение не выполняются для произвольного отображения f, то выяснить имеет ли оно место для инъективных, сюръективных, биективных отображений.

№	U	V	№	U	V
5.1	$f(A \cup B)$	$f(A) \cup f(B)$	5.2	$f^{-1}(C \cup D)$	$f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
5.3	$f(A \cap B)$	$f(A) \cap f(B)$	5.4	$f^{-1}(C \cap D)$	$f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

5.5	$f(A \setminus B)$	$f(A) \setminus f(B)$	5.6	$f^{-1}(C \setminus D)$	f^{-1} © $\setminus f^{-1}(D)$
5.7	$f(X \setminus B)$	$f(X) \setminus f(B)$	5.8	$f^{-1}(Y \setminus D)$	$f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(D)$
5.9	$f(A \Delta B)$	$f(A) \Delta f(B)$	5.10	$f^{-1}(C \Delta D)$	f^{-1} © $\Delta f\text{–}^{1}(D)$
5.11	$f(\bigcup\limits_{\alpha} A_{\alpha}$`	$\bigcup\limits_{\alpha} f(A_{\alpha}$`	5.12	$f^{-}(\bigcup\limits_{\alpha} C_{\alpha}$`	$\bigcup\limits_{\alpha} f^{-}(C_{\alpha}$`
5.13	$f(\bigcap\limits_{\alpha} A_{\alpha})$	$\bigcap\limits_{\alpha} f(A_{\alpha})$	5.14	$f^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha} C_{\alpha})$	$\bigcap\limits_{\alpha} f^{-1}(C_{\alpha})$

6. Выяснить, являются ли следующие множества конечными, счетными или множествами мощности континуум?

6.1. Множество рациональных чисел;
6.2. Множество всех упорядоченных пар рациональных чисел;
6.3. Множество всех конечных последовательностей рациональных чисел;
6.4. Множество всех последовательностей из нулей и единиц;
6.5. Множество всех многочленов с рациональными коэффициентами;
6.6. Множество всех открытых кругов на плоскости рационального радиуса, координаты центра которых рациональны;
6.7. Множество попарно непересекающихся треугольников на плоскости;
6.8. Множество всех сходящихся последовательностей целых чисел;
6.9. Множество всех последовательностей целых чисел;
6.10. Множество всех непрерывных на отрезке [0,1] числовых функций;
6.11. Множество всех непрерывных на отрезке [0,1] числовых функций, принимающих в рациональных точках отрезка рациональные значения;
6.12. Множество точек разрыва монотонно неубывающей на числовой прямой числовой функции;
6.13. Множество точек разрыва монотонной на числовой прямой числовой функции;
6.14. Множество точек разрыва заданной на числовой прямой числовой функции, представимой в виде разности двух монотонно неубывающих функций.
6.15. Множество всех последовательностей натуральных чисел;
6.16. Множество треугольников на плоскости, у которых координаты вершин рациональны;
6.17. Множество действительных чисел отрезка [0,1], в разложении которых в бесконечную десятичную дробь не встречается цифра 5;
6.18. Множество сходящихся на **R** функциональных рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ с рациональными коэффициентами;
6.19. Множество всех подмножеств множества натуральных чисел;
6.20. Множество всех прямоугольников на плоскости, у которых координаты вершин рациональны;

6.21. Множество действительных чисел из отрезка [0,1], разложение которых в десятичную дробь неоднозначно;

6.22. Множество непрерывных функций на вещественной оси, принимающих только рациональные значения;

6.23. Множество всех числовых функций на $\mathbf{R}$;

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Кольца и алгебры множеств.

Необходимые понятия и теоремы: Кольцо, σ-кольцо, δ-кольцо, σ-алгебра, борелевские множества, топология, полукольцо, кольцо, порожденное полукольцом.

Литература:[1] стр. 10-14, [4] стр. 41-47.

