Министерство образования Республики Беларусь

Белорусский государственный университет
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

«ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО»

ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Теория функций комплексного переменного» по всем специальностям в высших учебных заведениях Республики Беларусь.

Дата сборки: 28 апреля 2015 г.

Общая информация

Методические указания

Запуск ЭУМК

ЭУМК поставляется на компакт-диске. Стандартный комплект включает:

- данный файл в формате `pdf`, находящийся в корневом каталоге диска;
- дистрибутив свободно распространяемого программного средства Adobe Reader для чтения файлов в формате `pdf`.

ЭУМК не предъявляет никаких специальных требований к системе. Для работы достаточно компьютера с установленной на нём любой современной операционной системой и программой просмотра файлов формата `pdf`. Для семейства операционных систем MS Windows рекомендуется программа Adobe Reader версии не ниже 9 или Foxit Reader версии не ниже 4.0.

Инсталляция программы Adobe Reader осуществляется стандартным образом. Запустите файл `setup.exe` дистрибутива и следуйте интсрукциям.

УМК можно запустить непосредственно с компакт-диска или скопировать все файлы в каталог на жёстком диске. Для запуска учебника обычно достаточно дважды щёлкнуть левой кнопкой мыши, указав на `pdf`-файл учебника. В случае необходимости можно открыть учебник программным средством, отличным от установленного по умолчанию. Для этого следует выделить файл учебника левой кнопкой мыши и нажать на правую кнопку. В выпавшем контекстном меню можно выбрать требуемое программное средство, например, Adobe Reader.

Принцип построения и структура

ЭУМК состоит из следующих структурных частей:

- методических указаний, содержащих различную методическую и справочную информацию;
- теоретической части с лекционными материалами по курсу;
- практической части с заданиями для практических занятий;
- тестовых заданий для самопроверки.

В левой части экрана расположена панель навигации, содержащая систему вложенных закладок на структурные элементы учебника. Окно с текстом учебника снабжено дополнительными кнопками навигации. Все учебные материалы связаны между собой гиперссылками.

Рекомендации для преподавателя

Лекции

Несомненным достоинством данного ЭУМК является возможность его использования на лекциях в качестве презентационного материала. Для этого необходимо перейти к странице, которая будет использоваться в качестве начальной в презентации к данной лекции и включить полноэкранный режим с помощью специальной кнопки, комбинации клавиш `Ctrl+L` либо клавиши `F11`. Далее по страницам перемещаются, используя гиперссылки и встроенные в страницы средства навигации.

Целесообразно выдавать данный ЭУМК студентам до начала чтения курса. Можно рекомендовать студентам распечатать лекционные материалы на одной стороне листов бумаги, переплести и использовать полученный альбом в качестве конспекта лекций. При этом чистые стороны листов используются для записи пояснений и дополнений лектора к представленному материалу. Это избавляет студентов от необходимости переписывать содержание презентаций и, в то же время, позволяет зафиксировать комментарии и дополнения лектора.

Эффективное использование ЭУМК для изучения теоретического материала предполагает организацию самостоятельной работы студентов перед лекциями. Следует требовать, чтобы перед лекцией студенты ознакомились с соответствующими статьями ЭУМК.

Организация практических занятий

Для организации практических занятий целесообразно использовать систему задач и упражнений, включённую в ЭУМК.

Задачи и упражнения структурированы по разделам курса. Большинство из них снабжены ответами, а некоторые — решениями или указаниями. Наряду с общематематическими подобраны задачи с экономическим содержанием.

Тесты

Тесты, включённые в данный ЭУМК, предназначены исключительно для самоконтроля студентов и носят вспомогательный характер. Это связано с тем, что в ходе изучения дисциплины студенты должны, прежде всего, научиться логически мыслить. Основное внимание следует уделить построению математических рассуждений и выполнению студентами задач и упражнений. Можно рекомендовать студентам пройти тесты перед экзаменом, зачётом или другим мероприятием по контролю знаний.

Рекомендации для студента

Изучение теоретического материала

Перед лекцией изучите материалы ЭУМК, связанные с темой следующей лекции. Будьте готовы к тому, что преподаватель не будет повторять на лекциях материалы, включённые в настоящий ЭУМК. Зафиксируйте вопросы, которые у Вас возникли с тем, чтобы задать их преподавателю. Если лектор до начала чтения курса лекций выдал вам лекционные материалы, распечатайте их на одной стороне листов бумаги, переплетите и используйте полученный альбом в качестве конспекта лекций. При этом чистые стороны листов можно использовать для записи пояснений и дополнений лектора к представленному материалу. Это избавит Вас от необходимости переписывать содержание презентаций и, в то же время, позволит зафиксировать комментарии и дополнения лектора.

Практические занятия

Получите у преподавателя номера задач. Большинство задач снабжены гиперссыками на ответы, некоторая часть — на решения или указания. Прежде, чем смотреть решение, указание или ответ, постарайтесь решить задачу самостоятельно.

Тесты

Тесты, включённые в данный ЭУМК, предназначены для самоконтроля. Пройдите их при подготовке к экзамену, зачёту или другому мероприятию по контролю знаний.

При прохождении тестов с выбором правильного ответа из списка возможных ответов кликните мышкой по квадратику, расположенному рядом с ответом. Зелёная галочка отметит правильный, а красный крестик — неправильный результат.

В поле для ввода числовых данных можно набрать число в формате десятичной дроби, используя точку для отделения дробной части, например, `0.333`. Число можно также представить в виде обыкновенной дроби, например, `1/3`. Введённое Вами число будет сравниваться с правильным результатом. Если они различаются не болеее, чем на 0,001, то ответ засчитывается и помещается в зелёную рамку. Иначе ответ считается неправильным и помещается в красную рамку. Рядом с полем для ввода данных располагается кнопка `*`. Нажав на неё, Вы увидите правильный ответ.

Некоторые тесты содержат поля для ввода текстовых данных. Чтобы такой тест был засчитан, введённый Вами текст должен с точностью до регистра совпадать с правильным текстом. Если, например, ответом к задаче является бесконечность, наберите текст `inf` (от английского слова «infinity»).

Тесты, подразумевающие цепочку последовательных вычислений, снабжаются решениями, содержащими несколько полей для ввода данных. Чтобы пройти такой тест, последовательно заполняйте его поля в порядке их следования.

Типовые программы курсов

Указатель по направлениям и специальностям

Список учебных программ

Рекомендуемая литература

[1] Сидоров Ю.В., Федорюк М.Ф., Шабунин М.И. Лекции по ТФКП. М.: Наука, 1989.

[2] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.I. М.: Наука, 1976.

[3] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

[4] Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ. Т.6. Мн.: Вышэйшая школа, 2008.

[5] Александров И.А., Соболев В.В. Аналитические функции комплексного переменного. М.: Высшая школа, 1984.

[6] Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1970.

[7] Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т.1,2. М.: Наука, 1968.

[8] Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1968.

[9] Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1974.

[10] Сборник задач по теории аналитических функций / Под. ред. М.А. Евграфова. М.: Наука, 1972.

[11] Полиа Г., Сёге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т.1,2. М.: Наука, 1978.

[12] Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968.

Часть I

Теория

Глава 1

Введение в комплексный анализ

1.1. Комплексные числа и их геометрическая интерпретация

1.1.1. Введение

Из курса алгебры известно, что множество действительных чисел $\mathbb{R}$ является замкнутым по отношению к операциям сложения, вычитания, умножения, и деления (кроме деления на 0). Однако извлечение корня, даже в простейшем случае квадратного корня, приводит нас к необходимости расширения понятия действительного числа (например, $\sqrt{-1}$), т.е. приводит к введению комплексных чисел. Свойства комплексных чисел изучались в курсе алгебры.

В настоящем курсе изучаются свойства функции комплексного переменного. В курсе математического анализа изучались свойства функции действительного переменного, где и аргумент и значение функции являлись действительными числами. В ТФКП область определения и область значений функции будит состоять, вообще говоря, из комплексных чисел.

Выход в комплексную область позволяет более полно и глубоко исследовать свойства функции. К примеру, функция

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема бесконечное число раз $\forall x \in \mathbb{R}$. Запишем её ряд Тейлора

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \tag{1.1}$$

Ряд справа сходится только для $|x| < 1$. Спрашивается, почему ряд расходится при $|x| \geqslant 1$? Выход в комплексную область позволяет разъяснить это явление. Данная функция имеет две особые точки $x = \pm i$, в которых функция обращается в бесконечность. Эти точки лежат на единичной окружности. Это обстоятельство и обуславливает, как обнаружим дальше, расходимость ряда (1.1) для $\forall |x| \geqslant 1$.

Функции комплексного переменного находят себе многочисленные применения не только в математическом анализе, но и в алгебре, дифференциальных уравнениях, теории чисел, в прикладных математических дисциплинах (теоретическая физика, гидродинамика, механика, теория упругости, небесная механика и др.).

Мощность методов ТФКП подтверждается, например, следующими фактами: 1) труднейшие проблемы распределения простых чисел ставятся в зависимость от распределения нулей некоторой функции комплексного переменного; 2) трудная проблема небесной механики, так называется задача о трех телах, в общем виде разрешена путём привлечения методов комплексного анализа.

Кроме того, ТФКП представляет собой логически стройное здание и знание основных вопросов этой теории является необходимым элементом математического образования.

Начальные идеи комплексного анализа возникли во второй половине 18-го века и принадлежат прежде всего русскому математику Л. Эйлеру (1707–1783 гг.). Основные результаты ТФКП получены в 19-м веке в трудах О. Коши, Б. Римана, К. Вейерштрасса. К нашему времени теория функций одной комплексной переменной имеет сравнительно завершенный вид, тогда как теория функций многих комплексных переменных является значительно менее разработанной.

1.1.2. Комплексные числа

Всюду ниже $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

Определение. *Множество комплексных чисел* (*комплексная плоскость*) $\mathbb{C}$ определяется как множество

$$\{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

всех упорядоченных пар действительных чисел, на котором определены отношение равенства и две операции — сложения и умножения.

Две пары $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ называются *равными*, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Суммой элементов $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ называется

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Произведением элементов $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ называется

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Как и в случае действительных чисел мы чаще будем опускать знак операции умножения (точку) и писать просто $z_1 z_2$ вместо $z_1 \cdot z_2$.

Первый элемент пары $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ будем называть *действительной частью* z, а второй — *мнимой частью* z (основания для этого у нас скоро появятся). Для них используются следующие стандартные обозначения

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Как множество комплексная плоскость $\mathbb{C}$ совпадает с обычной плоскостью $\mathbb{R}^2$. Отношение равенства и операция сложения тоже определяются точно так же, как и для $\mathbb{R}^2$. Специфика множества комплексных чисел $\mathbb{C}$ начинает проявляться тогда, когда мы вводим умножение — напомним, что в $\mathbb{R}^2$ умножение вообще не вводится.

1.1.3. Поле комплексных чисел

Непосредственной проверкой легко убедиться (мы рекомендуем выполнить это самостоятельно), что сложение комплексных чисел обладает следующими свойствами:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (коммутативность сложения),

2) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ для любых $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (ассоциативность сложения),

3) $z + (0,0) = z$ для любого $z_1 \in \mathbb{C}$ (элемент $(0,0)$ является нейтральным элементом для сложения),

4) для любого $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ существует противоположный элемент $-z = (-x, -y) \in \mathbb{C}$ со свойством $z + (-z) = (0,0)$.

Свойства 1)–4) означают, что $\mathbb{C}$ является коммутативной группой относительно введенной операции сложения.

Умножение комплексных чисел обладает такими свойствами:

5) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (коммутативность умножения),

6) $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ для любых $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (ассоциативность умножения),

7) $z \cdot (1,0) = z$ для любого $z_1 \in \mathbb{C}$ (элемент $(1,0)$ является нейтральным элементом для умножения),

8) для любого $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, $z \neq (0,0)$, в $\mathbb{C}$ существует обратный элемент

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

со свойством $z \cdot z^{-1} = (1,0)$.

Свойства 5)–8) означают, что $\mathbb{C}$ является коммутативной группой относительно введенной операции умножения.

Кроме того, операции сложения и умножения связаны дистрибутивным законом

9) для любых $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ выполнено равенство $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

Свойства 1)–9) говорят нам о том, что множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ с определенными операциями сложения и умножения является полем, которое называется *полем комплексных чисел* и обозначается тем же символом $\mathbb{C}$.

1.1.4. Алгебраическая форма записи

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ естественным образом вкладывается в $\mathbb{C}$. Это делается с помощью взаимно-однозначного отображения

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto (x, 0) \in \mathbb{C}.$$

Мы будем ниже систематически использовать это отождествление действительных чисел, как комплексных, и часто вместо $(x, 0)$ будем писать просто x. Таким образом, пара $(0, 0)$ отождествляется нами с действительным числом 0, а пара $(1, 0)$ — с 1. Скоро мы увидим выгоду от этого.

Рассмотрим еще одно специальное комплексное число $i = (0, 1)$, которое в дальнейшем будет называться *мнимой единицей*. По определению умножения комплексных чисел легко убедиться (сделайте это самостоятельно), что

$$i^2 = -1.$$

Используя мнимую единицу и наше соглашение об обозначениях для действительных чисел, мы приходим к так называемой *алгебраической (декартовой) форме* записи комплексных чисел

$$(x, y) = x + iy. \tag{1.2}$$

В самом деле,

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy.$$

Если $\operatorname{Re} z = 0$, то комплексное число z называется мнимым или, для большей выразительности, *чисто мнимым*. Кроме того, комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется *сопряженным* числом для $z = x + iy$.

1.1.5. Тригонометрическая форма записи

Используя полярные координаты на плоскости $\mathbb{R}^2$, можно получить другое представление для комплексных чисел (рисунок 1.1).

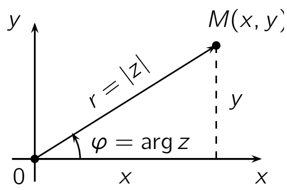

Рисунок 1.1

Действительно, для $z = (x, y) \neq 0$ рассмотрим полярные координаты

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \tag{1.3}$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{1.4}$$

а φ — угол (между векторами (x, y) и $(1, 0)$), определяемый системой уравнений

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Число (1.4) называется *модулем комплексного числа* z и обозначается $|z|$. Оно определяется по комплексному числу z вполне однозначно.

Угол φ в (1.3) называется *аргументом комплексного числа* $z \neq 0$ и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Он определен не однозначно, а лишь с точностью до слагаемого вида $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$ — любое целое число. Однако множество $\operatorname{Arg} z$ содержит единственное число, принадлежащее промежутку $(-\pi, \pi]$, которое называется *главным значением аргумента* и обозначается $\arg z$. Таким образом, мы можем записать, что

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}. \tag{1.5}$$

В терминах координат (1.3) можно записать *тригонометрическую форму комплексного числа*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.6}$$

Нетрудно заметить, что два комплексных числа, записанные в тригонометрической форме, равны между собой тогда и только тогда, когда модули их равны, а аргументы или равны, или отличаются на число, кратное 2π, т.е.

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \Leftrightarrow \quad r = \rho,\ \varphi = \theta + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Воспользовавшись *формулой Эйлера*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

имеем, что

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi}.$$

Получим *показательную форму* комплексного числа.

В заключение отметим, что комплексные числа не сравниваются друг с другом. Например, нельзя писать: $5i > i$, $1 - 2i < 3$ и т.д. Однако комплексные числа можно сравнивать по модулю: $|5i| > |i|$ и т.д.

Свойства модуля и аргумента

1. *Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент произведения двух комплексных чисел равен сумме аргументов данных чисел, т.е.*

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2. \tag{1.7}$$

[Доказательство]

Полученное соотношение (1.7) нужно понимать в том смысле, что образуя суммы всевозможных значений $\operatorname{Arg} z_1$ и $\operatorname{Arg} z_2$, мы получим множество значений $\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2)$.

Пример 1.1. Найти аргумент произведения чисел $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = -1 + i$.

Решение.

$$\operatorname{Arg}\big((1+i)\cdot(-1+i)\big) = \operatorname{Arg}(1+i) + \operatorname{Arg}(-1+i) =$$
$$= \frac{\pi}{4} + 2\pi k_1 + \frac{3\pi}{4} + 2\pi k_2 = \pi + 2\pi(k_1+k_2) = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$\square$

Равенства (1.7) легко распространяются на случай произведения произвольного числа комплексных сомножителей:

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n|,$$
$$\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + \ldots + \operatorname{Arg} z_n.$$

Отсюда, если все сомножители равны между собой и равны z, то легко замечаем, что

$$|z^n| = |z|^n, \quad \operatorname{Arg}(z^n) = n \cdot \arg z_1 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.8}$$

Равенства (1.8) выражают *формулу Муавра*

$$\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

Обратимся теперь к операции извлечения корня. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Для заданного комплексного числа w решим уравнение $z^n = w$. Множество решений этого уравнения обозначим символом $\sqrt[n]{w}$ и назовем его *корнем степени n* из числа w.

Когда $w = 0$, то все значения $\sqrt[n]{w}$, очевидно, совпадают и равны нулю. Если же $w \neq 0$, то из формулы Муавра (1.9) легко получается формула для извлечения корня

$$z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$$
$$= \sqrt[n]{|w|}_{+} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $\underset{+}{\sqrt[n]{|w|}}$ есть арифметическое значение корня, φ — одно из значений $\operatorname{Arg} w$, а $k = \overline{0, n-1}$. Если k давать другие значения, то значения корня будут повторяться. Легко убедиться, что n значений корня геометрически изображаются точками, лежащими в вершинах правильного n-угольника с центром в начале координат.

2. *Модуль частного двух комплексных чисел равен частному их модулей, а аргумент частного двух комплексных чисел равен разности аргументов данных чисел, т.е.*

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

[Доказательство]

3. *Для любых комплексных чисе z_1 и z_2 справедливы следующие неравенства:*

$$\big||z_2| - |z_1|\big| \leqslant |z_2 \pm z_1| \leqslant |z_2| + |z_1|.$$

4. *Модуль разности $z_2 - z_1$ равен расстоянию между точками z_2 и z_1.* [Доказательство]

1.1.6. Стереографическая проекция

Потребности теории функций комплексного переменного обуславливают необходимость расширения комплексной плоскости $\mathbb{C}$, получающегося из последней добавлением нового элемента — бесконечно удаленной точки $z = \infty$. Для наглядного представления расширенной комплексной плоскости Риман предложил использовать способ, который сейчас будет описан.

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, \omega) : x, y, \omega \in \mathbb{R}\}$$

и будем отождествлять комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с подмножеством в $\mathbb{R}^3$ с помощью взаимно-однозначного отображения

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \leftrightarrow (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3.$$

Введем так называемую *сферу Римана* (рисунок 1.2)

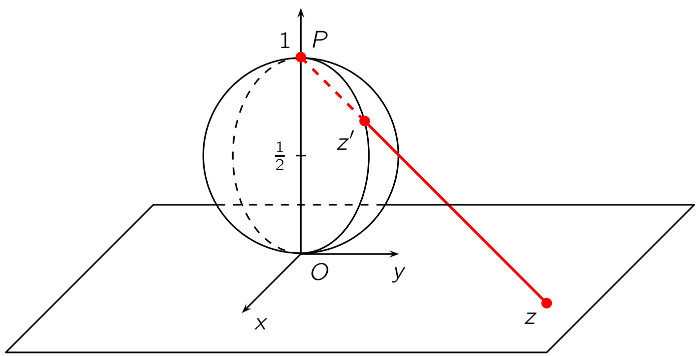

Рисунок 1.2

$$S = \left\{(x, y, \omega) : x^2 + y^2 + \left(w - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}.$$

Пусть $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Соединим «северный полюс» сферы Римана — точку $P(0,0,1)$ — с точкой z отрезком

$$\Gamma_z = \{(tx, ty, 1-t) : t \in [0,1]\}.$$

Если $z \neq 0$, то этот отрезок имеет единственную общую точку с S и соответствующее значение равно $t = (x^2 + y^2 + 1)^{-1}$. Непосредственная проверка показывает, что эта точка есть

$$z' = \left(\frac{x}{|z|^2+1}, \frac{y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2}{|z|^2+1} \right).$$

Будем называет ее *стереографической проекцией* z. Стереографической проекцией точки $z = 0$ является «южный полюс» сферы Римана $(0,0,0)$.

Таким образом, $S \setminus \{(0,0,1)\}$ взаимно-однозначно отображается на комплексную плоскость $\mathbb{C}$. «Северный полюс» сферы Римана $(0,0,1)$ оказался при этом незадействованным. Мы сопоставим точке $(0,0,1)$ новое «идеальное» комплексное число $z = \infty$ и образуем расширенную комплексную плоскость

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Конечно, мы лишены возможности использовать «новое» комплексное число $z = \infty$ в алгебраических операциях. Но иногда, впрочем, некоторым операциям с $z = \infty$ можно приписать смысл

$$a + \infty = \infty + a = \infty, \quad a \cdot \infty = \frac{a}{0} = \infty \cdot a = \infty, \quad \frac{a}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{a} = \infty,$$

но операции $0 \cdot \infty$ и $\infty \pm \infty$ лишены смысла.

Итак, функция

$$F(z) = \begin{cases} \left\{ \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2+1}, \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2}{|z|^2+1} \right\}, & z \in \mathbb{C}, \\ (0,0,0), & z = \infty \end{cases} \tag{1.10}$$

осуществляет взаимно-однозначное отображение расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$ на сферу Римана S.

1.2. Кривые и области в комплексной плоскости. Функции и отображения

1.2.1. Кривые в комплексной плоскости

Путем в $\mathbb{C}$ называется любое непрерывное отображение $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$. Образ $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$ — *след пути*, $a = \gamma(\alpha)$ и $b = \gamma(\beta)$ — соответственно *начало* и *конец* пути γ. В этом случае также говорят, что путь γ соединяет точки a и b.

Если $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ — путь, то для любого разбиения

$$\Pi : \alpha = t_0 < \cdots < t_n = \beta \tag{1.11}$$

его области определения положим

$$l_\gamma(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} \bigl|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\bigr|. \tag{1.12}$$

Геометрический смысл $l_\gamma(\Pi)$ — длина ломаной, вписанной в след пути в точках $\gamma(t_k)$, $k = 0, \ldots, n$.

Определение. *Длиной пути* называется число

$$l_\gamma = \sup_{\Pi} l_\gamma(\Pi). \tag{1.13}$$

Если $l_\gamma < \infty$, то путь называется *спрямляемым*.

На самом деле справедливо равенство $l_\gamma = \lim\limits_{\lambda \to 0} l_\gamma(\Pi)$. Если путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ спрямляем, то для любого $t \in [\alpha, \beta]$

$$l_\gamma[\alpha, \beta] = l_\gamma[\alpha, t] + l_\gamma[t, \beta].$$

(свойство аддитивности длины) и функция $t \mapsto l_\gamma[\alpha, t]$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Здесь было использовано обозначение $l_\gamma[a, b]$ для длины сужения пути γ на отрезок $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$.

Путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ называется

— *гладким*, если $\gamma \in C^1[\alpha, \beta]$,

— *кусочно-гладким*, если существует такое разбиение (1.11), что для каждого $k = 1, \dots, n$ сужение $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \in C^1[t_{k-1}, t_k]$. Гладкий (кусочно-гладкий) путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ является спрямляемым и его длина вычисляется по формуле

$$l_\gamma = \int\limits_\alpha^\beta \left(\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2 \right)^{1/2} dt, \tag{1.14}$$

где $\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Определение. Множество $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется *кривой*, если существует путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, для которого

$$\Gamma = \gamma\big([\alpha, \beta]\big).$$

Путь γ называется в этом случае *параметризацией кривой*. Точки $a = \gamma(\alpha)$ и $b = \gamma(\beta)$ называются *концами* Γ.

Кривая $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется *жордановой кривой*, если она имеет взаимно-однозначную параметризацию.

Другими словами жорданова кривая в $\mathbb{C}$ — это след взаимно-однозначного пути в $\mathbb{C}$. Параметризация жордановой кривой не определяется однозначно. Действительно, легко видеть, что если $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ — параметризация кривой Γ, то для любой строго монотонной непрерывной функции $\varphi : [\alpha_1, \beta_1] \leftrightarrow [\alpha, \beta]$ композиция $\gamma \circ \varphi$ также является параметризацией Γ. Класс всех параметризаций кривой Γ обозначается $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Если $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ — параметризация жордановой кривой $\Gamma \subset \mathbb{C}$, то любую непрерывную строго монотонную функцию $\varphi : [\alpha_1, \beta_1] \to [\alpha, \beta]$ будем называть *заменой параметра*. Таким образом, предыдущее утверждение можно переформулировать так: если γ параметризация жордановой кривой и φ — замена параметра, то $\gamma \circ \varphi$ также является параметризацией. Справедливо и обратное.

Теорема 1.1. *Для любых двух параметризаций $\gamma_k : [\alpha_k, \beta_k] \to \mathbb{C}$ $(k = 1, 2)$ жордановой кривой Γ существует замена параметра φ, для которой $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$.*

Доказательство. Замена параметра, о которой говорится в формулировке, определяется как $\varphi = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2$. Непрерывность γ_1^{-1}, а, следовательно, и φ гарантируется следующей леммой. $\square$

Лемма 1.1. *Если $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — жорданова кривая и $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$ — ее параметризация, то $\gamma^{-1} \in C(\Gamma)$.*

Доказательство. В самом деле, пусть $z_n \in \Gamma$, $z_n \to z_0 \in \Gamma$, но $\left|\gamma^{-1}(z_n) - \gamma^{-1}(z_0)\right| \geqslant \delta > 0$. По свойству Больцано – Вейерштрасса из ограниченной последовательности $t_n = \gamma^{-1}(z_n)$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $t_{n_j} \to t_0$. $z_{n_j} \to \gamma(t_0) = z_0$ в силу непрерывности γ. В то же время $\left|t_{n_j} - t_0\right| > \delta > 0$ — противоречие. □

Определение. *Длиной* l_Γ жордановой кривой Γ называется длина любой ее параметризации.

Длина не зависит от выбора параметризации. Иногда вместо обозначения l_Γ для длины пути мы будем писать $l(\Gamma)$.

Лемма 1.2. *Если Γ — спрямляемая жорданова кривая, то существует такая параметризация $\gamma_0 \in \mathcal{P}(\Gamma)$, $\gamma_0 : [0, l_\Gamma] \to \Gamma$, что*

$$\forall\, s \in [0, l_\Gamma] \quad l_{\gamma_0}[0, s] = s.$$

Доказательство. Пусть γ — какая-нибудь параметризация Γ. Функция $l(t) = l_\gamma[\alpha, t]$ непрерывна и строго возрастает, следовательно, у нее есть непрерывная обратная $l^{-1} : [0, l_\Gamma] \to [\alpha, \beta]$. Тогда функция

$$\gamma_0 = \gamma \circ l^{-1} : [0, l_\Gamma] \to \Gamma$$

является искомой. □

Параметризация γ_0 из леммы 1.2 называется *натуральной* Γ.

Определение. Задать *ориентацию* жордановой кривой — это значит задать порядок во множестве ее концов. Жорданова кривая с заданной ориентацией называется *ориентированной*.

Все параметризации ориентированной жордановой кривой разбиваются на два класса — сохраняющие и меняющие ориентацию. Две параметризации одного класса связаны возрастающей заменой параметра.

В самом деле, в силу леммы 1.1 функция $\varphi = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2$ непрерывна и взаимно однозначна (как композиция непрерывных и взаимно-однозначных отображений), поэтому φ строго монотонна и является заменой параметра.

Определение. Множество $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется *контуром* (*замкнутой жордановой кривой*) в $\mathbb{C}$, если существует непрерывная взаимнооднозначная функция $\gamma : C \to \mathbb{C}$, для которой $\gamma(C) = \Gamma$ (здесь $C = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$ — единичная окружность).

Если γ — функция из определения 7.2.4 и $\eta(t) = \cos t + i \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$, то композиция $\gamma \circ \eta : [0, 2\pi) \to \Gamma$ называется *параметризацией* контура Γ. Функция γ^{-1} является непрерывной (это доказывается как в лемме 1.1).

Длина контура определяется точно так же, как и для жордановой кривой в определении 7.2.4.

Жорданова кривая (или контур) называется

— *гладкой*, если у нее существует гладкая параметризация,

— *кусочно-гладкой*, если она является объединением конечного числа гладких жордановых кривых с последовательно соединенными началами и концами.

Отрезок в $\mathbb{C}$ с началом в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ и концом в точке $z_1 \in \mathbb{C}$ определяется как множество

$$[z_0, z_1] = \{(1 - \lambda)z_0 + \lambda z_1 : \lambda \in [0, 1]\}.$$

Ломаной называется жорданова кривая, являющаяся объединением конечного числа отрезков с последовательно соединенными началами и концами. Ясно, что ломаная является кусочно-гладкой жордановой кривой.

Полигон — контур, являющийся объединением конечного числа отрезков с последовательно соединенными концам и началами, причем конец последнего совпадает с началом первого.

Если $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — контур, то *ориентацию* его можно задать «порядком прохождения» трех его точек

$$x \to y \to z \to x \quad \text{или} \quad x \to z \to y \to x.$$

Все параметризации контура тогда разбиваются на два класса — *сохраняющие ориентацию* и *меняющие ориентацию*.

Задание ориентации не зависит от выбора точек x, y, z в том смысле, что если параметризация «проходит» какие-то три точки x_1, y_1, z_1 в определенном порядке, то любая параметризация того же класса проходит их в том же порядке.

Одну из ориентаций можно назвать положительной, а другую — отрицательной. При этом в качестве *положительной* принято выбирать ту, для которой при обходе контура с помощью параметризации, сохраняющей эту ориентацию, область, ограниченная контуром, остается слева (обход совершается «против часовой стрелки»). Такие параметризации будем называть положительными. Положительно и отрицательно ориентированный контур Γ будем обозначать соответственно Γ^+ и Γ^- ориентированный контур.

Это определение знака ориентации контура не является, конечно, вполне строгим, но оно интуитивно ясно в случае, когда контур является гладким или кусочно-гладким (например, в случае полигона).

Условимся в дальнейшем *многоугольником* называть любое открытое ограниченное множество в $\mathbb{C}$, границей которого является полигон.

1.2.2. Области в комплексной плоскости

Определение. Множество $A \subset \mathbb{C}$ называется *связным*, если не существует таких двух открытых множеств $G_1 \subset \mathbb{C}$ и $G_2 \subset \mathbb{C}$, что

$$G_1 \cap G_2 = \varnothing, \quad A \cap G_1 \neq \varnothing, \quad A \cap G_2 \neq \varnothing, \quad A \subset G_1 \cup G_2.$$

Другими словами, связное множество нельзя разбить на непустые части, содержащиеся в не пересекающихся открытых множествах.

Определение. Множество $A \subset \mathbb{C}$ называется *линейно связным*, если для любых двух его точек существует путь, соединяющий эти точки, след которого лежит в A.

Непустое открытое связное множество в $\mathbb{C}$ называется *областью*.

Лемма 1.3. *Любая область линейно связна. Более того, любые две точки области можно соединить ломаной, лежащей в области.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in D$ — фиксированная точка. Обозначим D_1 множество точек из D, которые можно соединить с z_0 ломаной, содержащейся в D. Тогда D_1 содержит некоторый шар $B(z_0, r)$. Это же верно и для любой другой точки из D_1. Таким образом, D_1 открыто.

Множество $D_2 = D \setminus D_1$ также открыто, так как если $z \in D_2$ и шар $B(z, r)$ содержится в D, то ни одна точка $B(z, r)$ не входит в D_1.

Итак, множества D_1, D_2 открыты, $D = D_1 \cup D_2$ и $D_1 \neq \varnothing$. Так как D связно, то $D_2 = \varnothing$ и $D = D_1$. $\square$

Границей ∂D области $D \subset \mathbb{C}$ называется пересечение замыканий области D и ее дополнения D^c

$$\partial D = \overline{D} \cap \overline{D^c}.$$

Важным классом областей в являются так называемые жордановы области: область называется *жордановой*, если ее границей является контур. Мы будем всегда считать (если не оговорено противное), что граница жордановой области ориентируется положительно (см. предыдущий раздел) и будем обозначать ее тогда $(\partial D)^+$.

Теорема 1.2 (Жордан). *Контур (замкнутая жорданова кривая) разбивает комплексную плоскость на две односвязные области, для которых она является общей границей.*

Мы приводим это утверждение без доказательства.

Несмотря на то, что область — связное множество, ее граница может не быть связной. Примером может служить кольцо.

Компонентой связности границы области называют любое связное подмножество границы, не являющееся собственным подмножеством другого связного подмножества границы. Область называется *односвязной*, если ее граница является связным множеством, в противном случае область называется *многосвязной*.

