ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5.

Сопряженные операторы

Необходимые понятия и теоремы: *сопряженное пространство, пространства, сопряженные к пространствам* $L_p(T,\mu\ \ ,l_p(p\geq\ ),$ *C[a,b], C_0, общий вид линейных непрерывных функционалов в пространствах* $L_p(T,\mu\ \ ,l_p,$ *C[a,b], C_0, сопряженный оператор, его свойства, ядро и образ оператора, теорема о разрешимости уравнения Ax=y*

1. Найти сопряженный к оператору $A: X \to$

N	X	Y	A
1.1	$L_1[-1,1]$	$L_3[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_0^1 \frac{s}{\sqrt[3]{t}}x(s^2)ds$
1.2	$L_1[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_0^t t^2 sx(s)ds$
1.3	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_0^{t^2} ts^3 x(s)ds$
1.4	$L_2[-1,1]$	$L_2[-1,1]$	$(Ax)(t)=\int_t^1 e^s x(s)ds$
1.5	$L_3[-1,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_0^1 \frac{s}{\sqrt{ts}}x(s)ds-\int_t^1 ts^2 x(s)ds$
1.6	$L_4[-1,2]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_{-1}^t sx(s)ds$
1.7	l_3	*R*	$Ax=(x(1)-\ \ x(2))\frac{1}{2}-\ \ (4)$
1.8	*R*	l_3	$Ax=\left(\frac{x}{1^2},\frac{x}{2^2},\dots,\frac{x}{k^2},\dots\right)$
1.9	$L_1[0,2]$	*R*	$Ax=\int_0^1 s^2 x(s^2)ds$
1.10	l_3	*R*	$Ax=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x(k^2)}{2^k}$
1.11	*R*	$L_1[0,1]$	*(Ax)(t)=xsint*

2. С помощью сопряженного оператора найти необходимые условия разрешимости уравнения *Ax=y,* где $A: X \rightarrow\ $.

N	X	Ax
2.1	R^2	*(x(1)+2x(2), 2x(1)+4x(2))*
2.2	R^3	*(x(1)+x(2), x(2)-x(3), 2x(3)-2x(2))*
2.3	R^2	$((2-\ \lambda\ x(1)+\ x(2), x(1)+\ 1+\ ,\ x(2))$
2.4	R^3	$(-\ \ (1)+\ (2),(1-\ ,\ x(2)-\ (3),\ \ 2x(3)-\ x(2))$
2.5	R^2	$(\lambda\ (1)+\ (2),2x(1)+\ ,\ (2))$
2.6	R^3	$(\lambda\ (1)-\ (2)+\ (3),x(1)+\ ,\ (2)-\ (3),(3-\ ,\ x(3))$
2.7	l_1	*(x(1)+2x(2), 2x(1)+4x(2), x(3),x(4),…,x(k),…)*
2.8	l_3	*(x(1), x(2)+x(3), x(3)-x(4),-2x(3)+2x(4), x(5),x(6),…)*
2.9	l_2	*(x(1)-x(2), 2x(2)-2x(1),2 x(3), 4x(4), 2x(5), 4x(6),…)*
2.10	$l_{3/2}$	*(x(1)+3x(2), x(1)-x(3), x(3)-x(2), x(4), x(5), 0, 0…)*
2.11	l_1	*(x(1),x(2), x(2),x(1),x(4),x(5),…,x(k),…)*
2.12	$l_{5/2}$	*(x(1)-x(2), 7x(1)-x(3), x(4),x(5),…,x(k),…)*

1. Найти сопряженный к оператору А в гильбертовом пространстве Н, является ли он сопряженным?

а) $H=L_2[0,1]$

N	(Ax)(t)	N	(Ax)(t)
3.1	$\int_0^{t^2} ts^2 x(s)ds$	3.2	$\int_{t^2}^{\sqrt{t}} ts^3 x(s)ds$
3.3	$\int_{t^2}^{1} t^3 sx(s)ds$	3.4	$\int_0^{\sin t} t^2 s^2 x(s)ds$
3.5	$\int_t^{t^2} e^t sx(s)ds$	3.6	$\int_t^{1-t} t^2 sx(s)ds$

	K(t,s)		K(t,s)		K(t,s)
5.1	$e^i \sin(t+s)$	5.6	$i(t+s)$	5.11	$\cos(t+s)$
5.2	$e^{2(t+s)}$	5.7	ts	5.12	ts^2
5.3	$\sqrt{t^2}+\ \overline{\ ^2}$	5.8	$2it^2s$	5.13	$\sqrt{ts}$
5.4	$2(t^2+s^2)$	5.9	t^2s^2	5.14	$\begin{cases} 1, 0 \le s \le t \\ 0, s > t \end{cases}$
5.5	$e^{i(t+s)}$	5.10	te^s		

