Элементы дифференциального исчисления в банаховых пространствах

А. Основные понятия и теоремы

Пусть X и Y- банаховы пространства, F- отображение, определенное в окрестности U точки x из X, со значениями в Y.

<u>Определение 1.</u> Отображение $F: X \to Y$ называется **сильно дифференцируемым** (или **дифференцируемым в смысле Фреше)** в точке x, если существует такой линейный ограниченный оператор $A_x : X \to Y$, что при всех $h \in X$, удовлетворяющих условию $x + h \in U$, выполняется равенство

$$F(x+h) - F(x) = A_x h + \alpha(x,h),$$

где $\|\alpha(x,h)\| = o(\|h\|)$ (т.е. $\|\alpha(x,h)\| / \|h\| \to 0$ при $\|h\| \to 0$).

При этом оператор A_x называется **производной** (или **сильной производной, производной Фреше**) отображения F в точке x и обозначается $F'(x)$.

Значение $F'(x)h$ оператора $F'(x)$ на векторе h называется **дифференциалом** (или **сильным дифференциалом, дифференциалом Фреше**) отображения F в точке x при приращении h и обозначается $dF(x,h)$.

Укажем некоторые свойства производной.

1. Если $F(x) = const$, то $F'(x) = 0$.
2. Если B - линейный оператор из X в Y, то $B'(x) = B$ при любом x.
3. Если F,G - два отображения из X в Y, дифференцируемые в точке x, то для любых чисел s,t отображение $sF + tG$ тоже дифференцируемо в точке x и
$$(sF + tG)'(x) = sF'(x) + tG'(x).$$
4. (Производная композиции). Пусть отображение F, действующее из X в Y, дифференцируемо в точке x_0, а отображение G, действующее из Y в Z, дифференцируемо в точке $y_0 = F(x_0)$. Тогда отображение $H(x) = G(F(x))$ дифференцируемо в точке x_0 и
$$H'(x_0) = G'(y_0)F'(x_0)$$

(в правой части стоит произведение линейных операторов).

5. Пусть $X = \mathbf{R}^m$, $Y = \mathbf{R}^n$. Тогда любое отображение $y = F(x)$ можно записать в виде
$$y_1 = F_1(x_1, \dots, x_m)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n = F_n(x_1, \dots, x_m),$$

и линейный оператор $F'(x)$, действующий из $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$, задается соответствующей матрицей Якоби, т.е. $F'(x) = \left(\dfrac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}\right)_{i=1,\,j=1}^{n\quad m}$.

Замечание. В случае $X = Y = \mathbf{R}^1$ определение 1, формально говоря, отличается от обычного определения производной функции действительного переменного. Например, для функции $F(x) = x^2$ под производной в точке x в смысле определения 1 нужно понимать линейную функцию $h \mapsto 2xh$.

Определение 2.**Дифференциалом Гато** отображения $F : X \to$ в точке x при приращении h (а также **слабым дифференциалом, первой вариацией**) называют предел

$$\delta F(x,h) = \lim_{s\to} \frac{F(x+sh)-F(x)}{s} = \frac{d}{ds}F(x+sh)|_{s=},$$

если он существует при всех h из X.

В общем случае отображение $h \mapsto \delta F(x,h)$ не является линейным.

Определение 3. Если $\delta F(x,h) = A_x h$, где A_x - ограниченный линейный оператор, то A_x называют **производной Гато** (а также **слабой производной**) отображения F в точке x и обозначают $F_c'(x)$.

Из существования $F_c'(x_0)$, вообще говоря, не следует сильная дифференцируемость F в точке x_0, но , если $F_c'(x)$ существует для x из некоторой окрестности точки x_0 , и отображение $x \mapsto F_c'(x)$ непрерывно в самой этой точке, то F сильно дифференцируемо в точке x_0. Если же отображение F имеет сильную производную, то оно имеет и слабую, причем эти производные совпадают.