Порядком связности области называется число компонент связности ее границы. Область называется m-связной, если ее порядок связности конечен и равен m, если же порядок связности бесконечен, то область называется бесконечносвязной.

1.2.3. Функции комплексного переменного

Определение. Пусть E есть некоторое множество точек комплексной плоскости. Если каждому $z \in E$ поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел w, то говорят, что на E определена *функция $w = f(z)$ комплексного переменного z*.

Если каждому z соответствует одно значение w, то функция $w = f(z)$ называется *однозначной*. Если некоторым значениям z соответствует более одного w, то функция $w = f(z)$ называется *многозначной*.

Примерами однозначных функций служат функции $w = z^3$, $w = \operatorname{Re} z$, $w = \operatorname{Im} z$, определенные на всей плоскости z.

Функция $w = \operatorname{Arg} z$ — многозначная (бесконечнозначная), определенная для $z \neq 0$.

Функция $w = \sqrt[n]{z}$, где n — натуральное число($n \geqslant 2$), также многозначная (n-значная) и задана на всей плоскости z.

Положим $z = x + iy$ и $w = u + iv$. Тогда фраза «однозначная функция $w = f(z)$ определена на E» эквивалентно следующему: «каждой точке из E с координатами x и y поставлены в соответствие действительное число u и действительное число v». Иными словами, на E определены две действительные функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ двух действительных переменных x и y.

Итак, одно комплексное соотношение $w = f(z)$ эквивалентно двум действительным $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$. Например, соотношение $w = z^2$ эквивалентно следующим: $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

Переход от записи $w = f(z)$ к записи $w = u(x, y) + iv(x, y)$ называется *выделением действительной и мнимой части* у функции комплексного переменного.

Условимся откладывать значения z на одной комплексной плоскости, а значения $w = f(z)$ на другой. Тогда геометрически функцию комплексного переменного можно рассматривать как некоторое отображение множества E плоскости z на множество F плоскости w.

1.2.4. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Пусть $w = f(z)$ есть однозначная функция, определенная в некоторой окрестности точки z_0.

Определение. Комплексное число A называется *пределом функции $w = f(z)$ в точке z_0*, если $\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\delta > 0$ такое, что $\forall\,z$, удовлетворяющих условию $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(z) - A| < \varepsilon.$$

Символически это записывается так:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A.$$

Определение. Если

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0),$$

то функция $f(z)$ называется *непрерывной в точке z_0*.

Учитывая определение предела функции в точке, последнее утверждение можно переписать следующим образом.

Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если $\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\delta > 0$ такое, что $\forall\,z$, удовлетворяющих условию $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Определение. Функция, непрерывная в каждой точке области G, называется *непрерывной в этой области*.

Нетрудно показать, что непрерывность функции $w = f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ эквивалентна непрерывности двух действительных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Отсюда следует, что многие свойства непрерывных функций двух действительных переменных непосредственно переносятся на непрерывные функции комплексного переменного.

1. *Сумма, разность и произведение двух функций комплексного переменного $f_1(z)$ и $f_2(z)$, непрерывных в области G, также являются непрерывными функциями в этой области. Функция $f_1(z)/f_2(z)$ непрерывна в тех точках области G, где $f_2(z) \neq 0$.*

2. *Если функция $w = f(z)$ задана в окрестности точки z_0 и непрерывна в точке z_0, а функция $\xi = \varphi(w)$ задана в окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ и непрерывна в точке w_0, то сложная функция $\xi = F(z) = \varphi(f(z))$ также непрерывна в точке z_0.*

3. *Функция $w = f(z)$, непрерывная в ограниченной и замкнутой области $\overline{G}$, ограничена в этой области, т.е. удовлетворяет соотношению*

$$|f(z)| \leqslant C, \qquad \forall\, z \in \overline{G}.$$

4. *Модуль функции $w = f(z)$, непрерывной в ограниченной и замкнутой области $\overline{G}$, достигает на $\overline{G}$ своих точных верхней и нижней граней.*

Определение. Функция $w = f(z)$ называется *равномерно непрерывной на $\overline{G}$*, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, z_1, z_2 \in \overline{G}$, удовлетворяющих условию $|z_1 - z_2| < \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

Нетрудно показать, что функция $w = f(z)$ непрерывная в ограниченной и замкнутой области $\overline{G}$, равномерно непрерывна в этой области.

Глава 2

Дифференцируемость функции комплексного переменного

2.1. Дифференцируемые функции комплексного переменного. Правила дифференцирования (производная и арифметические операции, производная сложной функции, производная обратной функции). Условия Коши – Римана

2.1.1. Производная и дифференцируемость

Определение. Пусть функция f задана в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Если существует предел

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \tag{2.1}$$

то он называется *производной* функции f в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$.

Если ввести обозначения

$$h = z - z_0, \quad \alpha(h) = \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0),$$

то условие существования производной легко переписать в виде

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = f'(z_0)h + \alpha(h),$$

где $\alpha(h) = o(|h|)$ при $|h| \to 0$.

Определение. Функция f заданная в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой* в этой точке, если существует такое комплексное число $A \in \mathbb{C}$, что

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = Ah + o(|h|), \quad |h| \to 0. \tag{2.2}$$

Таким образом, замечание перед последним определением говорит нам о том, что существование производной функции f в точке z_0 равносильно ее дифференцируемости в этой точке. При этом число A в определении 7.2.4 совпадает с $f'(z_0)$.

2.1.2. Правила дифференцирования

Как и раньше дифференцированием мы будем называть процесс вычисления производной. Этот процесс подчиняется таким же правилам, как и в случае функций действительного переменного.

Теорема 2.1 (правила дифференцирования). *Справедливы следующие утверждения.*

1. Если $f(z) \equiv c$, то $f'(z) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$.

2. Если функции f и g дифференцируемы в точке z, то

а) для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ их линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ дифференцируема в точке z и

$$\big(\alpha f(z) + \beta g(z)\big)' = \alpha f'(z) + \beta g'(z),$$

б) их произведение $f \cdot g$ дифференцируемо в точке z и

$$\big(f(z)g(z)\big)' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$

в) при условии $g(z) \neq 0$ их частное f/g дифференцируемо в точке z и

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}.$$

3. Если функция f дифференцируема в точке z, а функция g дифференцируема в точке $f(z)$, причем область значений функции f содержится в области определения функции g, то их композиция $F = g \circ f$ дифференцируема в точке z и

$$F'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z).$$

4. Если однолистная функция f дифференцируема в точке z, причем $f'(z) \neq 0$, то обратная функция f^{-1} дифференцируема в точке $w = f(z)$ и

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Доказательства всех утверждений этой теоремы ничем не отличается от доказательств соответствующих свойств операции дифференцирования для функций действительного переменного.

2.1.3. Условия Коши–Римана

Все это мы уже видели в курсе математического анализа и пока комплексный случай ничего нового нам не показал. Однако, мы уже сейчас убедимся, что дифференцируемость сейчас является существенно более сильным свойством, налагающим дополнительные ограничения на функцию. Для этого запишем значения функции f в алгебраической записи (1.2)

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy. \tag{2.3}$$

Запись (2.3) будет систематически использоваться ниже на протяжении всей книги.

Теорема 2.2. *Для того, чтобы функция f была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, необходимо и достаточно, чтобы действительная $u = \operatorname{Re} f$ и мнимая $v = \operatorname{Im} f$ части были дифференцируемы (как функции из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$) и выполнялись равенства*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{2.4}$$

При этом

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).5 \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть функция f дифференцируема точке z_0. Считаем, что в условии дифференцируемости (2.2) $D = A + iB$, $h = t + is$, то есть

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = (A + iB)(t + is) + o(|h|) =$$

$$= (At - Bs) + i(Bt + As) + o(|h|)$$

и отделим в нем действительную и мнимую части, получая соотношения

$$\begin{cases} u(x_0+t, y_0+s) - u(x_0, y_0) = At - Bs + o(\sqrt{t^2+s^2}), \\ \\ v(x_0+t, y_0+s) - v(x_0, y_0) = Bt + As + o(\sqrt{t^2+s^2}). \end{cases}$$

Отсюда следует дифференцируемость функций u и v, а также равенства

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

и

$$B = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Поэтому все соотношения в утверждении нашей теоремы справедливы.

Обратно можно вернуться по этой же дорожке. □

Равенства (2.4) называют обычно *уравнениями Коши–Римана*. Необходимость их выполнения для существования производной делает теорию диффренцирования комплексных функций существенно отличной от соответствующей действительной теории функций из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$.

Отметим для дальнейшего, что если функция f дифференцируема в области D и одна из функций $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $|f|$, $\arg f$ постоянна в D, то f есть тождественная постоянная. (это можно дать как упражнение, а можно и доказать).

2.2. Аналитические функции. Гармонические функции. Геометрический смысл аргумента и модуля производной

2.2.1. Геометрический смысл аргумента производной

Если $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — гладкая жорданова кривая и $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$ — ее гладкая параметризация, то, исходя из уравнения

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)}$$

уравнение касательной к Γ в точке $z_0 = \gamma(t_0)$ можно записать в виде

$$z = z_0 + t\big(\cos\arg\gamma'(t_0) + i\sin\arg\gamma'(t_0)\big), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, $\arg\gamma'(t_0)$ — *угловой коэффициент касательной*.

Пусть задана функция $f \in C(G)$ ($G \subset \mathbb{C}$ — область), которая дифференцируема в точке $z_0 \in G$, причем $f'(z_0) \neq 0$. Проведем через z_0 гладкую жорданову кривую Γ и пусть $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$, $z_0 = \gamma(t_0)$. Тогда ее образ $f(\Gamma)$ — кривая с параметризацией $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$.

В силу правила дифференцирования композиции (см. теорему 2.1 справедливо равенство

$$\arg\widetilde{\gamma}'(t_0) = \arg\left(f'(z_0)\cdot\gamma'(t_0)\right) = \arg f'(z_0) + \arg\gamma'(t_0) \tag{2.6}$$

или

$$\arg\widetilde{\gamma}'(t_0) - \arg\gamma'(t_0) = \arg f'(z_0).$$

Возьмем теперь две гладкие жордановы кривые Γ_1 и Γ_2, проходящие через точку z_0 с параметризациями γ_1 и γ_2 (можно считать, что $z_0 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$). Под действием функции f они отобразятся в кривые $f(\Gamma_1)$ и $f(\Gamma_2)$ с параметризациями $\widetilde{\gamma}_1 = f \circ \gamma_1$ и $\widetilde{\gamma}_2 = f \circ \gamma_2$ соответственно. Вычисляя угловые коэффициенты касательных к этим кривым в точке z_0 с помощью равенства (2.6) находим, что

$$\arg\widetilde{\gamma}_1{}'(t_0) - \arg\widetilde{\gamma}_2{}'(t_0) = \arg\gamma_1'(t_0) - \arg\gamma_2'(t_0).$$

Это означает, что угол между касательными в точке z_0 к образам $f(\Gamma_1)$ и $f(\Gamma_2)$ кривых Γ_1 и Γ_2 равен углу между прообразами (как по величине, так и по направлению отсчета).

Таким образом, мы приходим к пониманию геометрического смысла аргумента производной функции $\arg f'(z_0)$ — это угол, на который поворачиваются касательные к кривым в точке z_0 после отображения с помощью функции непрерывной функции f, имеющей в точке z_0 отличную от нуля производную.

2.2.2. Геометрический смысл модуля производной

Геометрический смысл модуля производной легко усмотреть из равенства

$$|f'(z_0)| = \lim_{z\to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}.$$

Если модуль $|z - z_0|$ мал, то

$$|f(z) - f(z_0)| \approx |f'(z_0)| \cdot |z - z_0|.$$

Таким образом, модуль производной $|f'(z_0)|$ — это предельный коэффициент растяжения, показывающий насколько изменяется расстояние между образами точек z и z_0 (для малых $|z - z_0|$) при отображении f.

2.2.3. Понятие аналитической функции

Определение. Функция f, определенная в некоторой окрестности точки z_0, называется *аналитической* в этой точке, если она дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0.

Функция f называется аналитической в бесконечно удаленной точке $z_0 = \infty$, если функция $f(1/z)$ аналитична в точке 0.

Функция называется аналитической в некоторой области $G \subset \mathbb{C}$, если она аналитична в каждой точке этой области.

Для термина «аналитическая функция» используются также синонимы «*голоморфная*» функция, «*регулярная*» функция.

Функция, аналитическая во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, называется *целой*.

Условимся называть углом между гладкими кривыми в точке их пересечения угол между касательными к к ним в этой точке. **Мне не нравится это определение.**

Определение. Непрерывное отображение $f \in C(G)$ области $G \subset \mathbb{C}$ называется *конформным* в точке $z_0 \in G$, если оно сохраняет углы между кривыми, проходящими через эту точку.

Результат п.2.2.1 говорит нам о том, что отображение с помощью аналитической функции в некоторой области функции является конформным во всех точках области, где ее производная отлична от нуля.

Глава 3

Элементарные аналитические функции и соответствующие им конформные отображения

3.1. Дробно-линейные отображения

3.1.1. Простейшие свойства

Определение. *Дробно-линейными отображениями* называются функции вида

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.1}$$

Условие (7.2.4) обеспечивает нам невырожденность дробно-линейной функции. Именно, вычисляя производную этой функции, мы видим, что

$$f'(z) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cz+d)^2} \tag{3.2}$$

Поэтому, если (3.1) не выполнено, то наша функция является тождественной постоянной. Кроме того, условие (3.1) необходимо для конформности дробно-линейного отображения.

Случай $c = 0$ особенно прост — тогда наша функция является линейной и легко проследить, что происходит при отображении с ее помощью. Перепишем ее в виде

$$f(z) = Az + B, \quad \text{где } A = \frac{a}{d}, \; B = \frac{b}{d}.$$

В силу (3.1) $A \neq 0$, следовательно, линейная функция f осуществляет конформное отображение всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. При этом отображении касательные ко всем гладким кривым поворачиваются на один и тот же угол $\arg A$, а коэффициент растяжения во всех точках равен $|A|$. Очевидно также, что при линейном отображении прямые и окружности переходят в прямые и окружности.

Далее рассмотрим случай $c \neq 0$. Тогда из равенства

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}$$

вытекает, что дробно-линейное отображение является композицией двух линейных функций и функции $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Кроме того, легко видеть, что дробно-линейная функция взаимно однозначно отображает проколотую комплексную плоскость $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ на $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{c}{a}\right\}$. Обратное отображение для дробно-линейной функции (3.1) задается равенством

$$f^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}, \quad w \neq \frac{c}{a}.$$

и также является невырожденным дробно-линейным отображением.

дробно-линейной функции (3.1) является конформным во всех точках комплексной плоскости $\mathbb{C}$, кроме $-d/c$. Это вытекает из его аналитичности и того, что производная (см. (3.2)) отлична от нуля в этих точках.

Можно рассматривать дробно-линейные отображения расширенной комплексной плоскости. Функция (3.1) определена всюду в $\mathbb{C}$, кроме точек $-d/c$ и ∞ при $c \neq 0$ и кроме точки ∞ при $c = 0$. Для этого доопределим ее следующими равенствами

— если $c \neq 0$, то положим

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, \quad f(\infty) = \frac{a}{c},$$

— если $c = 0$, то положим

$$f(\infty) = \infty.$$

При таком определении дробно-линейное отображение является гомеоморфизмом (т.е. взаимно однозначным отображением, обратное к которому также непрерывно) расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}$ на себя. Это утверждение легко устанавливается непосредственной проверкой.

3.1.2. Групповое свойство

Рассмотрим теперь композицию двух невырожденных функций

$$f_k(z) = \frac{a_k z + b_k}{c_k z + d_k}, \quad k = 1, 2.$$

Тогда после элементарных преобразований получаем снова дробно-линейное отображение

$$f_2(f_1(z)) = \frac{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} = \frac{(a_1 a_2 + c_1 b_2) z + (b_1 a_2 + c_1 d_2)}{(a_1 c_2 + c_1 d_2) z + (b_1 c_2 + d_1 d_2)},$$

которое невырождено, так как его определитель

$$(a_1 a_2 + c_1 b_2)(b_1 c_2 + d_1 d_2) - (b_1 a_2 + d_1 b_2)(a_1 c_2 + c_1 d_2) =$$
$$= (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2) \neq 0$$

отличен от нуля.

Таким образом, мы показали что множество всех невырожденных дробно-линейных функций образует группу с групповой операцией — композицией отображений.

3.1.3. Круговое свойство

$\widehat{\mathbb{C}}$-окружностью (или *обобщенной окружностью*, или окружностью в расширенной комплексной плоскости) будем называть любую окружность или прямую на $\mathbb{C}$.

Такая трактовка прямых в $\mathbb{C}$ объясняется тем, что при стереографической проекции окружностям и прямым в $\mathbb{C}$ соответствуют окружности на сфере Римана (убедитесь в этом самостоятельно).

Теорема 3.1 (круговое свойство). *При дробно-линейных отображениях образами $\widehat{\mathbb{C}}$-окружностей являются $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности.*

Доказательство. Рассмотрим общее уравнение прямой или окружности

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0.$$

Если $A = 0$, $B^2 + C^2 \neq 0$, то это — уравнение прямой. Если же $A \neq 0$, $B^2 + C^2 - AD > 0$, то это — уравнение окружности. С помощью замены

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}; \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$

перейдем к уравнению

$$Az\overline{z} + \overline{E}z + E\overline{z} + D = 0, \quad E = A + iB.$$

Заменяя здесь $z = 1/w$, получим уравнение такого же вида

$$Dw\overline{w} + Ew + \overline{E}\overline{w} + A = 0.$$

Это означает, что функция $w = 1/z$ обладает свойством, сформулированным в нашей теореме.

Кроме того, линейная функция также обладает, очевидно, таким же свойством. Следовательно, оно имеет место и для любой дробно-линейной функции, как композиции линейных функций и функции $w = 1/z$.

□

3.1.4. Свойство симметрии

Определение. Две точки называются *симметричными относительно прямой*, если они лежат на одном и том же перпендикуляре к этой прямой на равном расстоянии от нее.

Две точки называются *симметричными относительно окружности*, если они лежат на одном луче с началом в центре окружности и произведение расстояний от этих точек до центра окружности равно квадрату ее радиуса.

Центр окружности будем считать симметричным бесконечно удаленной точке ∞.

Пример 3.1. Пара z и $\overline{z}$ симметрична относительно оси $\operatorname{Im} z = 0$. Пара z и $R^2/\overline{z}$, симметрична относительно окружности $C_R(0)$.

Отсюда следует, что отображение

$$z \mapsto e^{2i\theta}(\overline{z} - \overline{z_0}) + z_0 \tag{3.3}$$

дает точку, симметричную точке z относительно прямой $z = z_0 + te^{i\theta}$, $t \in \mathbb{R}$. Аналогично

$$z \mapsto z_0 + \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z_0}} \tag{3.4}$$

дает точку, симметричную точке z относительно окружности $C_R(z_0)$. Будем называть их *преобразованиями симметрии относительно прямой* и *окружности* соответственно.

Преобразование симметрии относительно прямой часто называют *зеркальным отражением*, а преобразование симметрии относительно окружности — *инверсией*.

Очевидно, что композиция двух преобразований симметрии относительно прямых или окружностей ((3.3) или (3.4)) является невырожденным дробно-линейным преобразованием. Для доказательства обратного утверждения нам понадобится некоторая подготовка.

Лемма 3.1. *Пусть* Γ — $\widehat{\mathbb{C}}$*-окружность. Тогда для симметрии двух точек* $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ *относительно* Γ *необходимо и достаточно, чтобы любая* $\widehat{\mathbb{C}}$*-окружность, содержащая эти точки, была ортогональна* Γ.

Доказательство. Необходимость. Пусть точки z и z^* симметричны относительно Γ и $\widehat{\mathbb{C}}$-окружность $\widetilde{\Gamma}$ содержит эти точки.

Если Γ или $\widetilde{\Gamma}$ является прямой, то ортогональность Γ и $\widetilde{\Gamma}$ очевидна, поэтому считаем, что и Γ, и $\widetilde{\Gamma}$ являются окружностями.

Пусть Γ — окружность с центром в точке z_0 радиуса R и z лежит внутри z и z^*. С одной стороны условие симметричности означает, что $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2$. С другой стороны, если провести через z_0 касательную к окружности $\widetilde{\Gamma}$ и секущую (луч из точки z_0, содержащий z и z^*), то квадрат длины этой касательной равен произведению $|z-z_0|\cdot|z^*-z_0|$ длин отрезков секущей. Отсюда длина касательной равна R и является радиусом окружности Γ и ортогональна радиусу окружности $\widetilde{\Gamma}$, проведенному в точку касания. Следовательно, Γ и $\widetilde{\Gamma}$ ортогональны.

Достаточность. Доказательство очевидно в случае, когда Γ — прямая. Пусть Γ — окружность с центром в точке z_0 радиуса R.

Если $\widetilde{\Gamma}$ — прямая, содержащая точки z и z^*, то по условию $\widetilde{\Gamma}$ ортогональна Γ и все три точки z_0, z и z^* принадлежат $\widetilde{\Gamma}$.

Если $\widetilde{\Gamma}$ — окружность, содержащая точки z и z^*, то произведение $|z-z_0|\cdot|z^*-z_0|$ равно квадрату касательной к $\widetilde{\Gamma}$, выходящей из точки z_0 и равной радиусу R. Поэтому точки z и z^* симметричны относительно z и z^*. □

Теорема 3.2. *При дробно-линейном отображении любая пара точек, симметричных относительно $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности, преобразуется в пару точек, симметричных относительно ее образа.*

Доказательство. Пусть f — наше дробно-линейное отображение и точки z и z^* симметричны относительно окружности или прямой Γ и пусть $\widetilde{\Gamma}$ — $\widehat{\mathbb{C}}$-окружность, содержащая z и z^*. По лемме 3.1 $\widetilde{\Gamma}$ ортогональна Γ и по теореме 3.1 ее образ $f(\widetilde{\Gamma})$ является $\widehat{\mathbb{C}}$-окружностью. Так как f осуществляет конформное отображение, то $f(\widetilde{\Gamma})$ ортогональна $f(\Gamma)$. При этом любая окружность или прямая, содержащая $f(z)$ и $f(z^*)$, может быть представлена в таком виде. Снова применяя лемму 3.1, получаем симметричность точек $f(z)$ и $f(z^*)$ относительно $f(\Gamma)$. □

3.1.5. Свойство трех точек

Дробно-линейная функция (3.1) вполне определяется тремя параметрами — можно разделить числитель и знаменатель дроби в (3.1) на одно и то же число, отличное от нуля. Поэтому естественно ожидать, что дробно-линейное отображение вполне определяется заданием его значений в трех точках. Это действительно так.

Теорема 3.3 (о трех точках). *Для любых трех различных точек $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ и любых трех различных чисел $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ существует единственное дробно-линейное отображение f, удовлеторяющее условию*

$$f(z_k) = w_k, \quad k = 1, 2, 3. \tag{3.5}$$

Доказательство. Будем считать, что все z_k и w_k принадлежат $\mathbb{C}$ (являются собственными числами).

Дробно-линейная функция

$$f_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

переводит точки z_1, z_2 и z_3 в 0, ∞ и 1 соответственно. Аналогично функция

$$f_2(z) = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}$$

переводит точки w_1, w_2 и w_3 в 0, ∞ и 1 соответственно. Поэтому $f_2^{-1} \circ f_1$ удовлетворяет условию (3.5).

В случае, когда одно из z_k или (и) одно из w_k равны ∞, доказательство предлагается провести самостоятельно.

Единственность. Если дробно-линейное отображение f удовлетворяет условию (3.5), то композиция (также дробно-линейное отображение) $g = f_2 \circ f \circ f_1^{-1}$ оставляет точки 0, ∞ и 1 неподвижными. Поэтому из условия $g(\infty) = \infty$ вытекает, что $g(z) = Az + B$. Так как $g(0) = 0$, то $A = 0$, а из $g(1) = 1$ следует $B = 1$. Следовательно, $g(z) = z$ и $f = f_2^{-1} \circ f_1$, т.е. f определяется однозначно. □

3.1.6. Примеры дробно-линейных отображений

Рассмотрим дробно-линейные отображения некоторых наиболее просто устроенных областей: расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$, комплексной плоскости $\mathbb{C}$, единичного круга

$$B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \tag{3.6}$$

и верхней полуплоскости

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}. \tag{3.7}$$

Дробно-линейным автоморфизмом области $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ будем называть любое дробно-линейное отображение области D на себя.

Ясно, что множество всех дробно-линейных автоморфизмов области является группой, которая является подгруппой группы всех дробно-линейных отображений.

Группы дробно-линейные автоморфизмов первых двух основных областей описываются очевидным образом:

— для расширенной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$ совпадает с группой всех дробно-линейных отображений,

— для плоскости $\mathbb{C}$ совпадает с группой всех линейных отображений, т.е. функций вида $az + b$.

Рассмотрим далее отображения полуплоскости H и круга B. В следующем примере описываются дробно-линейные автоморфизмы единичного круга с заданным прообразом нуля.

Пример 3.2. Формула

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{3.8}$$

дает общий вид дробно-линейного отображения, которое отображает единичный круг B на себя так, что заданная точка z_0 переходит в центр этого круга.

Решение. Пусть функция

$$f(z) = \lambda\frac{z - a}{z - b} \tag{3.9}$$

отображает B на B, причем $f(z_0) = 0$. Тогда ясно, что $a = z_0$.

Отметим, что

$$f(\partial B) = \partial B. \tag{3.10}$$

В самом деле, пусть $|z| = 1$, тогда неравенство $|f(z)| < 1$ невозможно (f отображает B на B). Поэтому, если предположить, что $|f(z)| > 1$, то в некоторой точке отрезка $[z_0, z] \subset B$ непрерывная функция $|f|$ обязана принимать значение 1, что также невозможно. Итак, $f(\partial B) \subset \partial B$ и в силу кругового свойства 3.1 выполнено (3.10).

Рассмотрим теперь точку $1/\overline{z_0}$, симметричную z_0 относительно $\partial B = C_1(0)$. В силу (3.10) свойства симметрии (теорема 3.2) ее образ — точка симметричная началу координат, т.е. $f(1/\overline{z_0}) = \infty$. Отсюда $b = 1/\overline{z_0}$ и

$$f(z) = \lambda_1 \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z_0}}.$$

с некоторым другим λ_1. В силу (3.10) $|f(1)| = 1$, поэтому $|\lambda_1| = 1$.

Докажем теперь, что любое отображение вида (3.8) отображает B на себя так, что z_0 переходит в точку 0. Отметим, что если $|z| = 1$, то $z\overline{z} = 1$ и

$$|f(z)| = \left| \frac{z - z_0}{z\overline{z} - z\overline{z_0}} \right| = \frac{|z - z_0|}{|z| \cdot |z - \overline{z_0}|} = 1.$$

Поэтому $f(\partial B) \subset \partial B$ и в силу кругового свойства (теорема 3.1) выполнено (3.10). Отсюда следует, что при $|z| < 1$ будет $|f(z)| < 1$ (если это не так, то $|f(z)| > 1$ в некоторой точке $z \in B$ и, т.к. $f(z_0) = 0$, то непрерывная функция $|f(z)|$ должна принимать в B и значение 1, а это противоречит равенству (3.10). Точно так же доказывается, что $|f(z)| > 1$ при $|z| > 1$. Следовательно, $f(B) = B$. □

Неединственность в примере 3.2 объясняется тем, что переход в (3.12) от одного θ к другому равносилен повороту круга, поэтому условия на отображение не нарушаются.

Пример 3.3. Формула

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{где} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ ad - bc > 0, \tag{3.11}$$

дает общий вид дробно-линейного отображения, которое отображает верхнюю полуплоскость H на себя.

Решение. То, что отображение с указанными свойствами должно иметь вид (3.11), можно вывести из теоремы 3.3. То, что отображение вида (3.11) обладает этими свойствами, доказывается подобно рассуждениям из примера 3.2. Читателю предлагается проделать это самостоятельно. □

Пример 3.4. Формула

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{3.12}$$

дает общий вид дробно-линейного отображения, которое отображает верхнюю полуплоскость H на единичный круг B так, что заданная точка z_0 переходит в центр этого круга.

Решение. Пусть функция (3.9) отображает H на единичный круг B так, что $f(z_0) = 0$. Тогда $a = z_0$.

Заметим, что сейчас

$$f(\partial H) = \partial B. \tag{3.13}$$

Пусть $x \in \mathbb{R} = \partial H$, тогда неравенство $|f(x)| < 1$ невозможно, т.к. $f(H) = B$. Если предположить, что $|f(x)| > 1$, то на отрезке, соединяющем точки x и z_0 непрерывная функция $|f|$ обязана принимать значение 1, что также невозможно. Итак, $f(\partial H) \subset \partial B$ и в силу кругового свойства (3.1) выполнено (3.13).

В силу свойства симметрии (теорема 3.2) $f(\overline{z_0}) = \infty$, отсюда $b = \overline{z_0}$. Чтобы найти λ, возьмем $x \in \mathbb{R}$. Тогда числа $x - z_0$ и $x - \overline{z_0}$ являются взаимно сопряженными и имеют одинаковые модули, поэтому

$$|f(x)| = \left|\lambda\frac{x - z_0}{x - \overline{z_0}}\right| = |\lambda|.$$

Это означает, что образ действительной оси — окружность радиуса $|\lambda|$, поэтому $|\lambda| = 1$ и $\lambda = e^{i\theta}$ при некотором $\theta \in \mathbb{R}$. □

3.2. Экспоненциальная функция

Определение. Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

где $z = x + iy$.

Иногда мы пишем $\exp z$ вместо e^z.
В частности, при $x = 0$ мы получаем *формулу Эйлера*

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \tag{3.14}$$

которая приводит к *экспоненциальной форме* записи комплексных чисел

$$z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}. \tag{3.15}$$

Запишем действительную и мнимую части для e^z

$$\begin{cases} u(x, y) = e^x \cos y, \\ v(x, y) = e^x \sin y. \end{cases}$$

Они имеют частные производные любого порядка. Находя их частные производные первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$$

видим, условия Коши – Римана (2.4) выполнены, поэтому по теореме 2.2 функция $f(z) = e^z$ является аналитической во всей комплексной плоскости, то есть целой (см. раздел 2.2.3). Кроме того, из соотношений (2.5) следует, что

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x e^{iy}) = e^{iy} e^x = e^z.$$

Так как очевидно, что $|e^{iy}| = 1$ для любого $y \in \mathbb{R}$, то $|e^z| = e^x \neq 0$. Следовательно, экспоненциальная функция осуществляет конформное отображение в любой точке $z \in \mathbb{C}$.

Важнейшее свойство экспоненциальной функции

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \tag{3.16}$$

известное нам для действительных значений $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, остается справедливым и для любых комплексных $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. В самом деле,

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ = e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2}.$$

Если $k \in \mathbb{Z}$, то

$$e^{z+2\pi ik} = e^x[\cos(y + 2\pi ik) + i \sin(y + 2\pi ik)] = e^z,$$

поэтому $w = 2\pi ik$ является периодом экспоненциальной функции. Обратно, если w — период, то есть $e^{z+w} = e^z$ для любого z, то при $z = 0$ получаем $e^w = 1$, отсюда $w = 2\pi ik$. Таким образом, мы описали множество всех периодов функции e^z, это $\{2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$. Простейший ненулевой период $2\pi i$ называется *основным периодом* экспоненциальной функции.

3.3. Тригонометрические и гиперболические функции

Из формулы Эйлера (3.14) следует, что

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{ix}}{2}.$$

Это дает нам возможность распространить определения синуса и косинуса на комплексные значения аргумента.

Определение. Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{3.17}$$

Эти функции называются *синусом* и *косинусом* соответственно.

Непосредственно из определения вытекает, что первая из них является четной, а вторая — нечетной. Обе являются периодичными с периодом $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Число 2π называется *основным периодом* для этих функций.

Из теоремы 2.1 вытекает, что эти функции дифференцируемы и их производные вычисляются по привычным формулам

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

Следующие два тождества

$$2\left\{e^{i(z_1+z_2)} \pm e^{-i(z_1+z_2)}\right\} =$$
$$= (e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} \pm e^{-iz_2}) + (e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} \mp{}^{-iz_2})$$

легко проверяются с помощью раскрытия скобок в правой части. Из них нетрудно вывести формулы сложения для тригонометрических функций

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \tag{3.18}$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2, \tag{3.19}$$

которые являются основными в теории тригонометрических функций. Из них легко выводятся другие тождества для тригонометрических функций.

С помощью синуса и косинуса вводится еще одна пара тригонометрических функций — тангенс и котангенс.

