Преобразование Фурье

А. Основные понятия и теоремы

<u>Определение 1</u>. **Преобразованием Фурье функции** $f$ из $L_1(\mathbf{R})$ называется функция $\hat{f}(\lambda)$, определяемая равенством

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx. \tag{1}$$

Оператор $F : f \mapsto \hat{f}$ называется **преобразованием Фурье** (пространство, в которое $F$ отображает $L_1(\mathbf{R})$, можно выбирать по-разному, см. задачу 6 ниже).

Введя обозначения

$$F_c(f)(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \tag{2}$$

$$F_s(f)(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x dx, \tag{3}$$

формулу (1) можно переписать в виде

$$F(f) = F_c(f) + iF_s(f).$$

Преобразования (2) и (3) называются соответственно **косинус-** и **синус-преобразованиями Фурье.** Ясно, что $F(f) = F_c(f)$, если $f$ - четная функция, и $F(f) = iF_s(f)$, если $f$ - нечетная функция.

Оператор $F$ инъективен, и при некоторых условиях имеет место следующая **формула обращения** , задающая обратный оператор $F^{-1}$,:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \tag{4}$$

(интеграл понимается в смысле главного значения). Вот одно из точных утверждений этого сорта.

ТЕОРЕМА 1. *Если $f$ и $\hat{f}$ принадлежат $L_1(\mathbf{R})$, то для п.в. $x$ из $\mathbf{R}$ имеет место равенство (4).*

Известны другие условия справедливости формулы обращения (4) (см. [1], [6], [7], [9]).

Для нахождения прямого и обратного преобразований Фурье применяют также специальные таблицы , см., например, [3] - [5], [10]. Заметим, что при использовании различных источников требуется определенная осторожность, поскольку определение преобразования Фурье в них может отличаться от нашего числовым множителем перед интегралом или в показателе экспоненты.

<u>Определение 2.</u> **Сверткой** функций $f$ и $g$ называется функция (если интеграл существует)

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

ТЕОРЕМА 2. *Пространство $L_1(\mathbf{R})$ со сверткой в качестве умножения является коммутативной алгеброй.*

ТЕОРЕМА 3. (О свертке). *При $f,g$ из $L_1(\mathbf{R})$ имеет место формула*

$$F(f*g)=F(f)F(g).$$

Следующая теорема содержит в себе, в частности, определение **преобразования Фурье для функций из** $L_2(\mathbf{R})$ (определение 1 для этой цели не годится, так как $L_2(\mathbf{R})$ не содержится в $L_1(\mathbf{R})$).

ТЕОРЕМА 4 (Планшерель). *Для всякой функции $f$ из $L_2(\mathbf{R})$ функция*

$$\hat{f}_n(\lambda):=\int_{-n}^{n} f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

*при любом натуральном n принадлежит пространству $L_2(\mathbf{R})$. Последовательность $(\hat{f}_n)$ сходится в метрике $L_2(\mathbf{R})$ к некоторой функции $\hat{f}\in L_2(\mathbf{R})$, называемой* ***преобразованием Фурье функции f****. Возникающее при этом отображение $F: f\mapsto \hat{f}$ является линейным ограниченным биективным оператором, действующим в пространстве $L_2(\mathbf{R})$, и выполняется* ***равенство Парсеваля:***

$$\|\hat{f}\|_2=\sqrt{2\pi}\,\|f\|_2 .$$

Б. З а д а ч и к л а б о р а т о р н о й р а б о т е

Необходимые понятия и теоремы см. выше.

*Л и т е р а т у р а*: [1] стр. 201 – 210, [6], т. 2, стр. 551-571, [7] стр. 132-144, [9] стр. 397 - 414.

1. Пользуясь определением, найдите преобразование Фурье функции $f$ из $L_1(\mathbf{R})$ (здесь и далее $\chi_A$ - индикатор (характеристическая функция) множества $A\subset\mathbf{R}$)

| | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $e^{-2\|x\|}$ | $e^{-x}\chi_{R+}(x)$ | $e^{x}\chi_{[-1,1]}(x)$ | $\chi_{[0,1]}(x)\sin x$ | $1/(1+x^2)$ |
| | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 | 1.10 |
| $f(x)$ | $\chi_{[-1,1]}(x)\cos x$ | $x\chi_{[0,1]}(x)$ | $e^{ix}\chi_{[0,1]}(x)$ | $x^3\chi_{[0,2]}(x)$ | $x^2\chi_{[-1,1]}(x)$ |
| | 1.11 | 1.12 | 1.13 | 1.14 | |
| $f(x)$ | $e^{-\|x\|}\mathrm{sgn}\,x$ | $\sin^2 x\,\chi_{[0,1]}(x)$ | $\cos^2 x\,\chi_{[-1,1]}(x)$ | $e^{-x^2/2}$ | |

