ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Полнота метрических пространств.

Необходимые понятия и теоремы: *метрика, метрическое пространство, сходящаяся последовательность, последовательность Коши, полное метрическое пространство. Литература: [1]стр. 91-97; [2]стр.33-38; [4]стр.53-63; [5]стр.66-74; [6]стр.33-40.*

Литература: [1]стр. 91-97; [2]стр. 33-38; [8] стр. 53-63; [9] стр. 66-74; [11]стр. 33-40.

3.Является ли последовательность x_n последовательностью Коши в указанном пространстве *X*? Найти $\lim_{n\to} x_n$, если он существует.

N	*X*	X_n
3.1	$L_1[-1, 2]$	$x_n(t)=\begin{cases}\sin nt, t\in Q\cap[-1,2],\\ \sqrt{t^2+1/n^3}, t\in[-1,2]\setminus Q.\end{cases}$
3.2	$L_{3/2}[0, 1]$	$x_n(t)=\begin{cases}ne^{nt}, t\in K,\\ t^3/n, t\in[0,1]\setminus K.\end{cases}$
3.3	$L_4[-2, 0]$	$x_n(t)=\begin{cases}nt, t\in Q\cap[-2,0],\\ ne^{nt}, t\in[-2,0]\setminus Q.\end{cases}$
3.4	$L_2[-1, 1]$	$x_n(t)=\begin{cases}\sqrt{t^2+1/n^4}, t\in[-1,1]\setminus K,\\ \cos(n+t), t\in K\cap[-1,1].\end{cases}$
3.5	$L_4[0, 3]$	$x_n(t)=\begin{cases}\sin\pi nt, t\in Q\cap[0,3],\\ (t/3)^n, t\in[0,3]\setminus Q.\end{cases}$
3.6	$L_{3/5}[0, 1]$	$x_n(t)=\begin{cases}(n+t)^{-1}, t\in[0,1]\setminus K,\\ \exp(n^2t), t\in K\cap[0,1].\end{cases}$
3.7	$L_2[0, \pi/2]$	$x_n(t)=\begin{cases}sin(t/n), t\in[0,\pi/2]\setminus Q,\\ cos(t/n), t\in Q\cap[0,\pi/2].\end{cases}$
3.8	$L_{5/3}[0,1]$	$x_n(t)=\begin{cases}cos\, nt, t\in[0,1]\setminus K,\\ exp(\pi t^n), t\in K\cap[0,1].\end{cases}$
3.9	$L_{4/3}[0,2]$	$x_n(t)=\begin{cases}(0{,}5t)^n, t\in[0,2]\setminus K,\\ ne^{nt}, t\in K\cap[0,1].\end{cases}$
3.10	$L_{9/2}[0,1]$	$x_n(t)=\begin{cases}(n+t)^{-1}, t\in[0,1]\setminus Q,\\ (sin\, t)^n, t\in Q\cap[0,1].\end{cases}$

2. Выяснить, является ли заданное пространство *(X,ρ)* полным:

2.1. Пространство $C^{(1)}[a,b]$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций с метрикой

$$\rho(x,y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|+\max_{a\le t\le b}|x'(t)-y'(t)|.$$

2.2. Пространство $l_p\ (p\ge 1)$ числовых последовательностей $x=(x(1),x(2),\ldots,x(k),\ldots)$, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty}|x(k)|^p<\infty$ с метрикой

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x(k)-y(k)|^p\right)^{1/p}.$$

2.3. Пространство l_∞ всех ограниченных числовых последовательностей $x=(x(1),x(2),\ldots,x(k),\ldots)$, с метрикой

$$\rho(x,y)=\sup_k|x(t)-y(t)|.$$

2.4. Пространство c_0 сходящихся к нулю последовательностей $x=(x(1),x(2),\ldots,x(k),\ldots)$ с метрикой $\rho(x,y)=\sup_k|x(t)-y(t)|$.

2.5. Пространство c сходящихся числовых последовательностей $x=(x(1),x(2),\ldots,x(k),\ldots)$ с метрикой $\rho(x,y)=\sup_k|x(t)-y(t)|$.

6)Пространство $l_{p,\mu}\ (p\ge 1)$ числовых последовательностей $x=(x(1),x(2),\ldots,x(k),\ldots)$, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty}|x(k)|^p\mu(k)<\infty$ где $\mu=(\mu(1),\mu(2),\ldots,\mu(k),\ldots)\ \mu(k)>0$ - заданная числовая последовательность, с метрикой

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x(k)-y(k)|^p\mu(k)\right)^{1/p}.$$

2.6. Пространство $CB(a,b)$ ограниченных и непрерывных на интервале (a,b) функций с метрикой $\rho(x,y)=\sup_{a<t<b}|x(t)-y(t)|$.

2.7. Пространство s всех числовых последовательностей $x=(x(1),x(2),\ldots,x(k),\ldots)$ с метрикой $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|x(k)-y(k)|}{1+|x(k)-y(k)|}$.

