ГЛАВА 4. Линейные и нормированные пространства

А. Основные понятия и теоремы

<u>Определение 1.</u> Непустое множество L называется **линейным (векторным) пространством** над полем ***K***, если определены два отображения из $L \times L$ в L и из ***K*** $\times L$ в L, называемые сложением и умножением на скаляры соответственно, удовлетворяющие следующим свойствам для любых $x, y \in L$, $\lambda, \mu \in$ ***K***:

L есть коммутативная группа по сложению;

$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

$1 \cdot x = x$.

Элементы линейного пространства называются точками или векторами.

Всюду ниже ***K*** будет равно **R** или **C**. В этом случае L называют соответственно вещественным или комплексным пространством.

<u>Определение 2.</u> Конечная система векторов $\{x_k \mid 1 \le k \le n\} \subset L$ называется **линейно независимой,** если равенство $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0, \lambda_k \in$ ***K*** влечет равенства $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$. В противном случае система $\{x_k \mid 1 \le k \le n\}$ называется **линейно зависимой.**

Бесконечная система векторов называется **линейно независимой**, если каждая ее конечная подсистема линейно независима.

Линейное пространство L называется **бесконечномерным** (пишут $\dim L = \infty$), если в L существует бесконечная линейно независимая система.

Подмножество векторного пространства L называется **подпространством,** если оно само является векторным пространством относительно тех же операций, что и в L.

Пусть M есть подпространство линейного пространства L. Для элементов $x, y \in L$ будем писать $x \sim y$, если $x - y \in M$. Это отношение эквивалентности на L. Класс эквивалентности элемента x есть $\tilde{x} = x + M = \{x + m \mid m \in M\}$.

Множество L/M классов эквивалентности элементов из L является линейным пространством над $\boldsymbol{K}$ относительно операций $\tilde{x} + \tilde{y} = x + y + M, \lambda\tilde{x} = \lambda x + M$. Оно называется **фактор-пространством** пространства L по подпространству M.

Подмножество A линейного пространства L называется **выпуклым,** если $\lambda x + (1-\lambda) y \in A$ для любых $x, y \in A$ и любого $\lambda \in [0,1]$.

<u>Определение 3.</u> Пусть L — линейное пространство над полем $\boldsymbol{K}$. Отображение $p\colon L \to \mathbf{R}_+$ называется **нормой,** если при любых $x, y \in L$ и любом $\lambda \in \boldsymbol{K}$ выполняются следующие соотношения :

1) $p(x) \geq 0$ и $p(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x=0$.

2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$,

3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (неравенство треугольника).

Как правило, вместо $p(x)$ пишут $\|x\|$.

<u>Определение 4.</u> Линейное (векторное) пространство с заданной на нем нормой называется **нормированным** пространством.

Каждое нормированное пространство $(L, \|\cdot\|)$ является метрическим относительно естественной метрики $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

<u>Определение 5.</u> Полное нормированное пространство, т.е. такое линейное пространство, наделенное нормой, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится, называется **банаховым** пространством.

<u>Определение 6.</u> Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, заданные на одном и том же линейном пространстве L, называются **эквивалентными,** если найдутся такие числа $a, b > 0$, что при всех $x \in L$ выполняются неравенства $a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$.

Смысл этого понятия в том, что топологии, порождаемые этими нормами, совпадают. Другими словами, $x_n \to x$ по норме $\|\cdot\|_1$ тогда и только тогда, когда $x_n \to x$ по норме $\|\cdot\|_2$ $(x_n, x \in L)$ (проверьте !). Следовательно, если нормы эквивалентны, то соответствующие нормированные пространства обладают многими общими свойствами: у них одинаковые топологии, множество сходящихся последовательностей, совокупности компактных и предкомпактных множеств, множества последовательностей Коши, они одновременно полные или неполные.

Б. Задачи к лабораторной работе

Необходимые понятия и теоремы см. выше.

Литература : [1] стр. 136-149, [2] стр. 84-93, [7] стр. 62-67, 215-228, [8] стр. 78-80, 87-90, 93-96, [9] стр. 119-128, 138-143, [11] стр. 63-101, [14] стр. 9-29, 48-57, [15] стр. 9-26.

1. Проверьте, является ли функция p нормой в пространстве X. Образует ли пара (X,ρ), где $\rho(x,y) = p(x-y)$, метрическое пространство? Квазиметрическое пространство?