1. Образуют ли кольцо, σ-кольцо, δ-кольцо, алгебру, полукольцо следующие системы множеств:

1.1. Все ограниченные множества на прямой;

1.2. Все конечные подмножества некоторого фиксированного множества;

1.3. Все конечные и счетные подмножества $\mathbf{R}$;

1.4. Все подмножества некоторого фиксированного множества, дополнения к которым конечны;

1.5. Все множества $\mathbf{R}$, дополнения к которым конечны или счетны;

1.6. Все ограниченные замкнутые (компактные) множества в $\mathbf{R}^2$;

1.7. Множество всех многоугольников на плоскости;

1.8. Все выпуклые множества на плоскости;

1.9. Все множества на плоскости, инвариантные относительно растяжений и сжатий;

1.10. Все множества на плоскости, инвариантные относительно вращения вокруг начала координат;

1.11. Все всюду плотные множества в $\mathbf{R}$ (т.е. такие, замыкание которых есть все $\mathbf{R}$;

1.12. Все нигде неплотные множества в $\mathbf{R}$ (т.е. такие, замыкание которых содержит пустую внутренность);

1.13. Все ограниченных промежутков числовой прямой;

1.14. Все открытые справа полуинтервалы отрезка [0,1];

1.15. Все промежутки числовой прямой, содержащихся в отрезке [0,1];

1.16. Все подмножества множества X, которые конечны или конечны их дополнения;

1.17. Все подмножества топологического пространства, которые одновременно открыты и замкнуты;

1.18. Все прямоугольники плоскости $\mathbf{R}^2$ вида $[a,b[\times[c,d[$, где $a \le b$; $c \le d$;

1.19. Все прямоугольники плоскости $\mathbf{R}^2$ вида $[a,b[\times[0,1]$, где $0 \le a \le b \le 1$;

1.20. Все связные подмножества топологического пространства.

2. Доказать, что множество A является борелевским в $\mathbf{R}^2$, представив его в виде объединений, пересечений открытых или замкнутых множеств.

№	A	№	A
2.1	$\{(x,y) \mid x\in\mathbf{Q},\ y\notin\mathbf{Q}\}$	2.2	$\{(x,y) \mid x^2+y^2\in\mathbf{Q}\}$
2.3	$\{(x,y) \mid 9x^2+4y^2\notin\mathbf{Q}\}$	2.4	$\{(x,y) \mid x^2-9y^2\in\mathbf{N}\}$
2.5	$\{(x,y) \mid x-3y\in\mathbf{Q},\ x\notin\mathbf{Q}\}$	2.6	$\{(x,y) \mid x+2y\in\mathbf{Q}\}$
2.7	$\{(x,y) \mid \lvert x\rvert+\lvert y\rvert\in\mathbf{Q}\}$	2.8	$\{(x,y) \mid xy\notin\mathbf{Q}\}$
2.9	$\{(x,y) \mid x\in\mathbf{Q},\ xy\in\mathbf{N}\}$	2.10	$\{(x,y) \mid x^2-4y^2\notin\mathbf{Q},\ x\in\mathbf{Q}\}$
2.11	$\{(x,y) \mid x^2-4y^2\notin\mathbf{Q},\ y\notin\mathbf{Q}\}$	2.12	$\{(x,y) \mid \frac{x}{y},\ y\notin\mathbf{Q}\}$
2.13	$\{(x,y) \mid xy\in\mathbf{Q},\ x\notin\mathbf{Q}\}$	2.14	$\{(x,y) \mid x+2y\notin\mathbf{Q},\ y\in\mathbf{Q}\}$
2.15	$\{(x,y) \mid x^2+y^2\notin\mathbf{Q},\ y\in\mathbf{Q}\}$	2.16	$\{(x,y) \mid \cos x+y\in\mathbf{Q},\ y\in\mathbf{Q}\}$
2.17	$\{(x,y) \mid \lvert x-y\rvert\in\mathbf{Q}\}$	2.18	$\{(x,y) \mid x\notin\mathbf{Q},\ \cos y<1/2\}$
2.19	$\{(x,y) \mid \sin x\geq 1/2\}$	2.20	$\{(x,y) \mid \sin xy\in\mathbf{Q}\}$

3. Совпадает ли σ-адгебра, порожденная данным набором множествL, с алгеброй борелевских множеств на прямой?