2.8. Пространство $C^{(m)}[a,b]$ всех функций на отрезке $[a,b]$, имеющих непрерывные производных до порядка m включительно, с метрикой $\rho(x,y)=\sum_{k=0}^{m}\max_{a\le t\le b}|x^k(t)-y^k(t)|.$.

2.9. Пространство $C^\infty[a,b]$ всех бесконечно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций с метрикой

$$\rho(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{\max\limits_{a\le t\le b}|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)|}{1+\max\limits_{a\le t\le b}|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)|}.$$

2.10. Пространство $H^{(\alpha)}[a,b]$ функций на отрезке [a,b], удовлетворяющих условию Гельдера ($|x(t)-x(s)|\le c|t-s|^{\alpha}$ с показателем α,
с метрикой

$$\rho(x,y)=\sum_{k=0} \max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|+\sup_{a\le t_1<t_2\le b}\frac{|x(t_1)-y(t_1)-x(t_2)+y(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\alpha}}..$$

2.11. Пространство *Lip[a,b]* функций на отрезке *[a,b],* удовлетворяющих условию Липшица, с метрикой

$$\rho(x,y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|+\sup_{a\le t_1<t_2\le b}\frac{|x(t_1)-y(t_1)-x(t_2)+y(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\alpha}}..$$

2.12. Пространство всех дважды дифференцируемых на отрезке *[a,b]* функций с метрикой $\rho(x,y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$.

2.13. Пространство всех непрерывных на отрезке *[a,b*] функций с метрикой $\rho(x,y)=\left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^2dt\right)^{1/2}$.

2.14. Пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке [a,b] функций с метрикой $\rho(x,y)=|x(a)-y(a)|+\int_a^b |x'(t)-y'(t)|dt$.

2.15. Пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке [a,b] функций с метрикой $\rho(x,y)=|x(a)-y(a)|+\max_{a\le t\le b}|x'(t)-y'(t)|$.

2.16. Пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке [0,1] функций с метрикой $\rho(x,y)=\max_{0\le t\le 3/4}|x(t)-y(t)|+\int_{0,5}^{1}|x'(t)-y'(t)|dt.$

2.17. Пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке [0,1] функций с метрикой. $\rho(x,y)=\max_{0\le t\le 3/4}|x(t)-y(t)|+\max_{1/2\le t\le 1}|x'(t)-y'(t)|$

2.18. Пространство *V[a, b]* функций ограниченной вариации на отрезке *[a, b]* с метрикой $\rho(x,y)=|x(a)-y(a)|+V_a^b(x(t)-y(t))$.

2.19. Пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке [0,1] функций с метрикой а)
$\rho_1(x,y)=\max_{0\le t\le 1/2}|x(t)-y(t)|+\max_{0\le t\le 1}|x'(t)-y'(t)|$

б) $\rho_2(x,y)=\max_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|+\max_{0\le t\le 1/2}|x'(t)-y'(t)|$

	X	$\rho(x,y)$
2.20	*C[0,1]*	$\rho(x,y)=\int_0^1 |y(t)-x(t)|dt$

2.21	$\left\{ x \in C[0,1]: \max\limits_{t\in[0,1]} \lvert x(t)\rvert < 1 \right\}$	$\rho(x,y) = \max\limits_{t\in[0,1]} \lvert y(t) - x(t)\rvert$
2.22	*C[0,1]*	$\rho(x,y) = \left(\int_0^1 \lvert y(t) - x(t)\rvert^2 dt \right)^{1/2}$
2.23	$C^{(1)}[0,1]$	$\rho(x,y) = \int_0^1 \lvert y(t) - x(t)\rvert dt$
2.24	$\left\{ x \in l_2: \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lvert x_k\rvert^2 < 1 \right\}$	$\rho(x,y) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lvert y_k - x_k\rvert^2 \right)^{1/2}$
2.25	l_2	$\rho(x,y) = \sup\limits_n \lvert y_n - x_n\rvert$
2.26	c_0	$\rho(x,y) = \sup\limits_n \lvert y_n - x_n\rvert$
2.27	$C^{(1)}[0,1]$	$\rho(x,y) = \max\limits_{0\le t\le 1} \lvert x(t) - y(t)\rvert + \max\limits_{0\le t\le 1} \lvert x'$
2.28	$C^{(2)}[0,1]$	$\rho(x,y) = \max\limits_{0\le t\le 1} \lvert y(t) - x(t)\rvert$
2.29	$l_1 \cap l_2$	$\rho(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lvert y_k - x_k\rvert$
2.30	$l_1 \cap l_2$	$\rho(x,y) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lvert y_k - x_k\rvert^2 \right)^{1/2}$
2.31	$l_1 \cap l_2$	$\rho(x,y) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lvert y_k - x_k\rvert^3 \right)^{1/3}$
2.32	$l_1 \cap l_2$	$\rho(x,y) = \sup\limits_n \lvert y_n - x_n\rvert$
2.33	$C^{(1)}[0,1]$	$\rho(x,y) = \max\limits_{0\le t\le 1} \lvert y(t) - x(t)\rvert$
2.34	$l_1 \cap l_2$	$\rho(x,y) = \sup\limits_n \lvert y_n - x_n\rvert$