Определение. Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$
$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \neq \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Эти функции называются *тангенсом* и *котангенсом* соответственно.

Для данных функций также легко вывести стандартные тригонометрические формулы, связывающие их.

С тригонометрическими функциями тесно связаны так называемые гиперболические функции.

Определение. Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Эти функции называются соответственно *гиперболическими синусом* и *гиперболическими синусом*

Из определений 7.2.4 и 7.2.4 вытекают следующие формулы, выражающие связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями

$$\operatorname{ch} iz = \cos z, \quad \operatorname{sh} iz = -i \sin z.$$

В свою очередь отсюда и из тригонометрических формул сложения (3.18)–(3.19) следуют формулы сложения для гиперболических функций

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2,$$

$$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2.$$

Отметим еще несколько формул подобного рода

$$\operatorname{Re}\cos z = \cos x \operatorname{ch} y, \quad \operatorname{Im}\cos z = -\sin x \operatorname{sh} y;$$
$$\operatorname{Re}\sin z = \sin x \operatorname{ch} y; \quad \operatorname{Im}\sin z = \cos x \operatorname{sh} y.$$

Отсюда, в частности,

$$|\cos z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x,$$
$$|\sin z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x$$

Из теоремы 2.1 следует, что гиперболические функции дифференцируемы, а формула для производной экспоненциальной функции приводит к равенствам

$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z.$$

3.4. Логарифмическая функция

Здесь мы впервые столкнемся с многозначной функцией (см. раздел **??**). Для любого $w \neq 0$ множеством решений уравнения $e^z = w$ является

$$\{\ln|w| + i(2\pi k + \arg w) : \ k \in \mathbb{Z}\} = \ln|w| + i\,\mathrm{Arg}\,w. \tag{3.20}$$

Определение. *Логарифмической* (с основанием e) называется многозначная функция

$$\mathrm{Ln}\,z = \{\ln|z| + i(2\pi k + \arg z) : \ k \in \mathbb{Z}\} = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z.$$

Функция

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z$$

называется *главным значением* логарифма.

Для любого значения $\mathrm{Ln}\,z$ справедливы равенства $e^{\mathrm{Ln}\,z} = z$ (при $z \neq 0$) и $\mathrm{Ln}\,e^z = z$. Это показывает, что логарифмическая функция является в некотором смысле обратной к экспоненциальной. Хотя в обычном понимании термина «обратная функция» это не так, потому что экспоненциальная функция не является взаимно однозначной.

В силу основного свойства экспоненциальной функции (3.16) справедливы равенства

$$\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$$

и

$$\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}\,z_1 + \mathrm{Ln}\,z_2,$$

если последнее равенство понимать как совпадение множества слева и множества сумм элементов из слагаемых справа.

Отметим, что с равенствами для многозначных функций надо быть осторожным. Это показывает, например, следующий *парадокс Бернулли*

$$(-z)^2 = z^2 \ \Rightarrow \ \mathrm{Ln}(-z)^2 = \mathrm{Ln}\,z^2 \ \Rightarrow \ 2\,\mathrm{Ln}(-z) = 2\,\mathrm{Ln}\,z,$$

но множества $\operatorname{Ln}(-z)$ и $\operatorname{Ln} z$ не имеют общих элементов. Найдите ошибку в этом «рассуждении».

Выделение однозначной ветви логарифмической функции можно произвести, рассматривая сужение экспоненциальной функции, на какое-либо множество ее однолистности, к примеру на полосу

$$S(a,k) = \{z \in \mathbb{C} : a + (2k-1)\pi < \operatorname{Im} z \leqslant a + (2k+1)\pi\}.$$

Однако можно поступить другим способом. Зафиксируем числа $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $k \in \mathbb{Z}$, задавая тем самым значение логарифмической функции

$$\ln_k z_0 = \ln|z_0| + i(\arg z_0 + 2\pi k).$$

При обходе вокруг начала координат 0 с возвратом в z_0 мы придем к другому значению логарифмической функции. Поэтому 0 называется точкой ветвления логарифмической функции.

Чтобы избежать этого, проведем разрез комплексной плоскости, соединяя 0 с бесконечно удаленной точкой ∞, например, лучом

$$\{te^{i\varphi_0} : t \in [0, +\infty)\},$$

где $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ фиксировано. Тогда, переходя по любому пути из любой точки $0 \neq z \in \mathbb{C}$, мы не сможем вернуться в нее, пересекая этот луч. Поэтому мы возвращаемся в точку z, не изменяя значения функции в этой точке.

Таким образом, фиксация значения логарифмической функции в какой-либо точке $0 \neq z_0 \in \mathbb{C}$ и проведение разреза, соединяющего точку ветвления с бесконечно удаленной точкой, позволяет выделить однозначную ветвь логарифмической функции.

Производная логарифмической функции, вычисляется независимо от выбора ветви на основании теоремы 2.1 по формуле

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}.$$

3.5. Степенная функция

Определение. *Степенной* функцией с показателем $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ называется многозначная функция

$$z^{\mu} = e^{\mu \operatorname{Ln} z} = |z|^{\mu} e^{i\mu \arg z} e^{2\pi i k \mu}.$$

Неоднозначность степенной функции обусловлена множителем $e^{2\pi k i \mu}$. Характер этой неоднозначности зависит от структуры показателя степени μ и мы рассмотрим подробнее некоторые частные случаи выбора μ в определении.

Если $\mu = n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то (см. (3.15))

$$e^{\mu \operatorname{Ln} z} = e^{\mu(\ln|z| + i \operatorname{Arg} z)} = e^{\mu \ln|z|} e^{\mu i \operatorname{Arg} z} = (|z| e^{i \arg z})^n = z^n.$$

В этом случае степенная функция имеет единственное значение, совпадающее с привычным.

Если $\mu = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ — рациональное число, то $e^{2\pi i k \mu}$ принимает q различных значений, получаемых при $k = 0, 1, \dots, q-1$. Поэтому сейчас степенная функция в каждой точке имеет q различных значений.

Если $\mu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ — иррациональное число, то все значения $e^{2\pi k i \mu}$ при различных $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, в случае иррационального μ степенная функция z^{μ} имеет счетное множество различных значений.

Выделение однозначной ветви степенной функции осуществляется как и выше для логарифмической (см. раздел 3.4): фиксируем значение в какой-либо точке $z_0 \neq 0$ и производим разрез в комплексной плоскости, соединяя с его помощью $z = 0$ и $z = \infty$.

3.6. Обратные функции к тригонометрическим и гиперболическим

Рассмотрим теперь определения «обратных» функций к тригонометрическим и гиперболическим. Кавычки обусловлены тем, что эти функции выражаются через экспоненциальную (см. определения 7.2.4–7.2.4) и, естественно, не являются взаимно однозначными. Поэтому, как и в случае логарифмической функции, мы придем к многозначным функциям.

Пусть задано число $w \in \mathbb{C}$. Решим уравнение $\sin z = w$. В силу равенства (3.17) оно сводится к уравнению

$$e^{2iz} - 2iwe^{iz} - 1 = 0$$

откуда $e^{iz} = iw + \sqrt{1 - w^2}$. Таким образом, множеством решений уравнения $\sin z = w$ является (см. (3.20)) $-i \operatorname{Ln}(iw + \sqrt{1 - w^2})$. Это приводит нас к определению многозначной функции *арксинуса*:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

Действуя аналогично, мы получим определения обратных к другим тригонометрическим функциям — *арккосинуса*

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

арктангенса

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz},$$

арккотангенса

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{iz - 1}{iz + 1}.$$

Точно так же нетрудно придти к следующим определениям обратных функций к гиперболическим — *арксинуса гиперболического*

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

и *арккосинуса гиперболического*

$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}).$$

Читателю рекомендуется проделать это самостоятельно. Подчеркнем, что эти функции являются многозначными.

Глава 4

Интегрирование функций комплексного переменного

4.1. Криволинейные интегралы

4.1.1. Комплексные криволинейные интегралы

Пусть задан спрямляемый путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ и на следе пути $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$ задана непрерывная функция $f : \Gamma \to \mathbb{C}$. Зададим произвольно разбиение

$$\Pi : \alpha = t_0 < \cdots < t_n = \beta,$$

на каждом частичном отрезке отметим точку $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и составим интегральные суммы

$$s = s(\Pi, \tau) = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\bigl(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\bigr). \tag{4.1}$$

Рангом разбиения назовем число

$$\lambda_\Pi = \max\{t_k - t_{k-1} : \ k = 1, 2, \ldots, n$$

(это — наибольшая из длин частичных отрезков $[t_{k-1}, t_k]$).

Определение. Число $I \in \mathbb{C}$ называется пределом интегральных сумм, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (\Pi, \xi) \quad \lambda_\Pi < \delta \implies \bigl|s(\Pi, \xi) - I\bigr| < \varepsilon.$$

Если такой предел существует, то он называется *криволинейным интегралом (второго рода) от функции f по пути γ* и обозначается

$$\oint_\gamma f(z)\, dz. \tag{4.2}$$

Пусть задана спрямляемая ориентированная жорданова кривая (или контур) $\Gamma \subset \mathbb{C}$ и на Γ задана непрерывная функция $f : \Gamma \to \mathbb{C}$.

Определение. *Криволинейным интегралом (второго рода) от функции f вдоль кривой (контура) Γ* называется криволинейный интеграл по любой параметризации этой кривой (контура), сохраняющей ориентацию. Для этого интеграла используется следующее обозначение

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz. \tag{4.3}$$

Если $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ и $f = u + iv$, то мы можем преобразовать выражение для интегральных сумм (4.1) следующим образом

$$s = \sum_{k=1}^{n} \big(u(\tau_k)(x(t_k) - x(t_{k-1})) - v(\tau_k)(y(t_k) - y(t_{k-1}))\big) +$$
$$+\, i \sum_{k=1}^{n} \big(v(\tau_k)(x(t_k) - x(t_{k-1})) + u(\tau_k)(y(t_k) - y(t_{k-1}))\big).$$

Действительная и мнимая части выражения справа являются интегральными суммами для обычных криволинейных интегралов второго рода от действительнозначных функций

$$\oint_\Gamma (u\,dx - v\,dy) \quad \text{и} \quad \oint_\Gamma (v\,dx + u\,dy).$$

Следовательно, комплексный криволинейный интеграл (4.3) выражается в виде линейной комбинации этих интегралов

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \oint_\Gamma (u\,dx - v\,dy) + i\oint_\Gamma (v\,dx + u\,dy). \tag{4.4}$$

4.1.2. Свойства криволинейных интегралов

Из равенства (4.4) вытекает, что свойства комплексного криволинейного интеграла можно получить как следствия из соответствующих свойств криволинейных интегралов от действительнозначных функций, которые рассматриваются обычно в курсе математического анализа.

Прежде всего отметим, что в случае, когда ориентированная жорданова кривая или контур Г является гладкой или кусочно-гладкой (см. раздел 1.2.1), то вычисление интеграла (4.3) сводится к вычислению интеграла Римана с помощью формул

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(u(\gamma(t))\varphi'(t) - v(\gamma(t))\psi'(t)\big)\,dt + \\ + i\int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(v(\gamma(t))\varphi'(t) + u(\gamma(t))\psi'(t)\big)\,dt. \qquad (4.5)$$

Здесь $\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ — параметризация Г. Это вытекает из формул, сводящих вычисление криволинейного интеграла от действительной функции к интегралу Римана в случае гладкого (кусочно-гладкого) контура.

Равенство (4.5) можно переписать также в комплексной форме

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt. \qquad (4.6)$$

Для этого достаточно отделить действительную и мнимую части в интеграле (4.6) слева и мы получим правую часть (4.5).

Используем формулу (4.5) для вычисления двух интегралов.

Лемма 4.1. *Пусть* $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — *гладкая (или кусочно-гладкая) кривая с началом в точке* z_0 *и концом в* z_1. *Тогда*

$$\oint_\Gamma dz = z_1 - z_0, \qquad \oint_\Gamma z\,dz = \frac{z_1^2 - z_0^2}{2}.$$

В частности, если Γ — *гладкий (или кусочно-гладкий) контур, то*

$$\oint_\Gamma dz = \oint_\Gamma z\,dz = 0.$$

Доказательство. Пусть $\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ — параметризация кривой Γ. Тогда по формуле (4.5)

$$\oint_\Gamma dz = \int_\alpha^\beta \varphi'(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta \psi'(t)\,dt =$$
$$= \big(\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)\big) + i\big(\psi(\beta) - \psi(\alpha)\big) = z_1 - z_0.$$

Кроме того, снова применяя(4.5), получаем

$$\oint_\Gamma z\,dz = \int_\alpha^\beta \big(\varphi(t)\varphi'(t) - \psi(t)\psi'(t)\big)\,dt + i\int_\alpha^\beta \big(\psi(t)\varphi'(t) + \varphi(t)\psi'(t)\big)\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\big(\varphi^2(t) + 2i\varphi(t)\psi(t) - \psi^2(t)\big)\Big|_\alpha^\beta = \frac{z_1^2 - z_0^2}{2}.$$

Здесь было использовано равенство

$$\int_\alpha^\beta \big(\psi(t)\varphi'(t) + \varphi(t)\psi'(t)\big)\,dt = \varphi(t)\psi(t)\Big|_\alpha^\beta,$$

вытекающее из формулы интегрирования по частям. $\square$

В качестве примера применения (4.6) вычислим один специальный криволинейный интеграл, значение которого нам понадобится ниже.

Лемма 4.2. *Пусть $n \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $\Gamma = \{z : |z - z_0| = r\}$ — окружность с центром в точке z_0 радиуса $r > 0$. Тогда*

$$\oint\limits_{\Gamma} (z - z_0)^n \, dz = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1, \\ 2\pi i & \text{при} \quad n = -1. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть сначала $n \neq -1$. Тогда, параметризуя окружность с помощью пути $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$, получаем

$$\oint\limits_{\Gamma} (z - z_0)^n \, dz = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (re^{it})^n ire^{it} \, dt = ir^{n+1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)t} \, dt = \frac{r^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)t} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

в силу 2π-периодичности экспоненциальной функции (см. раздел **??**).

В случае $n = -1$ получаем

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{ire^{it} \, dt}{re^{it}} = i \int\limits_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi i. \qquad \square$$

Далее перечислим основные свойства комплексных криволинейных интегралов.

Теорема 4.1 (свойства криволинейного интеграла)**.**

1. При изменении ориентации кривой или контура знак криволинейного интеграла изменяется на противоположный, т.е.

$$\oint\limits_{-\Gamma} f(z) \, dz = -\oint\limits_{\Gamma} f(z) \, dz.$$

2. Криволинейный интеграл обладает свойствами *а) линейности*

$$\oint\limits_{\Gamma} \big(\alpha f(z) + \beta g(z)\big)\, dz = \alpha \oint\limits_{\Gamma} f(z)\, dz + \beta \oint\limits_{\Gamma} g(z)\, dz,$$

б) аддитивности — если жорданова кривая или контур Γ *является объединением жордановых кривых* Γ_1 *и* Γ_2, *причем конец* Γ_1 *совпадает с началом* Γ_2, *то*

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\, dz = \oint\limits_{\Gamma_1} f(z)\, dz + \oint\limits_{\Gamma_2} f(z)\, dz.$$

3. Для криволинейного интеграла справедливы следующие оценки

$$\left| \oint\limits_{\Gamma} f(z)\, dz \right| \leqslant \oint\limits_{\Gamma} |f|\, dl \leqslant \sup_{z\in\Gamma} |f(z)| \cdot l_{\Gamma}.$$

В средней части последних неравенств находится криволинейный интеграл первого рода.

4.2. Интегральная теорема Коши

4.2.1. Интегральная теорема

Следующая теорема является одним из центральных фактов теории функций комплексного переменного, лежащим в основе ее важнейших результатов.

Теорема 4.2 (Коши)**.** *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и функция $f : D \to \mathbb{C}$ аналитична в D. Тогда для любого спрямляемого контура в $\Gamma \subset D$*

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Начнем обоснование этой теоремы с частного случая многоугольника (в этом случае утверждение нашей теоремы обычно называют называется леммой Гурса.

Лемма 4.3 (Гурса)**.** *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область функция $f : D \to \mathbb{C}$ аналитична в D. Тогда для любого многоугольника $\Delta \subset D$ с границей Γ справедливо равенство*

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай треугольника, так как любой многоугольник разбивается в объединение конечного числа треугольников (**см. рисунок**). Обозначим

$$M = \left|\oint_{\Gamma} f(z)\,dz\right|$$

и разобьем Δ на четыре треугольника, деля стороны пополам. Из них выберем тот треугольник Δ_1 с границей Γ_1, для которого

$$\left|\oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{M}{4}.$$

К Δ_1 применим такое же рассуждение, деля его на четыре треугольника.

Продолжая по индукции, мы получим последовательность замкнутых вложенных треугольников $\{\Delta_n\}$ со свойством

$$\left|\oint\limits_{\Gamma_n} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{M}{4^n}.$$

(Γ_n — граница треугольника Δ_n).

По лемме Кантора существует точка $z_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$. Кроме того, так как z_0 является внутренней точкой D (напомним, что D — область, см. раздел **??**), то существует круг $B(z_0,\delta) \subset D$, содержащийся в D. При этом для достаточно больших n треугольник Δ_n будет целиком содержаться в этом круге.

Далее используем дифференцируемость функции f. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех z, удовлетворяющих условию $|z - z_0| < \delta$, выполнено неравенство

$$|\rho(z)| < \varepsilon|z - z_0|, \quad \rho(z) = f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)$$

Отсюда, используя еще утверждение леммы 4.1 и неравенство из части 3 теоремы 4.1, получаем

$$\frac{M}{4^n} \leqslant \left|\oint\limits_{\Gamma_n} f(z)\,dz\right| = \left|\oint\limits_{\Gamma_n} [f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \rho(z)]\,dz\right| =$$

$$= \left|\oint\limits_{\Gamma_n} \rho(z)\,dz\right| < \varepsilon l_{\Gamma_n} \cdot \sup_{z\in\Delta_n} |z - z_0| = \varepsilon \frac{l_\Gamma \operatorname{diam}\Gamma}{4^n}.$$

Следовательно, $M \leqslant \varepsilon l_\Gamma \operatorname{diam}\Gamma$ для любого $\varepsilon > 0$, поэтому и $M = 0$. □

Из леммы Гурса можно вывести и утверждение теоремы 4.2, совершая подходящий предельный переход. Мы не будем делать этого, так как в следующем разделе, также опираясь на лемму Гурса, докажем более общую форму этой теоремы.

4.2.2. Обобщение интегральной теоремы Коши

Введем понятие *модуля непрерывности* функции f на множестве E как

$$\omega(\delta, f, E) = \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| < \delta, \ x, y \in E\}. \tag{4.7}$$

Это — удобная количественная характеристика функции, так как ее поведение при $\delta \to +0$ отвечает за свойство равномерной непрерывности. Действительно, если E — компакт, то условие $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega(\delta) = 0$ равносильно тому, что функция f равномерно непрерывна на E.

С помощью модуля непрерывности можно дать полезную оценку криволинейного интеграла.

Лемма 4.4. *Если Γ — спрямляемый контур и функция $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ непрерывна на Γ, то*

$$\left| \oint\limits_{\Gamma} f(z)\, dz \right| \leqslant \omega(\delta, f, \Gamma) l_\Gamma, \quad \delta = \operatorname{diam} \Gamma.$$

Доказательство. В самом деле, пусть $z_0 \in \Gamma$ — фиксированная точка. Тогда, используя лемму 4.1, получаем

$$\left| \oint\limits_{\Gamma} f(z)\, dz \right| = \left| \oint\limits_{\Gamma} [f(z) - f(z_0)]\, dz \right| \leqslant \sup_{z \in \Gamma} |f(z) - f(z_0)| l_\Gamma \leqslant \omega(\delta, f, \Gamma) l_\Gamma. \qquad \square$$

Следующая теорема является обобщением интегральной теоремы Коши. Существенным отличием в новой формулировке будет то, что в ней не требуется аналитичности функции в точках контура.

Теорема 4.3 (обобщенная теорема Коши)**.** *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, границей которой является спрямляемый контур, функция $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ аналитична в области D и непрерывна в ее замыкании $\overline{D}$. Тогда*

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)\, dz = 0.$$

Доказательство. Возьмем $0 < \delta < \frac{1}{3}\operatorname{diam}\partial D$ и разобьем всю комплексную плоскость на открытые квадраты $\{Q_n\}$ с помощью прямых $\operatorname{Im} z = k\delta$, $\operatorname{Re} z = k\delta$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Введем два множества индексов

$$A = \{n : \overline{Q_n} \subset D\}, \quad B = \{n : \overline{Q_n} \cap \partial D \neq \varnothing\}$$

и обозначим $\Delta_n = Q_n \cap D$ при $n \in B$. Тогда каждое из множеств Δ_n, $n \in B$, открыто и является объединением конечного или счетного множества односвязных областей со спрямляемыми границами.

Запишем равенство (**см. рисунок**)

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)\,dz = \oint\limits_{\partial(\bigcup_{n\in A}\overline{Q_n})} f(z)\,dz + \sum_{n\in B}\oint\limits_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz \tag{4.8}$$

и заметим, что первое слагаемое справа в (4.8) равно нулю в силу леммы 4.3, так как $\bigcup_{n\in A}\overline{Q_n}$ является многоугольнком.

Наше утверждение будет доказано, если мы установим, что, что сумма справа в (4.8) стремится к нулю при $\delta \to 0$. Для оценки слагаемых этой суммы воспользуемся неравенством из леммы 4.4

$$\left|\oint\limits_{\Delta_n} f(z)\,dz\right| \leqslant \omega(\delta\sqrt{2}, f, \partial\Delta_n)l(\partial\Delta_n) \leqslant \omega(\delta\sqrt{2}, f, \overline{D})[l(\partial D \cap Q_n) + 4\delta].$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\left|\sum_{n\in B}\oint\limits_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \leqslant \omega(\delta\sqrt{2}, f, \overline{D})\left\{l(\partial D) + 4\sum_{n\in B}\delta\right\}.$$

Пусть Q_n^* — квадрат, концентрический с Q_n, но с длиной стороны втрое больше. Так как $\delta < \frac{1}{3}\operatorname{diam}\partial D$, а ∂D и Q_n имеют общую точку, то $\partial Q_n^* \cap \partial D \neq \varnothing$, следовательно,

$$\delta \leqslant l(\partial D \cap Q_n^*).$$

Складываем эти неравенства:

$$\sum_{n\in B}\delta \leqslant \sum_{n\in B} l(\partial D\cap Q_n^*) \leqslant 9\sum_{n\in B} l(\partial D\cap Q_n) \leqslant 9l(\partial D),$$

а это означает, что при $\delta \to 0$

$$\left|\oint_\Gamma f(z)\,dz\right| \leqslant 37l(\partial D)\omega(\delta\sqrt{2}, f, \overline{D}) \to 0. \qquad \square$$

4.2.3. Случай многосвязной области

Интегральная теорема Коши допускает распространение на случай конечносвязных областей (см. раздел **??**).

Пусть $D_0 \subset \widehat{\mathbb{C}}$, $D_1, D_2, \ldots, D_m \subset \mathbb{C}$ — односвязные области, границы которых ∂D_k, $k = 0, 1, \ldots, m$, являются спрямляемыми контурами, причем выполнены условия

$$\overline{D_k} \subset D_0; \; \overline{D_k} \cap \overline{D_j} \neq \varnothing, \quad (k \neq j)$$

Область

$$D = D_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \overline{D_k}$$

будем называть *стандартной $(m+1)$-связной областью*. Ее границей является объединение границ $\bigcup_{k=0}^{m} \partial D_k$. Положительно *ориентированной границей* ∂D^+ будем называть

$$\partial D_0^+ \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{m} \partial D_k^- \right)$$

При таком соглашении при обходе границы в выбранном направлении область D останется слева.

Принятая только что терминология позволяет, в частности, упростить выражение «односвязная область, границей которой является спрямляемый контур», заменив его на «стандартная односвязная область».

Теорема 4.4. *Пусть $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — стандартная многосвязная область, функция f аналитична в области D и непрерывна в ее замыкании $\overline{D}$. Тогда*

$$\oint_{\partial D^+} f(z)\, dz = 0.$$

Доказательство. Пусть D — ограниченная $(m+1)$-связная область, граница, которой состоит из $(m+1)$-го спрямляемого контура Γ_k, $k = 0, 1, \ldots, m$, причем Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, лежат внутри Γ_0. Проведем в D разрезы по непересекающимся гладким жордановым кривым, соединяющим последовательно Γ_0 с Γ_1, Γ_1 с $\Gamma_2, \ldots,$

Γ_{m-1} с Γ_m (**см. рисунок**). Тогда мы получим односвязную область, к которой можно применить теорему 4.3. Каждый из разрезов при интегрировании по границе новой области проходится дважды в противоположных направлениях, поэтому интегралы по этим разрезам взаимно сокращаются. Следовательно, интеграл по границе новой области совпадает с интегралом по границе области D. $\square$

4.2.4. Первообразная аналитической функции

Пусть в области $D \subset \mathbb{C}$ заданы две функции $F : D \to \mathbb{C}$ и $f : D \to \mathbb{C}$.

Определение. Функция F называется *первообразной* для функции $f : D \to \mathbb{C}$, если для всех $z \in D$ справедливо равенство

$$F'(x) = f(z).$$

Отметим, что любые две первообразные функции f отличаются на постоянное слагаемое. В самом деле, пусть F_1 и F_2 — две первообразные функции f в области D и

$$\Phi(z) = F_1(z) - F_2(z).$$

Тогда функция Φ аналитична в D и ее производная тождественно равна нулю в области D. В силу условий Коши–Римана

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D.$$

А тогда, как известно из курса математического анализа, $\operatorname{Re} \Phi$ и $\operatorname{Im} \Phi$ есть тождественные постоянные.

Итак, мы знаем все первообразные, если сумеем найти хотя бы одну. Нашей следующей целью является указание способа нахождения первообразной аналитической функции. Для этого нам понадобится подготовка.

Будем говорить, что криволинейный интеграл (4.3) не зависит от пути в области D, если для любых точек $z_0, z_1 \in D$ и любой кусочно-гладкой жордановой кривой $\Gamma \subset D$ с началом в z_0 и концом в z_1 интеграл (4.3) имеет одно и то же значение.

Лемма 4.5. *Если $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и функция $f : D \to \mathbb{C}$ аналитична в D, то интеграл (4.3) не зависит от пути в D.*

Доказательство. Это нетрудно вывести из интегральной теоремы Коши. В самом деле, пусть $z_0, z_1 \in D$ и Γ_1, Γ_2 — две жордановы кривые с началом в z_0 и концом в z_1. Легко видеть (**это доказывать?**), что можно построить ломаную Γ с началом в z_0 и концом в z_1, дополняющую каждую из кривых Γ_1 и Γ_2 до контура (то есть $\Gamma \cup \Gamma_1$ и $\Gamma \cup \Gamma_2$ — контуры). В силу интегральной теоремы Коши

$$\oint\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz - \oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0 \quad \oint\limits_{\Gamma_2} f(z)\,dz - \oint\limits_{\Gamma} f\,dz = 0.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \oint\limits_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

□

Итак, что при условиях леммы 4.5 корректно определение следующей функции

$$F(z) = \oint\limits_{\Gamma} f(\zeta)\,d\zeta \equiv \oint\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta, \tag{4.9}$$

где $\Gamma \subset D$ — любая спрямляемая жорданова кривая, соединяющая точки z_0 и z. Эту функцию естественно назвать интегралом с переменным верхним пределом и началом в точке z_0.

Теорема 4.5. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и функция $f : D \to \mathbb{C}$ аналитична в D, $z_0 \in D$. Тогда интеграл с переменным верхним пределом и началом в точке z_0 является первообразной функции f.*

Доказательство. Пусть $z \in D$ и $r_0 > 0$ мало настолько, чтобы шар $B(z, 2r_0)$ содержался в области D. Для $z_1 \in \overline{B(z, r_0)} \equiv \overline{B_0}$ рассмотрим выражение

$$\left| \frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{z_1 - z} \oint\limits_{[z, z_1]} \big(f(\zeta) - f(z)\big)\,d\zeta \right| \leqslant$$
$$\leqslant \omega(|z_1 - z|, f, \overline{B_0}) \to 0, \quad (z_1 \to z).$$

Здесь были использованы оценка криволинейного интеграла из части 3 теоремы 4.1 и определение модуля непрерывности (см. раздел 4.2.2).

□

Теорема 4.6 (формула Ньютона – Лейбница)**.** *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и функция $f : D \to \mathbb{C}$ аналитична в D. Тогда для любых точек z_0 и Z_1 и любой жордановой кривой $\Gamma \subset D$, соединяющей эти точки, справедливо равенство*

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0), \tag{4.10}$$

где Φ — любая первообразная функции f в области D.

Доказательство. Запишем интеграл из (4.9)

$$F(z) = \oint\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta,$$

который является первообразной для функции f в области D по теореме 4.5. По доказанному выше существует такое число $C \in \mathbb{C}$, что для всех $z \in D$

$$\Phi(z) = F(z) + C.$$

Это число C находим, подставляя в последнее равенство $z = z_0$, получая $C = \Phi(z_0)$. Беря теперь здесь $z = z_1$, приходим к равенству 4.10. $\square$

4.3. Интегральная формула Коши

4.3.1. Интегральная формула Коши

Здесь мы докажем важнейшее из следствий интегральной теоремы Коши. Это — замечательная формула Коши, которая количественно закрепляет удивительное свойство аналитических функций: ее значения в области можно восстановить по ее значениям на границе этой области.

Теорема 4.7 (формула Коши). *Пусть $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — стандартная многосвязная область и функция $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ аналитична в области D и непрерывна в ее замыкании $\overline{D}$. Тогда для любого $z \in D$ справедливо равенство*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{4.11}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ выбрано так, что $\overline{B_0} = \overline{B(z, \varepsilon_0)} \subset D$. Тогда для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ по интегральной теореме Коши 4.4, применяемой к функции $\zeta \mapsto f(\zeta)(\zeta - z)^{-1}$ в стандартной многосвязной области $D \setminus \overline{B(z, \varepsilon)}$ (см. раздел 4.2.3 об ориентации границы многосвязной области),

$$\oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \oint\limits_{C_\varepsilon^-(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$$

или

$$\oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \oint\limits_{C_\varepsilon^+(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{4.12}$$

С другой стороны, используя случай $n = -1$ леммы 4.2, мы видим, что

$$\left| 2\pi i f(z) - \oint\limits_{C_\varepsilon^+(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| = \left| \oint\limits_{C_\varepsilon^+(z)} \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta - \oint\limits_{C_\varepsilon^+(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\zeta \in C_\varepsilon^+(z)} |f(z) - f(\zeta)| \frac{2\pi\varepsilon}{\varepsilon} \leqslant 2\pi\omega(\varepsilon, f, \overline{B_0}) \to 0$$

(определение модуля непрерывности ω см. в (4.7)) при $\varepsilon \to 0$. Поэтому при $\varepsilon \to 0$

$$\oint\limits_{C_\varepsilon^+(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \to 2\pi i f(z).$$

Учитывая (4.12), получаем требуемое равенство. □

Интеграл в формуле (4.11) называется *интегралом Коши*, функция f — *плотностью интеграла Коши*, а функция $(\zeta - z)^{-1}$ — *ядром Коши*.

Если $z \notin \overline{D}$, то функция $\zeta \mapsto f(\zeta)(\zeta - z)^{-1}$ является аналитической в D и непрерывной в $\overline{D}$, поэтому в силу интегральной теоремы Коши интеграл от нее вдоль ∂D будет равен нулю. Таким образом, формулу Коши можно переписать так

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ 0 & z \notin \overline{D}. \end{cases} \tag{4.13}$$

Далее выведем из формулы Коши несколько других равенств такого же типа, дающих формулы для вычисления значений функции по ее значениям на окружностях.

4.3.2. Формула среднего значения и принцип максимума

Теорема 4.8 (формула среднего значения)**.** *Пусть функция f аналитична в круге $B(z, r_0)$, тогда при $0 < r < r_0$ справедливы равенства*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta = f(z),$$

в частности,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(z + re^{i\theta}) d\theta = \operatorname{Re} f(z), \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Im} f(z + re^{i\theta}) d\theta = \operatorname{Im} f(z).$$

Доказательство. Применим формулу Коши для круга $B(z, r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \left[\begin{array}{c} \zeta = z + re^{i\theta} \\ d\zeta = ire^{i\theta}\,\theta \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\oint_{|\zeta - z| = r} \frac{f(z + re^{i\theta}) ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Вторая часть теоремы получается из первой отделением действительной и мнимой частей. □

Теорема 4.9 (принцип максимума модуля)**.** *Если функция аналитична в некоторой области, то ее модуль не может иметь точек строгого локального максимума в области аналитичности.*

Доказательство. Предположим противное, то есть для некоторого z_0 в области аналитичности неравенство $|f(z_0)| > |f(z_0 + re^{i\theta})|$ выполнено для всех z из достаточно малой окрестности точки z_0. Отсюда следует, что

$$|f(z_0)| > \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(z_0 + re^{i\theta})|$$

(непрерывная функция $\theta \mapsto |f(z_0 + re^{i\theta})|$, $\theta \in [0, 2\pi]$, принимает свое максимальное значение на компакте $[0, 2\pi]$).