№	L	№	L
3.1	$\{[a, b[\mid a,b\in\mathbf{R}\}$	3.2	$\{[a, +\infty] \mid a\in\mathbf{R}\}$
3.3	$\{[a, b[\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$	3.4	$\{[a, +\infty] \mid a\in\mathbf{Q}\}$
3.5	$\{[a, b[\mid a,b\in\mathbf{Z}\}$	3.6	$\{[a, b[\mid a\in\mathbf{Z}, b\in\mathbf{R}\}$
3.7	$\{]-\infty, b] \mid b\in\mathbf{Q}\}$	3.8	$\{]a, b[\mid a\in\mathbf{Q},\ b\notin\mathbf{Q}\}$
3.9	$\{]-\infty, b] \mid b\notin\mathbf{Q}\}$	3.10	$\{]a, b] \mid a\in\mathbf{Z}, b\in\mathbf{N}\}$
3.11	$\{]-\infty, m] \mid m\in\mathbf{Z}\}$	3.12	$\{[n, +\infty[\mid n\in\mathbf{Z}\}$
3.13	$\{]a, b] \mid a,b\in\mathbf{R}\}$	3.14	$\{]a, b] \mid a\in\mathbf{Z}, b\in\mathbf{R}\}$
3.15	$\{[a, b] \mid a,b\in\mathbf{R}\}$	3.16	$\{[a, b[\mid a\notin\mathbf{Q},\ b\notin\mathbf{Q}\}$
3.17	$\{]-\infty, a] \mid a\in\mathbf{R}\}$	3.18	$\{[a, b[\mid a\notin\mathbf{Q},\ b\in\mathbf{Q}\}$
3.19	$\{[a, b] \mid a\notin\mathbf{Q},\ b\in\mathbf{Q}\}$	3.20	$\{[a, b] \mid a\in\mathbf{R},\ b\in\mathbf{N}\}$

4. Показать, что:

4.1. Объединение конечного числа элементов полукольца может не принадлежать полукольцу;

4.2. Пересечение любого конечного числа элементов полукольца принадлежит полукольцу, а пересечение счетного числа элементов полукольца может ему не принадлежать;

4.3. Объединение счетного числа элементов кольца может не принадлежать кольцу;

4.4. Пересечение счетного числа элементов кольца может не принадлежать кольцу;

4.5. Пересечение любого непустого семейства σ-колец подмножеств множества X является σ-кольцом;

4.6. Пересечение любого непустого семейства δ-колец подмножеств множества X является δ-кольцом;
4.7. σ-кольцо является δ-кольцом;
4.8. δ-кольцо может не быть σ-кольцом;
4.9. σ-алгебра является δ-алгеброй;
4.10 δ-алгебра является σ-алгеброй;
4.11 Непустая система подмножеств множества X, замкнутая относительно операций объединения и разности является кольцом;
4.12 Непустая система подмножеств множества X, замкнутая относительно операций симметрической разности и разности является кольцом;
4.13 Непустая система подмножеств множества X, замкнутая относительно операций симметрической разности и объединения является кольцом;
4.14 Непустая система подмножеств множества X, замкнутая относительно операций пересечения и дополнения является кольцом;
4.15 Непустая система подмножеств множества X, замкнутая относительно операций пересечения и объединения вообще говоря не является кольцом;
4.16 Непустая система подмножеств множества X, замкнутая относительно операций пересечения и разности вообще говоря не является кольцом;
4.17 Непустая система подмножеств множества X, замкнутая относительно операций пересечения и разности является полукольцом.

5. Пусть $f: X \to Y$, $\boldsymbol{A} \neq \varnothing$, $\boldsymbol{A} \subset P(Y)$, $\boldsymbol{B} \neq \varnothing$, $\boldsymbol{B} \subset P(X)$.

Обозначим через $f^{-1}(\boldsymbol{A}) = \{ f^{-1}(A) \mid A \in \boldsymbol{A} \}$ и через $f(\boldsymbol{B}) = \{ f(B) \mid B \in \boldsymbol{B} \}$. Справедливы ли следующие утверждения?

5.1. Если $\boldsymbol{A}$ есть полукольцо, то $f^{-1}(\boldsymbol{A})$ есть полукольцо;
5.2. Если $\boldsymbol{A}$ есть кольцо, то $f^{-1}(\boldsymbol{A})$ есть кольцо;
5.3. Если $\boldsymbol{A}$ есть алгебра, то $f^{-1}(\boldsymbol{A})$ есть алгебра;
5.4. Если $\boldsymbol{A}$ есть σ-алгебра, то $f^{-1}(\boldsymbol{A})$ есть σ-алгебра;
5.5. Если $\boldsymbol{A}$ есть σ-кольцо, то $f^{-1}(\boldsymbol{A})$ есть σ-кольцо;
5.6. Если $\boldsymbol{B}$ есть полукольцо, то $f(\boldsymbol{B})$ есть полукольцо;
5.7. Если $\boldsymbol{B}$ есть кольцо, то $f(\boldsymbol{B})$ есть кольцо;
5.8. Если $\boldsymbol{B}$ есть алгебра, то $f(\boldsymbol{B})$ есть алгебра;
5.9. Если $\boldsymbol{B}$ есть σ-кольцо, то $f(\boldsymbol{B})$ есть σ-кольцо;
5.10. Если $\boldsymbol{B}$ есть σ-алгебра, то $f(\boldsymbol{B})$ есть σ-алгебра.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Мера на кольце множеств.