ТЕОРЕМА (об обратной функции). *Пусть $F : D \to$ отображение окрестности D точки x_0 банахова пространства X в нормированное пространство Y. Если*

1) F дифференцируемо в D,

2) отображение $x \mapsto F'(x)$ непрерывно в точке x_0,

3) оператор $F'(x_0)$ обратим,

то найдутся окрестность U точки x_0 в X и окрестность V точки $y_0=F(x_0)$ в Y, такие, что отображение $F : U \to$ биективно, а обратное к нему отображение $G : V \to$ непрерывно в V и дифференцируемо в y_0, причем

$$G'(y_0) = (F'(x_0))^{-}.$$

Б. Задачи к лабораторной работе

Необходимые понятия и теоремы см. выше.

Литература: [6], т.2, стр. 69-86, [9] глава X, [14] стр. 371-380.

1. Вычислите сильную производную отображения $F: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ в точке x_0 и соответствующий сильный дифференциал при приращении h.

	m	n	$F(x)$	x_0	h
1.1	3	1	$(x_1 + x_2^2 + x_3^2)$	(1,1,1)	(1,2,3)
1.2	1	3	$(\cos \pi \quad \sin \pi \quad x)$	3	1

1.3	*2*	*3*	$(x_1^3, e^{2x_2}, x_1x_3)$	*(0,1,1)*	*(1,3,2)*
1.4	*3*	*3*	$(x_1 \sin x_2, x_2 \sin x_1, \ln x_3)$	*(0,2,1)*	*(3,2,1)*
1.5	*3*	*2*	$(\sqrt{4 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}, x_1x_2x_3)$	*(1,1,1)*	*(2,1,0)*
1.6	*2*	*2*	$(e^{x_1 + x_2}, x_1^2 + x_2^2)$	*(2,2)*	*(1,2)*
1.7	*3*	*3*	$(x_1 + x_2 + x_3, e^{2x_1}, \sin x_3)$	(0,1, π	*(-3,2,1)*
1.8	*2*	*3*	$(x_1x_2, 1/(x_1^2+x_2^2), \cos x_2)$	(0,1, π 2)	*(-1,2,2)*
1.9	*3*	*2*	$(\mathrm{arctg}\, x_1x_2, x_1x_2x_3)$	*(1,1)*	*(-1,-1)*
1.10	*2*	*2*	$(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_1 / x_2)$	*(-1,10*	*(3,-2)*
1.11	*3*	*3*	$(x_1 + x_2, \ln(x_2 + x_3), \sin(2x_1x_3))$	*(-1,2,1)*	*(-1,1,0)*
1.12	*2*	*3*	$(x_1 - x_2, \sin(x_1 + x_2), \ln x_2)$	*(1,2)*	*(-1,-2)*
1.13	*3*	*2*	$(x_1 - x_2 + x_3, \cos(3x_1x_3))$	*(1,2,-1)*	*(-1,2,1)*

2. Вычислите производную Фреше нелинейного функционала $f : H \to \mathbf{R}$ в точке x_0, если H - вещественное гильбертово пространство.

	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7
H	l_2	$L_2[0,1]$	l_2	$L_2[0,2]$	$L_2[-1,1]$	l_2	$L_2(\mathbf{R}_+)$
f(x)	$\sin\|\|x\|\|^2$	$e^{\|\|x\|\|^2}$	$\|\|x\|\|^4$	$\|\|x\|\|^2 + \|\|x\|\|^4$	$\|\|x\|\|^3$	$\cos\|\|x\|\|^4$	$\|\|x\|\|^{1/2}$
x_0	*(1,0,0, ...)*	*t*	*(0,1,0,...)*	*sint*	t^2	*(0,0,...)*	e^{-t}
	2.8	2.9	2.10	2.11	2.12	2.13	2.14
H	l_2	$L_2[-1,1]$	l_2	$L_2(\mathbf{R}_+)$	l_2	$L_2[1,2]$	$L_2(\mathbf{R})$
f(x)	$\|\|x\|\|^{1/3}$	$\sin 2\|\|x\|\|$	$\|\|x\|\|^{3/2}$	$ch\|\|x\|\|$	$\ln\|\|x\|\|$	$sh\|\|x\|\|^2$	$\|\|x\|\|$
x_0	*(0,1,0,...)*	*1*	*(-1,0,0,...)*	$\|t\|$	*(2,-2,0,...)*	t^2	$e^{-\|t\|}$

3. Найдите производную Фреше отображения $F : C[0,1] \to C[0,1]$ в точке x_0.

