ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

Интегральные уравнения

Необходимые понятия и теоремы: *компактные операторы, фредгольмовы операторы, интегральные операторы, признаки компактности интегральных операторов, интегральный оператор с вырожденным ядром, сведение интегрального уравнения с вырожденным ядром к системе алгебраических уравнений, условия разрешимости неоднородного уравнения ,теоремы Фредгольма для интегральных уравнений.*

Литература: [] стр. 197-201, 245-264, [] стр. 105-120, [] стр. 72-87, 220-226, [] стр. 112-115, [] стр. 237-245, 456-480, [] стр. 177-190, [] стр. 212-245, [] стр. 88-102.

1. Являются ли следующие операторы компактными в пространстве *C[0,1]* **и** $L_2[0,1]$**?**

	A		A
1.1	$t^2 x(t)$	1.2	$2x(\sqrt{t})$
1.3	$x(\frac{1}{3}) + \ (\frac{1}{5})\cos t - \ (\frac{1}{7})t$	1.4	$\int_0^{0.5} (t^2+1)x(s)ds + e^t x(\frac{1}{2})$
1.5	$(Ax)(t) = x(t^2)$	1.6	$(Ax)(t) = t^{3/2} x(\sqrt{t})$
1.7	$(Ax)(t) = t^2 x(t)$	1.8	$(Ax)(t) = e^t x(t)$
1.9	$(Ax)(t) = t^2 x(0)$	1.10	$(Ax)(t) = 2x(t)$
1.11	$(Ax)(t) = \int_0^t (t - \ )x(s)ds$	1.12	$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)ds$
1.13	$(Ax)(t) = x(\sqrt{t})$	1.14	$(Ax)(t) = t^2 x(0) + \ x(1)$
1.15	$(Ax)(t) = \int_0^1 \|t + \ \|x(s)ds$	1.16	$(Ax)(t) = \int_0^1 e^{\|t- \ \|} x(s)ds$
1.17	$(Ax)(t) = x(0) - \ x(1)$	1.18	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 tsx(s)ds$
1.19	$(Ax)(t) = x(t) - \int_0^1 t^2 sx(s)ds$	1.20	$(Ax)(t) = \int_0^1 \|t - \ \|x(s)ds$

1.21	$\int_0^1 \frac{t}{1-s} x(s)ds$	1.22	$x(\sqrt[3]{t})$
1.23	$\int_0^1 \frac{\cos t^2}{\sqrt{s}} x(s)ds$	1.24	$\int_0^1 \frac{\sin(t-s)}{\lvert t-s\rvert^{3/2}} x(s)ds$
1.25	$\int_0^1 \frac{\cos s}{\lvert t-s\rvert^{1/2}} x(s)ds$	1.26	$\int_0^1 \frac{1}{\lvert \sin t - \sin s\rvert^{1/4}} x(s)ds$

2. Будет ли компактным оператор $A: X \to$?

	X	$У$	A
2.1	$C^{(1)}[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x'(t)$
2.2	$C^{(2)}[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x'(t)$
2.3	$C^{(2)}[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x''(t)$
2.4	$C^{(1)}[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t) = x'(t)$
2.5	$C[0,1]$	l_2	$Ax = \left(\frac{1}{2}\int_0^1 tx(t)dt, \dots, \frac{1}{2^k}\int_0^1 t^k x(t)dt, \dots\right)$
2.6	$C[0,1]$	l_2	$Ax = \left(\frac{1}{2}\int_0^1 tx(t)dt, \dots, \frac{1}{n}\int_0^1 t^{n-1} x(t)dt, \dots\right)$
2.7	$L_1[0,1]$	l_1	$Ax = \left(\frac{1}{2}\int_0^1 tx(t)dt, \dots, \frac{1}{2^k}\int_0^1 t^k x(t)dt, \dots\right)$
2.8	$C^{(1)}[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t)$
2.9	$C[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t)$
2.10	$C^{(2)}[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^t (t-s)x(s)ds$
2.11	$L_4[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t)$
2.12	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)ds +$ [illegible](t)
2.13	$C^{(2)}[0,1]$	$C^{(1)}[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t)$
2.14	$L_1[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t)$
2.15	$C^{(2)}[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = x(t)$
4.16	$L_1[0,1]$	l_1	$Ax = \left(\frac{1}{3}\int_0^1 tx(t)dt, \dots, \frac{1}{3^k}\int_0^1 t^k x(t)dt, \dots\right)$

3. Найти все решения следующих интегральных уравнений (исследование провести для всех λ и для всех значений параметров a,b,c, входящих в свободный член этих уравнений).