С другой стороны из формулы среднего значения (теорема 4.8) следует, что

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta \right| \leqslant \sup_{\theta \in [0,2\pi]} |f(z_0 + re^{i\theta})|.$$

Противоречие доказывает наше утверждение. □

Теорема 4.10 (Лиувилля). *Если функция аналитична во всей комплексной плоскости и ограничена, то она является тождественной постоянной.*

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $r > |z|$, тогда по теореме 4.13

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$

Тогда

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \right| = \left[\begin{array}{c} \zeta = re^{i\theta} \\ d\zeta = ire^{i\theta}\, d\theta \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \oint\limits_{C_r(0)} \frac{f(re^{i\theta}) ire^{i\theta}}{(re^{i\theta} - z)^2}\, d\zeta \right| \leqslant \frac{Mr}{(r - |z|)^2} \to 0, \quad r \to +\infty,$$

если $|f(z)| \leqslant M$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Итак, производная функции f тождественно равна нулю и f есть тождественная постоянная. □

Лемма 4.6 (Шварца). *Пусть функция f аналитична в круге $B(0,R)$, $f(0)=0$ и $f(z) \leqslant M$ при $z \in C_R(0)$. Тогда*

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{R}|z| \quad \textit{при} \quad z \in B(0,R).$$

Доказательство. Функция $g(z) = f(z)/z$ аналитична в круге $B(0,R)$ и удовлетворяет неравенству $g(z) \leqslant M/R$ на его границе. В силу принципа максимума $|g(z)| < M/R$ при $z \in B(0,R)$. □

4.3.3. Формула Шварца

Следующая теорема говорит нам о том, что значения аналитической функции в круге можно вычислить, используя лишь значения ее действительной части на границе круга .

Теорема 4.11 (формула Шварца). *Пусть функция f аналитична в открытом круге $B(z_0, r)$ и непрерывна в его замыкании $\overline{B(z_0, r)}$. Тогда при $z \in B(z_0, r)$ справедливо равенство*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(z_0 + re^{it}) \frac{re^{it} + (z - z_0)}{re^{it} - (z - z_0)}\, dt + i \operatorname{Im} f(z_0).$$

Доказательство. Для простоты будем считать $z_0 = 0$. Пусть $z \in B(0, r)$ и $z^* = r^2/\bar{z}$, тогда $z^* \in \mathbb{C} \setminus \overline{B(0, r)}$.

По формуле Коши и интегральной теореме Коши справедливы равенства

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad 0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*}\, d\zeta,$$

где $C_r = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| = r\}$ — окружность с центром в точке z радиуса r. Вычтем из первого второе и воспользуемся тем, что при $z = re^{it}$

$$\zeta - z = re^{it} - re^{i\theta}, \quad \zeta - z^* = re^{it} - \frac{r^2}{\rho} e^{i\theta}, \quad d\zeta = ire^{it}\, dt.$$

Тогда мы получим равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho\cos(t - \theta) + \rho^2}\, dt. \tag{4.14}$$

Далее, легко видеть, что

$$\operatorname{Re} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} = \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho\cos(t - \theta) + \rho^2},$$

следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \operatorname{Re} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z}\, dt.$$

Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(re^{it}) \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z}\, dt.$$

Она аналитична в круге $B(0, r)$ — это проверяется непосредственной проверкой ее дифференцируемости. Кроме того, из доказанного равенства (4.14) следует, что $\operatorname{Re} f \equiv \operatorname{Re} g$, поэтому функции f и g различаются на некоторую постоянную C (см. замечание в конце раздела 2.1.3). В частности, $C = f(0) - g(0)$, но $\operatorname{Re} f(0) - \operatorname{Re} g(0) = 0$ и $\in g(0) = 0$, следовательно, $C = i \operatorname{Im} f(0)$. □

4.3.4. Интеграл типа Коши

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — спрямляемая жорданова кривая или контур и на Γ задана непрерывная функция $f : \Gamma \to \mathbb{C}$. Рассмотрим интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{4.15}$$

который существует при наших условиях для любого $z \notin \Gamma$.

Этот интеграл называется *интегралом типа Коши*, в отличие от интеграла Коши. Функция f в (4.15) называется *плотностью интеграла типа Коши*.

Рассмотрим случай, когда $D \subset \mathbb{C}$ стандартная многосвязная область $\Gamma = \partial D$ — ее граница. Тогда если задана функция f, аналитическая в области D и непрерывная в ее замыкании, то интеграл типа Коши совпадает с интегралом Коши в D и тождественно равен нулю в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ (см. (4.13)).

Теорема 4.12. *Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — спрямляемая жорданова кривая или контур и на Γ задана непрерывная функция $f : \Gamma \to \mathbb{C}$. Тогда интеграл типа Коши (4.15) F является аналитической функцией в каждой точке из $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, функция $F : \mathbb{C} \setminus \Gamma \to \mathbb{C}$ имеет производные любого порядка и*

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.16}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F_k(z) = \frac{(k-1)!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k}}\, d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$$

и покажем, что

$$F_k'(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma. \tag{4.17}$$

Для этого покажем, что выражение

$$I(h)=\frac{F_k(z+h)-F_k(z)}{h}-\frac{k!}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta$$

сходится к нулю при $h\to 0$. Будем считать. что $|h|<d$, где $d=\frac{1}{2}\operatorname{dist}(z,\Gamma)$.

Используя формулу бинома Ньютона, запишем

$$I(h)=\frac{(k-1)!}{2\pi i h}\oint\limits_{\Gamma}f(\zeta)P(\zeta,h)\,d\zeta,$$

где

$$P(\zeta,h)=\frac{1}{(\zeta-z-h)^k}-\frac{1}{(\zeta-z)^k}-\frac{kh}{(\zeta-z)^{k+1}}=\frac{h^2Q(\zeta,h)}{(\zeta-z-h)^k(\zeta-z)^{k+1}}$$

и

$$Q(\zeta,h)=-\sum_{j=2}^{k}(-1)^jC_k^j(\zeta-z)^{k-j+1}h^{j-2}-k\sum_{j=1}^{k}(-1)^jC_k^j(\zeta-z)^{k-j}h^{j-1}.$$

Легко убедиться в том, что это выражение ограничено некоторой постоянной $A>0$, зависящей только от кривой Γ, z и от d

$$|Q(\zeta,h)|\leqslant A.$$

Поэтому

$$|P(\zeta,h)|\leqslant\frac{A|h|^2}{d^{2k+1}}$$

и

$$|I(h)|\leqslant\frac{k!A|h|}{2\pi d^{2k+1}}\sup_{\zeta\in\Gamma}|f(\zeta)|l_\Gamma\to 0,\quad h\to 0.$$

Применяя доказанное при $k=0$, получаем дифференцируемость функции F и базу для доказательства нашей теоремы по индукции. Предполагая, что наше утверждение уже доказано для $k-1$, то есть $F^{(k-1)}(z)=F_k(z)$ из (4.17) видим, что оно верно и для k. □

Из теоремы 4.12 и замечания перед ее формулировкой сразу вытекает следующая важная теорема.

Теорема 4.13. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — стандартная многосвязная область и функция $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ аналитична в области D и непрерывна в ее замыкании $\overline{D}$. Тогда f имеет производные любого порядка в D и справедливы равенства*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.18}$$

В частности, все производные аналитической функции являются аналитическими.

4.3.5. Теорема Мореры

Здесь мы докажем утверждение, которое является в некотором смысле обратным к интегральной теореме Коши.

Лемма 4.7. *Пусть функция $f : D \to \mathbb{C}$ непрерывна в области $D \subset \mathbb{C}$ и интеграл от нее по границе любого треугольника Δ, $\overline{\Delta} \subset D$, равен нулю. Тогда в любом круге $B(z_0, r) \subset D$ функция f имеет первообразную.*

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$F(z) = \oint\limits_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta, \quad z \in B = B(z_0, r)$$

(интеграл берется по отрезку, соединяющему точки z_0 и z) и пусть $h \neq 0$ мало настолько, что $z + h \in B$. По условию

$$\oint\limits_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta + \oint\limits_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta + \oint\limits_{[z+h,z]} f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\oint\limits_{[z+h,z]} f(\zeta)\,d\zeta - \oint\limits_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta = \oint\limits_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta$$

или

$$F(z+h) - F(z) = \oint\limits_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Отсюда после несложных преобразований получаем

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\oint\limits_{[z,z+h]} [f(\zeta) - f(z)]\,d\zeta\right| \leqslant \sup_{\zeta\in[z,z+h]} |f(\zeta) - f(z)| \to 0$$

при $h \to 0$ в силу непрерывности функции f в точке z. Здесь была использована часть 3 теоремы 4.1. Итак, $F'(z) = f(z)$ для любого $z \in B$ и лемма доказана. □

Теорема 4.14 (Мореры)**.** *Если $f : D \to \mathbb{C}$ непрерывна в области $D \subset \mathbb{C}$ и интеграл от нее по границе любого треугольника Δ, $\overline{\Delta} \subset D$, равен нулю, то f аналитична в D.*

Доказательство. В силу леммы 4.7 в любом круге $B \subset D$ функция f имеет первообразную. Поэтому она аналитична в B как производная аналитической функции (см. теорему 4.13). □

4.3.6. Сопряженные гармонические функции

Введем обозначение

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{4.19}$$

Это дифференциальное выражение называют *оператором Лапласа*. Функция u, заданная в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$ называется *гармонической* в области D, если она имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и $\Delta u = 0$ во всех точках этой области.

Пусть функция f аналитична в области $D \subset \mathbb{C}$, тогда по теореме 4.13 она и ее действительная и мнимая части $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ бесконечно дифференцируемы в D. Дифференцируя условия Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

мы получим $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$. Следовательно, действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими.

Две гармонические функции u и v, связанные уравнениями Коши – Римана, называются *сопряженными гармоническими функциями*

Теорема 4.15. *Пусть функция U гармонична в области $D \subset \mathbb{C}$. Тогда существует такая аналитическая в области D функция f, что $\operatorname{Re} f = u$.*

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0) \in D$ — фиксированная точка и $(x, y) \in D$ произвольная точка в области D. Рассмотрим функцию

$$v(x, y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy.$$

Здесь не имеет значения по какому пути, соединяющему точки (x_0, y_0) и (x, y), идет интегрирование. В силу условия $\Delta u = 0$ выражение под знаком интеграла является полным дифференциалом и интеграл не зависит от пути интегрирования. Частные производные функции v легко вычисляются (**сделать это? в курсе анализа**

это обычно делается) и для них справедливы условия Коши–Римана. Поэтому в силу теоремы 2.2 функция $f = u + iv$ аналитична. □

Из этой теоремы следует, что гармонические функции обладают рядом свойств аналитических функций. В частности, они бесконечно дифференциаруемы, для них справедливы формулы средних значений (см. теорему 4.8, доказательство принципа максимума говорит о том, что он справедлив для гармонических функций.

Глава 5

Последовательности и ряды

5.1. Ряды Тейлора

5.1.1. Основные понятия теории рядов

Напомним прежде всего основные понятия общей теории рядов, адаптированные к комплексному случаю.

Если $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$ — последовательность комплексных чисел, то символ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{5.1}$$

называют *рядом*.

Чисто формальное восприятие знака суммы означает, что мы пытаемся складывать бесконечное число слагаемых. Такая операция нуждается в дополнительном определении.

С каждым рядом (5.1) свяжем последовательность сумм

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{5.2}$$

которые называются его *частичными суммами*.

Ряд (5.1) называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм, то есть существует число $s \in \mathbb{R}$, для которого

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

В этом случае s называется *суммой ряда* и мы пишем $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$. В противном случае ряд называется *расходящимся*.

Итак, по определению вопрос о сходимости ряда сводится к вопросу о сходимости последовательности его частичных сумм. Обратно, если задана последовательность $\{s_k\} \subset \mathbb{R}$, то, полагая

$$a_1 = s_1, \quad a_k = s_k - s_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots),$$

получаем ряд (5.1), для которого $\{s_k\}$ является последовательностью частичных сумм (проверьте это самостоятельно).

Таким образом, вопрос о сходимости последовательности — вопрос о сходимости некоторого ряда. Следовательно, рассмотрение рядов — это лишь новая форма изучения последовательностей. Но такой подход даст нам новые возможности как при установлении существования предела, так и при его вычислении. Мы увидим, что теория рядов является мощным средством теории функций комплексного переменного.

Пример 5.1. Простейшими примерами сходящихся рядов могут служить следующие:

— ряд с постоянными слагаемыми

$$\sum_{k=1}^{\infty} a$$

сходится тогда и только тогда, когда $a = 0$,

— геометрический ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} az^k, \quad a \neq 0,$$

сходится тогда и только тогда, когда $|z| < 1$, при этом

$$\sum_{k=0}^{\infty} az^k = \frac{a}{1-z}, \quad |z| < 1. \tag{5.3}$$

Лемма 5.1. *Ряд (5.1) сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм) фундаментальна, то есть*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon \quad |s_n - s_m| < \varepsilon.$$

В частности, если ряд (5.1) сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ряд (5.1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|. \tag{5.4}$$

Из леммы 5.1 вытекает, что из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость. Обратное неверно — существуют сходящиеся ряды, которые не являются абсолютно сходящимися. Если ряд (5.1) сходится, а ряд (5.4) расходится, то говорят, что ряд (5.1) сходится *условно*.

5.1.2. Степенные ряды

Определение. *Степенным рядом* будем называть ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k, \tag{5.5}$$

при этом c_k — *коэффициенты* степенного ряда, а z_0 — его *центр*.

Областью сходимости ряда (5.5) называется множество тех $z \in \mathbb{C}$, для которых он сходится.

Следующие утверждения показывают, что область сходимости степенного ряда не может быть произвольной и имеет весьма специфическую структуру.

Лемма 5.2 (Абеля). *Если степенной ряд сходится при некотором $z^* \neq z_0$, то он сходится абсолютно в круге*

$$B(z_0 : |z^*-z_0|) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-z_0| < |z^*-z_0|\}$$

и равномерно в любом круге $\overline{B(z_0, r)}$, $0 < r < |z^*-z_0|$.

Доказательство. В силу сходимости $|c_k(z^*-z_0)^k| \leqslant M$. Если $z \in \mathbb{C}$ такой, что $|z-z_0| < |z^*-z_0|$, то

$$|c_k(z-z_0)^k| = |c_k(z^*-z_0)^k| \cdot \left|\frac{z-z_0}{z^*-z_0}\right|^k \leqslant M\left|\frac{z-z_0}{z^*-z_0}\right|^k.$$

Абсолютная сходимость следует теперь из (5.3). Точно так же получается равномерная сходимость в любом круге $\overline{B(z_0, r)}$ меньшего радиуса. □

Теорема 5.1 (Коши – Адамара). *Пусть $\{c_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ и*

$$l = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}.$$

Тогда при
1) $l = \infty$ ряд (5.5) расходится при всех $z \neq z_0$,
2) $l > 0$ ряд (5.5) сходится при всех z с $|z-z_0| < 1/l$ и расходится при всех z с $|z-z_0| > 1/l$,
3) $l = 0$ ряд (5.5) сходится при любом $z \in \mathbb{C}$.

Доказательство. 1) В этом случае для любого $z \neq z_0$ для бесконечно многих $k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $\sqrt[k]{|c_k|} \cdot |z - z_0| > 1$ и слагаемые ряда (5.5) не стремятся к 0 — не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

В случае 2) при $|z - z_0| < 1/l$ применим к ряду признак Коши с корнем. Если же $|z - z_0| > 1/l$, то (как и в случае 1)) не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

Наконец, в случае 3) при любом $z \in \mathbb{C}$ по признаку Коши с корнем ряд (5.5) сходится. $\square$

5.1.3. Радиус сходимости и формула Коши — Адамара

Формулировка теоремы 5.1 делает естественным следующее понятие.

Определение. Число $R \in \mathbb{R}$ называется *радиусом сходимости* степенного ряда (5.5), если этот ряд сходится при всех z с $|z - z_0| < R$ и расходится при всех z с $|z - z_0| > R$.

Круг

$$B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < R\}$$

называется *кругом сходимости*.

Если ряд (5.5) сходится только при $z = z_0$, то считаем $R = 0$, а если (5.5) сходится при любом $z \in \mathbb{C}$, то считаем $R = \infty$.

Теорема 5.1 доказывает существование радиуса сходимости и дает формулу для его вычисления.

Теорема 5.2 (формула Коши – Адамара). *Радиус сходимости R степенного ряда (5.5) вычисляется по формуле*

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}. \tag{5.6}$$

Конечно, формула (5.6) справедлива и в случаях $R = 0$ и $R = \infty$, если считать $1/0 = \infty$ и $1/\infty = 0$.

Теорема 5.3. *Сумма степенного ряда (5.5) с положительным радиусом сходимости аналитична в круге сходимости и его коэффициенты вычисляются по формулам*

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где f — сумма ряда.

Доказательство. Аналитичность суммы ряда вытекает из леммы Абеля и теоремы Вейерштрасса. Кроме того, из второй части теоремы Вейерштрасса следует, что при каждом $n = 0, 1, \dots$ справедливо равенство

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)c_k(z - z_0)^{k-n}.$$

Беря здесь $z = z_0$, видим, что все слагаемые справа обращаются в нуль, кроме первого. Это приводит к равенствам $f^{(n)}(z_0) = n!c_n$ и мы получаем формулы для коэффициентов. $\square$

Следствие 5.1. *Два степенных ряда вида (5.5) с положительными радиусами сходимости, сходящиеся к одной и той же сумме в некотором круге $B(z_0, \delta)$, где $\delta > 0$, являются тождественными.*

5.1.4. Разложение в степенной ряд

Рядом Тейлора функции f в точке z_0 называется степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k. \tag{5.7}$$

Из теоремы 5.3 сразу следует, что степенной ряд с положительным радиусом сходимости является рядом Тейлора своей суммы.

Конечно, чтобы записать ряд (5.7) мы должны потребовать существования производных любого порядка в точке z_0, а для этого на самом деле нужно, чтобы все производные существовали в некоторой окрестности z_0, то есть функция f должна быть аналитичной в некоторой окрестности точки z_0. Кроме того, подчеркнем, что в этом определении ничего не говорится о сходимости ряда (5.7).

Таким образом, возникают следующие естественные вопросы:

— сходится ли ряд Тейлора,

— чему равна его сумма в случае сходимости?

Теорема 5.4 (Тейлора)**.** *Пусть функция f аналитична в области $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $0 < r < d = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$. Тогда степенной ряд (5.5), коэффициенты которого вычислены по формулам*

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{5.8}$$

сходится в круге $B(z_0, d)$ к функции f.

Доказательство. Пусть $z \in B(z_0, d)$ и $0 < \rho = |z - z_0| < r$ (ниже мы избавимся от предположения $\rho < r$). Воспользуемся интегральной формулой Коши для круга $B(z_0, r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

и разложим ядро Коши $(\zeta - z)^{-1}$ в ряд

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$$

Умножим обе части этого равенства на $(2\pi i)^{-1} f(\zeta)$

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k$$

и проинтегрируем это равенство по $\zeta \in C_r(z_0)$, получая требуемое равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_))^{k+1}}\, d\zeta \cdot (z - z_0)^k$$

При этом почленное интегрирование ряда справа возможно в силу его равномерной сходимости по признаку Вейерштрасса — при $|\zeta - z_0| = r$ и $k \in \mathbb{N}_0$ справедливы неравенства

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k \right| \leqslant \frac{M}{r} \cdot \left(\frac{\rho}{r} \right)^k, \quad \text{где} \quad M = \sup_{\zeta \in C_r(z_0)} |f(\zeta)|.$$

То, что в (5.8) можно брать любое $r < d$, вытекает из следствия 5.1 . $\square$

5.1.5. Эквивалентные описания аналитичности

Следующее утверждение собирает многое из доказанного выше и дает нам возможность различными способами выражать свойство аналитичности.

Теорема 5.5. *Пусть функция f задана в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Тогда следующие условия равносильны аналитичности f в точке z_0:*

1) f дифференцируема в некоторой окрестности z_0,

2) f есть сумма степенного ряда с центром в f с положительным радиусом сходимости,

3) f непрерывна в некоторой окрестности z_0 и интеграл от нее по границе любого треугольника равен нулю.

Доказательство. То, что из 1) следует 2), вытекает из теоремы Тейлора. Обратное утверждение вытекает из теоремы 5.3.

По теореме 4.3 из 1) следует 3). Впрочем, это следует и из леммы Гурса. Обратное получаем из теоремы Мореры. □

5.1.6. Действия со степенными рядами

5.2. Теоремы единственности

5.2.1. Локальная форма единственности

Множество нулей аналитической функции имеет весьма специфическую структуру и не может быть «очень большим». Здесь нуль функции — это, конечно, точка из области ее определения, в которой она обращается в нуль.

Лемма 5.3. *Если функция f аналитична и отлична от тождественного нуля в некоторой окрестности точки z_0, то она отлична от нуля в некоторой проколотой окрестности точки z_0.*

Доказательство. Пусть f отлична от тождественного нуля в окрестности точки z_0. По теореме 5.4 ее можно разложить в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

сходящийся в окрестности z_0. Здесь n — наименьший номер, для которого $c_n \neq 0$ (не все коэффициенты этого ряда равны нулю — иначе она была бы тождественно равна нулю в этой окрестности). Поэтому

$$f(z) = (z - z_0)^n \left[c_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k-n} \right]$$

и при $z \neq z_0$ достаточно близком к z_0 квадратная скобка отлична от нуля, так как первое слагаемое в ней отлично от нуля, а предел второго (при $z \to z_0$) равен нулю. $\square$

5.2.2. Теорема единственности Вейерштрасса

В частности, лемма 5.3 показывает, что нули аналитической функции изолированы от других нулей и этот эффект в ней имеет локальный характер. Следующая теорема дает глобальное утверждение такого же сорта.

Теорема 5.6 (Вейерштрасса о единственности). *Если функция f аналитична в области $D \subset \mathbb{C}$ и обращается в нуль на бесконечном множестве с предельной точкой в D, то $f(z) \equiv 0$ в D.*

Доказательство. Пусть $Z \subset D$ — совокупность всех внутренних точек множества нулей функции. Тогда, очевидно, Z открыто.

Покажем, что его дополнение $D \setminus Z$ в D также является открытым. В самом деле, если предположить противное, то некоторая точка $z_0 \in D \setminus Z$ не является внутренней для $D \setminus Z$. Тогда она является предельной для Z и силу непрерывности f также является ее нулем. Отсюда и из леммы 5.3 следует, что наша функция тождественно равна нулю в некоторой окрестности z_0 и должно быть $z_0 \in Z$ в то время как $z_0 \in D \setminus Z$.

Итак, $D = Z \cup (D \setminus Z)$ и оба множества справа открыты и не пересекаются. Отсюда следует, что $D \setminus Z = \varnothing$ и $D = Z$, так как противное противоречит связности области D (см. пункт 7.2.4). □

Следствие 5.2. *Если две функции аналитичны в области $D \subset \mathbb{C}$ и совпадают на бесконечном подмножестве из D с предельной точкой в D, то они совпадают в D тождественно.*

Доказательство. Применим теорему 5.6 к разности этих функций. □

5.3. Последовательности аналитических функций

5.3.1. Сходимость внутри области

Ниже нам будет удобно пользоваться следующей терминологией. Пусть имеется некоторое свойство, связанное с подмножествами из $\mathbb{C}$. Будем говорить, что это свойство выполнено внутри E, если оно справедливо для любого компактного подмножества $K \subset E$. Примерами могут служить ограниченность внутри E, равномерная сходимость внутри E и т.д.

Основное содержание многих утверждений в этом параграфе будет состоять в том, что свойства, присущие обычно непрерывным функциям (или последовательностям непрерывных функций) на компактах, для аналитических функций выполняются внутри областей.

5.3.2. Принцип счетной компактности

Для множеств в евклидовых пространствах справедлив принцип Больцано – Вейерштрасса: каждое бесконечное ограниченное множество содержит сходящуюся подпоследовательность. Положение меняется, когда мы переходим к последовательностям функций — чтобы выделить, к примеру, равномерно сходящуюся подпоследовательность, нужно требовать гораздо больше.

На первый взгляд, удивительным выглядит то, что для аналитических функций ситуация больше похожа на случай конечномерных пространств. Это показывает следующая теорема, известная под названием «*принцип счетной компактности*».

Теорема 5.7 (Монтеля). *Если последовательность аналитических функций ограничена внутри области $D \subset \mathbb{C}$, то из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно внутри D.*

Доказательство. Шаг 1. Пусть $K \subset D$ — фиксированное замкнутое ограниченное множество. Покажем, что последовательность $\{f_n\}$ равностепенно непрерывна на K. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $z_1, z_2 \in K$ со свойством $|z_1 - z_2| < \delta$ выполнено неравенство $|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \varepsilon$.

Пусть

$$\alpha = \frac{1}{4}\operatorname{dist}(K, \partial D) > 0$$

(**это доказывать?**) и рассмотрим множество

$$K_\alpha = \{z \in D : \operatorname{dist}(z, K) \leqslant 2\alpha\}.$$

Оно замкнуто и ограничено, поэтому в силу основного условия теоремы

$$\sup_n \sup_{z \in K_\alpha} |f_n(z)| = M < \infty.$$

Пусть $0 < \varepsilon < \alpha$. Возьмем точки $z_1, z_2 \in K$ так, чтобы $|z_1 - z_2| < \varepsilon$ и применим формулу Коши к кругу $B(z_1, 2\alpha)$

$$f_n(z_j) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\delta(z_1)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z_j} d\zeta, \quad j = 1, 2$$

($C_\alpha(z_1) = \{\zeta : |\zeta - z_j| = 2\alpha\}$ — граница круга $B(z_1, 2\alpha)$). Отсюда

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\alpha(z_1)} f_n(\zeta) \frac{z_1 - z_2}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\alpha \max_{\zeta \in C_\alpha(z_1)} \left| f_n(\zeta) \frac{z_1 - z_2}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} \right| \leqslant 2\alpha M \frac{|z_1 - z_2|}{2\alpha \cdot \alpha} = \frac{M}{\alpha} |z_1 - z_2|.$$

Отсюда следует, что если взять $\delta = \min\{\varepsilon, \alpha\varepsilon/M\} > 0$, то для любых $z_1, z_2 \in K$ со свойством $|z_1 - z_2| < \delta$ выполнено неравенство

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \varepsilon.$$

Итак, свойство равностепенной непрерывности доказано.

Шаг 2. Зафиксируем счетное плотное всюду множество $Z = \{z_n\} \subset D$ (например, можно взять все точки из D, у которых действительная и мнимая части рациональны). Все элементы множества Z можно занумеровать. Пусть, например, $Z = \{z_n\}$.

Из натурального ряда выделим такую подпоследовательность индексов $\{n_k^1\}$, чтобы последовательность $\{f_{n_k^1}(z_1)\}$ сходилась. Это можно сделать, так как $\{f_n(z_1)\}$ ограничена. Из $\{n_k^1\}$ выделим подпоследовательность $\{n_k^2\}$ так, чтобы сходилась последовательность $\{f_{n_k^2}(z_2)\}$ и так далее. Продолжая процесс по индукции, на j-м шаге из последовательности $\{n_k^{j-1}\}$ выделим подпоследовательность $\{n_k^j\}$ так, чтобы сходилась последовательность $\{f_{n_k^j}(z_j)\}$ и так далее. Обозначим $n_k = n_k^k$, тогда, ясно что подпоследовательность $\{f_{n_k}(z)\}$ сходится в каждой из точек множества Z.

Шаг 3. Докажем равномерную сходимость последовательности $\{f_{n_k}\}$ (построенной на шаге 2) на множестве $K \subset D$. Для этого зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и с помощью прямых $\operatorname{Re} z = j\frac{\delta}{\sqrt{2}}$ и $\operatorname{Im} z = j\frac{\delta}{\sqrt{2}}$ ($j \in \mathbb{Z}$) разобьем D на квадраты со стороной δ, где δ определяется свойством равностепенной непрерывности для $\frac{\varepsilon}{3}$ (см. шаг 1). Тогда расстояние между любыми двумя точками z_1, z_2 из одного квадрата не превосходит δ и, следовательно, для них справедливо неравенство $|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$. В каждом из квадратов, пересекающихся с K, зафиксируем точку из Z, образуя тем самым некоторое конечное подмножество $Z_\delta \subset Z$. Тогда

$$\max_{z \in Z_\delta} |f_n(z) - f_m(z)| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

для всех достаточно больших номеров n и m.

Если теперь $z \in K$, то найдется точка $z' \in Z_\delta$, лежащая в одном квадрате с z. Запишем

$$|f_{n_k}(z) - f_{n_l}(z)| \leqslant |f_{n_k}(z) - f_{n_k}(z')| + |f_{n_k}(z') - f_{n_l}(z')| + |f_{n_l}(z') - f_{n_l}(z)| < \varepsilon.$$

Сумма первого и третьего слагаемых справа меньше, чем $\frac{2}{3}\varepsilon$ в силу свойства равностепенной непрерывности, а второе меньше, чем $\frac{1}{3}\varepsilon$ для достаточно больших n_k и n_l. Таким образом, последовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится равномерно на K.

Вместо того, чтобы доказывать шаги 2 и 3, можно было просто сослаться на теорему Арцела – Асколи (равностепенная непрерывность плюс равномерная ограниченность равносильны счетной компактности). Из нее следует, что можно выделить подпоследовательность равномерно сходящуюся на K.

Шаг 4. Для того, чтобы доказать, что из $\{f_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящаяся равномерно внутри D, применим диагональный процесс Кантора.

Для $m \in \mathbb{N}$ определим множество

$$K_m = \left\{z \in D : \operatorname{dist}(z, \partial D) \geqslant \frac{1}{m}\right\} \cap \overline{B(0, m)}.$$

Для достаточно больших m эти множества непусты и, кроме того, они ограничены и замкнуты (последнее следует из того, что функция $z \mapsto \operatorname{dist}(z, \partial D)$ непрерывна). Отметим также, что

$$K_m \subset K_{m+1}, \quad D = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m.$$

По доказанному существует такая подпоследовательность индексов $\{n_k^1\}$, что $\{f_{n_k^1}\}$ сходится равномерно на K_1. Из $\{n_k^1\}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{n_k^2\}$, что $\{f_{n_k^2}\}$ сходится равномерно на K_2. Продолжая процесс по индукции, на j-м шаге из последовательности $\{n_k^{j-1}\}$ выделим подпоследовательность $\{n_k^j\}$ так, чтобы последовательность $\{f_{n_k^j}\}$ сходилась равномерно на K_j и так далее. Обозначим $n_k = n_k^k$, тогда ясно что подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится равномерно на каждом из множеств K_m.

Выбранная подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится равномерно внутри D, так как $\operatorname{dist}(K, \partial D) > 0$ для любого замкнутого ограниченного множества $K \subset D$ (см. шаг 1) и $K \subset K_m$ для $m > (\operatorname{dist}(K, \partial D))^{-1}$. $\square$

5.3.3. Теорема Витали

Теорема 5.8 (Витали)**.** *Если последовательность* $\{f_n\} \subset H(D)$ *ограничена внутри* D*, и сходится на бесконечном множестве точек с предельной точкой в* D*, то она равномерно сходится внутри* D*.*

Доказательство. Пусть в некоторой точке $z_0 \in D$ последовательность расходится. Тогда выделим две подпоследовательности сходящиеся к разным пределам в z_0. Из этих последовательностей по теореме Монтеля выделим подпоследовательности, сходящиеся равномерно внутри D к двум аналитическим функциям, совпадающим на множестве с предельной точкой в D. По следствию 5.2 эти функции должны быть тождественны. Противоречие показывает, что $\{f_n\}$ сходится всюду в D. А равномерность сходимости доказывается точно так же как в теореме Монтеля. □

5.3.4. Теорема Вейерштрасса

Следующая теорема показывает, в частности, что предел последовательности аналитических функций, сходящейся равномерно внутри области, также является аналитической функцией. Это, в свою очередь, говорит нам о том, что понятие равномерной сходимости внутри области является естественным для класса функций, аналитических в этой области, так как не выводит из этого класса.