Необходимые понятия и теоремы: Мера, σ-аддитивная мера, σ-конечная мера, продолжение меры, множество меры нуль, монотонная функция, непрерывная слева функция.

Литература:[1] стр.14-23, [4] стр. 256-271, [5] стр. 56-65, [6] стр. 44-51.

1. Построить, если это возможно меру m на $\boldsymbol{P}(X)$, если $X = \{a,b,c\}$, так чтобы

1.1	$m(\{a,b\}) = 1{,}2;$	$m(\{a,c\}) = 1{,}2;$	$M(\{c,b\}) = 1{,}2.$
1.2	$m(\{a,b\}) = 2;$	$m(\{c\}) = 2;$	$M(\{a,b,c\}) = 4.$
1.3	$m(\{a\}) = 1;$	$m(\{a,b\}) = 0;$	$M(\{c,b\}) = 1{,}2.$
1.4	$m(\{a,b,c\}) = 7;$	$m(\{a,b\}) = 2{,}5;$	$M(\{a,c\}) = 3{,}5.$
1.5	$m(\{a,b\}) = 1;$	$m(\{c,b\}) = 0;$	$m(\{b\}) = 1.$
1.6	$m(\{a,b\}) = 0;$	$m(\{a,c\}) = 0;$	$m(\{c,b\}) = 1.$
1.7	$m(\{a\}) = 1;$	$m(\{b\}) = 1;$	$m(\{c\}) = 1.$
1.8	$m(\{a\}) = 1;$	$m(\{c,b\}) = 0{,}5;$	$m(\{a,b\}) = 2.$
1.9	$m(\{a\}) = 1;$	$m(\{c,b\}) = 0{,}5;$	$m(\{a,b\}) = 1.$
1.10	$m(\{a\}) = 1;$	$m(\{b\}) = 1;$	$m(\{a,b,c\}) = 25.$
1.11	$m(\{a\}) = 2;$	$m(\{c\}) = 4;$	$M(\{a,b,c\}) = 4.$
1.12	$m(\{a,b\}) = 0;$	$m(\{c,b\}) = 0{,}5;$	$M(\{a,b,c\}) = 1.$
1.13	$m(\{a,b\}) = 0;$	$m(\{c,b\}) = 0{,}5;$	$m(\{a,b,c\}) = 0{,}4.$
1.14	$m(\{a,b\}) = 0;$	$m(\{c,b\}) = 0{,}5;$	$m(\{a,b,c\}) = 0{,}5.$
1.15	$m(\{a\}) = 4;$	$m(\{a,b\}) = 1;$	$M(\{a,b,c\}) = 5.$
1.16	$m(\{a\}) =1$	$m(\{a,b\}) =2$	$m(\{a,c\}) =3$
1.17	$m(\{a,b\}) =10$	$m(\{a,c\}) =10$	$m(\{b,c\}) =6$
1.18	$m(\{a\}) =15$	$m(\{a,b\}) =35$	$m(\{a,b,c\}) =100$
1.19	$m(\{a,b\}) =2$	$m(\{b,c\}) =6$	$m(\{a,b,c\}) =8$
1.20	$m(\{c\}) =3$	$m(\{a,c\}) =5$	$m(\{b,c\}) =4$

2. Пусть m — мера, определенная на кольце K, $E,F,G \in K$, причем $m(E)<+\infty$ и $m(F)<+\infty$. Доказать следующие соотношения:

2.1	$m(E \cup F) = m(E) + m(F) - m(E \cap F)$
2.2	$m(\varnothing) = 0$
2.3	$m(E \setminus F) = m(E) - m(E \cap F)$
2.4	$E \supset F \;\Rightarrow\; m(E \setminus F) = m(E) - m(F)$

2.5	$m(E \cap F) = m(E) + m(F) - m(E \cup F)$
2.6	$m(E \,\Delta\, F) = m(E) + m(F) - 2m(E \cap F)$
2.7	$m(E \cup F \cup G) = m(E) + m(F) + m(G) - m(E \cap F) -$ $- m(E \cap G) - m(F \cap G) + m(E \cap F \cap G)$
2.8	$m(E \cup (F \cap G)) = m(E) + m(F \cap G) - m(E \cap F \cap G)$
2.9	$E \supset F \;\Rightarrow\; m(E \,\Delta\, F) = m(E) - m(F)$
2.10	$m(E \cap (E \,\Delta\, F)) = m(E) - m(E \cap F)$
2.11	$m(E \cup (E \,\Delta\, F)) = m(E) + m(F) - m(E \cap F)$
2.12	$m(E \,\Delta\, (E \,\Delta\, F)) = m(F)$
2.13	$m(E \,\Delta\, F) \le m(E \,\Delta\, G) + m(G \,\Delta\, F)$
2.14	$m(E \,\Delta\, F) = m(E \cup F) - m(E \cap F)$