3.1	$\int_0^1 tx^2(s)ds$	t^2
3.2	*tsinx(t)*	*tcost*
3.3	*tcosx(t)*	*sint*
3.4	$t^2x(t) + shx(t)$	*ln2*
3.5	$x(t) - e^{tx(t)}$	*1*
3.6	$t^3x(t) + \int_0^1 x^2(s)\sin t ds$	*-t*
3.7	$t^3\int_0^1 x^3(s)ds$	t^2

3.8	$2x(t) + ch^2x(t)$	e^t
3.9	$t\int_0^1 x(s)ds + x^2(t)$	-1
3.10	$tx(0) - x^3(t)$	$\|t\|$
3.11	$x(t)sint + x^4(t)$	$cost$
3.12	$t\int_0^1 e^{x(s)}ds$	$-t^2$
3.13	$x(t) - \int_0^1 x^2(s)ds$	1
3.14	$t^2e^{x(t)}$	t

4. Вычислите сильный дифференциал отображения $F : X \rightarrow$

	X	Y	F(x)
4.1	l_1	**R**	x_1^3
4.2	l_2	**R**	x_2^3
4.3	l_2	**R**	$x_1^2 + 2x$
4.4	l_2	**R**	$\sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$
4.5	l_2	**R**	$x_2^2 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n / n$
4.6	l_2	**R**	$x_1^2 - x_2^2$
4.7	c	c	$(x_1^2, x_2^2, \dots)$
4.8	c	c	$(x_1^3, x_2, x_3, \dots)$
4.9	c	c	$(x_1, x_2^4, x_3, \dots)$
4.10	c	c	$(x_1, x_1x_2, 0, \dots)$
4.11	c	c	$(x_2^2/2, x_3^2/3, \dots)$
4.12	c	c	$(0, x_1^3, x_2^3, \dots)$
4.13	l_2	l_2	$(x_1x_3, x_2, x_3, \dots)$
4.14	l_2	l_2	$(x_1^3 + x_1, x_2^3 + x_2, \dots)$

5. Будет ли функционал f в пространстве X дифференцируем по Фреше в точке 0?

	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7
X	c	l_1	c_0	$C[0,1]$	$L_1[0,1]$	$C[0,1]$	$C^{(1)}[0,1]$
f(x)	$\|x_1\|$	$\|\|x\|\|$	$\|x_1\|^3$	$\|x(0)\|$	$\|\|x\|\|$	$\|\|x + 1\|\|$	$\|\|x\|\|$
	5.8	5.9	5.10	5.11	5.12	5.13	5.14
X	$C[-1,1]$	c	l_1	$C[-1,1]$	$C^{(1)}[0,1]$	$C[0,1]$	$L_2[0,1]$
f(x)	$\int_{-1}^{1} \|x(s)\| ds$	$\|\|x\|\|$	$\|\|x\|\|$	$\|x(1)\|$	$\|x'(0)\|$	$\|\int_0^1 x(s)ds\|$	$\|\|x\|\|$

6. Доказать, что для заданного в пространстве $C[0,1]$ нелинейного отображения F

существует такая окрестность V точки $y_0 = F(x_0)$, что для любого $y \in$ уравнение $y=F(x)$ имеет единственное решение .