Теорема 5.9 (Вейерштрасс)**.** *Пусть последовательность аналитических функций $\{f_n\}$ сходится равномерно внутри области D к функции f. Тогда*

1) функция f аналитична в D,

2) для любого $k \in \mathbb{N}$ последовательность k-х производных $\{f_n^{(k)}\}$ сходится к производной предельной функции $f^{(k)}$ равномерно внутри D.

Доказательство. 1) Пусть $z_0 \in D$ и $\overline{B(z_0, r)} \subset D$, тогда по формуле Коши

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z| = r} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Предельный переход под знаком интеграла справа возможен в силу равномерной сходимости f_n на окружности $\{\zeta : \ |\zeta - z| = r\}$. Из полученного равенства и теоремы 4.12 следует, что f аналитична в в любом круге $B(z_0, r)$, содержащемся в D. Следовательно, функция f аналитична во всей области D.

2) Пусть $z_0 \in D$ и $\overline{B(z_0, 2r)} \subset D$. Применим равенство (4.18) из теоремы 4.13 к разности $f^{(k)} - f_n^{(k)}$, окружности $\{\zeta : |\zeta - z| = r\}$ и $z \in \overline{B(z_0, r)} \subset D$

$$|f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = 2r} \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{4\pi r}{r^{k+1}} \sup_{\zeta : |\zeta - z_0| = 2r} |f(\zeta) - f_n(\zeta)| = \frac{2k!}{r^k} \sup_{\zeta : |\zeta - z_0| = 2r} |f(\zeta) - f_n(\zeta)| \to 0$$

при $n \to \infty$ в силу равномерной сходимости последовательности f_n на компакте $\{\zeta : |\zeta - z_0| = 2r\}$.

Таким образом, последовательность производных $f_n^{(k)}$ сходится равномерно к $f^{(k)}$ в любом замкнутом круге $\overline{B(z_0, r)}$, для которого $\overline{B(z_0, 2r)} \subset D$. Но любой компакт в D можно покрыть конечным числом таких кругов. Следовательно, $f_n^{(k)}$ сходится к $f^{(k)}$ равномерно внутри D. $\square$

Глава 6

Ряды Лорана

6.1. Разложение в ряд Лорана

6.1.1. Ряд Лорана

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k (z-z_0)^{-k}$$

по отрицательным степеням разностей $z - z_0$. С помощью замены $z - z_0 = \frac{1}{\zeta}$ легко видеть, что это ряд сходится в области

$$|z - z_0| > \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = R$$

и по теореме Вейерштрасса о рядах его сумма аналитична в этой области.

Мы будем рассматривать ряды по всем целым степеням разностей $z - z_0$.

Рядом Лорана будем называть ряд вида

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k (z-z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k\,, \tag{6.1}$$

и его сумму будем понимать как

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{-1} c_k (z-z_0)^k + \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} c_k (z-z_0)^k$$

(конечно, если эти пределы существуют).

Часть ряда Лорана (6.1) с отрицательными индексами называется его *главной частью*, а часть с неотрицательными индексами — *правильной* или аналитической.

Из рассуждения перед определением ряда Лорана и из теоремы Коши – Адамара получаем, что областью сходимости ряда Лорана является кольцо

$$K(z_0, r, R) \equiv \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}\,,$$

где

$$r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}; \qquad \frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Конечно, если $r \geqslant R$, то это кольцо пусто.

Ряды Лорана естественно рассматривать по следующей причине. Если функция аналитична в некотором круге, то она разлагается в степенной ряд (см. теорему Тейлора) в этом круге. Если же в круге есть точки неаналитичности, то такое разложение уже невозможно. Выбрав кольцо $K(z_0, r, R)$, в котором наша функция аналитична, можно попытаться разложить ее в ряд Лорана.

6.1.2. Формулы для коэффициентов разложения

Следующая теорема показывает, что аналитическая в кольце функция может быть разложена в ряд Лорана, а также позволяет вычислить коэффициенты этого ряда.

Теорема 6.1 (Лорана). *Пусть $0 \leqslant r < R$ и $z_0 \in \mathbb{C}$. Если функция f аналитична в кольце $K(z_0, r, R)$, $0 \leqslant r < R$, то она является суммой сходящегося ряда Лорана (6.1), причем*

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta, \quad r < \rho < R. \tag{6.2}$$

Доказательство. Пусть $z \in K(z_0, r, R)$, выберем числа r' и R' так, чтобы

$$r < r' < |z - z_0| < R' < R,$$

а $\delta > 0$ возьмем настолько малым, чтобы $\overline{B(z, \delta)} \subset K(z_0, r', R')$.

Применим интегральную формулу Коши в области

$$D = K(z_0, r', R') \setminus \overline{B(z, \delta)}$$

к функции $\zeta \to \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\delta(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{R'}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{r'}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{6.3}$$

Далее заметим, что

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

А так как $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1$, то ряд сходится равномерно по ζ на $C_{R'}(z_0)$. Поэтому первый интеграл в (6.3) разлагается в ряд

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{R'}(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \oint\limits_{C_{R'}(z)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

Аналогично

$$\frac{-1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

А так как $\left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < 1$, то ряд сходится равномерно по ζ на $C_{r'}(z_0)$. Поэтому второй интеграл в (6.3) разлагается в ряд

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{r'}(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{r'}(z)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n \, d\zeta.$$

Для доказательства того, что формулы коэффициентов не зависят от ρ, воспользуемся обобщенной теоремой Коши, применяя ее к двусвязной области $K(z_0, \rho, \rho')$ к функции $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$ где $r < \rho < \rho' < R$. □

Ряд Лорана (6.1), коэффициенты которого вычисляются по формулам (6.2), будем называть *рядом Лорана функции* f в кольце $K(z_0, r, R)$.

Справедливо следующее утверждение, которое является в некотором смысле обратным к теореме Лорана.

Теорема 6.2. *Пусть $0 \leqslant r < R$ и $z_0 \in \mathbb{C}$. Если ряд (6.1) сходится равномерно внутри кольца $K(z_0, r, R)$, $0 \leqslant r < R$, то он является рядом Лорана своей суммы.*

Доказательство. Эта теорема является следствием теоремы Вейерштрасса. Действительно, все слагаемые ряда Лорана аналитичны и ряд сходится равномерно внутри кольца $K(z_0, r, R)$, поэтому его сумма аналитична в этом кольце.

Для вычисления коэффициентов ряда (6.1) обозначим f его сумму, умножим его на $\dfrac{1}{2\pi i}(z - z_0)^{-n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, и проинтегрируем почленно по окружности $|z - z_0| = \rho \in (r, R)$, получая

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, dz = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int\limits_{C_\rho(z_0)} (z - z_0)^{k-n-1} dz = c_n.$$

Последнее равенство вытекает из того, что интеграл

$$\int\limits_{C_\rho(z_0)} (z - z_0)^{k-n-1}\,dz$$

равен $2\pi i$ при $k = n$ и нулю при $k \neq n$ (см. лемму 4.2). $\square$

6.1.3. Неравенства Коши

Из формул (6.2) нетрудно получить следующие оценки для коэффициентов ряда Лорана функции f

$$|c_k| \leqslant M_\rho \rho^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad M_\rho = \max_{z \in C_{\rho(z_0)}} |f(z)|, \tag{6.4}$$

которые называют обычно *неравенствами Коши*.

Действительно, в силу (6.2) и теоремы 4.1 получаем

$$|c_k| = \left| \oint\limits_{C_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{C_\rho(z_0)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{k+1}} dl \leqslant \frac{M_\rho}{\rho^{k+1}} \cdot 2\pi\rho.$$

6.2. Классификация изолированных особых точек

6.2.1. Правильные точки функции

Пусть функция f аналитична в проколотом круге $B^\circ(z_0, r)$ при некотором $r > 0$ (см. обозначение (**??**)). Тогда либо найдется число $c_0 \in \mathbb{C}$, что переопределение нашей функции в точке z_0 равенством $f(z_0) = c_0$ делает ее аналитичной также и в точке z_0, либо такого числа нет. В первом случае z_0 называют *правильной точкой* для f (часто используется также термин «устранимая особая точка»). Во втором случае, говорят, что z_0 — *изолированная особая точка* для f. Простой способ проверки того, что точка является правильной для функции, дает следующее утверждение.

Теорема 6.3. *Пусть функция f аналитична в проколотом круге $B^\circ(z_0, r)$, $r > 0$. Тогда z_0 является для нее правильной точкой тогда и только тогда, когда f ограничена в некоторой проколотой окрестности z_0.*

Доказательство. Ограниченность функции в окрестности правильной точки очевидна.

Для доказательства обратного утверждения разложим нашу функцию в ряд Лорана по теореме Лорана и воспользуемся неравенствами (6.4) для коэффициентов Лорана: если $|f(z)| \leqslant M$ в $B^\circ(z_0, r)$, то для любого $0 < \rho < r$ выполнены неравенства $|c_k| \leqslant M\rho^{-k}$. При $\rho \to +0$ получаем отсюда, что $c_k = 0$ при всех $k < 0$. То есть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \tag{6.5}$$

и определение $f(z_0) = c_0$ делает ее аналитической в $B(z_0, r)$. □

Следствие 6.1. *z_0 является правильной точкой функции f в том и только в том случае, когда ее разложение в ряд Лорана имеет вид (6.5), т.е. является ее рядом Тейлора.*

Это вытекает из доказательства теоремы 6.3.

Понятие правильной точки функции не очень содержательно и не представляет интереса для теории.

Мы изучим более подробно изолированные особые точки. Основным и естественным средством при этом будут служить разложения в ряды Лорана.

6.2.2. Полюсы

Пусть функция f аналитична в проколотом круге $B^\circ(z_0, r)$, $r > 0$. Тогда из теоремы 6.3 вытекает, что z_0 является изолированной особой точкой для f в том и только том случае, когда

$$\varlimsup_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty.$$

Определение. Изолированная особая точка z_0 функции f называется ее *полюсом*, если

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty. \tag{6.6}$$

Самый простой пример полюса — точка z_0 для функции $f(z) = (z - z_0)^{-n}$ где $n \in \mathbb{N}$. По существу, этот пример показывает, как устроена функция в окрестности любого полюса, т.к. следующая теорема утверждает, что эта ситуация вполне типична.

Теорема 6.4. *Изолированная особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функции f является ее полюсом тогда и только тогда, когда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что разложение f в ряд Лорана имеет вид*

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{-n} c_k(z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k, \quad \text{где} \quad c_{-n} \neq 0. \tag{6.7}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $g = 1/f$, заданную в такой проколотой окрестности $B^\circ(z_0, r)$ точки z_0, в которой $F(z) \neq 0$ (ее существование обеспечивается условием (6.6)). Эта функция g аналитична в $B^\circ(z_0, r)$ и z_0 является ее правильной точкой (что также обесепечивается условием (6.6)), причем $\lim_{z\to z_0} g(z) = 0$. В силу следствия 6.1 ее лорановское разложение имеет вид

$$g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}(z - z_0)^k$$

при некотором $n \in \mathbb{N}$ и $a_n \neq 0$.

Так как $a_n \neq 0$, то функция h, определенная равенством

$$\frac{1}{h(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}(z-z_0)^k,$$

аналитична в некоторой окрестности точки z_0. Разлагая h в ряд Тейлора, видим, что ряд Лорана функции $f(z) = (z-z_0)^{-n}h(z)$ имеет вид (6.7).

Обратно, разложение Лорана вида (6.7) дает нам

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z) = c_{-n} \neq 0,$$

поэтому (6.6) выполнено. □

Теорема 6.4 делает естественной следующую классификацию полюсов.

Определение. Будем говорить, что изолированная особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функции f является ее *полюсом порядка (кратности) $n \in \mathbb{N}$*, если разложение Лорана для f имеет вид (6.7).

Полюс кратности $n = 1$ называется *простым*.

Пусть функция f аналитична в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$. Условимся называть точку z_0 *нулем порядка (кратности) n* функции f, если

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Другими словами, это означает, что разложение функции f в ряд Тейлора в точке z_0 имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k(z-z_0)^k, \quad \text{где} \quad c_n \neq 0.$$

Еще одна эквивалентная форма: в некоторой окрестности нуля кратности n функция f представима в виде $f(z) = (z-z_0)^n g(z)$, где g аналитична в этой окрестности и $g(z_0) \neq 0$.

Теорема 6.5. *Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ — полюс порядка n для функции f тогда и только тогда, когда z_0 — нуль порядка n для функции $1/f$.*

Доказательство. Пусть z_0 — полюс порядка n для f. Тогда функция $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$, аналитична и отлична от нуля в некоторой окрестности z_0, т.к. $g(z_0) = c_{-n} \neq 0$. Поэтому функция $1/g$ аналитична в этой окрестности и разлагается в ряд Тейлора

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

и z_0 — нуль порядка n для $1/f$. Каждый шаг в этом рассуждении обратим, поэтому обратное утверждение также верно. □

6.2.3. Существенно особые точки

Пусть функция f аналитична в проколотом круге $B^{\circ}(z_0, r)$ при некотором $r > 0$ и z_0 не является ни правильной точкой, ни полюсом. Такие изолированные особенности называются существенно особыми точками для f.

Определение. Изолированная особая точка z_0 функции f называется *существенно особой точкой* для f, если в этой точке она не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

Как и в случае полюса (см. теорему 6.4) судить о том, является ли изолированная особенность существенно особой точкой, можно по ряду Лорана.

Теорема 6.6. *Изолированная особая точка функции f является существенно особой тогда и только тогда, главная часть ряда Лорана в этой точке содержит бесконечно много ненулевых слагаемых.*

Доказательство. Правильная точка, полюс и существенно особая точка являются взаимоисключающими случаями изолированной особенности. Для завершения доказательства остается применить следствие 6.1 и теорему 6.4. □

Таким образом, вид неаналитической части ряда Лорана полностью распознает тип изолированной особенности в точке z_0:
— если она отсутствует, то z_0 — правильная точка,
— если в ней лишь конечное число ненулевых слагаемых, то z_0 — полюс соответствуюшщего порядка,
— если ненулевых слагаемых бесконечно много, то z_0 — существенная особенность.

Следующее утверждение аналогично теореме 6.5 и дает способ проверки на существенную особенность для f с помощью функции $1/f$.

Теорема 6.7. *Пусть функция f аналитична и отлична от нуля в некоторой проколотой окрестности точки z_0.*

Тогда если z_0 является существенно особой точкой для f, то z_0 — существенно особая точка для $1/f$.

Доказательство. Функция $g = 1/f$ аналитична в той же проколотой окрестности точки z_0, которая является для нее изолированной особенностью.

Если предположить, что z_0 — полюс для g, то по теореме 6.5 z_0 является нулем для f. Поэтому f аналитична в точке z_0, что невозможно по условию.

Следовательно, z_0 является либо правильной, либо существенно особой для для g. Если z_0 — правильная точка для g, то либо $g(z_0) = 0$ и f имеет в z_0 полюс (по теореме 6.5), либо $g(z_0) \neq 0$ и $g(z) \neq 0$ в некоторой окрестности z_0, тогда функция $1/g = f$ аналитична в точке z_0. Это опять невозможно. Остается единственное: z_0 — существенно особая точка для g. □

6.2.4. Случай бесконечно удаленной точки

Понятие изолированной особой точки можно распространить и на случай $z_0 = \infty$ следующим образом.

Пусть функция аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, т.е. в области вида $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ с достаточно большим R.

Определение. Будем говорить, что бесконечно удаленная точка является правильной, полюсом порядка n или существенно собой точкой для функции f, если 0 является таковой для функции $g : z \mapsto f(1/z)$.

Разложим функцию $g : z \mapsto f(1/z)$ в ряд Лорана в точке 0

$$g(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \zeta^{-k}.$$

По количеству ненулевых слагаемых в неаналитической части этого разложения мы можем проверить тип особенности функции g.

Выполняя в этом разложении замену $\zeta = 1/z$ и учитывая связь между f и g, мы получим разложение

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^k.$$

для f в окрестности бесконечно удаленной точки. Для того, чтобы иметь унифицированную запись разложения в ряд Лорана в точках $z_0 \in \mathbb{C}$ (см. (6.1)) и $z_0 = \infty$ заменим в последнем ряде a_k на c_{-k}, приходя к ряду

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k + \sum_{k=-\infty}^{0} c_k z^k. \tag{6.8}$$

Это разложение мы будем называть *рядом Лорана функци f на бесконечности*. Однако теперь главной частью этого разложения является первая, а аналитической — вторая.

С помощью ряда (6.8) него мы будем судить о типе особенности функции f в бесконечно удаленной точке по числу ненулевых коэффициентов с положительными индексами в разложении (6.8):

— если все они отсутствуют, то ∞ — правильная точка для f,
— если их конечное число, то ∞ — полюс соответствующего порядка,
— если их бесконечно много, то ∞ является существенной особенностью функции f.

6.2.5. Теорема Сохоцкого

Асимптотическое поведение вблизи правильной точки функции и вблизи полюса уже выяснено. Именно,

— если z_0 — правильная точка для f, то существует предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$,

— если z_0 — полюс для f, то $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$,

— если z_0 — полюс порядка n для f, то существует предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)^n$.

В окрестности существенной особой точки поведение функции значительно сложнее, что показывает следующее утверждение.

Теорема 6.8 (Сохоцкого). *Если точка z_0 — существенно особая для f, то для любого числа $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ найдется последовательность $z_k \to z$ такая, что $\lim\limits_{k \to \infty} f(z_k) = w$.*

Доказательство. Если $w = \infty$, то все доказанно, так как f неограничена в любой окрестности z_0 (см. начало пункта 6.2.2).

Пусть $w \in \mathbb{C}$. Если z_0 — предельная точка множества нулей функци $f(z) - w$, то все доказано. Если же нет, то $f(z) - w \neq 0$ в некоторой окрестности z_0 и по теореме 6.7 для функции $z \mapsto (f(z) - w)^{-1}$ точка z_0 также является существенно особой. По доказанному найдется последовательность $z_k \to z_0$, для которой $(f(z_k) - w)^{-1} \to \infty$, то есть $f(z_k) \to w$. $\square$

На самом деле справедливо следующее более глубокое утверждение, которое мы приводим здесь без доказательства.

Теорема 6.9 (Пикара). *Если z_0 — существенно особая точка функции f, то в любой окрестности точки z_0 f принимает каждое значение $w \in \mathbb{C}$, кроме, быть может, одного, бесконечно много раз.*

Значение w, которое в теореме Пикара функция не принимает, называют обычно исключительным. Рассмотрим в связи с этим две функции

$$\exp\frac{1}{z}, \quad \sin\frac{1}{z}$$

и точку $z_0 = 0$, которая является существенно особой для каждой из них. Для первой функции исключительное значение $w_0 = 0$, а для второй исключительного значения нет.

6.2.6. Целые и мероморфные функции

Аналитическая функция, не имеющая особых точек в расширенной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$, является тождественно постоянной. Действительно, ее разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{6.9}$$

и сходится при всех $z \in \mathbb{C}$. Этот же ряд является разложением Лорана f в бесконечно удаленной точке. Поскольку ∞ не является особой, то (см. пункт 6.2.4) $c_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Функция, аналитическая всюду в $\mathbb{C}$ называется *целой*. Такие функции имеют единственную особенность — бесконечно удаленную точку.

Если $n \in \mathbb{N}$ и в разложении (6.9) все коэффициенты c_k с номерами $k > n$ равны нулю, а $c_n \neq 0$, то ∞ является полюсом порядка n. Такая функция является многочленом.

Если же в (6.9) бесконечно много коэффициентов c_k отличны от нуля, то ∞ является существуенно особой для f. Такие функции называются *целыми трансцендентными*. Примерами могут служить $\exp z$, $\sin z$, $\cos z$.

Функция называется *мероморфной* в области $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, если она не имеет в этой области других особых точек, кроме изолированных полюсов. Простейший пример мероморфной функции — это $(z - z_0)^{-n}$, у которой точка $z_0 \in \mathbb{C}$ является полюсом порядка n.

Теорема 6.10. *Любая функция, мероморфная в расширенной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$, является рациональной, т.е. имеет вид*

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

где P и Q — многочлены.

Доказательство. Наша функция имеет лишь конечное число полюсов, так как каждый из них является изолированным. Пусть z_k — конечный полюс порядка n_k, $k = 1, \dots, p$, для f. Возможно еще ∞ является полюсом порядка n. Вычтем из f главные части рядов Лорана, соответствующих этим особенностям,

$$f(z) - \sum_{k=1}^{p} \sum_{m=1}^{n_k} \frac{c_{mk}}{(z - z_k)^{n_k}} - \sum_{m=1}^{n} c_k z^k.$$

Для полученной разности все точки z_k, $k = 1, \dots, p$, и ∞ являются устранимыми особенностями. Других особенностей она не имеет. По теореме Лиувилля эта разность есть тождественная постоянная. □

Глава 7

Теория вычетов

7.1. Вычеты и основная теорема о вычетах

7.1.1. Вычеты

Пусть функция f аналитична в некоторой проколотой окрестности $B^{\circ}(z_0,\varepsilon)$ изолированной особой точки $z_0 \in \mathbb{C}$.

Определение. *Вычетом функции f* в изолированной особой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ называется число

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} f(z)\,dz, \quad 0 < r < \varepsilon. \tag{7.1}$$

Используя теорему 4.4, нетрудно показать, что значение интеграла в (7.1) не зависит от $r \in (0,\varepsilon)$.

Действительно, если $0 < r' < r < \varepsilon$, то, применяя к двусвязной области $B(z_0,r) \setminus \overline{B(z_0,r')}$ теорему 4.4, получаем равенство

$$\oint\limits_{(C_r(z_0))^+} f(z)\,dz + \oint\limits_{(C_{r'}(z_0))^-} f(z)\,dz = 0.$$

или

$$\oint\limits_{(C_r(z_0))^+} f(z)\,dz = \oint\limits_{(C_{r'}(z_0))^+} f(z)\,dz.$$

В частности, это рассуждение показывает, что для вычисления вычета в (7.1) можно брать достаточно малое $r > 0$.

7.1.2. Формулы для вычисления вычетов

Поскольку представлением аналитической функции в изолированной особой точке является ряд Лорана, то естественно использовать этот ряд для вычисления вычета. Равенство (6.2) в теореме Лорана при $k = 0$ показывает, это действительно возможно.

Теорема 7.1. *Если $z_0 \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка функции f, то вычет $\operatorname*{Res}_{z_0} f$ равен коэффициенту c_{-1} при $(z - z_0)^{-1}$ в разложении Лорана для f в этой точке.*

Рассмотрим несколько примеров на вычисление вычетов.

Пример 7.1. Рассмотрим функцию

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!z^k}, \quad z \neq 0.$$

Это разложение сходится в проколотой плоскости $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и потому является ее рядом Лорана для точки $z_0 = 0$. В силу теоремы 7.1 $\operatorname*{Res}_{0} \exp(1/z) = 1$.

Пример 7.2. Если особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ является правильной, то вычет в этой точке равен нулю, так как в этом случае по следствию 6.1 ряд Лорана вырождается в ряд Тейлора — все коэффициенты Лорана с отрицательными индексами равны нулю.

В связи с последним примером отметим, что из того, что вычет в особой точке равен нулю, не следует, что эта особенность является устранимой. Другие лорановские коэффициенты с отрицательными индексами могут быть равны нулю. Пример $f(z) = z^{-2}$ показывает это.

Пример 7.3. Если z_0 — простой полюс для f (кратности 1), то

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0).$$

В самом деле, ряд Лорана в таком случае имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad \text{или} \quad f(z)(z - z_0) = \sum_{k=-1}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+1}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $z \to z_0$ получим требуемое.

Следующая теорема дает способ вычисления вычета в полюсе любого порядка и обобщает результат последнего примера.

Теорема 7.2. *Если $z_0 \in \mathbb{C}$ — полюс кратности n, то*

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)] .$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 6.4 — умножим обе части разложения Лорана в полюсе (6.7) на $(z-z_0)^n$, получая равенство

$$(z-z_0)^n f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k+n}.$$

Продифференцируем это равенство $(n-1)$-раз:

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)] = (n-1)! c_{-1} + \sum_{k=-n+1}^{\infty} c_k A_k (z-z_0)^{k+n},$$

где $A_k = (n+k)(n+k-1)\dots(k+1)$. Осталось перейти к пределу при $z \to z_0$. $\square$

7.1.3. Теорема Коши о вычетах

Своим появлением вычеты обязаны Коши. Одним из основных назначений вычетов является возможность вычислять интегралы по кривым. Как реализуется эта возможность — показывает следующая важная теорема.

Теорема 7.3 (Коши, о вычетах). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — стандартная многосвязная область, функция f аналитична в D, кроме конечного множества $S = \{z_1, \dots, z_n\} \subset D$ изолированных особых точек, и непрерывна в $\overline{D} \setminus S$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f. \tag{7.2}$$

Доказательство. Выберем $r > 0$ так, чтобы круги $\overline{B(z_k, r)} \subset D$, $k = 1, 2, \dots, n$, попарно не пересекались и содержались в D. Применим к многосвязной области

$$D_r = D \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \overline{B(z_k, r)}$$

теорему Коши, получая равенство

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D_r} f(z)\, dz = \oint\limits_{\partial D} f(z)\, dz - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_k)} f(z)\, dz.$$

В силу теоремы 7.1 отсюда следует (7.2). □

7.1.4. Вычет в бесконечно удаленной точке

Пусть функция f аналитична во внешности круга $\overline{B(0,r)}$ достаточно большого радиуса и $z_0 = \infty$ является изолированной особой точкой для f.

Определение. *Вычетом функции f* в изолированной особой точке ∞ называется число

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(C_r(0))^-} f(z)\,dz, \quad r > R. \tag{7.3}$$

Как и в случае конечной изолированной особой точки, интеграл в (7.3) не зависит от r (его надо брать достаточно большим).

Теорема 7.4. *Если ∞ — изолированная особая точка функции f, то вычет $\operatorname*{Res}_{\infty} f$ равен $-c_{-1}$ — коэффициенту при z^{-1} в разложении Лорана (6.8) для f в бесконечно удаленной точке, взятому с противоположным знаком.*

Доказательство. Достаточно проинтегрировать ряд (6.8) по отрицательно ориентированной окружности $C_R(0)$ и применить лемму 4.2. □

Пример 7.4. Если ∞ является правильной особой точкой (см. пункт 6.2.4), то ряд Лорана (6.8) вырождается в ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{0} c_k z^k,$$

поэтому теорема 7.2 дает нам $\operatorname*{Res}_{\infty} f = -c_{-1}$.

Обратим внимание на отличие результата последнего примера 7.4 от случая конечной особенности (ср. с примером 7.2).

Теорема 7.5. *Если ∞ — полюс кратности n, то*

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \lim_{z\to\infty} \left[z^{n+2} f^{(n+1)}(z) \right].$$

Доказательство. Для бесконечно удаленной точки используем запишем разложение Лорана (6.8)

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{n} c_k z^k,$$

которое продифференцируем $n+1$ раз, а затем умножим на z^{n+2}

$$z^{n+2} f^{(n+1)}(z) = (-1)^{n+1}(n+1)! c_{-1} + \sum_{k=-\infty}^{-2} c_k A_k z^{k+1},$$

где $A_k = k(k-1)\dots(k-n)$. Отсюда при $z \to \infty$ получаем требуемое. $\square$

7.1.5. Теорема о полной сумме вычетов

Теорема 7.6. *Пусть функция f аналитична всюду в $\mathbb{C}$, кроме конечного множества $S = \{z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{C}$ изолированных особых точек. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f + \operatorname*{Res}_{\infty} f = 0.$$

Доказательство. Для достаточно большого $r > 0$ все точки из S содержатся в круге $B(0, r)$. Поэтому в силу теоремы 7.3 справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f = \oint\limits_{C_r^+(0)} f(z)\, dz,$$

правая часть которого равна $-\operatorname*{Res}_{\infty} f$ (см. определение 7.2.4). $\square$

7.2. Теорема о логарифмическом вычете и ее приложения

7.2.1. Логарифмический вычет

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка аналитической функции f, которая аналитична в некоторой проколотой окрестности $B^\circ(z_0, \varepsilon)$ и отлична там от нуля.

Определение. *Логарифмическим вычетом* функции f в изолированной особой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ называется вычет ее логарифмической производной f'/f в этой точке.

Другими словами, логарифмический вычет — это

$$\operatorname*{Res}_{z_0} \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C(z_0,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

Рассмотрим примеры на вычисление логарифмического вычета.

Пример 7.5. Пусть функция аналитична в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, которая является для нее нулем кратности n. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{z_0}(f'/f) = n. \tag{7.4}$$

Решение. Действительно, функция f представима в виде $f(z) = (z - z_0)^{n_k} g(z)$, где g аналитична в окрестности z_0 и $g(z) \neq 0$ в этой окрестности. Тогда

$$f'(z) = n(z - z_0)^{n-1} g(z) + (z - z_0)^n g'(z),$$

откуда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Так как второе слагаемое справа аналитично в некоторой окрестности точки z_0, то равенство (7.4) вытекает из случая $n = -1$ леммы 4.2. □

Пример 7.6. Пусть функция аналитична в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, которая является для нее полюсом кратности p. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{z_0}(f'/f) = -p \tag{7.5}$$

Решение. Это можно доказать повторяя рассуждение из примера 7.5. Однако, можно просто сослаться на этот пример, так как если $g = 1/f$, $f'/f = -g'/g$ и z_0 является нулем кратности p для g. □

Следующая теорема является основной в этом параграфе. В ней используются следующие обозначения:

$N(f, D)$ — число нулей функции f в области $D \subset \mathbb{C}$,

$P(f, D)$ — число полюсов функции f в области $D \subset \mathbb{C}$

с учетом их кратностей.

Теорема 7.7 (о логарифмическом вычете). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — стандартная многосвязная область, функция f аналитична в D, кроме конечного множества полюсов S, непрерывна вместе со своей производной в $\overline{D} \setminus S$ и $f(z) \neq 0$ при $z \in \partial D$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N(f, D) - P(f, D), \tag{7.6}$$

где Z и P — числа нулей и полюсов f в D с учетом их кратности.

Доказательство. Пусть f имеет нули кратности n_k в точках $z_k \in D$, $k = 1, 2, \dots, N$, и полюсы кратности m_k в точках $\zeta_k \in D$, $k = 1, 2, \dots, P$. Тогда функция f'/f аналитична в D, кроме указанных нулей и полюсов функции f. Применив теорему о вычетах, получаем равенство

$$\oint\limits_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z_k} \frac{f'}{f} + \sum_{k=1}^{P} \operatorname*{Res}_{\zeta_k} \frac{f'}{f}. \tag{7.7}$$

Каждое слагаемое справа вычисляется по формуле (7.4) для нулей и по формуле (7.4) для полюсов. □

7.2.2. Принцип аргумента

Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ — путь в $\mathbb{C}$ (см. пункт 1.2.1) и на его следе $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$ задана непрерывная функция $f : \Gamma \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, не обращающаяся в нуль.

Тогда найдется такая непрерывная функция $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, что

$$f(\gamma(t)) = |f(\gamma(t))| e^{i\varphi(t)}, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Эта функция определяется не единственным образом, однако, любые две такие функции отличаются на слагаемое, кратное 2π. Поэтому разность $\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$ не зависит от выбора функции φ. Эта разность называется *приращением аргумента функции вдоль пути γ* и обозначается $\Delta_\gamma \arg f$.

Если задана ориентированная жорданова кривая или контур $\subset \mathbb{C}$, то мы можем определить *приращение аргумента функции f вдоль этой кривой или контура*, как приращение аргумента вдоль его параметризации, сохраняющей ориентацию. При этом будет использоваться обозначение $\Delta_\Gamma \arg f$. Легко убедиться в том, что такое определение не зависит от выбора параметризации.

Теорема 7.8 (принцип аргумента). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — стандартная односвязная область с кусочно-гладкой границей, функция f удовлетворяет условиям теоремы о логарифмическом вычете и имеет конечное число полюсов в D. Тогда*

$$N(f, D) - P(f, D) = \Delta_{\partial D} \arg f. \tag{7.8}$$

Доказательство. Пусть $\gamma : [0, 2\pi) \to \partial D$ — положительная параметризация границы ∂D. Тогда в силу равенства (4.6)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} (\operatorname{Ln} f \circ \gamma)'\, dt = \operatorname{Ln} f(\gamma(2\pi)) - \operatorname{Ln} f(\gamma(0)).$$

$$= [\ln |f(\gamma(2\pi))| - \ln |f(\gamma(0))|] + i[\operatorname{Arg} f(\gamma(2\pi)) - \operatorname{Arg} f(\gamma(0))].$$

Действительная часть выражения справа равна нулю, а мнимая есть $\Delta_{\partial D} \arg f$. Равенство (7.8) вытекает теперь из (7.6). $\square$

7.2.3. Теорема Руше

Теорема 7.9 (Руше)**.** *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — стандартная односвязная область, функции f и g аналитичны в D и непрерывны в $\overline{D}$ вместе со своими производными, причем*

$$|f(\zeta)| > |g(\zeta)| \quad \text{при} \quad \zeta \in \partial D.$$

Тогда f и $f + g$ имеют одинаковое число нулей в D.