	X	$p(x)$
1.1	$C^{(n)}[0,1]$	$\sum_{k=0}^{n} \max_{0\le t\le 1} \lvert x^{(k)}(t)\rvert$
1.2	l_∞	$\sup\{\lvert x_n\rvert \mid n\in \mathbb{N}\}$
1.3	$B(\boldsymbol{R})$	$\sup\{\lvert x(t)\rvert \mid t\in \boldsymbol{R}\}$
1.4	$C[0,1]$	$\int_0^1 \lvert x(t)\rvert dt$
1.5	l_1	$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\lvert x_n\rvert$
1.6	$C^{(1)}[a,b]$	$\lvert x(a)\rvert + \max\{\lvert x'(t)\rvert \mid t\in [a,b]\}$
1.7	c_0	$\sup\{\lvert x_n\rvert \mid n\in \mathbb{N}\}$
1.8	$C^{(1)}[a,b]$	$\int_0^1 \lvert x(t)\rvert dt + \max\{\lvert x'(t)\rvert \mid t\in [a,b]\}$
1.9	c	$\sup\{n^{-1}\lvert x_n\rvert \mid n\in \mathbb{N}\}$
1.10	$\mathbf{R}^n$	$\sum_{k=1}^{n} \lvert x_k\rvert$
1.11	$D(\boldsymbol{R})$	$\sup\{\lvert x(t)\rvert \mid t\in \boldsymbol{R}\}$
1.12	$C^{(1)}[a,b]$	$\max\{\lvert x'(t)\rvert \mid t\in [a,b]\}$
1.13	$C^{(2)}[0,1]$	$\max\{\lvert x''(t)\rvert \mid t\in [0,1]\}$
1.14	$C^{(1)}[0,1]$	$\lvert x(0)\rvert + \max\{\lvert x''(t)\rvert \mid t\in [0,1]\}$
1.15	$C^{(2)}[0,1]$	$\lvert x(0)\rvert + \lvert x(1)\rvert + \max\{\lvert x''(t)\rvert \mid t\in [0,1]\}$
1.16	$\{x\in l_2 \mid \sum_{k=1}^{\infty}\lvert x(k)\rvert^3<1\}$	$\sup_k \lvert x(k)\rvert$
1.17	$\{x(t)\in C^{(1)}[0,1] \mid x'(0)=0\}$	$\max_{0\le t\le 0,5}\lvert x(t)\rvert + \max_{0,5\le t\le 1}\lvert x'(t)\rvert$
1.18	$\{x(t)\in C[a,b] \mid x(a)=0\}$	$\int_a^b \lvert x(t)\rvert dt$
1.19	$\{x(t)\in C^{(1)}[a,b] \mid x'(t)<0\}$	$(\int_a^b \lvert x(t)\rvert^2 dt)^{1/2}$
1.20	$\{x\in l_1 \mid \sum_{k=1}^{\infty}\lvert x(k)\rvert^2<1\}$	$\sup_k \lvert x(k)\rvert$
1.21	$\{x\in l_2 \mid \sum_{k=1}^{\infty}\lvert x(k)\rvert<1\}$	$\sum_{k=1}^{\infty} \lvert x(k)\rvert^2$

1.22	$\{x(t)\in\ \ [0,1]\,\|\,x(0)=\ :(1)\}$	$\sup\limits_{0\le\ \le\ ,5}\|x(t)\|$
1.23	$\{x(t)\in\ \ [0,1]\,\|\,x(0)=\ :(1/2)\}$	$\sup\limits_{0\le t\le o,5}\|x(t)\|+\int\limits_{0,5}^{1}\|x(t)\|\,dt$
1.24	$\{x(t)\in C[a,b]\,\|\,x'\ a)=\ )\}$	$\int\limits_{a}^{b}\|x'(t)\|\,dt+\|x(a)\|$
1.25	$\{x(t)\in\ \ ^{(1)}[a,b]\,\|\,x(a)=\ :(b)\}$	$\int\limits_{a}^{(a+b)/2}\|x(t)\|\,dt+\int\limits_{(a+b)/2}^{b}\|x'(t)\|\,dt$

2. Будет ли множество A выпуклым в пространстве X?