3. Пусть $X = \mathbf{R}$, $\boldsymbol{S} = \{[a,b[\subset X\}$, $m_F([a,b[\,) = F(b) - F(a)$. При каких значениях параметра α эта формула задает: а) меру; б) σ-аддитивную меру? Если мера не является σ-аддитивной, то указать $A \in \boldsymbol{S}$ и его разбиение $A = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k$, такое, что

$$m_F(A) \neq \sum_{k=1}^{\infty} \;_F(A_k).$$

3.1	$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \alpha & t = 0 \\ \;^{t}, & t > 0 \end{cases}$	3.2	$F(t) = \begin{cases} \;^{t}, & t < 1 \\ \alpha & t = 1 \\ +2, & t > 1 \end{cases}$
3.3	$F(t) = \begin{cases} ;, & t \in \;\, , n+1[\\ \alpha \; - \; \iota, & t = \;\iota \end{cases}$	3.4	$F(t) = \begin{cases} + \;, & t \in \;\, , n+1[\\ \alpha \; - 2n, & t = \;\iota \end{cases}$
3.5	$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \alpha \; - 2, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$	3.6	$F(t) = \begin{cases} \cdot 5, & t < 2 \\ \alpha \; - 7, & t = 2 \\ 5, & t > 2 \end{cases}$
3.7	$F(t) = \begin{cases} \;, & t < 3 \\ \alpha & t = 3 \\ 5, & t > 3 \end{cases}$	3.8	$F(t) = \begin{cases} 1, & t < 0 \\ \;^{2} + \; + \alpha & t \ge 0 \end{cases}$

3.9	$F(t)=\begin{cases} t\,, & t\neq 2 \\ \alpha & t=2 \end{cases}$	3.10	$F(t)=\begin{cases} \cdot 1, & t<1 \\ {}^{2}-2t+\alpha & t\geq 1 \end{cases}$
3.11	$F(t)=\begin{cases} \,, & t<-1 \\ 2t^{2}+8t+\alpha & t\geq -1 \end{cases}$	3.12	$F(t)=\begin{cases} {}^{3}, & t<1 \\ 3t^{2}- \ -\alpha & t\geq 1 \end{cases}$
3.13	$F(t)=\begin{cases} \cdot\ {}^{2}+2t+\alpha & t<0 \\ \,, & t\geq 0 \end{cases}$	3.14	$F(t)=\begin{cases} \cdot\ {}^{2}+2t+\alpha & t<1 \\ {}^{3}, & t\geq 1 \end{cases}$
3.15	$F(t)=\begin{cases} t,\ t<-\frac{1}{2} \\ \alpha,\ t=-\frac{1}{2} \\ 1,\ t>-\frac{1}{2} \end{cases}$	3.16	$F(t)=\begin{cases} -1,\ t<\frac{1}{2} \\ \alpha,\ t=\frac{1}{2} \\ t+2,\ t>\frac{1}{2} \end{cases}$
3.17	$F(t)=\begin{cases} t,\ t<0 \\ \alpha,\ t=0 \\ 2,\ t>0 \end{cases}$	3.18	$F(t)=\begin{cases} -1,\ t<1 \\ \alpha,\ t=1 \\ t,\ t>1 \end{cases}$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Лебеговское продолжение меры.

Необходимые понятия и теоремы: Продолжение меры, внешняя и внутреняя мера, измеримые множества и их свойства, множества меры нуль, продолжение меры по Лебегу, полная мера.

Литература:[1] стр.23-40, [4] стр. 271-281, [5] стр. 56-86, [6] стр. 44-51.

1. Пусть $X = [-1,2[\times[0,1]$, $\boldsymbol{S} = \{[a,b[\times[0,1] \subset X\}$, $m([a,b[\times[0,1]) = \dfrac{1}{3}(b - a)$.

   Найти внешнюю и внутреннюю меры множества A и выяснить, измеримо ли оно?

