I.Ответьте на вопросы (за все задание 18 баллов, за каждое по 2 балла)

1. Комплексное число $z=-1+i$. Тогда $\arg z$ $\underline{\dfrac{3\pi}{4}}$.

2. Комплексное число $z=1+i$. Тогда $|z|$. $\underline{\sqrt{2}}$.

3. В алгебраической форме комплексное число $\dfrac{1+2i}{2-i}$ имеет вид $\underline{i}$.

4. В показательной форме комплексное число $(-i\sqrt{3})^3$ представимо в виде $\underline{8e^{-i\pi}}$.

5. Аргумент комплексного числа $(-1+i)^4$ равен $\underline{\pi}$.

6. Модуль комплексного числа $(-1-i)^8$ равен $\underline{16}$.

7. Значение корня $w_k=\sqrt[4]{i},\ k=0,1,2,3,\quad 0<\arg w_k<\dfrac{\pi}{2}$ равно $\underline{e^{i\frac{\pi}{8}}}$.

8. Расстояние между точками $z_1=2-i$ и $z_2=1-2i$ равно $\underline{\sqrt{2}}$.

9.Решением уравнения $|z|-z=1+i$ является $\underline{-i}$.

II. Решите следующие задачи (за все задание 18 баллов, за каждое по 3 балла)

1. Функция $f(z)=\dfrac{i}{z+i}$, тогда $\mathrm{Im}\,(f(z))$ равна $\underline{\dfrac{x}{x^2+(y-1)^2}}$.

2. Если $z=x+iy$, то $Arg e^{-z}$ равен $\underline{-y+2k\pi,\quad k\in Z}$.

3. Значениями $Ln(-1)$ являются $\underline{i(\pi+2k\pi),\ k\in Z}$.

4. Значениями $(-1)^i$ являются $\underline{e^{-(\pi+2k\pi)},\quad k\in Z.}$

5. Все значения $Arctg\,(2i)$ образуют множество $\underline{\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)+i\dfrac{\ln 3}{2},k\in Z}$.

6. Решением уравнения $e^z+1=0$ является множество $\underline{i(\pi+2k\pi),k\in Z.}$

III. Выберите правильный вариант ответа (за все задание 12 баллов, за каждое по 3 балла)

1. Какая функция является аналитической в C?: (C) .

(A) $-2z+\bar{z}$ (B) $z-4|z|$ (C) $i\,z^2-z$ (D) $\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)$

2. Какая функция является гармонической ?: (C) .

(A) x^2+y^2 (B) x^2-iy^2 (C) $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ (D) x^2+y

3. Значение $\sin(iz)$ равно: (B)

(A) $ch\, z$ (B) $i\, sh\, z$ (C) $i \sin z$ (D) $i \cos z$

4. Функция $f = u + iv,\ f(0) = 0$ является аналитической в C, $v = x^2 - y^2$. Тогда f : (D).

(A) z^2 (B) z^3 (C) $2z^2$ (D) $i\, z^2$

IV. Решить задачи (за все задание 20 баллов, за каждое по 5 баллов)

1. С помощью формулы Коши $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z - z_0}$ вычислить интеграл $\displaystyle\int_{|z|=1/2} \frac{dz}{z(z^2-1)^2}$

Здесь $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^2}$, $z_0 = 0$ $\Rightarrow \displaystyle\int_{|z|=1/2} \frac{dz}{z(z^2-1)^2} = 2\pi i f(0) = 2\pi i$

2. Функцию $\dfrac{1}{z-3}$ разложить в ряд Тейлора в окрестности $z_0 = 2$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{-1+z-2} = -\frac{1}{1-(z-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n$$

3. Функцию $\dfrac{1}{z(z+2)}$ разложить в ряд Лорана в кольце $K = \{z : 0 < |z| < 2\}$

При $|w| < 1$ $\dfrac{1}{1-w} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w^n \Rightarrow \dfrac{1}{z(z+2)} = \dfrac{1}{2z(1+\frac{z}{2})} = \dfrac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{n-1}}{2^{n+1}}$

4. Вычислить $\operatorname*{Res}_{z=0} \dfrac{z-1}{z\ (z+1)}$

Так как $\dfrac{1}{f(z)} = \dfrac{z\ (z+1)}{z-1} \Rightarrow z = 0$ -- полюс 1-го порядка,

$\varphi(z) = z - 1,\quad \psi(z) = z(z+1) \Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=0} \dfrac{z+1}{z\ (z-1)} = \dfrac{\varphi(0)}{\psi'(0)} = -1$

V. Решить задачи (за все задание 24 баллов, за каждое по 6 баллов)

С помощью теории вычетов вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{|z|=2} \frac{(z+1)dz}{(z-1)\sin z}$, б) $\int\limits_{|z|=1} z^2 e^{\frac{2}{z}} dz$ в) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dz}{4+\cos x}$ г) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

а) $$\int\limits_{|z|=2} \frac{(z+1)dz}{(z-1)\sin z} = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{(z+1)}{(z-1)\sin z} + \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{(z+1)}{(z-1)\sin z} \right) = 2\pi i \left(\frac{2}{\sin 1} - 1 \right)$$

б) $$e^{\frac{2}{z}} = 1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{2!z^2} + \frac{8}{3!z^3} \dots \Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=0} z^2 e^{\frac{2}{z}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \int\limits_{|z|=1} z^2 e^{\frac{2}{z}} dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} z^2 e^{\frac{2}{z}} = \frac{8\pi i}{3}$$

в) $$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dz}{4+\cos x} = \left[z = e^{ix} \right] = \int\limits_{|z|=1} \frac{dz/iz}{4 + \frac{z+z^{-1}}{2}} = \frac{2}{i} \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+8z+1} = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=-4+\sqrt{15}} \frac{1}{z^2+8z+1} =$$

$$= 4\pi \left[\frac{1}{2z+8} \right]_{z=-4+\sqrt{15}} = \frac{2\pi\sqrt{15}}{15}$$

г) $$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} =$$

$$= \pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} + \operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \right) =$$

$$= \pi i \left(\frac{1}{6i} - \frac{1}{12i} \right) = \frac{\pi}{12}$$

V. Решить задачи (за все задание 8 баллов, за каждое по 4 баллов)

1. С помощью вычетов разложить на простые дроби $\dfrac{z-3}{z^3-z}$

$$\frac{z-3}{z^3-z}=\frac{z-3}{z(z-1)(z+1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z+1},$$

$$A=\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{z-3}{z^3-z}=3, \qquad B=\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{z-3}{z^3-z}=-1, \qquad C=\operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{z-3}{z^3-z}=-2$$

2. С помощью теоремы Руше определить число корней уравнения
$z^4-3z+1=0$ в круге $|z|<1.$

Полагаем $\psi(z)=-3z,\ \varphi(z)=z^4+1$. Тогда при $|z|=1, |\psi(z)|=3>2=|z|^4+1\geq|\varphi(z)|$.

Так как число нулей $\psi(z)$ в круге $|z|<1$ равно 1, то по теореме Руше наше уравнение имеет один корень. Ответ: 1.