	Уравнение
3.1	$x(t)-\lambda\int_0^{\pi/2}(\sin t\cos s+\sin 2t\cos 2s)x(s)ds=a\sin t+b$
3.2	$x(t)-\lambda\int_0^{\pi/2}\cos(t+s)x(s)ds=a\sin t+b$
3.3	$x(t)-\lambda\int_{-1}^{1}(t^2s+ts^2)x(s)ds=at+bt^3+c$
3.4	$x(t)-\lambda\int_{-1}^{1}(\sqrt[3]{s}+\sqrt[3]{t})x(s)ds=(a+b)t^2+t-c$
3.5	$x(t)-\lambda\int_0^{\pi/2}\cos(2t+4s)x(s)ds=a+b\sin 2t$
3.6	$x(t)-\lambda\int_0^{1}(t+s)x(s)ds=at^2+b+1$
3.7	$x(t)-\lambda\int_{-1}^{1}(s+ts^2)x(s)ds=at^2+b+ct$
3.8	$x(t)-\lambda\int_0^{\pi}(\sin t+t\cos s)x(s)ds=b\cos t-a$
3.9	$x(t)=\lambda\int_0^{\pi}\cos(2t+s)x(s)ds+bt+a$
3.10	$x(t)=\lambda\int_0^{1}[(\frac{t}{s})^{2/5}+(\frac{s}{t})^{2/5}]x(s)ds-b+a$
3.11	$x(t)=\lambda\int_{-2}^{2}(t+t^2s)x(s)ds+a+b\sin 2\pi t$
3.12	$x(t)=\lambda\int_0^{1}(2t-4t^2s)x(s)ds+(a-b)t+t^2$
3.13	$x(t)=\lambda\int_{-1}^{1}(ts^2+t^4s^3)x(s)ds+a+bt$

3.14	$x(t) = \lambda \int_0^1 (ts + t^4 s^2) x(s) ds + at^2 + b$

4. При каждом значении λ выяснить с помощью сопряженного уравнения, для каких значений параметров λ, α, β, γ существует решение данного интегрального уравнения в пространстве *$L_2[a,b]$;* в пространстве *$C[a,b]$*.

	a	*b*	Уравнение
4.1	*0*	π	$x(t)- \int_0^{\pi} \sin(2t+s)x(s)ds=(\alpha \quad)t+ \quad \sin t+$
4.2	*0*	π	$x(t)- \int_0^{\pi} \sin(t-2s)x(s)ds=(\alpha \;-\;)t+$
4.3	*0*	π	$x(t)- \int_0^{\pi} \cos(2t+s)x(s)ds= \quad -2\beta\cos 2t$
4.4	*0*	π	$x(t)- \int_0^{\pi} (\cos t\sin s-\cos 2t\cos 2s)x(s)ds= \quad t \;-\; t^2$
4.5	*0*	*2*π	$x(t)- \int_0^{2\pi} (\cos t\sin s-\cos 2t\cos 2s)x(s)ds=(\gamma \;-\;)t+$
4.6	*0*	*2*π	$x(t)- \int_0^{2\pi} (\cos t\cos s+2\sin 2t\sin 2s)x(s)ds= \quad t$
4.7	*0*	*1*	$x(t)- \int_0^{1} ((\frac{t}{s})^{2/5}+(\frac{s}{t})^{2/5})x(s)ds=(\alpha \quad)t+ \quad t^2$
4.8	*0*	*1*	$x(t)- \int_0^{1} (t+s-2ts)x(s)ds= \quad t^2+ \quad t- \quad t^3$
4.9	*-1*	*1*	$x(t)- \int_{-1}^{1} (t^4+5t^3s)x(s)ds= \quad t^3+ \quad t-$
4.10	*-1*	*1*	$x(t)- \int_{-1}^{1} (t^3s+t^2s^2)x(s)ds=(\alpha \;+\;)t+ \quad e^t$
4.11	*-1*	*1*	$x(t)- \int_{-1}^{1} (2ts^3+5t^2s^2)x(s)ds= \quad -1+t^2$
4.12	*-1*	*1*	$x(t)- \int_{-1}^{1} (t^4-ts)x(s)ds=(\alpha \quad)\sin t-$
4.13	*-1*	*1*	$x(t)- \int_{-1}^{1} (ts+t^2+s^2-3s^2t^2)x(s)ds= \quad -(\beta \;-1)t$
4.14	*-1*	*1*	$x(t)- \int_{-1}^{1} (5+4ts-3t^3-3s^2+9t^2s^2)x(s)ds= \quad t \;-$

