

I. Ответьте на вопросы (за все задание 18 баллов, за каждое по 2 балла)

1. Комплексное число  $z = 1 - i$ . Тогда  $\operatorname{arg} z$  \_\_\_\_\_ /
2. Комплексное число  $z = 2 - i$ . Тогда  $|z|$ . \_\_\_\_\_ /
3. В алгебраической форме комплексное число  $\frac{1+i}{1-i}$  имеет вид \_\_\_\_\_ /
4. В показательной форме комплексное число  $(1+i)^3$  представимо в виде \_\_\_\_\_ /
5. Аргумент комплексного числа  $(1+i\sqrt{3})^6$  равен \_\_\_\_\_ /
6. Модуль комплексного числа  $(1-2i)^{12}$  равен \_\_\_\_\_ /
7. Значение корня  $w_k = \sqrt[4]{1+i}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ ,  $0 < \operatorname{arg} w_k < \frac{\pi}{2}$  равно \_\_\_\_\_ /
8. Расстояние между точками  $z_1 = 3+i$  и  $z_2 = 1-i$  равно \_\_\_\_\_ /
9. Решением уравнения  $|z| - 2z = 1 - i$  является \_\_\_\_\_ /

II. Решите следующие задачи (за все задание 18 баллов, за каждое по 3 балла)

1. Функция  $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ , тогда  $\operatorname{Re} f(z)$  равна \_\_\_\_\_ /
2. Если  $z = x + iy$ , то  $\operatorname{arg} e^z$  равен \_\_\_\_\_ /
3. Значениями  $\operatorname{Ln}(-1)$  являются \_\_\_\_\_ /
4. Значениями  $(-1)^i$  являются \_\_\_\_\_ /
5. Все значения  $\operatorname{Arct} h i$  образуют множество \_\_\_\_\_ /
6. Решением уравнения  $\operatorname{ch} z = i$  является множество \_\_\_\_\_ /

III. Выберите правильный вариант ответа (за все задание 12 баллов, за каждое по 3 балла)

1. Какая функция является аналитической в  $C$ ?: \_\_\_\_\_ /  
 (A)  $z - \bar{z}$       (B)  $z - 2|z|$       (C)  $\bar{z}^2 - z$       (D)  $\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$
2. Какая функция является гармонической в  $C$ ?:  
 (A)  $x^2 - y^2$       (B)  $x^2 - 2y^2$       (C)  $xy^2$       (D)  $x^2 - 2xy$
3. Значение  $\operatorname{sh}(iz)$  равно: \_\_\_\_\_ /  
 (A)  $i \operatorname{ch} z$       (B)  $\operatorname{ch} z$       (C)  $i \sin z$       (D)  $i \cos z$
4. Функция  $f = u + iv$ ,  $f(0) = 0$  является аналитической в  $C$ ,  $v = x^2 - y^2$ . Тогда  $f$ : \_\_\_\_\_ /  
 (A)  $iz^2$       (B)  $z^2$       (C)  $-z^2$       (D)  $-iz^2$

IV. Решить задачи (за все задание 20 баллов, за каждое по 5 баллов)

1. С помощью формулы Коши  $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0}$  вычислить интеграл  $\int_{|z|=1/2} \frac{dz}{(z-1)(z^2+4)}$

2. Функцию  $\frac{1}{z-4}$  разложить в ряд Тейлора в окрестности  $z_0 = 2$

3. Функцию  $\frac{1}{z(z-1)}$  разложить в ряд Лорана в кольце  $K = \{z: 0 < |z-1| < 1\}$

4. Вычислить  $\operatorname{Res}_{z=1} \frac{\sin z}{(z-1)^3}$

V. Решить задачи (за все задание 24 баллов, за каждое по 6 баллов)

С помощью теории вычетов вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int_{|z|=3} \frac{z dz}{(z-1)^3(z+4)}, \quad \text{б) } \int_{|z|=1} z^2 \sin \frac{1}{z} dz \quad \text{в) } \int_0^{2\pi} \frac{dz}{2 + \cos x} \quad \text{г) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$$

а)

б)

в)

г)

VI. Решить задачи (за все задание 8 баллов, за каждое по 4 баллов)

1. С помощью вычетов разложить на простые дроби  $\frac{3z+5}{z^3+z}$

2. С помощью теоремы Руше определить число корней уравнения

$2z^4 - 5z + 2 = 0$  в круге  $|z| < 1$ .