№	A	№	A
1.1	$[1/2,1[\times[1/2,1]$	1.2	$[1/2,1[\times[0,1/2]$
1.3	$\{(x,y)\in X\mid\ y>x\}$	1.4	$\{(x,y)\in X\mid\ y<x\}$
1.5	$\{(x,y)\in X\mid 4\,x^2+9y^2\leq 1\ \}$	1.6	$\{(x,y)\in X\mid\ x^2+y^2\geq 1\ \}$

1.7	$\{(x,1/2)\in X \mid x\in[0,1[\ \}$	1.8	$\{(1/2,y)\in X \mid y\in[0,1/2[\ \}$
1.9	$\{(x,y)\in X \mid 2x + y \le 1\ \}$	1.10	$\{(x,y)\in X \mid y^2 - y = -x\}$
1.11	$\{(x,y)\in X \mid y = \sin x\}$	1.12	$\{(x,y)\in X \mid y = \operatorname{tg} x\}$
1.13	$\{(x,y)\in X \mid y = x\}$	1.14	$\{(x,y)\in X \mid y = 1-x\}$
1.15	$\{(x,y)\in X \mid 2x^2 + y^2 \le 1\ \}$	1.16	$\{(x,y)\in X \mid x^2 + y^2 \le 1\ \}$
1.17	$\{(x,y)\in X \mid y = x^2\}$	1.18	$\{(x,y)\in X \mid xy\ge 1\}$
1.19	$\{(x,y)\in X \mid \lvert x- \ \rvert + \ y-\frac{1}{2}\rvert \ge \ \}$	1.20	$\{(x,y)\in X \mid x-y>\frac{1}{2}\}$

6. Пусть $X = [0,50[$, $\boldsymbol{S} = \{[\,k,n[\ \subset X \mid k,n\in\mathbf{Z}\}$, $m([k,n[) = 2(n-k)$. Выяснить: измеримо ли множество A. Найти все множества меры нуль и найти их меру.

№		№		№	
2.1	$[\,0, 25[\ \setminus \mathbf{Q}$	2.2	$[\,1,7[\ \cap\mathbf{Q}$	2.3	$[\sqrt{7},\sqrt{21}[$
2.4	$[\,0,7.1[\ \cap\mathbf{Q}$	2.5	$[e,\pi[$	2.6	$[3.5,9.1]$
2.7	$]5.7,50[\ \setminus \mathbf{Q}$	2.8	$]7.39,23.8[$	2.9	$]4.4,5.1[$
5.10	$]3.1,28[$	5.11	$[\sqrt{3},21]$	5.12	$[5,21,7]$
2.13	$X\cap\mathbf{Q}$	2.14	$[\sqrt{3},9[\ \setminus \mathbf{Q}$	2.15	$]\pi,41]$
2.16	$[8,13]$	2.17	$[\sqrt{2},32.5[$	2.18	$]3,25[$
2.19	$]0.2,18[$	2.20	$[1.5,5]$	2.21	$]0,50[$

7. Пусть $X = [3, 8[$, $\boldsymbol{S} = \{[a,b[\ \subset X\}$, $m([a,b[\ ) = F(b) - F(a)$, μ — ее продолженре по Лебегу.

a) Найти меру произвольного одноточечного множества, содержащегося в X.

в) Выяснить: являются ли множества A и B измеримыми и найти их меру.

c) Описать все измеримые множества и найти меру произвольного измеримого множества.

№	$F(t)=$	A,B
3.1	$\begin{cases} -1, & t\le -2 \\ 2, & -2<t\le 1 \\ 3, & t>1 \end{cases}$	$A = [0,5]$ $B=\mathbf{Q}\cap[-1,3]$