	X	A
2.1	$C[0,1]$	неубывающие функции
2.2	l_2	$\{\ \in\ _2\ \|\ \|x_n\|<2^{-}\ ,n\in\mathbf{N}\}$
2.3	$C[a,b]$	многочлены степени n
2.4	l_1	$\left\{\ \in\ _1\ \|\ \|x_n\|\le\dfrac{1}{n^2},n\in\mathbf{N}\right\}$
2.5	$C^{(1)}[0,1]$	многочлены степени $\le k$
2.6	$L_1[0,1]$	$\left\{\ \in\ _1[0,1]\ \|\ \int\limits_{[0,1]}t\|x(t)\|dt\le 1\right\}$
2.7	$C^{(1)}[a,b]$	$\{\ \in\ ^{(1)}[a,b]\ \|x(t)\|+\ \ '\ t)\|\le\ ,t\in\ ,b]\}$
2.8	c_0	$\{\ \in\ _2\ \|\ \|x_1\|+\ \ _2\|\le 1\}$
2.9	$C^{(2)}[0,1]$	$\left\{\ \in\ ^{(3)}[0,1]\ \|\ x(0)=\alpha\quad\max\limits_{t\in[0,1]}\|x(t)\|\le 1\right\}$
2.10	l_1	$\left\{\ \in\ _1\ \|\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\ x_n\|\le 1\right\}$
2.11	$C[0,1]$	$\left\{\ \in\ [0,1]\ \|\int\limits_0^1 x(t)\|^2dt\le 1\right\}$
2.12	l_2	$\left\{\ \in\ _2\ \|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ ^2\|x_n\|^2<1\right\}$
2.13	l_∞	$\left\{\ \in\ \ \|\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ n\|}{n^2}\le 1\right\}$
2.14	$C^{(1)}[a,b]$	$\{\ \in\ ^{(2)}[a,b]\|\ \ \|x(a)\|+\ \ '\ t)\|\le\ \ ,\ t\in\ ,b]\}$

2.15	$L_2[0,1]$	$\left\{ \cdot \in \ {}_3[0,1] \mid \int\limits_{[0,1]} t^2 \lvert x(t)\rvert^2 dt \le 2 \right\}$

3. Проверить, является ли заданная система векторов (x_k) в бесконечномерном пространстве X линейно независимой.

	X	x_k
3.1	l_3	$x_k = \ \frac{1}{k+\ },\ldots,\frac{1}{(k+\ )^n},\ldots),k=\ ,\ldots,p$
3.2	l_∞	$x_k = \ \frac{1}{k+\ },\ldots,\frac{1}{(k+\ )^n},\ldots),k=\ ,\ldots,p$
3.3	C[a,b]	$x_k(t) = t^k,\ k = 0,1,\ \ldots,\ p$
3.4	C[a,b]	$x_k(t) = e^{itk},\ k = 0,1,\ \ldots,\ p$
3.5	$L_2[a,b]$	$x_k(t) = (1 + D(t))\ t^k,\ k = 0,1,\ \ldots,\ p$, D – функция Дирихле
3.6	C[0,2]	$x_k(t) = \sin\pi(t + k/10),\ k = 0,1,\ \ldots,\ p$
3.7	C[0,2]	$x_k(t) = \exp(i\pi(\ t - k/99)),\ k = 0,1,\ \ldots,\ p$
3.8	$L_2[0,1]$	$x_k(t) = \sin t^k,\ k = 1,2,3$
3.9	C[0,1]	$x_1(t) = 1+t+t^2,\ x_2(t) = 2+t+2t^2,\ x_3(t) = 1+t$
3.10	$L_2[0,1]$	$x_1(t) = 1+t^2,\ x_2(t) = 1+t - 2t^2,\ x_3(t) = 1- t$
3.11	C[0,1]	$x_1(t) = \lvert t-½\rvert - \lvert t-1/3\rvert,\ x_2(t) = \lvert t-½\rvert + \lvert t-1/3\rvert,\ x_3(t) = \lvert 2t -1\rvert - \lvert 3t-1\rvert$
3.12	C[0,1]	$x_1(t) = \lvert 2t-1\rvert - \lvert 2t-1/2\rvert,\ x_2(t) = \lvert 4t-2\rvert + \lvert 4t-1\rvert,\ x_3(t) = \lvert 4t -1\rvert + \lvert 2t-1\rvert$
3.13	C[0,1]	$x_1(t) = \lvert 2t-1\rvert - \lvert 2t-1/3\rvert,\ x_2(t) = \lvert t-½\rvert + \lvert 6t-1\rvert,$ $x_3(t)=\begin{cases} t, t\in[0,1/6] \\ 1/6, t\in[1/6,1/2] \\ t/3, t\in[1/2,1] \end{cases}$
3.14	C[0,1]	$x_1(t)=\begin{cases} 0, t\in[0,1/3] \\ \lvert 6t-1\rvert-1, t\in[1/3,1] \end{cases},\ x_2(t)=\begin{cases} \lvert 3t-1\rvert, t\in[0,1/2] \\ 1/2, t\in[1/2,1] \end{cases},$ $x_3(t)=\begin{cases} 3t, t\in[0,1/3] \\ 1, t\in[1/3,1/2] \\ 3-4t, t\in(1/2,1] \end{cases}$
3.15	C[0,1]	$x_1 = \lvert 2t-1\rvert - \lvert 2t-8\rvert,\ x_2(t) = \lvert 2t-1\rvert + \lvert 2t-8\rvert,\quad x_3(t)=\begin{cases} 0, t\in[0,1/4] \\ \lvert 4t-2\rvert-1, t\in(1/4,1] \end{cases},$ $x_4(t)=\begin{cases} \lvert t-1/4\rvert, t\in[0,1/2] \\ 1/4, t\in[1/2,1] \end{cases},$
3.16	C[0,1]	$x_1(t)=\begin{cases} 3t-2, t\in[0,1/3] \\ \lvert 3t-3\rvert, t\in(1/3,1] \end{cases},\ x_2(t)=\begin{cases} \lvert 3t-1\rvert, t\in[0,1/2] \\ t, t\in(1/2,1] \end{cases},$