Доказательство. Для $\alpha \in [0, 1]$ рассмотрим семейство функций

$$h_\alpha(z) = f(z) + \alpha g(z).$$

Ясно, что $h_\alpha(z) \neq 0$ при всех $\alpha \in [0, 1]$ и $z \in \partial D$, так как

$$|f(z) + \alpha g(z)| \geqslant |f(z)| - \alpha|g(z)| > (1 - \alpha)|f(z)|$$

и $f(z) \neq 0$ при $z \in \partial D$.

Применим к h_α теорему о логарифмическом вычете, получая

$$\oint\limits_{\partial D} \frac{f'(z) + \alpha g'(z)}{f(z) + \alpha g(z)}\, dz = N(\alpha), \tag{7.9}$$

где $N(\alpha)$ — количество нулей h_α в D.

Левая часть (7.9) непрерывна по $\alpha \in [0, 1]$ (так как подынтегральная функция непрерывно зависит от α). Функция $N(\alpha)$ также непрерывна по α. Но $N(\alpha)$ принимает только целые значения, поэтому она постоянна и $N(0) = N(1)$. Значит число нулей в D для $f + g$ и g одинаково. □

Смысл теоремы Руше в том, что можно вычислять количество нулей функции, упрощая выражение для нее отбрасывнием ее «небольших частей».

Для иллюстрации теоремы Руше докажем с ее помощью основную теорему алгебры.

Теорема 7.10. *Каждый алгебраический многочлен*

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{C},$$

степени n имеет ровно n комплексных нулей (с учетом их кратности).

Доказательство. Запишем наш полином в виде $P_n = f + g$, где

$$f(z) = a_0 z^n, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k.$$

Так как P_n имеет полюс порядка n в бесконечно удаленной точке, то все его корни (если таковые имеются) лежат в круге $B(0, R)$ достаточно большого радиуса R. Кроме того, $f(z)/g(z) \to \infty$ при $z \to \infty$ и можно также считать, что $|f(z)| > |g(z)|$ при $|z| = R$. По теореме Руше P_n имеет в круге $B(0, R)$ столько же нулей, сколько и $a_0 z^n$ — ровно n. □

7.2.4. Принцип сохранения области

Напомним, что область $D \subset \mathbb{C}$ — открытое связное множество.

Теорема 7.11 (принцип сохранения области). *Пусть функция f аналитична в области $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ и отлична от тождественной постоянной. Тогда образ $f(D)$ является областью.*

Доказательство. Связность образа $f(D)$ является общетопологическим фактом (аналитическая функция непрерывна). Существенно комплексным фактом является открытость образа.

Докажем, что $f(D)$ — открытое множество. Пусть $z_0 \in D$ и $w_0 = f(z_0) \in f(D)$. Докажем, что некоторая окрестность точки w_0 также содержится в $f(D)$.

Сначала считаем $z_0 \neq \infty$ и $w_0 \neq \infty$. Тогда найдется круг $\overline{B(z_0, \rho)} \subset D$, в котором $f(z) \neq w_0$. Это следует из теоремы 5.6.

Обозначим

$$r = \min\{|f(z) - w_0| : \ z \in C_\rho(z_0)\}.$$

Тогда $r > 0$, так как непрерывная функция $z \mapsto |f(z) - w_0|$ принимает свое минимальное значение на компакте $C_\rho(z_0)$.

Покажем, что $B(w_0, r) \subset f(D)$. Если $w \in B(w_0, r)$ — произвольная точка, то

$$|w - w_0| < r < |f(z) - w_0|.$$

По теореме Руше функция

$$f(z) - w = [f(z) - w_0] - [w - w_0]$$

имеет в круге $B(z_0, \rho)$ столько нулей сколько и $f(z) - w_0$ (а она их имеет). Итак, $f(z) = w$ в некоторой точке $z \in B(z_0, \rho)$, т.е. $w \in f(D)$. А так как w — произвольная точка $B(w_0, r)$, то $B(w_0, r) \subset f(D)$ и $f(D)$ открыто.

Если $z_0 \neq \infty$, $w = \infty$, то функция f имеет полюс в точке z_0 и $g = 1/f$ имеет в z_0 нуль. По доказанному $g(z_0) = 0$ — внутренняя точка ее области значений. Если $z_0 = \infty$, $w = \infty$, то точно так же рассуждаем с функцией $g(z) = 1/f(1/z)$. $\square$

Предметный указатель

В

К

П

Р

Т

Ф

А

В

И

К

Л

М

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Я

Определения

Аналитическая функция

Функция f, определенная в некоторой окрестности точки z_0, называется *аналитической* в этой точке, если она дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0.

Функция f называется аналитической в бесконечно удаленной точке $z_0 = \infty$, если функция $f(1/z)$ аналитична в точке 0.

Функция называется аналитической в некоторой области $G \subset \mathbb{C}$, если она аналитична в каждой точке этой области.

[Перейти к основному тексту]

Вычет функции на бесконечности

Вычетом функции f в изолированной особой точке ∞ называется число

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(C_r(0))^-} f(z)\, dz, \quad r > R.$$

[Перейти к основному тексту]

Вычет функции

Вычетом функции f в изолированной особой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ называется число

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} f(z)\,dz, \quad 0 < r < \varepsilon.$$

[Перейти к основному тексту]

Дифференцируемость

Функция f заданная в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой* в этой точке, если существует такое комплексное число $A \in \mathbb{C}$, что

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = Ah + o(|h|), \quad |h| \to 0.$$

[Перейти к основному тексту]

Длина жордановой кривой

Длиной l_Γ жордановой кривой Γ называется длина любой ее параметризации.

[Перейти к основному тексту]

Длина пути

Длиной пути называется число

$$l_\gamma = \sup_{\Pi} l_\gamma(\Pi).$$

Если $l_\gamma < \infty$, то путь называется *спрямляемым*.

[Перейти к основному тексту]

Дробно-линейное отображение

Дробно-линейными отображениями называются функции вида

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

[Перейти к основному тексту]

Комплексная плоскость

Множество комплексных чисел (*комплексная плоскость*) $\mathbb{C}$ определяется как множество

$$\{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

всех упорядоченных пар действительных чисел, на котором определены отношение равенства и две операции — сложения и умножения.

Две пары $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ называются *равными*, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Суммой элементов $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ называется

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Произведением элементов $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ называется

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

[Перейти к основному тексту]

Контур

Множество $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется *контуром* (*замкнутой жордановой кривой*) в $\mathbb{C}$, если существует непрерывная взаимнооднозначная функция $\gamma : C \to \mathbb{C}$, для которой $\gamma(C) = \Gamma$ (здесь $C = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$ — единичная окружность).

[Перейти к основному тексту]

Конформное отображение

Непрерывное отображение $f \in C(G)$ области $G \subset \mathbb{C}$ называется *конформным* в точке $z_0 \in G$, если оно сохраняет углы между кривыми, проходящими через эту точку. [Перейти к основному тексту]

Кривая

Множество $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется *кривой*, если существует путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, для которого

$$\Gamma = \gamma\big([\alpha, \beta]\big).$$

Путь γ называется в этом случае *параметризацией кривой*. Точки $a = \gamma(\alpha)$ и $b = \gamma(\beta)$ называются *концами* Γ.

Кривая $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется *жордановой кривой*, если она имеет взаимно-однозначную параметризацию.

[Перейти к основному тексту]

Криволинейный интеграл вдоль контура

Криволинейным интегралом (второго рода) от функции f вдоль кривой (контура) Γ называется криволинейный интеграл по любой параметризации этой кривой (контура), сохраняющей ориентацию. Для этого интеграла используется следующее обозначение

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz.$$

[Перейти к основному тексту]

Криволинейный интеграл по пути

Число $I \in \mathbb{C}$ называется пределом интегральных сумм, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (\Pi, \xi) \quad \lambda_\Pi < \delta \implies \left| s(\Pi, \xi) - I \right| < \varepsilon.$$

Если такой предел существует, то он называется *криволинейным интегралом (второго рода) от функции f по пути γ* и обозначается

$$\oint_\gamma f(z)\, dz.$$

[Перейти к основному тексту]

Линейно связное множество

Множество $A \subset \mathbb{C}$ называется *линейно связным*, если для любых двух его точек существует путь, соединяющий эти точки, след которого лежит в A. [Перейти к основному тексту]

Логарифмическая функция

Логарифмической (с основанием e) называется многозначная функция

$$\operatorname{Ln} z = \{\ln|z| + i(2\pi k + \arg z) :\ k \in \mathbb{Z}\} = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Функция

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z$$

называется *главным значением* логарифма.

[Перейти к основному тексту]

Логарифмический вычет

Логарифмическим вычетом функции f в изолированной особой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ называется вычет ее логарифмической производной f'/f в этой точке.

[Перейти к основному тексту]

Непрерывная в области функция

Функция, непрерывная в каждой точке области G, называется *непрерывной в этой области*.

[Перейти к основному тексту]

Непрерывная в точке функция

Если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0),$$

то функция $f(z)$ называется *непрерывной в точке z_0*.

[Перейти к основному тексту]

Ориентация жордановой кривой

Задать *ориентацию* жордановой кривой — это значит задать порядок во множестве ее концов. Жорданова кривая с заданной ориентацией называется *ориентированной*.

[Перейти к основному тексту]

Особенность бесконечно удаленной точки

Будем говорить, что бесконечно удаленная точка является правильной, полюсом порядка n или существенно собой точкой для функции f, если 0 является таковой для функции $g : z \mapsto f(1/z)$.

[Перейти к основному тексту]

Первообразная

Функция F называется *первообразной* для функции $f : D \to \mathbb{C}$, если для всех $z \in D$ справедливо равенство

$$F'(x) = f(z).$$

[Перейти к основному тексту]

Полюс

Изолированная особая точка z_0 функции f называется ее *полюсом*, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

[Перейти к основному тексту]

Порядок полюса

Будем говорить, что изолированная особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функции f является ее *полюсом порядка (кратности)* $n \in \mathbb{N}$, если разложение Лорана для f имеет вид (6.7).

Полюс кратности $n = 1$ называется *простым*.

[Перейти к основному тексту]

Предел функции

Комплексное число A называется *пределом функции $w = f(z)$ в точке z_0*, если $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0$ такое, что $\forall\,z$, удовлетворяющих условию $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(z) - A| < \varepsilon.$$

[Перейти к основному тексту]

Производная

Пусть функция f задана в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Если существует предел

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

то он называется *производной* функции f в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$. [Перейти к основному тексту]

Равномерно непрерывная функция

Функция $w = f(z)$ называется *равномерно непрерывной на $\overline{G}$*, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall z_1, z_2 \in \overline{G}$, удовлетворяющих условию $|z_1 - z_2| < \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

[Перейти к основному тексту]

Радиус сходимости

Число $R \in \mathbb{R}$ называется *радиусом сходимости* степенного ряда (5.5), если этот ряд сходится при всех z с $|z - z_0| < R$ и расходится при всех z с $|z - z_0| > R$.

Круг

$$B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < R\}$$

называется *кругом сходимости*.

Если ряд (5.5) сходится только при $z = z_0$, то считаем $R = 0$, а если (5.5) сходится при любом $z \in \mathbb{C}$, то считаем $R = \infty$. [Перейти к основному тексту]

Связное множество

Множество $A \subset \mathbb{C}$ называется *связным*, если не существует таких двух открытых множеств $G_1 \subset \mathbb{C}$ и $G_2 \subset \mathbb{C}$, что

$$G_1 \cap G_2 = \varnothing, \quad A \cap G_1 \neq \varnothing, \quad A \cap G_2 \neq \varnothing, \quad A \subset G_1 \cup G_2.$$

[Перейти к основному тексту]

Симметричные точки

Две точки называются *симметричными относительно прямой*, если они лежат на одном и том же перпендикуляре к этой прямой на равном расстоянии от нее.

Две точки называются *симметричными относительно окружности*, если они лежат на одном луче с началом в центре окружности и произведение расстояний от этих точек до центра окружности равно квадрату ее радиуса.

Центр окружности будем считать симметричным бесконечно удаленной точке ∞.

[Перейти к основному тексту]

Степенная функция

Степенной функцией с показателем $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ называется многозначная функция

$$z^\mu = e^{\mu \operatorname{Ln} z} = |z|^\mu e^{i\mu \arg z} e^{2\pi i k \mu}.$$

[Перейти к основному тексту]

Степенной ряд

Степенным рядом будем называть ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

при этом c_k — *коэффициенты* степенного ряда, а z_0 — его *центр*.

[Перейти к основному тексту]

Существенно особая точка

Изолированная особая точка z_0 функции f называется *существенно особой точкой* для f, если в этой точке она не имеет ни конечного, ни бесконечного предела. [Перейти к основному тексту]

Функции гиперболический синус и гиперболический косинус

Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Эти функции называются соответственно *гиперболическими синусом* и *гиперболическими синусом*

[Перейти к основному тексту]

Функции синус и косинус

Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Эти функции называются *синусом* и *косинусом* соответственно.

[Перейти к основному тексту]

Функции тангенс и котангенс

Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$
$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \neq \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Эти функции называются *тангенсом* и *котангенсом* соответственно. [Перейти к основному тексту]

Функция комплексного переменного

Пусть E есть некоторое множество точек комплексной плоскости. Если каждому $z \in E$ поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел w, то говорят, что на E определена *функция $w = f(z)$ комплексного переменного z*.

[Перейти к основному тексту]

Экспоненциальная функция

Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

где $z = x + iy$.

[Перейти к основному тексту]

Доказательства теорем

Свойства модуля и аргумента

Свойство 1

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).$$

Отсюда

$$|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$$

и

$$\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

Здесь в первой формуле z_1 и z_2 — любые комплексные числа, а во второй формуле следует считать, что $z_1 \cdot z_2 \neq 0$. [Перейти к основному тексту]

Свойство 2

По определению частного имеем

$$z_1 = \frac{z_1}{z_2} \cdot z_2.$$

Тогда в силу свойства (1.7)

$$|z_1| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \cdot |z_2|, \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} + \operatorname{Arg} z_2.$$

Отсюда

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

[Перейти к основному тексту]

Свойство 4

Справедливость свойств 3 и 4 вытекает из следующего рисунка Д.1. [Перейти к основному тексту]

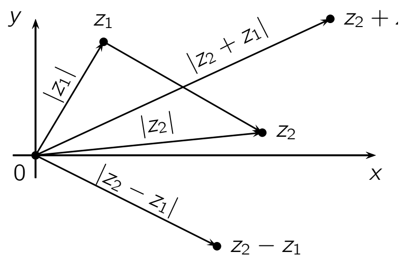

Рисунок Д.1

Часть II

Задачи

Глава 1

Комплексные числа и действия над ними

1.1. Задания для аудиторной работы

1. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2, $z_1^2 + z_2^2$, если

1) $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + i$; [Решение] [Ответ]

2) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$; [Ответ]

3) $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 2 + i$; [Ответ]

4) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = i$; [Ответ]

5) $z_1 = 1 - i$, $z_2 = i$; [Ответ]

6) $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = 1 + 3i$; [Ответ]

2. Найти модуль и главное значение аргумента $(\arg z \in (-\pi, \pi])$ комплексных чисел z, $\overline{z}$, $-\overline{z}$, $-z$, если

1) $z = 1 + i$; [Решение] [Ответ]

2) $z = 1 + i\sqrt{3}$; [Ответ]

3) $z = \sqrt{3} + i$; [Ответ]

4) $z = i$; [Ответ]

5) $z = 1$; [Ответ]

6) $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} i$; [Ответ]

3. Представить комплексное число z в тригонометрической и показательной форме и найти z^6, если

1) $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$; [Решение] [Ответ]

2) $z = 1 - i\sqrt{3}$; [Ответ]

3) $z = \sqrt{3} + i$; [Ответ]

4) $z = -1 + i$; [Ответ]

5) $z = -i$; [Ответ]

6) $z = i$; [Ответ]

4. Найти все значения следующих корней и указать их расположение на комплексной плоскости

1) $\sqrt[4]{1}$; [Решение] [Ответ]

2) $\sqrt[3]{-i}$; [Ответ]

3) $\sqrt[3]{-1}$; [Ответ]

4) $\sqrt[4]{-1}$; [Ответ]

5) $\sqrt[3]{8i}$; [Ответ]

6) $\sqrt{1 + i\sqrt{3}}$; [Ответ]

5. Решить уравнение

1) $z^2 + |z| = 0$; [Решение] [Ответ]

2) $|z| + z = 2\overline{z} + 1 + 9i$; [Ответ]

3) $iz + 2\overline{z} = i$; [Ответ]

4) $z\overline{z} = 3 + i + z$; [Ответ]

5) $|z| - iz = 2 + i$; [Ответ]

6) $z\overline{z} = -|z|^2$; [Ответ]

6. Изобразить на комплексной плоскости множество, если

1) $\{z:\ 0 < \mathrm{Re}(iz) < 1\}$; [Решение] [Ответ]

2) $\{z:\ 0 < \mathrm{Im}(iz) < 1\}$; [Ответ]

3) $\left\{z:\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\}$; [Ответ]

4) $\{z:\ 1 < |z-i| < 2\}$; [Ответ]

5) $\{z:\ |z-1| = |z+i|\}$; [Ответ]

6) $\{z:\ |z+i| = 1\}$; [Ответ]

7. Какие кривые задаются следующими параметрическими уравнениями?

1) $z = i + e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$; [Решение] [Ответ]

2) $z = 1 - it,\ t \in [0, 1$; [Ответ]

3) $z = t + 2ti,\ t \in [0, 4]$; [Ответ]

4) $z = t + \dfrac{1}{t}i,\ t \in (0, +\infty)$; [Ответ]

5) $z = t + it^2,\ t \in \mathbb{R}$; [Ответ]

6) $z = e^{it},\ t \in [0, \pi]$; [Ответ]

1.2. Базовые индивидуальные задания

1. Найти z_1+z_2, $z_1\cdot z_2$, z_1/z_2, $z_1^2+z_2^2$, если

1) $z_1=1+2i$, $z_2=1-i$;

2) $z_1=1-2i$, $z_2=2-i$;

3) $z_1=2-i$, $z_2=i$;

4) $z_1=2+i$, $z_2=1+i$;

5) $z_1=i$, $z_2=2+3i$;

6) $z_1=-2i$, $z_2=1+2i$;

7) $z_1=1-i$, $z_2=3-i$;

8) $z_1=-1-i$, $z_2=1-2i$;

9) $z_1=4+5i$, $z_2=4-5i$;

10) $z_1=2-3i$, $z_2=3+2i$;

11) $z_1=2+i$, $z_2=2-i$;

12) $z_1=-i$, $z_2=-1-i$;

13) $z_1=1$, $z_2=1-i$;

14) $z_1=4-i$, $z_2=1+4i$;

15) $z_1=3+i$, $z_2=3-i$;

16) $z_1=1-7i$, $z_2=7-i$;

17) $z_1=8-i$, $z_2=i$;

18) $z_1 = 1 - 8i$, $z_2 = 2 + 16i$;

19) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + 2i$;

20) $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 + i$;

2. Для комплексного числа $zx + iy$ найти модуль и главное значение аргумента ($\arg z \in (-\pi, \pi]$), если

1) $z = \sqrt{3} + i$;

2) $z = -\sqrt{3} - i$;

3) $z = \sqrt{3} - i$;

4) $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

5) $z = 3 + 4i$;

6) $z = 3 - 4i$;

7) $z = -3 + 4i$;

8) $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$;

9) $z = -1$;

10) $z = -i$;

11) $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

12) $z = 1 + i\sqrt{3}$;

13) $z = 1 - i\sqrt{3}$;

14) $z = i$;

15) $z = 1 - 2i$;

16) $z = 2 + i$;

17) $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

18) $z = 1 + 5i$;

19) $z = -2 + +2i$;

20) $z = -\sqrt{3} + i$;

3. Представить комплексное число $z = x + iy$ в тригонометрической и показательной форме и найти z^n, если

1) $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2},\ n = 8$;

2) $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{1}{2},\ n = 4$;

3) $z = 2 - 2\sqrt{3}i,\ n = 3$;

4) $z = -2\sqrt{3} + 2i,\ n = 6$;

5) $z = -1,\ n = 10$;

6) $z = i,\ n = 4$;

7) $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2},\ n = 6$;

8) $z = \sqrt{3} - 3i,\ n = 3$;

9) $z = 3 - \sqrt{3}i,\ n = 6$;

10) $z = \sqrt{5} - i\sqrt{5},\ n = 4$;

11) $z = \sqrt{3} + 3i,\ n = 6$;

12) $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ n = 9$;

13) $z = 1 - i,\ n = 4;$

14) $z = 3 - 3i,\ n = 8;$

15) $z = 3 + 3i,\ n = 4;$

16) $z = 1 - i\sqrt{3},\ n = 3;$

17) $z = \sqrt{3} + i\sqrt{3},\ n = 4;$

18) $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2},\ n = 10;$

19) $z = -1 - i\sqrt{3},\ n = 6;$

20) $z = 1 + i\sqrt{3},\ n = 9;$

4. Найти все значения $\sqrt[n]{z}$ и указать их расположение на комплексной плоскости, если

1) $z = i,\ n = 5;$

2) $z = -1,\ n = 8;$

3) $z = 1,\ n = 4;$

4) $z = 1 - i,\ n = 6;$

5) $z = 1 + i\sqrt{3},\ n = 4;$

6) $z = 3 + i\sqrt{3},\ n = 8;$

7) $z = 3 - i\sqrt{3},\ n = 2;$

8) $z = -i,\ n = 5;$

9) $z = 1 + i,\ n = 4;$

10) $z = -1 - i,\ n = 6;$

11) $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2},\ n = 3;$

12) $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2},\ n = 5;$

13) $z = \sqrt{3} + 3i,\ n = 6;$

14) $z = -\sqrt{3} + i,\ n = 5;$

15) $z = -1 + i,\ n = 6;$

16) $z = -\sqrt{3} - 3i,\ n = 4;$

17) $z = -8,\ n = 3;$

18) $z = 27i,\ n = 3;$

19) $z = \sqrt{3} - \sqrt{3}i,\ n = 6;$

20) $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i,\ n = 4;$

5. Изобразите на комплексной плоскости следующие множества точек.

1) $\{z:\ 2 < |z - i| < 4\};$

2) $\{z:\ 1 < |z| < 2\};$

3) $\left\{z:\ 0 < \arg(z - i) < \dfrac{\pi}{4}\right\};$

4) $\{z:\ 0 < \mathrm{Re}(i\overline{z}) < 1\};$

5) $\{z:\ |\overline{z} - i| > 1\};$

6) $\{z:\ |z - i| = |z + i|\};$

7) $\left\{z:\ \arg z = \dfrac{\pi}{4}\right\};$

8) $\left\{z:\ \dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{2}\right\};$

9) $\{z:\ z \cdot \overline{z} = 4\};$

10) $\{z:\ (z-i)\overline{(z-i)}=16\}$;

11) $\{z:\ \operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z>1\}$;

12) $\{z:\ 2\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} \overline{z}=1\}$;

13) $\{z:\ |z+1|=|z-1|\}$;

14) $\{z:\ 1<\operatorname{Im} \overline{z}<4\}$;

15) $\{z:\ \operatorname{Im} z+\operatorname{Re}(z+i)<3\}$;

16) $\{z:\ \operatorname{Im}(z+i)+\operatorname{Re}(z+1)=1\}$;

17) $\left\{z:\ 0<\arg(z-i)<\dfrac{\pi}{2}\right\}$;

18) $\{z:\ \operatorname{Re} z<\operatorname{Im} \overline{z}\}$;

19) $\{z:\ \operatorname{Re} z=\operatorname{Im} z\}$;

20) $\{z:\ |z+1|=|z-i|\}$;

6. Какие кривые задаются следующими параметрическими уравнениями? Изобразите их на комплексной плоскости.

1) $z=1+2e^{it},\ t\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$;

2) $z=i+e^{it},\ t\in[0,\pi]$;

3) $z=t+i,\ t\in[0,1]$;

4) $z=(1-t)+ti,\ t\in[-1,1]$;

5) $z=t^2+ti,\ t\in[0,1]$;

6) $z=t+i\sqrt{t},\ t\in[0,4]$;

7) $z=2+(1-t)i,\ t\in[0,1]$;

8) $z = 2 + 2ti,\ t \in [0, 5];$

9) $z = \dfrac{1}{t} + ti,\ t \in (0, +\infty);$

10) $z = 2(e^{it} + e^{-it}),\ t \in [0, \pi];$

11) $z = e^{t}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right),\ t \in \mathbb{R};$

12) $z = t + 4t^2 i,\ t \in [0, 2];$

13) $z = 4(1 + e^{it})^{-2},\ t \in [-\pi, \pi];$

14) $z = 2e^{it} + e^{-it},\ t \in [0, \pi];$

15) $z = e^{it} + 2e^{-it},\ t \in [0, \pi];$

16) $z = -1 + e^{it},\ t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right];$

17) $z = t + it^3,\ t \in [0, 1];$

18) $z = t^3 + it,\ t \in [0, 1];$

19) $z = t + i\ln t,\ t \in [0, e];$

20) $z = t + ie^{t},\ t \in [0, 1];$

1.3. Задания для самостоятельной работы

1. Решите уравнение.

1) $iz^2 + 2z + 4 = 0$;

2) $z^4 + iz^2 + 2 = 0$;

3) $(1+i)z^2 - iz + 2 + 3i = 0$;

4) $z^6 + iz^3 - i = 0$;

5) $|z| \cdot z + \overline{z} + 1 + i = 0$;

6) $\operatorname{Re} \overline{z} + 2 \operatorname{Im} z + 3z + 1 - i = 0$;

7) $|z + 2i| + z = 4$;

8) $|z + i| = |z - i|$;

9) $(1+i)^n = (1-i)^n$, $n \in \mathbb{Z}$;

10) $z^6 - 3z^3 - 4 = 0$;

2. Пользуясь формулой Муавра, выразить $\sin kx$, $\cos kx$ через степени $\sin x$, $\cos x$, если

1) $k = 3$;

2) $k = 4$;

3) $k = 5$;

4) $k = 6$;

5) $k = 7$;

3. Пользуясь формулой Муавра, выразить $\sin^k x$, $\cos^k x$ через тригонометрические функции кратных углов, если

1) $k = 3$;

2) $k = 4$;

3) $k = 5$;

4) $k = 6$;

5) $k = 7$;

4. Найти суммы.

1) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$;

2) $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$;

3) $\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x$;

4) $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x$;

5) $\sin x - \sin 2x + \ldots + (-1)^n \sin nx$;

6) $\sin x + \sin(x+y) + \ldots + \sin(x+ny)$;

7) $\cos x + \cos(x+y) + \ldots + \cos(x+ny)$;

5. Изобразить на комплексной плоскости множества точек.

1) $\{z : |z| = \operatorname{Re} z + 1\}$;

2) $\{z : |2z| > |1+z^2|\}$;

3) $\{z : |z| < \arg z, 0 \leqslant \arg z < 2\pi\}$;

4) $\{z : |z| < \arg z, 0 < \arg z \leqslant 2\pi\}$;

5) $\{z:\ |z|^2 - \operatorname{Im} z \leqslant 0\}$;

6) $\{z:\ |z|^2 + \operatorname{Im} z = 4\}$;

7) $\left\{z:\ \operatorname{Im}\dfrac{z-1}{z-2} = 0, \operatorname{Re}\dfrac{z-1}{z-2} = 0\right\}$;

6. С помощью геометрических построений доказать следующие соотношения.

1) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 - z_2|$;

2) $\left|\dfrac{z}{|z|} - 1\right| \leqslant |\arg z|$;

3) $|z-1| \leqslant \big||z| - 1\big| + |z|\cdot|\arg z|$;

4) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$;

5) $|1 - \overline{z_1} z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$;

6) $\dfrac{1}{2}(|z_1| + |z_2|)\left|\dfrac{z_1}{|z_1|} + \dfrac{z_2}{|z_2|}\right| \leqslant |z_1 + z_2|$;

1.4. Задания творческого характера

1. Вычислить сумму
$$1 + C_n^1 \cos x + C_n^2 \cos 2x + \ldots + C_n^n \cos nx.$$

2. Доказать, что число
$$p = (n^2+1)(m^2+1)(l^2+1), \quad n, m, l \in \mathbb{Z},$$
можно представить в виде суммы двух точных квадратов.

3. Доказать, что
$$\arg z = 2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a + |z|},$$
если $z = a + ib \notin (-\infty, 0]$.

4. Существуют ли два неравных комплексных числа, каждое из которых равно кубу другого? Сколько таких пар чисел имеется?

5. Студент Петров рассуждает. «Очевидно, что
$$i^{21} = (i^4)^{\frac{21}{4}} = 1^{\frac{21}{4}} = 1.$$
С другой стороны
$$i^{21} = (i^4)^5 \cdot i = 1^5 \cdot i = i.$$
Следовательно $i = 1$». В чем его ошибка?

6. Доказать, что для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$
$$\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| \leqslant |b-c|.$$

7. Задача Эйлера. Известно, что в каждом параллелограмме сумма квадратов его диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон. Насколько отличаются те же суммы в случае произвольного четырехугольника. Доказать, что справедливо следующее утверждение (теорема Эйлера о четырехугольнике). Сумма квадратов сторон любого четырехугольника больше суммы квадратов его диагоналей на учетверенный квадрат отрезка, соединяющего середины диагоналей.

8. Пусть $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Каков геометрический смысл равенства

$$\operatorname{Im} \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = 0?$$

9. Доказать теорему Птолемея. В каждом вписанном в окружность выпуклом четырехугольнике сумма произведений противоположных сторон равна произведению его диагоналей.

Глава 2

Элементарные трансцендентные функции

2.1. Задания для аудиторной работы

10. Вычислить

1) $\operatorname{Ln}(-1)$, i^i; [Решение] [Ответ]

2) $\operatorname{Ln} i$, $(1-i)^i$; [Ответ]

3) $\operatorname{Ln}(1+i)$, $(-1)^i$; [Ответ]

4) $\operatorname{Ln}(1-i)$, 1^{-i}; [Ответ]

5) $\operatorname{Ln}(1+i\sqrt{3})$, $(1+i)^i$; [Ответ]

6) $\operatorname{Ln}(-i)$, $(i)^{1+i}$; [Ответ]

11. Найти $\operatorname{Re} f(z)$ и $\operatorname{Im} f(z)$ функции $w = f(z)$ (в случае, если $f(z)$ многозначна, считать, что $f(z)$ — ее главная ветвь), если

1) а) $w = iz^2$, б) $w = \operatorname{ch} iz$, в) $w = z^i$; [Решение] [Ответ]

2) а) $w = \dfrac{z+i}{z-i}$, б) $w = \operatorname{sh} z$, в) $w = i^z$; [Ответ]

3) а) $w = (iz)^2 - 2\overline{z}$, б) $w = \cos iz$, в) $w = (-1)^z$; [Ответ]

4) а) $w = \dfrac{1}{z} + z$, б) $w = \sin iz$, в) $w = (1+i)^z$; [Ответ]

5) а) $w = z \cdot \overline{z} + iz$, б) $w = \operatorname{sh} iz$, в) $w = (1-i)^z$; [Ответ]

6) а) $w = \dfrac{z}{z+1}$, б) $w = \cos z$, в) $w = z^(1+i)$; [Ответ]

12. Доказать следующие равенства

1) $\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$; [Решение]

2) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$; [Решение]

3) $\operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z$; [Решение]

4) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$;

5) $\operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i+z}{i-z}$;

6) $\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}$;

13. Найти все значения функций.

1) $\operatorname{Arcsin} i$; [Решение] [Ответ]

2) $\operatorname{Arccos} i$; [Ответ]

3) $\operatorname{Arccos} 2$; [Ответ]

4) $\operatorname{Arth} i$; [Ответ]

5) $\operatorname{Arch} 2i$; [Ответ]

6) $\operatorname{Arcsin} \frac{1}{2}$; [Ответ]

14. Решить уравнение.