2. Выразить $\hat{g}$ через $\hat{f}$ ($f\in L_1(\mathbf{R})$).

| | 2.1 | 2.2 | 2.3 | 2.4 | 2.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $f(-3x)$ | $f(x-a)$ | $f(-x)$ | $f(2x)$ | $\sin x f(x)$ |

| | 2.6 | 2.7 | 2.8 | 2.9 | 2.10 |
|---|---|---|---|---|---|
| *g(x)* | *cosxf(x0* | *f(x)-f(-x)* | $\overline{f(x+\ )}$ | *sin*$^2$*xf(x)* | *cos*$^2$*xf(x)* |
| | 2.11 | 2.12 | 2.13 | 2.14 | |
| *g(x)* | *f(1-x)* | *f(x-1)+f(x+1)* | $\overline{f(-\ )}$ | *Ref(x)* | |

3. Решите следующие функциональные уравнения в пространстве $L_1(\mathbf{R})$:

3.1. $f(x)+f(x-\ )+f(x-\ )=\chi_{[\ ,3]}(x).$

3.2. $f(x)+f(x-2\pi\ =\ e^{ix}\chi_{[\ ,4\pi]}(x).$

3.3. $f(x+\frac{1}{2})+f(x-\frac{1}{2})=\ e^{4\pi x}\chi_{[\ ,5;-\ ,5]}(x).$

3.4. $f(x+\ )+f(x+3)+f(x+5)=\chi_{[\ ,6]}(x).$

3.5. $f(2-x)+f(2x-4)=\chi_{[\ ,2]}(x).$

3.6. $f(\pi\ -x)+f(-\ )=\ e^{-2ix}\chi_{[\ ,\pi]}(x).$

3.7. $f(x)+f(1+x)=2\chi_{[\ ,2]}(x).$

3.8. $f(1-x)+f(2-x)=\chi_{[\ ,2]}(x).$

3.9. $f(x+\ )-f(x-\ )=\ e^{-2\pi x}(\chi_{[\ ,-\ ]}(x)-\chi_{[\ ,3]}(x)).$

3.10. $f(x+2\pi\ +f(x-2\pi\ =\ e^{2ix}\chi_{[\ \pi,4\pi]}(x).$

3.11. $f(x()+f(x+\ )=\chi_{[\ ,0]}(x)+2\chi_{[\ ,1]}(x)+\chi_{[\ ,2]}(x).$

3.12. $f(x-\ )+f(x)+f(x+\ )=\chi_{[\ ,2]}(x).$

3.13. $f(x+\ \ +f(x-\ \ =\ e^{2ix}(\chi_{[-\ ,0]}(x)+\chi_{[\pi,2\pi]}(x)).$

3.14. $f(1-\ )+f(2-\ )+f(3-\ )+f(4-\ )=\ e^{2\pi x}\chi_{[\ ,4]}(x).$

4. Вычислите свертку, $f*\chi_{[\ ,1]}$ если

| | 4.1 | 4.2 | 4.3 | 4.4 | 4.5 | 4.6 | 4.7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | $\frac{1}{1+x^2}$ | $xe^{-\ ^2}$ | $x^3e^{-\ ^4}$ | $\frac{x}{1+x^2}$ | $sin^3x$ | $e^xsinx$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+\ }}$ |
| | 4.8 | 4.9 | 4.10 | 4.11 | 4.12 | 4.13 | 4.14 |
| *f(x)* | $e^{-\|x\|}$ | $\sqrt{1+x^2}$ | $\frac{x^3}{x^4+\ }$ | $e^{-x}cosx$ | $e^{\|x\|}\chi_{[\ ,+\ ]}(-\ )$ | $\frac{\chi_{[\ ,+\ ]}(x)}{1+x^2}$ | $e^{-\ }\chi_{[\ ,+\ ]}(x)$ |

5. Решите интегральное уравнение в пространстве $L_1(\mathbf{R})$ для заданной функции $f$.