3.2	$\begin{cases} -2, t \le 1 \\ 0, 1 < t \le 4 \\ 3, t > 4 \end{cases}$	A=]−2,4] B= [−1,5]\ **Q**
3.3	$\begin{cases} -3, t \le -1 \\ -1, -1 < t \le \sqrt{2} \\ -0.5, t > \sqrt{2} \end{cases}$	A=]−1,7] B=**Q**∩[3,5]
3.4	$\begin{cases} -3, t \le 0 \\ 0, 0 < t \le \sqrt{2} \\ 2, t > \sqrt{2} \end{cases}$	A=]−1,4[B=[0,5[**Q**
3.5	$\begin{cases} -0.4, t \le 1 \\ 1, 1 < t \le 4 \\ 5, t > 4 \end{cases}$	A=]−2,4] B=**Q**∩[4,8]
3.6	$\begin{cases} -4, t \le 5 \\ -2, 5 < t \le 5.5 \\ 4, t > 5.5 \end{cases}$	A= [2,8] B=[−1,2] **Q**
3.7	$\begin{cases} 1, t \le 0 \\ 2, 0 < t \le 4 \\ 3.3, t > 4 \end{cases}$	A= [−2,3] B=**Q**∩[1,5]
3.8	$\begin{cases} 3, t \le 2 \\ 4.7, 2 < t \le \sqrt{5} \\ 5, t > \sqrt{5} \end{cases}$	A= [2,3.5] B=[−1,4] **Q**
3.9	$\begin{cases} -1, t \le 0 \\ 2, 0 < t \le 1 \\ 4, t > 1 \end{cases}$	A= [3.7,5] B=**Q**∩[4,8]
3.10	$\begin{cases} -4, t \le 1 \\ 0, 1 < t \le 5 \\ 1, t > 5 \end{cases}$	A= [2.5,7] B=[3.7,4] **Q**
3.11	$\begin{cases} -0.7, t \le 2 \\ -0.1, 2 < t \le 4 \\ 1, t > 4 \end{cases}$	A= [2.3,8] B=[3,7[**Q**

3.12	$\begin{cases} -3.5, & t \le \sqrt{2} \\ 1, & \sqrt{2} < t \le 2e \\ \pi, & t > 2e \end{cases}$	$A = [e, \pi]$ $B = \mathbf{Q} \cap [-1, 3]$
3.13	$\begin{cases} -0.5, & t \le -2 \\ 0, & -2 < t \le 1 \\ \sin 1, & t > 1 \end{cases}$	$A = \,]-3, 5]$ $B = [0, 5] \setminus \mathbf{Q}$
3.14	$\begin{cases} -e, & t \le \sqrt{3} \\ 1, & \sqrt{3} < t \le 2 \\ 2.7, & t > 2 \end{cases}$	$A = \,]-2, 5[$ $B = [0, 2] \setminus \mathbf{Q}$
3.15	$\begin{cases} -5, & t \le \sqrt{5} \\ -2, & \sqrt{5} < t \le 4 \\ -1, & t > 4 \end{cases}$	$A = \,]\pi, 8[$ $B = \mathbf{Q} \cap \,]-1, 2[$
3.16	$\begin{cases} -2.5, & t \le \pi \\ 0, & \pi < t \le 5 \\ 1, & t > 5 \end{cases}$	$A = \,]-2.5, 7]$ $B = \,]0, 7[\setminus \mathbf{Q}$
3.17	$\begin{cases} -2, & t \le \sqrt{7} \\ e, & \sqrt{7} < t \le 5 \\ 10, & t > 5 \end{cases}$	$A = [\sqrt{7}, 5]$ $B = \mathbf{Q} \cap X$
3.18	$\begin{cases} -3, & t \le 1 \\ 5, & 1 < t \le 7.5 \\ 6, & t > 7.5 \end{cases}$	$A = [-2, 7.9]$ $B = X \setminus \mathbf{Q}$
3.19	$\begin{cases} 0, & t \le 2 \\ 7, & 2 < t \le \sqrt{5} \\ 9, & t > \sqrt{5} \end{cases}$	$A = [-2, 5]$ $B = [-1, 4] \setminus \mathbf{Q}$
3.20	$\begin{cases} -2, & t \le \sqrt{2} \\ 0, & \sqrt{2} < t \le 7 \\ 1, & t > 7 \end{cases}$	$A = \,]-\sqrt{2}, \sqrt{3}[$ $B = X \setminus \mathbf{Q}$

.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

Мера Лебега в $\mathbf{R}^n$.

Необходимые понятия и теоремы: Продолжение меры, внешняя и внутреняя мера, измеримые множества и их свойства, множества меры нуль, продолжение меры по Лебегу, канторово множество, борелевские множества, нигде не плотные множества.

Литература:[1] стр.30-35, [4] стр. 44-51.

1. Доказать, что множество $A \subset \mathbf{R}^n$ измеримо и найти его меру Лебега.