1) $\cos z = 2$; [Решение] [Ответ]

2) $\sin z + \cos z = 2$; [Ответ]

3) $\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = 1$; [Ответ]

4) $\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i$; [Ответ]

5) $\operatorname{th} z = i$; [Ответ]

6) $\sin z - \cos z = 3$; [Ответ]

7) $\sin z - \cos z = i$; [Ответ]

8) $\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z = i$; [Ответ]

2.2. Базовые индивидуальные задания

1. Найти все значения функций.

1) $\operatorname{Ln}(-4)$, $(1-i\sqrt{3})^{i}$;

2) $\operatorname{Ln}(1-i\sqrt{3})$, i^{1-i};

3) $\operatorname{Ln}(2-3i)$, $(-1)^{1-i}$;

4) $\operatorname{Ln}2$, $(1+i\sqrt{3})^{i}$;

5) $\operatorname{Ln}(\sqrt{3}+i)$, $(-i)^{-i}$;

6) $\operatorname{Ln}(ie)$, $(-i)^{i}$;

7) $\operatorname{Ln}(-1-i)$, $(1+i)^{1+i}$;

8) $\operatorname{Ln}\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, $(1+i\sqrt{3})^{-i}$;

9) $\operatorname{Ln}(-e)$, $(1-i)^{1+i}$;

10) $\operatorname{Ln}(\sqrt{3}-i)$, $(1+i)^{1-i}$;

11) $\operatorname{Ln}(-2i)$, i^{3i};

12) $\operatorname{Ln}(-1-i\sqrt{3})$, $(-i)^{1+i}$;

13) $\operatorname{Ln}(-2+3i)$, $(2i)^{1-i}$;

14) $\operatorname{Ln}(-1-i)$, $(1-i)^{1-i}$;

15) $\operatorname{Ln}(3+4i)$, $(-1)^{1+i}$;

16) $\operatorname{Ln}(-ie)$, $(1-i\sqrt{3})^{i}$;

17) $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

18) $\operatorname{Ln}\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$, $(-1)^{1+i}$;

19) $\operatorname{Ln} 4$, 1^{1+i};

20) $\operatorname{Ln}(-\sqrt{3}+i)$, $(-i)^{2+i}$;

2. Найти $\operatorname{Re} f(z)$ и $\operatorname{Im} f(z)$ функции $w = f(z)$ (в случае, если $f(z)$ многозначна, считать, что $f(z)$ — ее главная ветвь), если

1) а) $w = z^2 + 2z$, б) $w = \sin z$, в) $w = z^{-i}$;

2) а) $w = \dfrac{z-i}{z+i}$, б) $w = \cos(-iz)$, в) $w = (-i)^z$;

3) а) $w = z^3 + iz$, б) $w = \operatorname{ch} z$, в) $w = (-1)^{-z}$;

4) а) $w = \dfrac{2z+i}{\overline{z}-2i}$, б) $w = \operatorname{ch}(iz)$, в) $w = (1+i)^{-iz}$;

5) а) $w = z\operatorname{Im} z - z^2$, б) $w = \operatorname{th} z$, в) $w = (1-i)^{-z}$;

6) а) $w = z^2 + 2z + 1$, б) $w = \operatorname{Ln}(iz)$, в) $w = (1+i)^z$;

7) а) $w = \dfrac{1-z}{i+z}$, б) $w = \sin(-iz)$, в) $w = (-z)^{1+i}$;

8) а) $w = \overline{z}^2 - z\operatorname{Re} z$, б) $w = \operatorname{ch}(-z)$, в) $w = (-z)^i$;

9) а) $w = z\operatorname{Re} z^2 - \overline{z}^2$, б) $w = \sin(-z)$, в) $w = z^{1+i}$;

10) а) $w = (z+i)^2 \cdot \operatorname{Im} z$, б) $w = \operatorname{ch}(-iz)$, в) $w = z^{1-i}$;

11) а) $w = \dfrac{1-z}{1+iz}$, б) $w = \operatorname{sh}(-iz)$, в) $w = z^{-1-i}$;

12) а) $w = \dfrac{z-i}{1-iz} + z\,\mathrm{Im}\,\overline{z}$, б) $w = \cos(-z)$, в) $w = \mathrm{Ln}(iz)$;

13) а) $w = z + \dfrac{1}{\overline{z}} + \overline{z}^2$, б) $w = \mathrm{Ln}(-z)$, в) $w = z^{2+3i}$;

14) а) $w = (z+i)^2$, б) $w = \mathrm{Ln}(-iz)$, в) $w = 2^z$;

15) а) $w = (z-i)^3$, б) $w = \mathrm{Ln}\left((1+i)z\right)$, в) $w = e^{-z}$;

16) а) $w = \dfrac{z-i}{i+\overline{z}}$, б) $w = \mathrm{Ln}(-z)$, в) $w = e^z$;

17) а) $w = \overline{z}^2 + \mathrm{Im}\,z$, б) $w = i\sin z + \cos z$, в) $w = \arg z$;

18) а) $w = \overline{2z + z^2}$, б) $w = \mathrm{ch}\,z + \mathrm{sh}\,z$, в) $w = (-1-i)^z$;

19) а) $w = z\cdot\overline{z} + \overline{z}^2$, б) $w = \mathrm{ch}\,z - \mathrm{sh}\,z$, в) $w = (-1+i)^z$;

20) а) $w = \dfrac{2z-i}{iz-2}$, б) $w = \cos z - i\sin z$, в) $w = \arg iz$;

3. Доказать равенства.

1) $\mathrm{Arsh}\,z = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$;

2) $\mathrm{Arcsin}\,z = -i\,\mathrm{Ln}\,i\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$;

3) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$;

4) $\sin iz = i\,\mathrm{sh}\,z$;

5) $\cos iz = \mathrm{ch}\,z$;

6) $\mathrm{Arcctg}\,z = \dfrac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\,\dfrac{z-i}{z+i}$;

7) $\mathrm{Arch}\,z = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$;

8) $\operatorname{sh}(z_1+z_2)=\operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2+\operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$;

9) $\sin z=\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$;

10) $\operatorname{Arcth} z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}$;

11) а) $w=\frac{1-z}{1+iz}$, б) $w=\operatorname{sh}(-iz)$, в) $w=z^{-1-i}$;

12) а) $w=\frac{z-i}{1-iz}+z\operatorname{Im}\overline{z}$, б) $w=\cos(-z)$, в) $w=\operatorname{Ln}(iz)$;

13) а) $w=z+\frac{1}{\overline{z}}+\overline{z}^2$, б) $w=\operatorname{Ln}(-z)$, в) $w=z^{2+3i}$;

14) а) $w=(z+i)^2$, б) $w=\operatorname{Ln}(-iz)$, в) $w=2^z$;

15) а) $w=(z-i)^3$, б) $w=\operatorname{Ln}\big((1+i)z\big)$, в) $w=e^{-z}$;

16) а) $w=\frac{z-i}{i+\overline{z}}$, б) $w=\operatorname{Ln}(-z)$, в) $w=e^{z}$;

17) а) $w=\overline{z}^2+\operatorname{Im} z$, б) $w=i\sin z+\cos z$, в) $w=\arg z$;

18) а) $w=\overline{2z+z^2}$, б) $w=\operatorname{ch} z+\operatorname{sh} z$, в) $w=(-1-i)^z$;

19) а) $w=z\cdot\overline{z}+\overline{z}^2$, б) $w=\operatorname{ch} z-\operatorname{sh} z$, в) $w=(-1+i)^z$;

20) а) $w=\frac{2z-i}{iz-2}$, б) $w=\cos z-i\sin z$, в) $w=\arg iz$;

4. Найти все значения функций.

1) $\operatorname{Arcsin} i$;

2) $\operatorname{Arcsin} 2$;

3) $\operatorname{Arsh}(-i)$;

4) $\operatorname{Arch}(-2)$;

5) $\operatorname{Arctg} 1$;

6) $\operatorname{Arcctg}(1+i)$;

7) $\operatorname{Arth}(1+i)$;

8) $\operatorname{Arcth}(1-i)$;

9) $\operatorname{Arcsin} 2$;

10) $\operatorname{Arsh}(-2)$;

11) $\operatorname{Arcsin}(-i)$;

12) $\operatorname{Arccos} 2i$;

13) $\operatorname{Arsh} i$;

14) $\operatorname{Arch}(-i)$;

15) $\operatorname{Arctg}(-1)$;

16) $\operatorname{Arcctg}(1-i)$;

17) $\operatorname{Arth}(-1-i)$;

18) $\operatorname{Arcth}(1+i)$;

19) $\operatorname{Arccos}(1-i)$;

20) $\operatorname{Arch}(2i)$;

5. Решить уравнение.

1) $\sin z + \cos z = -2$;

2) $\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = -1$;

3) $\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z = i$;

4) $\sin z + \cos z = 2i$;

5) $\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2$;

6) $\operatorname{sh} z + 4 \operatorname{ch} z = i$;

7) $\cos z = \operatorname{ch} z$;

8) $\sin z - \cos z = -i$;

9) $\sin z + \cos z = i$;

10) $2 \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = -i$;

11) $\sin z - 2 \cos z = 4$;

12) $\operatorname{sh} z + 2 \operatorname{ch} z = i$;

13) $\sin z = i \operatorname{sh} z$;

14) $\cos z = i \operatorname{sh} 2z$;

15) $\operatorname{Arctg}(-1)$;

16) $\operatorname{Arcctg}(1 - i)$;

17) $\operatorname{Arth}(-1 - i)$;

18) $\operatorname{Arcth}(1 + i)$;

19) $\operatorname{Arccos}(1 - i)$;

20) $\operatorname{Arch}(2i)$;

2.3. Задания для самостоятельной работы

1. Найти $\operatorname{Re} f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$ и $|f(z)|$ функции $w = f(z)$, если:

1) $w = \operatorname{tg} z$;

2) $w = \operatorname{th} z$;

3) $w = \operatorname{cth} z$;

4) $w = 2^z$;

5) $w = i^z$;

6) $w = \operatorname{tg} iz$;

7) $w = \operatorname{th} iz$;

8) $w = \operatorname{cth}(-iz)$;

9) $w = e^z$;

10) $w = z^i$;

2. Для функции $w = f(z)$ найти множество точек z, где она принимает: 1) действительные значения, 2) чисто мнимые значения, если:

1) $w = e^z$;

2) $w = \cos z$;

3) $w = \operatorname{sh} z$;

4) $w = \operatorname{ctg} z$;

5) $w = \operatorname{cth} z$;

6) $w = \sin z$;

7) $w = \operatorname{ch} z$;

8) $w = \operatorname{tg} z$;

9) $w = \operatorname{th} z$;

10) $w = 2^z$;

3. Решить уравнение.

1) $\cos z = -\operatorname{ch} z$;

2) $\cos z = -i \operatorname{sh} 2z$;

3) $\sin z = i \operatorname{sh} z$;

4) $\sin z = -i \operatorname{sh} z$;

5) $\sin iz = \operatorname{ch} z$;

6) $i \sin z = \operatorname{sh} z$;

7) $i \operatorname{sh} z = \sin z$;

8) $\cos z = \operatorname{ch} z$;

9) $i \cos z = \operatorname{ch} z$;

10) $\cos iz = i \operatorname{sh} z$;

4. Начертить график функции.

1) $y = |\sin ix|$;

2) $y = |\cos ix|$;

3) $y = |e^{ix}|$;

4) $y = |\operatorname{th} ix|$;

5) $y = \operatorname{Re}(\operatorname{Ln} ix)$;

6) $y = |\operatorname{sh} ix|$;

2.4. Задания творческого характера

1. Доказать, что для любого значения $\operatorname{Arccos} z$ можно подобрать такое значение $\operatorname{Arcsin} z$, чтобы сумма этих значений была равна $\pi/2$. Именно в таком смысле понимается равенство

$$\operatorname{Arccos} z + \operatorname{Arcsin} z = \frac{\pi}{2}.$$

2. Доказать, что (см. замечание к задаче 1)

$$\operatorname{Arctg} z + \operatorname{Arcctg} z = \frac{\pi}{2}.$$

3. При каких z все значения функции $w = f(z)$ действительны, если

1) $w = \operatorname{Arccos} z$;

2) $w = \operatorname{Arcsin} z$;

3) $w = \operatorname{Arctg} z$;

4) $w = i \operatorname{Arsh} z$;

4. Доказать, что

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

где под суммой и разностью двух логарифмов понимается сумма двух множеств. Например,

$$\operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 = \{w = w_1 + w_2 : \ w_1 \in \operatorname{Ln} z_1, w_2 \in \operatorname{Ln} z_2\}.$$

5. Найти ошибку в рассуждениях, приводящих к парадоксу И. Бернулли.

$$1)\ (-z)^2 = z^2 \ \Rightarrow \ 2)\ 2\operatorname{Ln}(-z) = 2\operatorname{Ln} z \ \Rightarrow \ 3)\ \operatorname{Ln}(-z) = \operatorname{Ln} z.$$

6. Около 400 лет назад голландский ученый Меркатор предложил следующий способ построения географических карт. Земную сферу отображают на плоскость с помощью стереографической проекции, а затем плоскость подвергают отображению $w = i \ln z$. Такие карты нашли широкое распространение в навигации благодаря тому, что они получены конформными отображениями и локсодромии (пути на поверхности Земли, вдоль которых стрелка компаса сохраняет неизменное направление на них изображаются прямыми линиями).

Какие линии на карте Меркатора параллели и меридианы, в частности экватор и нулевой меридиан? Какая область будет изображена частью земной поверхности, находящаяся между 30° и 60° восточной долготы и между 40° и 60° северной широты?

7. Вычислить:

1) $\mathrm{Log}_{-2}(-8)$;

2) $\mathrm{Log}_{-10} 10$;

3) $\mathrm{Log}_{-3} 9$;

4) $\mathrm{Log}_i\, i$;

8. Пусть z_1, z_2, z_3 — произвольные комплексные числа. Справедливы ли следующие равенства

$$1)\ z_1^{z_2} \cdot z_1^{z_3} = z_1^{z_2+z_3};$$
$$2)\ \left(z_1^{z_2}\right)^{z_3} = z_1^{z_2 \cdot z_3};$$
$$3)\ \left(z_1^{z_2}\right)^{z_3} = \left(z_1^{z_3}\right)^{z_2}?$$

В частности, верны ли равенства

$$1)\ z_1^{2z_2} = \left(z_1^{z_2}\right)^2;$$
$$2)\ z_1^{2z_2} = \left(z_1^{2}\right)^{z_2};$$
$$3)\ \left(z_1^{z_2}\right)^2 = \left(z_1^{2}\right)^{z_2}?$$

Глава 3

Функции комплексного переменного. Предел, непрерывность, дифференцируемость

3.1. Задания для аудиторной работы

9. Имеет ли функция $w = f(z)$ предел в точке z_0? Если этот предел существует, найти его.

1) $w = \dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$, $z_0 = 0$; [Решение] [Ответ]

2) $w = \dfrac{\operatorname{Im} z}{z}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

3) $w = \dfrac{|z|}{z}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

4) $w = \dfrac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

5) $w = \dfrac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

6) $w = \dfrac{z \operatorname{Im} z}{|z|}$, $z_0 = 0$; [Решение] [Ответ]

10. Доказать непрерывность функции $w = f(z)$ в каждой точке z комплексной плоскости.

1) $w = \overline{z}^2 \cdot z$; [Решение]

2) $w = \sin z$; [Решение]

3) $w = |z|\overline{z}$;

4) $w = e^z$;

5) $w = \dfrac{|z|^2}{\overline{z}}$;

6) $w = \operatorname{ch} z$;

11. Для функции $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, найти:
а) точки дифференцируемости;
б) точки аналитичности;
в) производную в точках дифференцируемости.

1) $w = xy + i(x^2 - y^2)$; [Решение] [Ответ]

2) $w = x^2 + iy^2$; [Ответ]

3) $w = x^3 + xy^2 + i(y^3 + x^2y)$; [Ответ]

4) $w = x^3 - 3xy^2 - i(y^3 - 2x^2y)$; [Ответ]

5) $w = x^2 - y^2 + i(x + y)^2$; [Ответ]

6) $w = y^2 - x^2 + x + i(xy + y)$; [Ответ]

12. При каких действительных значениях a, b, c функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, будет аналитической в $\mathbb{C}$?

1) $w = x + ay + i(bx + cy)$; [Решение] [Ответ]

2) $w = ax^2 + by^2 + icxy$; [Ответ]

3) $w = axy + i(cx^2 - by^2)$; [Ответ]

4) $w = x^2 + ax + by^2 + i(2xy + cy)$; [Ответ]

5) $w = cxy + i(ax^2 + by^2)$; [Ответ]

6) $w = ax + by - i(x + cy)$; [Ответ]

13. Для функции $w = f(z)$ проверить выполнение условий Коши – Римана для любых $z = x + iy \in \mathbb{C}$ и доказать справедливость в $\mathbb{C}$ соответствующего равенства.

1) $w = e^z$, $(e^z)' = e^z$; [Решение]

2) $w = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$;

3) $w = \sin z$, $(\sin z)' = \cos z$;

4) $w = \operatorname{ch} z$, $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$;

5) $w = \operatorname{sh} z$, $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$;

6) $w = z^3$, $(z^3)' = 3z^2$;

14. Проверить, является ли функция $u(x, y)$ гармонической в области определения.

1) $u(x, y) = x^2 + y^2 + xy$; [Решение] [Ответ]

2) $u(x, y) = \operatorname{sh} x \cos y$; [Ответ]

3) $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$; [Ответ]

4) $u(x, y) = xy + x - y$; [Ответ]

5) $u(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y$; [Ответ]

6) $u(x, y) = xy + x^2 - y^2$; [Ответ]

15. Пусть $\varphi(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на всей действительной прямой $\mathbb{R}$, отличная от постоянной. Выяснить, существуют ли гармонические функции указанного вида (в случае существования найти их).

1) $u = \varphi(xy)$; [Решение] [Ответ]

2) $u = \varphi(ax + by)$, $a, b \in \mathbb{R}$; [Ответ]

3) $u = \varphi(x^2 + y)$; [Ответ]

4) $u = \varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$; [Ответ]

5) $u = \varphi(x^2 + y^2)$; [Ответ]

6) $u = \varphi\left(\dfrac{x^2 + y^2}{x}\right)$; [Ответ]

16. Восстановить аналитическую функцию $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, по известной действительной $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ части и значению $f(z_0)$.

1) $u(x, y) = e^{-y}\cos x,\ f(-i) = e;$ [Решение] [Ответ]

2) $u(x, y) = -e^{-y}\sin x,\ f(0) = i;$ [Ответ]

3) $v(x, y) = x^2 - y^2 - x,\ f(1) = 0;$ [Ответ]

4) $u(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2},\ f(1) = i;$ [Ответ]

5) $v(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y,\ f(0) = 0;$ [Ответ]

6) $u(x, y) = \operatorname{ch} x \cos y,\ f(0) = 1;$ [Ответ]

3.2. Базовые индивидуальные задания

17. Имеет ли функция $w = f(z)$ предел в точке z_0? Если этот предел существует, найти его.

1) $w = \dfrac{(\operatorname{Im} z)^2}{\operatorname{Re} z}$, $z_0 = 0$;

2) $w = \dfrac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z^2|}$, $z_0 = 0$;

3) $w = \dfrac{\overline{z}}{z}$, $z_0 = 0$;

4) $w = \dfrac{\operatorname{Im}(z^2)}{|z^2|}$, $z_0 = 0$;

5) $w = \dfrac{\operatorname{Im} z}{z}$, $z_0 = 0$;

6) $w = \dfrac{\operatorname{Re}(z^2)}{z}$, $z_0 = 0$;

7) $w = \dfrac{\overline{z}^2}{z}$, $z_0 = 0$;

8) $w = \dfrac{|z|}{z}$, $z_0 = 0$;

9) $w = \dfrac{\overline{z}}{\operatorname{Re} z}$, $z_0 = 0$;

10) $w = \dfrac{\overline{z} + i}{|z - i|}$, $z_0 = i$;

11) $w = \dfrac{z}{z - i}$, $z_0 = \infty$;

12) $w = \dfrac{(z+i)^2}{|z+i|^2}$, $z_0 = -i$;

13) $w = \dfrac{\sin z}{z}$, $z_0 = 0$;

14) $w = \dfrac{\operatorname{Im}(z^2)}{\operatorname{Re} z}$, $z_0 = 0$;

15) $w = \dfrac{z+i}{z-i}$, $z_0 = \infty$;

16) $w = \dfrac{\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z}{z}$, $z_0 = 0$;

17) $w = \dfrac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z}{z}$, $z_0 = 0$;

18) $w = \dfrac{\sin z}{z}$, $z_0 = \infty$;

19) $w = \dfrac{\operatorname{Re} \overline{z} + \operatorname{Im} \overline{z}}{\overline{z}}$, $z_0 = 0$;

20) $w = \dfrac{\operatorname{Re} \overline{z}}{\operatorname{Im} \overline{z}}$, $z_0 = 0$;

18. Доказать непрерывность функции $w = f(z)$ в каждой точке области определения.

1) $w = \operatorname{sh} z$;

2) $w = \cos z$;

3) $w = |\overline{z}|^2 + z$;

4) $w = ze^z$;

5) $w = \overline{z}^2$;

6) $w = \operatorname{th} z$;

7) $w = \operatorname{ch} z$;

8) $w = \operatorname{th} \overline{z}$;

9) $w = \dfrac{|z|+1}{\overline{z}+1}$;

10) $w = \operatorname{cth} z$;

11) $w = z^2 + \overline{z}^2$;

12) $w = z \cdot \overline{z} + z + \overline{z}$;

13) $w = \overline{z} \operatorname{sh} z$;

14) $w = \overline{z} e^z$;

15) $w = \overline{z} \cdot z^2$;

16) $w = \dfrac{\overline{z}^2}{z^2}$;

17) $w = \dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}$;

18) $w = e^{\overline{z}}$;

19) $w = \sin \overline{z}$;

20) $w = \operatorname{ch} \overline{z}$;

19. Для функции $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, найти:
а) точки дифференцируемости;
б) точки аналитичности;
в) производную в точках дифференцируемости.

1) $w = x^2 - iy^2$;

2) $w = xy + i\dfrac{x}{y}$;

3) $w = x^2 - y^2 - i2xy$;

4) $w = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$;

5) $w = e^x \cos y + ie^x \sin y$;

6) $w = z \cdot \overline{z}^2$;

7) $w = z^2 \cdot \overline{z}$;

8) $w = x^2 + y^2 + i2xy$;

9) $w = x^2 + ixy$;

10) $w = xy - iy^2$;

11) $w = x + 2y + i(x - y)$;

12) $w = \overline{z}^2 + z$;

13) $w = z^2 + \overline{z}$;

14) $w = e^{x-iy}$;

15) $w = \operatorname{sh}(x - iy)$;

16) $w = \cos \overline{z}$;

17) $w = z + 2\overline{z}$;

18) $w = e^{-y+ix}$;

19) $w = z \operatorname{Re} z + iz \operatorname{Im} z$;

20) $w = \overline{z} + \operatorname{Im} z^2$;

20. При каких действительных значениях a, b, c функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, будет дифференцируемой в области определения?

1) $w = ax + y + i(cx + by)$;

2) $w = ax^2 + cy^2 + ibxy$;

3) $w = ax + x^2 - y^2 + i(by + cxy)$;

4) $w = x^3 + axy^2 + i(bx^2y + cx - y^3)$;

5) $w = a(x^2 - y^2) + x + i(by + cxy)$;

6) $w = ax + \dfrac{cx}{x^2 + y^2} + i\left(y + \dfrac{by}{x^2 + y^2}\right)$;

7) $w = ax^2 + bx + y^2 + i(2y + cxy)$;

8) $w = ae^x \cos y + i(be^x \sin y + y) + cx$;

9) $w = a \cos x \operatorname{ch} y + ib \sin x \operatorname{sh} y$;

10) $w = c \sin x \operatorname{ch} y + bx + i(a \cos x \operatorname{sh} y + y)$;

11) $w = az + b\overline{z}$;

12) $w = a \ln(x^2 + y^2) + ib \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$;

13) $w = a \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + cx + i(b \ln(x^2 + y^2) + y)$;

14) $w = a\overline{z}^2 + cx + ay + iy$;

15) $w = axy + cx + by + i(x^2 - y^2 + y)$;

16) $w = az^2 + c\overline{z} + b\overline{z}^2$;

17) $w = x^3 + bxy^2 + 2y + i(ax^2y - y^3 + x)$;

18) $w = axy + i(cx^2 + by^2)$;

19) $w = ax + cx^2 - y^2 + i(bxy + 2y)$;

20) $w = e^{az+b\overline{z}}$;

21. Для функции $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, в области ее определения проверить выполнение условий Коши – Римана и доказать справедливость соответствующего равенства.

1) $w = z^2$, $(z^2)' = 2z$;

2) $w = e^{iz}$, $(e^{iz})' = ie^{iz}$;

3) $w = \operatorname{sh} iz$, $(\operatorname{sh} iz)' = i \operatorname{ch} iz$;

4) $w = \ln z$, $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$ ($\ln z$ — главная ветвь логарифма);

5) $w = \cos az$, $(\cos az)' = -a \sin az$;

6) $w = \ln iz$, $(\ln iz)' = \dfrac{1}{z}$;

7) $w = \operatorname{ch} iz$, $(\operatorname{ch} iz)' = i \operatorname{sh} iz$;

8) $w = z^4$, $(z^4)' = 4z^3$;

9) $w = \sin az$, $(\sin az)' = a \cos az$;

10) $w = \dfrac{1}{z}$, $\left(\dfrac{1}{z}\right)' = -\dfrac{1}{z^2}$;

11) $w = \dfrac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, $w' = \dfrac{1}{z}$;

12) $w = \ln az$, $(\ln az)' = \dfrac{1}{z}$;

13) $w = -\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + i \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $w' = \dfrac{i}{z}$;

14) $w = \cos az$, $(\cos az)' = -a \sin az$;

15) $w = e^{az}$, $(e^{az})' = ae^{az}$;

16) $w = z^4 + z$, $(z^4 + z)' = 4z^3 + 1$;

17) $w = (az)^2$, $((az)^2)' = 2az$;

18) $w = az^3$, $(az^3)' = 3az^2$;

19) $w = \dfrac{1}{z^2}$, $\left(\dfrac{1}{z^2}\right)' = -\dfrac{2}{z^3}$;

20) $w = \dfrac{z+1}{z}$, $\left(\dfrac{z+1}{z}\right)' = -\dfrac{1}{z^2}$;

22. Проверить, является ли функция $u(x, y)$ гармонической в области определения.

1) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

2) $u = x^3 + 3x^2y$;

3) $u = e^{-y}\sin x$;

4) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$;

5) $u = \sin x \operatorname{ch} y$;

6) $u = y^3 - 3xy^2$;

7) $u = \cos x \operatorname{sh} y$;

8) $u = \operatorname{sh} x \cos y$;

9) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$;

10) $u = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$;

11) $u = x^3 - y^3$;

12) $u = \operatorname{ch} x \cos y$;

13) $u = x + 2y + \ln(x^2 + y^2)$;

14) $u = e^{-y} \sin x + x$;

15) $u = \sin x \operatorname{sh} y$;

16) $u = \sin x \cos y$;

17) $u = x^3 - 3xy$;

18) $u = \operatorname{ch} x - \sin y - xy$;

19) $u = \operatorname{ch} x \sin y$;

20) $u = \operatorname{sh} x \sin y$;

23. Восстановить аналитическую функцию $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, по известной действительной $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ части и значению $f(z_0)$.

1) $v(x, y) = y + \ln(x^2 + y^2)$, $f(1) = 1$;

2) $u(x, y) = x + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, $f(1) = 1$;

3) $u(x, y) = 2xy + y$, $f(0) = 0$;

4) $u(x, y) = x^2 - y^2 + x^3 - 3xy^2$, $f(0) = 0$;

5) $u(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y$, $f(0) = 0$;

6) $v(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y$, $f(0) = -1$;

7) $u(x, y) = 4x - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $f(1) = 4 - i$;

8) $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $f(1) = 2i$;

9) $u(x, y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y$, $f(0) = 0$;

10) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2x,\ f(0) = 0;$

11) $v(x, y) = e^{-x} \sin y,\ f(0) = 1;$

12) $v(x, y) = \operatorname{sh} x \sin y,\ f(0) = 1;$

13) $v(x, y) = 3x^2 y - y^3 + 3y,\ f(0) = 0;$

14) $v(x, y) = \operatorname{ch} x \sin y,\ f(0) = 0;$

15) $v(x, y) = 2y - \dfrac{y}{x^2 + y^2},\ f(1) = 3;$

16) $v(x, y) = 2x + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y,\ f(0) = 0;$

17) $v(x, y) = 2x + e^{-x} \sin y,\ f(0) = 1;$

18) $v(x, y) = xy + \operatorname{ch} x \sin y,\ f(0) = 0;$

19) $v(x, y) = x^2 - y^2 - \dfrac{y}{x^2 + y^2},\ f(1) = 1 + i;$

20) $u(x, y) = 2xy + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x},\ f(1) = i;$

3.3. Задания для самостоятельной работы

24. Установить, будет ли функция $w = f(z)$ в области D:
а) непрерывной,
б) равномерно непрерывной?

1) $w = \dfrac{1}{1-z}$, $D = \{z:\ |z| < 1\}$;

2) $w = e^{\frac{1}{z}}$, $D = \{z:\ 0 < |z| < 1\}$;

3) $w = \dfrac{1}{1+z^2}$, $D = \{z:\ |z| < 1\}$;

4) $w = e^{-\frac{1}{z^2}}$, $D = \left\{z:\ 0 < |z| \leqslant 1, |\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{6}\right\}$;

5) $w = e^{-\frac{1}{z}}$, $D = \left\{z:\ 0 < |z| < 1, |\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right\}$;

25. Доказать следующие утверждения.

1) Если $f'(z) = 0$ в области G, то $f(z) \equiv \mathrm{const}$ в G.

2) Если $w = f(z)$ дифференцируема в области G и в этой области $\operatorname{Im} f(z) = \big(\operatorname{Re} f(z)\big)^2$, то $f(z) \equiv \mathrm{const}$ в G.

3) Пусть $w = f(z) = u(x) + iv(x)$. Если $f(z)$ дифференцируема в области G, то $f(z) = az + b$, причем $a \in \mathbb{R}$.

4) Если функции $f(z)$ и $\overline{f(z)}$ одновременно аналитичны в области G, то $f(z) \equiv \mathrm{const}$ в G.

5) Если $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Im} f(z)$ в области G и функция $w = f(z)$ является дифференцируемой в этой области, то $f'(z) \equiv 0$ в G.

6) Пусть функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = |f(z)|e^{i \arg f(z)}$ аналитична в области G. Если одна из функций $u(x,y)$, $v(x,y)$, $|f(z)|$, $\arg f(z)$ тождественно равна постоянной в G, то $f(z) \equiv \mathrm{const}$ в G.

26. Доказать следующие утверждения.

1) Если функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ является аналитической в области G, то $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются сопряженными гармоническими функциями в G.

2) Частные производные гармонической функции в области G являются гармоническими в этой области.

3) Если функция $u(x, y) \not\equiv \text{const}$ является гармонической в области G, то функция $u^2(x, y)$ не является гармонической в этой области.

4) Если функции $u(x, y)$ и $f\big(u(x, y)\big)$ являются гармоническими в области G, то $f(u) = au + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

5) Пусть функция $w = f(z) \not\equiv \text{const}$ является аналитической в области G. Тогда
1) функция $|f(z)|$ не является гармонической в G;
2) функция $\arg f(z)$ является гармонической в G;
3) функция $\ln|f(z)|$ является гармонической в G, если $f(z) \neq 0$ в G.

27. Пусть $\varphi(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на всей действительной прямой $\mathbb{R}$, отличная от постоянной. Выяснить, существуют ли гармонические функции указанного вида (в случае существования найти их).

1) $u = \varphi(x + y^2)$;

2) $u = \varphi\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$;

3) $u = \varphi\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$;

4) $u = \varphi\left(\dfrac{x^2 + y^2}{y}\right)$;

5) $u = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

6) $u = \varphi(y)$;

7) $u = \varphi(x) + \varphi(y)$.

3.4. Задания творческого характера

28. Функция $w = f(z)$ определена в окрестности точки z_0 и дифференцируема в точке z_0, причем $f'(z_0) \neq 0$. Доказать, что значения $f(z)$ в окрестности z_0 не могут лежать по одну сторону от прямой, проходящей через точку $f(z_0)$.

29. Доказать существование и найти аналитическую функцию $w = f(z)$, если

1) $|f(z)| = (x^2 + y^2)e^x$;

2) $\arg f(z) = xy$;

3) $\left|f(re^{i\varphi})\right| = e^{r^2 \cos 2\varphi}$;

4) $\arg\left(f(re^{i\varphi})\right) = \varphi + r\sin\varphi$.