Будем рассматривать интегральное уравнение

$$x(t)= \int_a^b K(t,s)x(s)ds+f(t). \quad (1)$$

5. Решите уравнение (1) при μ = , если

	a	*b*	$K(t,s)$	*f(t)*

5.1	*0*	*1*	$t + s - 2ts$	$t + t^2$
5.2	*0*	π	$sin(t - 2s)$	$cos2t$
5.3	*0*	*1*	$5st$	$3t + 2$
5.4	*1*	*1*	$3t - s^2t^2$	$t^2 + t^4$
5.5	*0*	π	$cos(t + s)$	$sint$
5.6	*0*	π	$sins + scost$	$1 - \frac{2}{\pi}t$
5.7	*0*	π	$\frac{2}{\pi}\cos(s + \ )$	$1 + sint$
5.8	*0*	π	$sin(s - 2t)$	$cos2t$
5.9	*0*	π	$cos(s + t)$	$1 + 2sint$
5.10	*0*	π 2	$s\,inscost$	$sint$
5.11	*0*	*1*	e^{t+s}	*1*
5.12	*0*	*1*	$2e^{t-s}$	*1*
5.13	*-1*	*1*	$3s + st - 5s^2t^2$	$3t$
5.14	*-1*	*1*	$\frac{5}{2}s^2t^2 - \frac{1}{2}t(3 + \ )$	t

6. Не решая уравнения (1), определите, при каких $f \in {}_2[a,b]$ оно имеет решение в пространстве $L_2[a,b]$ (в этой задаче мы полагаем $\mu = $).

	a	b	$K(t,s)$
6.1	*0*	π	$\frac{2}{\pi}\cos(t + \ )$
6.2	*-2*	*2*	$\frac{i}{4}\lvert t\rvert$
6.3	*0*	π/2	$4sin^2t$
6.4	*0*	*1*	$2st - 4t^2$
6.5	*-1*	*1*	$St + s^2t^2$
6.6	*0*	2π	$Sin(t - 2s)$
6.7	*0*	*1*	$i\,st$
6.8	-π	π	se^{it}
6.9	*-1*	*1*	$i\,(t^2 - ts)$
6.10	*0*	*1*	$t – is$
6.11	*-1*	*1*	$t^4 + 5it^3s$
6.12	*-1*	*1*	$i\,s + ts^2$
6.13	*0*	π	$s\,in(3t + s)$
6.14	*0*	2π	$\frac{1}{\pi}\sin(t + \ )$

7. При каких значениях параметра $\mu \in \mathbf{C}$ уравнение (1) разрешимо в пространстве $C[a,b]$ при любой функции f из $C[a,b]$?

	a	b	$K(s,t)$
7.1	-2	2	$\lvert t\rvert$
7.2	0	$\pi \;\; 2$	$\sin t \cos s$
7.3	-1	1	$t^2 - 2ts$
7.4	-1	1	$s^2 + ts$
7.5	-1	1	$2s^3 + t^3$
7.6	-1	1	st
7.7	0	π	$\cos(t + s)$
7.8	0	1	$s^2 - 2st$
7.9	0	1	s^2t
7.10	0	1	e^{t+2s}
7.11	0	1	$3s + st$
7.12	0	1	$2s^2t$
7.13	-1	1	$t(1 - s)$
7.14	0	2π	$e^{i(t - s)}$