№	n	A
1.1	1	$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left] \frac{1}{k} - \frac{1}{10}, \frac{1}{k} + \frac{1}{10} \right\vert$
1.2	1	$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^k} + \frac{1}{10}, \frac{1}{3^k} + \frac{1}{5} \right]$
1.3	1	$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{0.5k}} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2^{0.5k}} + \frac{3}{4} \right]$
1.4	1	$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left] \frac{1}{k}, 2^{-k} + 1 \right\vert$
1.5	1	$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left] \frac{1}{k}, \frac{1}{k} + 0.35 \right.$
1.6	1	$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \mid sign(x - \sin^2(\sqrt{2}k\pi)) = -1\}$
1.7	1	$\{x \mid \exists \ \in \ , \frac{1}{2^k} < \ < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\}$
1.8	1	$\{x \mid \sin(\frac{\ }{x}) > \ ), 0 < x < \ \}$
1.9	1	$\{x \mid \cos(\frac{\ }{x}) > \ ), 0 < x < \ \}$
1.10	2	$\{(x,y) \mid \sin\frac{1}{x^2+y^2} > \ ), x^2 + y^2 \le \ \}$
1.11	2	$\{(x,y) \mid \cos\frac{1}{x^2+y^2} > \frac{\ }{2}, x^2 + y^2 \le \ \}$
1.12	2	$\{(x,y) \mid \ x^2 + y^2 \le \ , x, y \in \ \}$
1.13	2	$\{(x,y) \in \ ),1] \times \ 0,1] \mid \lvert\sin x\rvert < \frac{\ }{2}, \cos(x+y) \notin \ \}$
1.14	2	$\{(x,y) \in \ ),2] \times - \ ,1] \mid \sin\pi \ x + y) < \frac{\ }{2}, \cos(x-y) \notin \ \}$
1.15	2	Множество точек, у которых декартовы и полярные координаты иррациональны

1.16	2	$\{(x,y) \mid \sin x \in \ '\}$
1.17	2	$\{(x,y) \mid e^x \in \ ,3] \setminus Q\}$
1.18	1	$\{x \in \ ,1[\mid \mid \frac{1- \ x}{x(x- \ )} < \ \imath\}, a \in \mathbf{R}$
1.19	3	$\{(x,y,z) \mid x+y+z \in \mathbf{Z}\}$
1.20	3	$\{(x,y,z) \mid x^2+y^2=1, z \in [0,1]\}$

2. Выяснить является ли данное множество $A \subset [0,1]$ измеримым, открытым, замкнутым, всюду плотным, нигде не плотным и найти его лебегову меру.

2.1. Множество точек отрезка [0,1], у которых существует десятичное представление, не содержащее цифру 3;

2.2. Множество точек отрезка [0,1], у которых существует десятичное представление, не содержащее цифру 6;

2.3. Множество точек отрезка [0,1], у которых существует десятичное представление, не содержащее цифру 5;

2.4. Множество точек отрезка [0,1], у которых существует десятичное представление, содержащее хотя бы одну цифру 8;

2.5. Множество точек отрезка [0,1], у которых существует десятичное представление, содержащее хотя бы одну цифру 4;

2.6. Множество точек отрезка [0,1], у которых существует десятичное представление, содержащее хотя бы одну цифру 7;

2.7. Множество точек отрезка [0,1], у которых существует десятичное представление, содержащее цифру 3 только один раз;

2.8. Множество точек отрезка [0,1], у которых существует десятичное представление, содержащее цифру 4 только один раз;

2.9. Множество точек отрезка [0,1], у которых существует десятичное представление, содержащее цифру 5 только один раз;

2.10. Множество точек отрезка [0,1], у которых существует пятеричное представление, не содержащее цифру 3;

2.11. Множество точек отрезка [0,1], у которых существует пятеричное представление, содержащее хотя бы одну цифру 2;

2.12. Множество точек отрезка [0,1], у которых существует восьмеричное представление, не содержащее цифру 4;

2.13. Множество точек отрезка [0,1], у которых существует восьмеричное представление, содержащее хотя бы одну цифру 2;

2.14. Множество точек отрезка [0,1], у которых существует пятеричное представление, не содержащее цифру 2;

2.15. Множество точек отрезка [0,1], у которых существует пятеричное представление, содержащее цифру 1 хотя бы один раз;

2.16. Множество точек отрезка [0,1], у которых существует семиричное представление, не содержащее цифру 4;

2.17. Множество точек отрезка [0,1], у которых существует семиричное представление, содержащее цифру 2 хотя бы один раз;

2.18. Множество точек отрезка [0,1], у которых в десятичном разложении цифра 2 встречается раньше цифры 3;

2.19. Множество точек отрезка [0,1], в разложении которых в бесконечную дробь в двоичной системе исчисления на всех четных местах стоят нули;

2.20. Множество точек отрезка [0,1], у которых существует десятичное представление, содержащее подряд трех цифр 2.