		$x_3(t)=\begin{cases}1, t\in[0,1/3]\\ \lvert 2t-1\rvert+2/3, t\in(1/3,1]\end{cases}$
3.17	C[0,1]	$x_1(t)=\begin{cases}t, t\in[0,1/4]\\ \lvert 3t-1\rvert, t\in[1/4,1]\end{cases}$, $x_2(t)=\begin{cases}\lvert 1/4\rvert, t\in[0,1/4]\\ \lvert 3t-1\rvert, t\in[1/4,1]\end{cases}$, $x_3(t)=\begin{cases}\lvert 4t-1\rvert, t\in[0,1/3]\\ 1/3, t\in[1/3,1]\end{cases}$, $x_4=\lvert t-1/3\rvert-\lvert t-1/4\rvert$

4.Приведите пример последовательности $(x_n)\subset X\cap Y$, сходящейся в X, но не сходящейся в Y (пространства X и Y наделены естественными нормами).

	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
X	c_0	l_∞	l_∞	$C^{(1)}[0,1]$	c_0
Y	l_1	l_1	l_2	$C^{(2)}[0,1]$	l_4
	4.6	4.7	4.8	4.9	4.10
X	$L_1[0,1]$	c	c	$C[0,1]$	$L_1[0,1]$
Y	$L_2[0,1]$	l_1	l_2	$C^{(2)}[0,1]$	$C[0,1]$
	5.11	5.12	5.13	5.14	5.15
X	l_2	$L_2[0,1]$	$L_1[0,1]$	c_0	$C[0,1]$
Y	l_1	$C[0,1]$	$C^{(1)}[0,1]$	l_2	$C^{(1)}[0,1]$

5. Будут ли эквивалентны нормы p и q в пространстве E? В случае эквивалентности явно указать константы a и b в определении эквивалентных норм (определение 6).

	E	p	q
5.1	l_1	$\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\lvert x_n\rvert$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert x_n\rvert$
5.2	l_2	$\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\lvert x_n\rvert$	$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert x_n\rvert^2\right)^{1/2}$
5.3	$C[0,1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert$	$\left(\int\limits_{[0,1]}\lvert x(t)\rvert^2 dt\right)^{1/2}$
5.4	$L_2[0,1]$	$\int\limits_{[0,1]}\lvert x(t)\rvert dt$	$\left(\int\limits_{[0,1]}\lvert x(t)\rvert^2 dt\right)^{1/2}$
5.5	$C^{(1)}[0,1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert$	$\lvert x(0)\rvert+\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x'(t)\rvert$