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(t-s)x(s)ds.$$

| | 5.1 | 5.2 | 5.3 | 5.4 | 5.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f(t)* | $e^{-\ \ ^2}$ | $\dfrac{1}{t^2+\ }$ | $te^{-\ \ ^2/2}$ | $te^{-t^2}$ | $\dfrac{t}{(t^2+\ )^2}$ |
| *K(t)* | $e^{-t^2}$ | $\dfrac{1}{t^2+\ }$ | $e^{-\ \ ^2}$ | $te^{-t^2}$ | $\dfrac{1}{t^2+\ }$ |
| | 5.6 | 5.7 | 5.8 | 5.9 | 5.10 |
| *f(t)* | $\dfrac{t}{(t^2+\ )^2}$ | $e^{-\|t\|}(1+\|t\|)$ | $e^{-t^2}$ | $\dfrac{1}{t^2+\ }$ | $te^{-\ \ ^2/4}$ |
| *K(t)* | $\dfrac{t}{(t^2+\ )^2}$ | $e^{-\|t\|}$ | $e^{-t^2}$ | $\dfrac{1}{t^2+\ }$ | $e^{-\ \ ^2/2}$ |
| | 5.11 | 5.12 | 5.13 | 5.14 | |
| *f(t)* | $te^{-t^2}$ | $\dfrac{t}{(t^2+\ )^2}$ | $\dfrac{t}{(t^2+\ )^2}$ | $e^{-\ \ ^2}sh2t$ | |
| *K(t)* | $te^{-t^2}$ | $\dfrac{1}{t^2+\ }$ | $\dfrac{t}{(t^2+\ )^2}$ | $te^{-\ \ ^2}$ | |

6. Верно ли, что преобразование Фурье $F$ есть линейный оператор, действующий из пространства $X$ в пространство $Y$?

| | X | Y |
|---|---|---|
| 6.1 | $L_1(\mathbf{R})$ | $C_0(\mathbf{R})=\{f\in C(\mathbf{R}) \| f(\infty\ \ =\ \ )\}$ |
| 6.2 | $L_1(\mathbf{R})$ | $L_1(\mathbf{R})$ |
| 6.3 | $L_1(\mathbf{R})\cap L_2(\mathbf{R})$ | $L_2(\mathbf{R})$ |
| 6.4 | $L_2(\mathbf{R})$ | $C_0(\mathbf{R})$ |
| 6.5 | $L_1(\mathbf{R})$ | $BC(\mathbf{R})$ |
| 6.6 | $L_1(\mathbf{R})$ | $UC(\mathbf{R})$-пространство равномерно непрерывных функций на $\mathbf{R}$. |
| 6.7 | $\{f \mid f(x)e^{ax}\in L\ (R)\forall a\geq\ \}$ | $BC(\mathbf{R})\cap O(\mathbf{C})$ |
| 6.8 | $\{f\in\ \ (R)\mid xf(x)\in\ \ (R)\}$ | $C^{(1)}(\mathbf{R})$ |
| 6.9 | $\{f\in\ \ (R)\mid f''\in\ \ (R)\}$ | $L_1(\mathbf{R})$ |
| 6.10 | $L_2(\mathbf{R})$ | $L_1(\mathbf{R})$ |
| 6.11 | $D(\mathbf{R})$ | $O(\mathbf{R})$ |
| 6.12 | $L_1(\mathbf{R})\cap L_2(\mathbf{R})$ | $L_1(\mathbf{R})\cap L_2(\mathbf{R})$ |
| 6.13 | $L_1(\mathbf{R})$ | $L_2(\mathbf{R})$ |
| 6.14 | $\{f\in\ \ (R)\mid f(x)e^{\|x\|}\in\ \ (R)\}$ | $O(\{\|Im z\|<1\})$ |

O(D) - пространство функций, аналитических в области $D\subset\mathbf{C}$.

7. Решите задачу 1 для функции $f(x) = 1/(x - i)$ из $L_2(\mathbf{R})$.

8. Решите задачи 2.1 - 2.14 в случае, когда $f$ принадлежит $L_2(\mathbf{R})$.

9. Решите функциональные уравнения в пространстве $L_1(\mathbf{R})$

$$f(x - 1) + f(x + 1) = g(x)$$

для правых частей $g(x) =$ [illegible]$^{2}\, ch2x, \dfrac{chx}{ch2 + \text{[illegible]}hx}, \chi_{\text{[illegible]},1]}(x)$.

10. Решите задачу 4 для $f =$ [illegible]$_{\text{[illegible]},b]}$.

11. Решите задачу 5 при $f(t) = arctg(2/t^2)$, $K(t) = 1/(1 + t^2)$.

12. Решите задачу 6, если $X = Y = S(\mathbf{R})$ (пространство Шварца).