	x_0	F
6.1	$x_0(t) = \quad {}^{2}$	$F(x)(t) = x(t) + \int_0^1 t^2 x^3(s)ds$
6.2	$x_0(t) = \quad {}^{3}$	$F(x)(t) = 2x(t) + \int_0^1 tsx^2(s)ds$
6.3	$x_0(t) = 1 +$	$F(x)(t) = x(t) + \int_0^1 t^3 x^2(s)ds$
6.4	$x_0(t)=t^2$	$F(x)(t) = x(t) + \int_0^1 t^2 s x^3(s)ds$
6.5	$x_0(t)=t-1$	$F(x)(t) = x(t) + \int_0^1 e^t x^3(s)ds$
6.6	$x_0(t)=1-t^2$	$F(x)(t) = x(s) - 3\int_0^1 t^2 x^2(s)ds$
6.7	$x_0(t)=t$	$F(x)(t) = x(t) + \int_0^1 \sin\pi \quad x^2(s)ds$
6.8	$x_0(t)=1$	$F(x)(t) = 2x(t) - \int_0^1 t^2 s^3 x^2(s)ds$

7. Пусть функции $f(t,u)$ и $f_u'(t,u)$ непрерывны на множестве $[a,b]\times$ **R.** Вычислите дифференциал Фреше отображения $F(x)(t) = f(t, x(t))$, действующего в пространстве $C[a,b]$
8. Пусть функции $f(t,s,u)$ и $f_u'(t,s,u)$ непрерывны на множестве $[a,b]\times[a,b]\times$ **R.** Найдите производную Фреше отображения

$$F(x)(t) = x(t) - \int_a^b f(t,s,x(s))ds,$$

действующего в пространстве $C[a,b]$.

9.Найдите производную Фреше функционала

$$f(x) = \int_a^b \Phi(t, x(t)x'(t))dt,$$

определенного в пространстве $C_0^{(1)}[a,b]$ непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$, равных нулю на концах отрезка, если $\Phi \quad {}^{(2)}$ ($\mathbf{R}^3$).

10. Пусть отображение $F: X \to \quad$ непрерывно дифференцируемо по Фреше на отрезке $[x_1, x_2] \subset X$. Докажите **формулу конечных приращений**

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_0^1 F'(x_1 + \theta(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)d\theta.$$

11. Докажите, что если отображение $F : X \to$ непрерывно дифференцируемо по Фреше на отрезке $[x_1, x_2] \subset$, то оно удовлетворяет **условию Липшица**:

$$||F(x_2) - F(x_1)|| \leq L||x_2 - x_1||,$$

где $L = sup\{||F'(x)|| \mid x \in [x_1, x_2]\}$

12. Докажите, что если отображение $F : X \to$ непрерывно дифференцируемо на выпуклом множестве $D \subset$ и $F'(x) = 0$ при всех x из D, то F постоянна на D.

13. Рассмотрим оператор $F{:}C^{(2)}[0,1] \to C[0,1]$,

$$F(x)(t) = x''(t) + \sin x(t).$$

Вычислите $dF(x_0,h)$ и $d^2F(x_0,h)$, где $x_0(t) = t$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антоневич А.Б, Радыно Я.В. – Функциональный анализ и интегральные уравнения. - Минск, 1984.
2. Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. – Задачи и упражнения по функциональному анализу. – Минск, 1978.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. – Таблицы интегральных преобразований в двух томах. Т. 1. Москва, 1969.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. – Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – Москва, 1986.
5. Диткин В.А., Прудников А.П. – Интегральные преобразования и операционное исчисление. – Москва, 1974.
6. Зорич В.А. – Математический анализ. Т. 1-2. – Москва, 1981.
7. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. – Теоремы и задачи функционального анализа. – Москва, 1979.
8. Князев П.Н. – Функциональный анализ. – Минск, 1985.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. – Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва, 1981.
10. Корн Г., Корн Т. – Справочник по математике. – Москва, 1974.
11. Люстерник Л.А., Соболев В.И. – Краткий курс функционального анализа. – Москва, 1982.
12. Натансон И.П. – Теория функций вещественной переменной. – Москва, 1974.
13. Очан Ю.С. – Сборник задач по математическому анализу. – Москва, 1981.
14. Треногин В.А. – Функциональный анализ. – Москва, 1980.
15. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. – Задачи и упражнения по функциональному анализу. – Москва, 1984.
16. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – Москва, 1984.