	$(Ax)(t)$		$(Ax)(t)$
2.1	$(\alpha\ \ \mathrm{n}\, t)x(t)$	2.10	$\alpha\ \ x(t)$
2.2	$\alpha\ \ x(t)$	2.11	$\cos(\alpha\ \ x(t)$
2.3	$e^{\alpha}\ x(t)$	2.12	$e^{\alpha}\iota x(t)$
2.4	$e^{\alpha\pi}\ tx(t)$	2.13	$(\sin\alpha\ \ \sqrt{t}x(t)$
2.5	$\alpha\ \ x(t)$	2.14	$(\cos\alpha\ \ x(t)$
2.6	$\alpha\ \ \bar{t}x(t)$	2.15	$\alpha\ \ \sqrt{t}x(t)$
2.7	$\sin(\alpha\ \ x(t)$	2.16	$e^{\alpha}\ x(\sqrt{t})$
2.8	$\int_0^{t^3} tx(\sqrt{s})ds$	2.17	$\int_{t^2}^{1-t} tsx(s)ds$
2.9	$\int_{t^3}^{1} t^2x(\sqrt[3]{s})ds$	2.18	$\int_{\arcsin t/2}^{t} ts^2x(\sqrt{s})ds$

б) H=l_2 с весом p, где p(k)=1/2^k.

N	Ax	N	Ax
2.1	$(0,x(2),x(1),x(3),\ldots x(k),\ldots)$	2.2	$(\frac{x(1)}{3},\frac{x(2)}{3^2},0,0,\frac{x(3)}{3^3},\frac{x(4)}{3^4},\ldots)$
2.3	$(x(3),x(2),0,x(4),x(5),\ldots,x(k),\ldots)$	2.4	$(x(1)-\ \ x(3),x(1)+\ \ (5),0,0,0,\ldots)$
2.5	$(x(2),x(3),\ldots x(n),0,0,\ldots)$	2.6	$(x(2)-\ \ x(4),0,x(7)-\ \ (1),0,0,0,\ldots)$
2.7	$(\underbrace{0,\ldots 0}_{n},x(1),2x(2),x(3),2x(4),\ldots)$	2.8	$(ix(2),x(1)-\ \ x(3),i^3x(3),0,0,0,\ldots)$
2.9	$(x(2),0,x(4),0,x(6),0,\ldots)$	2.10	$(\frac{x(3)}{3!},\frac{x(4)}{4!},\ldots,\frac{x(n)}{n!},0,0,\ldots)$
2.11	$(x(2),x(3), \ldots)$	2.12	$(x(1),x(2),x(3),0, \ldots)$
2.13	$\boldsymbol{(0,0,x_1, x_2/2, \ldots)}$	2.14	$(0,x(1),x(2), \ldots)$
2.15	$(x_2/2,x_3/3, \ldots)$	2.16	$\boldsymbol{(0,0,x_2,0, \ldots)}$
2.17	$(0,0,0,x_1,0, \ldots)$	2.18	$(x_2,x_3,0, \ldots)$
2.19	$\boldsymbol{(x_5,x_6,x_7, \ldots)}$	2.20	$(x_1,x_2/2,x_3/3, \ldots)$
2.21	$(x_1,0,x_2,0,x_3, \ldots)$	2.22	$(0,x_1,x_2/2, \ldots)$
2.23	$\boldsymbol{(x_1,0,0,x_2,0, \ldots)}$	2.24	$(x_3/3,x_4/4, \ldots)$

4. Если это возможно,укажите пример самосопряжённого оператора A в гильбертовом пространстве,точечный спектр которого совпадает с данным множеством $S\subset$.

	S		S
4.1	{1/n:n=1,2,...}	**4.6**	*{0,1,2,3}*
4.2	{0,i}	**4.7**	$\{\lambda \in C : \mid \lambda = \}$
4.3	$\{2^{-k}$:k=1,2,...}	**4.8**	$\{e^{i\varphi} : 0 \le \varphi \le \pi$
4.4	{i/n:n=1,2,...}	**4.9**	*{2^n:n=1,2,...}*
4.5	{in:n=1,...10}	**4.10**	*{cos(in):n=1,2,...}*
4.11	*{sin(in):n=1,2,...}*	**4.12**	$[0;+\infty)$
4.13	*{-1,0,1}*	**4.14**	*{0,1,5}*

5. В прстранстве C^3 со скалярным произведением $(x,y) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3$ найдите сопряжённый оператор A^* для оператора A ,заданного матрицей M. Являетсяя ли A самосопряжённым?

	M		***M***
1.1	$\begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & i \end{pmatrix}$	**1.8**	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.2	$\begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}$	**1.9**	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2i \\ 0 & i & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	**1.10**	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
1.4	$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}$	**1.11**	$\begin{pmatrix} -i & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
1.5	$\begin{pmatrix} i & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	**1.12**	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & 1 & 0 \\ -2i & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.6	$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	**1.13**	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -i \\ 0 & i & 2 \end{pmatrix}$
1.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	**1.14**	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}$