5.6	$C^{(1)}[0,1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert+\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x'(t)\rvert$	$\int_0^1 \lvert x(t)\rvert dt$
5.7	c	$\sup\limits_{n\in N}\lvert x_n\rvert$	$\sup\limits_{n\in N}\dfrac{n\lvert x_n\rvert}{n+1}$
5.8	$\mathbf{R}^n$	$\sup\limits_{1\le k\le n}\lvert x_k\rvert$	$\sum\limits_{k=1}^{n}\lvert x_k\rvert$
5.9	$\mathbf{C}^n$	$\sup\limits_{1\le k\le n}\lvert x_k\rvert$	$\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\lvert x_k\rvert^2\right)^{1/2}$
5.10	$\mathbf{R}^n$	$\sum\limits_{k=1}^{n}\lvert x_k\rvert$	$\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^{\,2}\right)^{1/2}$
5.11	$C^{(1)}[0,1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert+\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x'(t)\rvert$
5.12	$L_2[0,1]$	$\int\limits_{[0,1]}\lvert x(t)\rvert dt$	$\int\limits_{[0,1]}e^t\lvert x(t)\rvert dt$
5.13	$C^{(2)}[0,1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert$	$\sum\limits_{k=0}^{2}\max\lvert x^{(k)}(t)\rvert$
5.14	$C[0,1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert$	$\lvert x(0)\rvert+\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert$
5.15	$C[0,1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert$	$\int_0^1\lvert x(t)\rvert dt$
5.16	$C[0,1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert$	$(\int_0^1\lvert x(t)\rvert^3 dt)^{1/3}$
5.17	$C[a,b]$	$(\int_a^b\lvert x(t)\rvert^2 dt)^{1/2}$	$(\int_a^b v(t)\lvert x(t)\rvert^2 dt)^{1/2}$, $где\ v\in C[a,b], \min\limits_{t\in[a,b]} v(t)>0$
5.18	$C^{(1)}[0,1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert+\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x'(t)\rvert$	$\lvert x(0)\rvert+\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x'(t)\rvert$
5.19	$C^{(1)}[0,1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert+\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x'(t)\rvert$	$\int_0^1\lvert x(t)\rvert dt+\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x'(t)\rvert$
5.20	$C[a,b]$	$(\int_a^b\lvert x(t)\rvert^2 dt)^{1/2}$	$(\int_a^b\lvert x(t)\rvert^3 dt)^{1/3}$
5.21	l_1	$(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert x(n)\rvert^2)^{1/2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert x(n)\rvert$

5.22	l_3	$\sup_{n\in \mathbb{N}} \lvert x(n)\rvert$	$(\sum_{n=1}^{\infty} \lvert x(n)\rvert^3)^{1/3}$

6. В каждом из пространств $(\mathbf{R}^2, ||x||_k)$ построить (если он существует) треугольник ABC с заданными сторон и медианы BD, где
$\| x \|_1 = |x_1| + |x_2|, \| x \|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \| x \|_3 = \max\{| x_1 |, | x_2 |\}$.

	AB	*AC*	*BC*	*BD*		*AB*	*AC*	*BC*	*BD*
6.1	1	1	1	1	6.6	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	1
6.2	1,5	1	1,5	1	6.7	1	2	1	1
6.3	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	1	6.8	2	2	2	1
6.4	1	2	2	1	6.9	1	3	2	1,51
6.5	1	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3/2}$	6.10	1	4	3	1

7. Построить изоморфизм между фактор-пространством *L/M* и одним из стандартных линейных пространств.

	L	*M*
8.1	*C[-1,1]*	$\{x \in C[-1,1] \mid x(t) = 0, t \in [0,1]\}$
8.2	l_2	$\{x \in l_2 \mid x_1 = x_3 = \cdots = x_{2n-1}\}$
8.3	*C[0,1]*	$\{x \in C[0,1] \mid x(0) = 0\}$
8.4	*c*	$\{x \in c \mid x_1 = x_2 = 0\}$
8.5	$C^{\infty}[0,1]$	$\{x \in C^{\infty}[0,1] \mid x(0) = x'(0) = 0\}$
8.6	l_1	$\{x \in l_1 \mid x_1 + x_2 = 0\}$
8.7	$C^{(1)}[a,b]$	$\{x \in C^{(1)}[a,b] \mid x(a) = x(b)\}$
8.8	l_{∞}	$\{x \in l_{\infty} \mid x_1 = x_3 = 0\}$
8.9	$C^{(2)}[0,1]$	$\{x \in C^{(2)}[0,1] \mid x'(0) = 0\}$
8.10	*C[0,1]*	$\{x \in C[0,1] \mid \int_0^1 x(t)dt = 0\}$
8.11	c_0	$\{x \in c_0 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
8.12	*B([0,2])*	$\{x \in B([0,2]) \mid x(t) = 0, t \in [0,1]\}$