30. Показать, что уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в полярных координатах

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

31. Пусть $z = re^{i\varphi}$ и

$$w = f(z) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + iv(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \\ = u_1(r,\varphi) + iv_1(r,\varphi).$$

Показать, что условия Коши – Римана в полярных координатах имеют вид

$$\begin{cases} r\dfrac{\partial u_1}{\partial r} = \dfrac{\partial v_1}{\partial \varphi}, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial \varphi} = -r\dfrac{\partial v_1}{\partial r}. \end{cases}$$

32. Пусть $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Определим формальные производные по z и $\overline{z}$ равенствами

$$f_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad f_{\overline{z}} = \frac{\partial w}{\partial \overline{z}},$$

где

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

1) Доказать, что уравнения Коши – Римана эквивалентны уравнению

$$f_{\overline{z}} = 0.$$

2) Доказать, что уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} = 0.$$

33. Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ и $f(z_0) = c_0$. Доказать, что

1) $f(z) = 2u\left(\dfrac{z + \overline{z_0}}{2}, \dfrac{z - \overline{z_0}}{2i}\right) - \overline{c_0}$;

2) $f(z) = 2iv\left(\dfrac{z + \overline{z_0}}{2}, \dfrac{z - \overline{z_0}}{2i}\right) + \overline{c_0}$.

Глава 4

Геометрический смысл модуля и аргумента производной

4.1. Задания для аудиторной работы

34. Отображение производится с помощью функции $w = z^3$. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке z_0.

1) $z_0 = 1$; [Решение] [Ответ]
2) $z_0 = i$;
3) $z_0 = 1 + i$; [Решение] [Ответ]
4) $z_0 = 1 - i$;
5) $z_0 = -1 + i$;
6) $z_0 = -1 - i$;

35. Отображение производится с помощью функции $w = f(z)$. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке z_0.

1) $w = z^2 + 1$, $z_0 = 1 - i$;
2) $w = e^{2z}$, $z_0 = 0$;
3) $w = \ln z$, $z_0 = 1 + i$;
4) $w = \dfrac{1 - iz}{1 + iz}$, $z_0 = 1$;
5) $w = \sin z$, $z_0 = i$;
6) $w =???$, $z_0 =???$;

36. Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается, если отображение осуществляется функцией $w = f(z)$?

1) $w = z^4$; [Решение] [Ответ]

2) $w = z^2 - z$; [Решение] [Ответ]

3) $w = \dfrac{1}{z}$; [Ответ]

4) $w = e^z$; [Ответ]

5) $w = \ln z$; [Ответ]

6) $w =$??????????; [Ответ]

37. Найти множество всех точек, в которых коэффициент растяжения равен 1, если отображение задано следующими функциями.

1) $w = iz^2$; [Ответ]

2) $w = z^2 + 2z$; [Ответ]

3) $w = \dfrac{1}{z}$; [Ответ]

4) $w = \dfrac{z+i}{z-i}$; [Ответ]

5) $w = e^z$; [Ответ]

6) $w =$?????; [Ответ]

38. Найти множество всех точек, в которых угол поворота равен нулю, если отображение задано следующими функциями.

1) $w = -z^2$; [Ответ]

2) $w = iz^3$; [Ответ]

3) $w = z^2 + iz$; [Ответ]

4) $w = \dfrac{1 - iz}{1 + iz}$; [Ответ]

5) $w = e^z$; [Ответ]

6) $w =$?????????; [Ответ]

4.2. Базовые индивидуальные задания

39. Отображение производится с помощью функции $w = f(z)$. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке z_0.

1) $w = z^2$, $z_0 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{1}{2}$; [Ответ]

2) $w = z^3$, $z_0 = 1$; [Ответ]

3) $w = z^4$, $z_0 = 1$; [Ответ]

4) $w = z^2$, $z_0 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{1}{2}$; [Ответ]

5) $w = z^3$, $z_0 = i$; [Ответ]

6) $w = z^4$, $z_0 = i$; [Ответ]

7) $w = z^2$, $z_0 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{1}{2}$; [Ответ]

8) $w = z^3$, $z_0 = 1 + i$; [Ответ]

9) $w = z^4$, $z_0 = 1 + i$; [Ответ]

10) $w = z^2$, $z_0 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{1}{2}$; [Ответ]

11) $w = z^3$, $z_0 = 1 - i$; [Ответ]

12) $w = z^4$, $z_0 = 1 - i$; [Ответ]

13) $w = z^2$, $z_0 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; [Ответ]

14) $w = z^3$, $z_0 = -1 + i$; [Ответ]

15) $w = z^4$, $z_0 = -1 + i$; [Ответ]

16) $w = z^2$, $z_0 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; [Ответ]

17) $w = z^3$, $z_0 = -1 - i$; [Ответ]

18) $w = z^4$, $z_0 = -1 - i$; [Ответ]

19) $w = z^2$, $z_0 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; [Ответ]

20) $w = z^3$, $z_0 = 2 + 2i$; [Ответ]

21) $w = z^4$, $z_0 = 2 + 2i$; [Ответ]

22) $w = z^2$, $z_0 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; [Ответ]

23) $w = z^3$, $z_0 = 2 - 2i$; [Ответ]

24) $w = z^4$, $z_0 = 2 - 2i$; [Ответ]

25) $w = z^2$, $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$; [Ответ]

26) $w = z^3$, $z_0 = -2 + 2i$; [Ответ]

27) $w = z^4$, $z_0 = -2 + 2i$; [Ответ]

28) $w = z^2$, $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}$; [Ответ]

29) $w = z^3$, $z_0 = -2 - 2i$; [Ответ]

30) $w = z^4$, $z_0 = -2 - 2i$; [Ответ]

40. Отображение производится с помощью функции $w = f(z)$. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке z_0.

1) $w = e^z$, $z_0 = \ln 2 + i\dfrac{\pi}{4}$; [Ответ]

2) $w = e^z$, $z_0 = -2 + i\dfrac{\pi}{4}$; [Ответ]

3) $w = z^3$, $z_0 = \dfrac{4}{\sqrt{3}} + \dfrac{i}{\sqrt{3}}$; [Ответ]

4) $w = \ln z$, $z_0 = 1 + i$; [Ответ]

5) $w = \ln z$, $z_0 = 1 - i$; [Ответ]

6) $w = \ln z$, $z_0 = -1 + i$; [Ответ]

7) $w = \ln z$, $z_0 = -1 - i$; [Ответ]

8) $w = \dfrac{1 - iz}{1 + iz}$, $z_0 = 1$; [Ответ]

9) $w = e^z$, $z_0 = \ln 3 - i\dfrac{\pi}{2}$; [Ответ]

10) $w = e^z$, $z_0 = -3 - i\dfrac{\pi}{2}$; [Ответ]

11) $w = z^3$, $z_0 = \dfrac{5}{\sqrt{3}} + i\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; [Ответ]

12) $w = \ln z$, $z_0 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{1}{2}$; [Ответ]

13) $w = \ln z$, $z_0 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{1}{2}$; [Ответ]

14) $w = \ln z$, $z_0 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{1}{2}$; [Ответ]

15) $w = \ln z,\ z_0 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{1}{2}$; [Ответ]

16) $w = \dfrac{2 - iz}{2 + iz},\ z_0 = 2$; [Ответ]

17) $w = e^z,\ z_0 = \ln 4 + i\dfrac{\pi}{3}$; [Ответ]

18) $w = e^z,\ z_0 = -4 + i\dfrac{\pi}{3}$; [Ответ]

19) $w = z^3,\ z_0 = \dfrac{4}{\sqrt{3}} + i\sqrt{3}$; [Ответ]

20) $w = \ln z,\ z_0 = 3 + 3i$; [Ответ]

21) $w = \ln z,\ z_0 = 3 - 3i$; [Ответ]

22) $w = \ln z,\ z_0 = -3 + 3i$; [Ответ]

23) $w = \ln z,\ z_0 = -3 - 3i$; [Ответ]

24) $w = \dfrac{4 - iz}{4 + iz},\ z_0 = 4$; [Ответ]

25) $w = e^z,\ z_0 = \ln 5 - i\dfrac{\pi}{6}$; [Ответ]

26) $w = e^z,\ z_0 = -6 + i\dfrac{\pi}{3}$; [Ответ]

27) $w = z^3,\ z_0 = \dfrac{5}{\sqrt{3}} + \dfrac{i}{\sqrt{3}}$; [Ответ]

28) $w = \ln z,\ z_0 = \dfrac{1}{3} - i\dfrac{1}{2}$; [Ответ]

29) $w = \ln z,\ z_0 = -\dfrac{1}{4} + i\dfrac{1}{4}$; [Ответ]

30) $w = \dfrac{7 - iz}{7 + iz},\ z_0 = 7$; [Ответ]

41. Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается, если отображение осуществляется функцией $w = f(z)$?

1) $w = 2e^{\frac{z}{2}}$; [Ответ]

2) $w = 3iz^4$; [Ответ]

3) $w = 2iz^3$; [Ответ]

4) $w = 4iz^2$; [Ответ]

5) $w = \ln(z+2)$; [Ответ]

6) $w = \dfrac{1}{z+1}$; [Ответ]

7) $w = z^2 + 4z + 8$; [Ответ]

8) $w = 3e^{\frac{z}{3}}$; [Ответ]

9) $w = 2iz^4$; [Ответ]

10) $w = 4iz^3$; [Ответ]

11) $w = 2iz^2$; [Ответ]

12) $w = \ln(z+5)$; [Ответ]

13) $w = \dfrac{1}{z+3}$; [Ответ]

14) $w = z^2 + 2z + 4$; [Ответ]

15) $w = 5e^{\frac{z}{5}}$; [Ответ]

16) $w = 4iz^4$; [Ответ]

17) $w = 3iz^3$; [Ответ]

18) $w = 5iz^2$; [Ответ]

19) $w = \ln(z+3)$; [Ответ]

20) $w = \dfrac{1}{z+2}$; [Ответ]

21) $w = z^2 + 6z + 12$; [Ответ]

22) $w = 4e^{\frac{z}{4}}$; [Ответ]

23) $w = 5iz^4$; [Ответ]

24) $w = 7iz^3$; [Ответ]

25) $w = 3iz^2$; [Ответ]

26) $w = \ln(z+8)$; [Ответ]

27) $w = \dfrac{1}{z+7}$; [Ответ]

28) $w = z^2 + 8z + 16$; [Ответ]

29) $w = 8e^{\frac{z}{8}}$; [Ответ]

30) $w = 7iz^4$; [Ответ]

42. Найти множество всех точек, в которых коэффициент растяжения равен 1, если отображение задано следующими функциями.

1) $w = 5iz^2$; [Ответ]

2) $w = z^2 - 6z$; [Ответ]

3) $w = \dfrac{1}{z+4}$; [Ответ]

4) $w = \dfrac{z+3i}{z-3i}$; [Ответ]

5) $w = 4e^{\frac{z}{4}}$; [Ответ]

6) $w = 3iz^2$; [Ответ]

7) $w = z^2 - 10z$; [Ответ]

8) $w = \dfrac{1}{z+2}$; [Ответ]

9) $w = \dfrac{z+7i}{z-7i}$; [Ответ]

10) $w = 3e^{\frac{z}{3}}$; [Ответ]

11) $w = 4iz^2$; [Ответ]

12) $w = z^2 - 14z$; [Ответ]

13) $w = \dfrac{1}{z+8}$; [Ответ]

14) $w = \dfrac{z+9i}{z-9i}$; [Ответ]

15) $w = 8e^{\frac{z}{8}}$; [Ответ]

16) $w = 9iz^2$; [Ответ]

17) $w = z^2 - 8z$; [Ответ]

18) $w = \dfrac{1}{z+7}$; [Ответ]

19) $w = \dfrac{z+7i}{z-7i}$; [Ответ]

20) $w = 5e^{\frac{z}{5}}$; [Ответ]

21) $w = 6iz^2$; [Ответ]

22) $w = z^2 - 16z$; [Ответ]

23) $w = \dfrac{1}{z+6}$; [Ответ]

24) $w = \dfrac{z+5i}{z-5i}$; [Ответ]

25) $w = 6e^{\frac{z}{6}}$; [Ответ]

26) $w = 7iz^2$; [Ответ]

27) $w = z^2 - 12z$; [Ответ]

28) $w = \dfrac{1}{z+9}$; [Ответ]

29) $w = \dfrac{z+4i}{z-4i}$; [Ответ]

30) $w = 7e^{\frac{z}{7}}$. [Ответ]

43. Найти множество всех точек, в которых угол поворота равен нулю, если отображение задано следующими функциями.

1) $w = 6iz^4$; [Ответ]

2) $w = 5z^4$; [Ответ]

3) $w = z^2 - 6z$; [Ответ]

4) $w = 4iz^3$; [Ответ]

5) $w = -5z^3$; [Ответ]

6) $w = 2iz^2$; [Ответ]

7) $w = -6z^2$; [Ответ]

8) $w = 5iz^4$; [Ответ]

9) $w = 3z^4$; [Ответ]

10) $w = z^2 - 14z$; [Ответ]

11) $w = 2iz^3$; [Ответ]

12) $w = -4z^3$; [Ответ]

13) $w = 8iz^2$; [Ответ]

14) $w = -3z^2$; [Ответ]

15) $w = 8iz^4$; [Ответ]

16) $w = 7z^4$; [Ответ]

17) $w = z^2 - 10z$; [Ответ]

18) $w = 9iz^3$; [Ответ]

19) $w = -6z^3$; [Ответ]

20) $w = 7iz^2$; [Ответ]

21) $w = -5z^2$; [Ответ]

22) $w = 7iz^4$; [Ответ]

23) $w = 8z^4$; [Ответ]

24) $w = z^2 - 12z$; [Ответ]

25) $w = 5iz^3$; [Ответ]

26) $w = -7z^3$; [Ответ]

27) $w = 6iz^2$; [Ответ]

28) $w = -8z^2$; [Ответ]

29) $w = 3iz^4$; [Ответ]

30) $w = z^2 - 8z$. [Ответ]

4.3. Задания для самостоятельной работы

4.4. Задания творческого характера

Глава 5

Линейная функция

5.1. Задания для аудиторной работы

5.2. Базовые индивидуальные задания

44. Указать геометрический смысл (сдвиг, растяжение поворот) следующих преобразований. (Вопрос: может уточнить задание и в ответах писать конкретный вектор?)

1) $w = z + 5i$; [Ответ]

2) $w = z + 7$; [Ответ]

3) $w = -z + 3i$; [Ответ]

4) $w = iz + 4$; [Ответ]

5) $w = e^{i\frac{\pi}{3}}z$; [Ответ]

6) $w = 6z$; [Ответ]

7) $w = (-1)^4\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}z$; [Ответ]

8) $w = z + 3i$; [Ответ]

9) $w = z + 5$; [Ответ]

10) $w = -z + 6i$; [Ответ]

11) $w = iz + 5$; [Ответ]

12) $w = e^{i\frac{\pi}{4}}z$; [Ответ]

13) $w = 8z$; [Ответ]

14) $w = (-1)^3\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}z$; [Ответ]

15) $w = z + 8i$; [Ответ]

16) $w = z + 9$; [Ответ]

17) $w = -z + 7i$; [Ответ]

18) $w = iz + 6$; [Ответ]

19) $w = e^{i\frac{\pi}{6}}z$; [Ответ]

20) $w = 4z$; [Ответ]

21) $w = (-1)^2\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}z$; [Ответ]

22) $w = z + 7i$; [Ответ]

23) $w = z + 6$; [Ответ]

24) $w = -z + 8i$; [Ответ]

25) $w = iz + 9$; [Ответ]

26) $w = e^{i\frac{\pi}{2}}z$; [Ответ]

27) $w = 5z$; [Ответ]

28) $w = (-1)^5\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}z$; [Ответ]

29) $w = -iz + 7$; [Ответ]

30) $w = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}z$. [Ответ]

45. Найти общую форму целого линейного преобразования, переводящего

1) полосу $-8 < y < 4$ на себя; [Ответ]

2) полосу $0 < x < 3$ на себя; [Ответ]

3) правую полуплоскость на себя; [Ответ]

4) верхнюю полуплоскость на правую; [Ответ]

5) левую полуплоскость на себя; [Ответ]

6) верхнюю полуплоскость на левую; [Ответ]

7) верхнюю полуплоскость на нижнюю; [Ответ]

8) верхнюю полуплоскость на себя; [Ответ]

46. Найти следующие линейные преобразования.

1) Преобразование с неподвижной точкой $1+2i$, переводящее точку $-i$ в точку i; [Ответ]

2) Преобразование с неподвижной точкой $2+i$, переводящее точку i в точку $-i$; [Ответ]

3) Преобразование с неподвижной точкой $3+i$, переводящее точку $2i$ в точку $-2i$; [Ответ]

4) Преобразование с неподвижной точкой $2+4i$, переводящее точку $-i$ в точку i; [Ответ]

5) Преобразование с неподвижной точкой $1+3i$, переводящее точку i в точку $-i$; [Ответ]

6) Преобразование с неподвижной точкой $2+3i$, переводящее точку $-2i$ в точку $2i$; [Ответ]

7) Преобразование с неподвижной точкой $1+4i$, переводящее точку $2i$ в точку $-2i$; [Ответ]

8) Преобразование с неподвижной точкой $2+2i$, переводящее точку $-i$ в точку i; [Ответ]

9) Преобразование с неподвижной точкой $2+i$, переводящее точку $-2i$ в точку $2i$; [Ответ]

10) Преобразование с неподвижной точкой $2+4i$, переводящее точку $2i$ в точку $-2i$; [Ответ]

11) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A=0$, $B=5$, $C=5i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1=5+5i$, $B_1=0$, $C_1=10$ плоскости w; [Ответ]

12) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A=3+2i$, $B=7+2i$, $C=5+4i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1=0$, $B_1=-2i$, $C_1=1-i$ плоскости w; [Ответ]

13) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 0$, $B = 6$, $C = 6i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 6 + 6i$, $B_1 = 0$, $C_1 = 12$ плоскости w; [Ответ]

14) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 8+2i$, $B = 12+2i$, $C = 10+4i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 0$, $B_1 = -2i$, $C_1 = 1 - i$ плоскости w; [Ответ]

15) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 0$, $B = 4$, $C = 4i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 4 + 4i$, $B_1 = 0$, $C_1 = 8$ плоскости w; [Ответ]

16) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 7+2i$, $B = 11+2i$, $C = 9+4i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 0$, $B_1 = -2i$, $C_1 = 1 - i$ плоскости w; [Ответ]

17) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 0$, $B = 3$, $C = 3i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 3 + 3i$, $B_1 = 0$, $C_1 = 6$ плоскости w; [Ответ]

18) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 1 + 2i$, $B = 5 + 2i$, $C = 3 + 4i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 0$, $B_1 = -2i$, $C_1 = 1 - i$ плоскости w; [Ответ]

19) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 0$, $B = 8$, $C = 8i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 8 + 8i$, $B_1 = 0$, $C_1 = 16$ плоскости w; [Ответ]

20) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 2 + 2i$, $B = 6 + 2i$, $C = 4 + 4i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 0$, $B_1 = -2i$, $C_1 = 1 - i$ плоскости w; [Ответ]

21) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 0$, $B = 2$, $C = 2i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 2 + 2i$, $B_1 = 0$, $C_1 = 4$ плоскости w; [Ответ]

22) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 4 + 2i$, $B = 8 + 2i$, $C = 6 + 4i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 0$, $B_1 = -2i$, $C_1 = 1 - i$ плоскости w; [Ответ]

23) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 0$, $B = 7$, $C = 7i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 7 + 7i$, $B_1 = 0$, $C_1 = 14$ плоскости w; [Ответ]

24) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 10+2i$, $B = 14+2i$, $C = 12+4i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 0$, $B_1 = -2i$, $C_1 = 1 - i$ плоскости w; [Ответ]

25) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 0$, $B = 1$, $C = i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 1 + i$, $B_1 = 0$, $C_1 = 2$ плоскости w; [Ответ]

26) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 6+2i$, $B = 10+2i$, $C = 8+4i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 0$, $B_1 = -2i$, $C_1 = 1 - i$ плоскости w; [Ответ]

27) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 0$, $B = 9$, $C = 9i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 9 + 9i$, $B_1 = 0$, $C_1 = 18$ плоскости w; [Ответ]

28) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 9+2i$, $B = 13+2i$, $C = 11+4i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 0$, $B_1 = -2i$, $C_1 = 1 - i$ плоскости w; [Ответ]

29) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 0$, $B = 10$, $C = 10i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 10 + 10i$, $B_1 = 0$, $C_1 = 20$ плоскости w; [Ответ]

30) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 5 + 2i$, $B = 9 + 2i$, $C = 7 + 4i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 0$, $B_1 = -2i$, $C_1 = 1 - i$ плоскости w. [Ответ]

47. Для указанных преобразований найти конечную неподвижную точку z_0 (если она существует), угол поворота φ вокруг нее и коэффициент растяжения k.

1) $w = -3z + 2 + i$; [Ответ]

2) $w = z + 2 + i$; [Ответ]

3) $w = -2iz + 3$; [Ответ]

4) $w = 2z + 3i$; [Ответ]

5) $w = 2z + 3 + i$; [Ответ]

6) $w = z + 3 + 4i$; [Ответ]

7) $w = 2iz + 4$; [Ответ]

8) $w = -3z + 2i$; [Ответ]

9) $w = -2z - 3 + 2i$; [Ответ]

10) $w = z - 2 + 3i$; [Ответ]

11) $w = -3iz + 1$; [Ответ]

12) $w = -2z + i$; [Ответ]

13) $w = 3z + 2 + 2i$; [Ответ]

14) $w = z - 3 + i$; [Ответ]

15) $w = 3iz + 2$; [Ответ]

16) $w = 3z + 4i$; [Ответ]

17) $w = 2z + 2 + 3i$; [Ответ]

18) $w = z + 2 + 4i$; [Ответ]

19) $w = -3iz + 1$; [Ответ]

20) $w = 2z + i$; [Ответ]

21) $w = -2z + 3 + i$; [Ответ]

22) $w = z - 2 + i$; [Ответ]

23) $w = -2iz + 2$; [Ответ]

24) $w = 3z + i$; [Ответ]

25) $w = 3z - 3 + i$; [Ответ]

26) $w = z - 2 + i$; [Ответ]

27) $w = 3iz + 1$; [Ответ]

28) $w = 3z + 3i$; [Ответ]

29) $w = -3z + 3 + 2i$; [Ответ]

30) $w = z + 3 + 3i$. [Ответ]

48. Найти линейную функцию, обладающую следующими свойствами.

1) Отображает круг $|z - 3i| < 6$ на круг $|w - 6| < 12$, так чтобы горизонтальный диаметр переходил бы в горизонтальный. [Ответ]

2) Отображает круг $|z - 2i| < 4$ на круг $|w - 4| < 8$, так чтобы горизонтальный диаметр переходил бы в горизонтальный. [Ответ]

3) Отображает круг $|z - 4i| < 8$ на круг $|w - 8| < 16$, так чтобы горизонтальный диаметр переходил бы в горизонтальный. [Ответ]

4) Отображает круг $|z - 5i| < 10$ на круг $|w - 10| < 20$, так чтобы горизонтальный диаметр переходил бы в горизонтальный. [Ответ]

5) Отображает круг $|z - i| < 2$ на круг $|w - 2| < 4$, так чтобы горизонтальный диаметр переходил бы в горизонтальный. [Ответ]

6) Отображает круг $|z - 6i| < 12$ на круг $|w - 12| < 24$, так чтобы горизонтальный диаметр переходил бы в горизонтальный. [Ответ]

7) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 2 - i| < 1$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\dfrac{\pi}{2}$. [Ответ]

8) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w-2-i| < 1$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\dfrac{\pi}{2}$. [Ответ]

9) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w-2-i| < 1$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\dfrac{\pi}{4}$. [Ответ]

10) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w-2-i| < 1$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\dfrac{\pi}{4}$. [Ответ]

11) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w-2-i| < 1$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\dfrac{\pi}{3}$. [Ответ]

12) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w-2-i| < 1$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\dfrac{\pi}{3}$. [Ответ]

13) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w-2-i| < 1$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\dfrac{\pi}{6}$. [Ответ]

14) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w-2-i| < 1$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\dfrac{\pi}{6}$. [Ответ]

15) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w-4-2i| < 2$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\dfrac{\pi}{2}$. [Ответ]

16) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 4 - 2i| < 2$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\frac{\pi}{2}$. [Ответ]

17) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 4 - 2i| < 2$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\frac{\pi}{4}$. [Ответ]

18) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 4 - 2i| < 2$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\frac{\pi}{4}$. [Ответ]

19) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 4 - 2i| < 2$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\frac{\pi}{3}$. [Ответ]

20) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 4 - 2i| < 2$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\frac{\pi}{3}$. [Ответ]

21) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 4 - 2i| < 2$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\frac{\pi}{6}$. [Ответ]

22) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 4 - 2i| < 2$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\frac{\pi}{6}$. [Ответ]

23) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 6 - 3i| < 3$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\frac{\pi}{2}$. [Ответ]

24) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 6 - 3i| < 3$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\frac{\pi}{2}$. [Ответ]

25) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 6 - 3i| < 3$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\frac{\pi}{4}$. [Ответ]

26) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 6 - 3i| < 3$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\frac{\pi}{4}$. [Ответ]

27) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 6 - 3i| < 3$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\frac{\pi}{3}$. [Ответ]

28) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 6 - 3i| < 3$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\frac{\pi}{3}$. [Ответ]

29) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 6 - 3i| < 3$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\frac{\pi}{6}$. [Ответ]

30) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 6 - 3i| < 3$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\frac{\pi}{6}$. [Ответ]

49. Найти линейную функцию, обладающую следующими свойствами.

1) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 1$, $x = 3$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(1) = 0$. [Ответ]

2) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 1$, $x = 5$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(1) = 0$. [Ответ]

3) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 1$, $x = 7$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(1) = 0$. [Ответ]

4) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 2$, $x = 4$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(2) = 0$. [Ответ]

5) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 2$, $x = 6$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(2) = 0$. [Ответ]

6) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 2$, $x = 8$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(2) = 0$. [Ответ]

7) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 3$, $x = 5$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(3) = 0$. [Ответ]

8) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 3$, $x = 7$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(3) = 0$. [Ответ]

9) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 3$, $x = 9$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(3) = 0$. [Ответ]

10) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 4$, $x = 6$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(4) = 0$. [Ответ]

11) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 4$, $x = 8$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(4) = 0$. [Ответ]

12) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 4$, $x = 10$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(4) = 0$. [Ответ]

13) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 5$, $x = 7$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(5) = 0$. [Ответ]

14) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 5$, $x = 9$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(5) = 0$. [Ответ]

15) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 5$, $x = 11$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(5) = 0$. [Ответ]

16) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 1$, $x = 3$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(2) = 1/2i$, $\operatorname{Im}(2 + i) < 1$. [Ответ]

17) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 1$, $x = 5$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(3) = 1/2i$, $\operatorname{Im}(3 + i) < 1$. [Ответ]

18) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 1$, $x = 7$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(4) = 1/2i$, $\operatorname{Im}(4 + i) < 1$. [Ответ]

19) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 2$, $x = 4$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(3) = 1/2i$, $\operatorname{Im}(3 + i) < 1$. [Ответ]

20) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 2$, $x = 6$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(4) = 1/2i$, $\operatorname{Im}(4 + i) < 1$. [Ответ]

21) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 2$, $x = 8$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(5) = 1/2i$, $\operatorname{Im}(5 + i) < 1$. [Ответ]

22) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 3$, $x = 5$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(4) = 1/2i$, $\operatorname{Im}(4 + i) < 1$. [Ответ]

23) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 3$, $x = 7$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(5) = 1/2i$, $\operatorname{Im}(5 + i) < 1$. [Ответ]

24) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 3$, $x = 9$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(6) = 1/2i$, $\operatorname{Im}(6 + i) < 1$. [Ответ]

25) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 4$, $x = 6$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(5) = 1/2i$, $\operatorname{Im}(5 + i) < 1$. [Ответ]

26) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 4$, $x = 8$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(6) = 1/2i$, $\operatorname{Im}(6+i) < 1$. [Ответ]

27) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 4$, $x = 10$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(7) = 1/2i$, $\operatorname{Im}(7+i) < 1$. [Ответ]

28) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 5$, $x = 7$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(6) = 1/2i$, $\operatorname{Im}(6+i) < 1$. [Ответ]

29) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 5$, $x = 9$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(7) = 1/2i$, $\operatorname{Im}(7+i) < 1$. [Ответ]

30) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 5$, $x = 11$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(8) = 1/2i$, $\operatorname{Im}(8+i) < 1$. [Ответ]

5.3. Задания для самостоятельной работы

5.4. Задания творческого характера

Глава 6

Дробно-линейная функция

6.1. Задания для аудиторной работы

6.2. Базовые индивидуальные задания

6.3. Задания для самостоятельной работы

6.4. Задания творческого характера

Глава 7

Функция Жуковского

7.1. Задания для аудиторной работы

7.2. Базовые индивидуальные задания

7.3. Задания для самостоятельной работы

7.4. Задания творческого характера

Глава 8

Отображение с помощью элементарных функций. Интеграл Кристоффеля – Шварца. Отображение полуплоскости на треугольник.

8.1. Задания для аудиторной работы

50. Найти образы $w_1(D_1)$, $w_2(D_1)$, $w_3(D_3)$, если $w_1 = z^2$, $w_2 = z^3$, $w_3 = z^4$, а области D_i, $i = 1, 2, 3$, определены следующими равенствами.

1) $D_1 = \{z : 1 < |z| < 2, \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \left[\frac{3}{2}i, 2i\right]$, $D_2 = \left\{z : -\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3}, |z| < 4\right\}$, $D_3 = \left\{z : -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}, |z| < 2\right\}$; [Решение] [Ответ]

2) $D_1 = \{z : \operatorname{Re} z < 0\} \setminus [-6, -3]$, $D_2 = \left\{z : 0 < \arg z < \frac{\pi}{15}, 5 < |z| < 10\right\}$, $D_3 = \left\{z : 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\}$; [Ответ]

51. Найти образы $w_1(D_1)$, $w_2(D_1)$, если $w_1 = e^z$, $w_2 = \ln z$ (главная ветвь логарифма, т.е. $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, $\arg z \in (-\pi, \pi]$), а области D_i, $i = 1, 2$, определены следующими равенствами.

1) $D_1 = \left\{z : 2 < \operatorname{Re} z < 4, \frac{\pi}{6} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{3}\right\}$, $D_2 = \{z : 1 < |z| < e, 0 < \arg z < \pi\}$; [Решение] [Ответ]

2) $D_1 = \left\{z : \ln 4 < \operatorname{Re} z < \ln 8, \frac{\pi}{12} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{3}\right\}$, $D_2 = \left\{z : e < |z| < 6, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\}$; [Ответ]

3) $D_1 = \left\{z : 0 < \operatorname{Re} z < \ln 2, \frac{\pi}{6} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{3}\right\}$, $D_2 = \left\{z : 1 \leqslant |z| \leqslant e, 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$; [Ответ]

52. Найти образы $w(D_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, где $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ — функция Жуковского, а области D_i, $i = 1, 2, 3, 4$, заданы следующими равенствами.

1) $D_1 = \{z : |z| < 2\}$, $D_2 = \left\{z : |z| < \frac{1}{2}\right\}$, $D_3 = \{z : |z| < 1\}$, $D_4 = \{z : |z| > 1\}$; [Ответ]

2) $D_1 = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $D_2 = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$, $D_3 = \{z : |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $D_4 = \{z : |z| > 1, \operatorname{Im} z < 0\}$; [Ответ]

3) $D_1 = \{z : 1 < |z| < 2, \operatorname{Im} z > 0\}$, $D_2 = \left\{z : \frac{1}{2} < |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\right\}$, $D_3 = \left\{z : \frac{1}{2} < |z| < 2, \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\right\}$, $D_4 = \left\{z : \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}\right\}$; [Решение] [Ответ]

53. Найти образ области D при отображении $w = f(z)$.

1) $w = \cos z$, $D = \left\{z : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0\right\}$; [Решение] [Ответ]

2) $w = \cos z$, $D = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z < 0\}$; [Ответ]

3) $w = \operatorname{tg} z$, $D = \left\{z : -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}$; [Ответ]

4) $w = \operatorname{ch} z$, $D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0\}$; [Ответ]

5) $w = \operatorname{sh} z$, $D = \left\{z : \operatorname{Re} z > 0, |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}\right\}$; [Ответ]

6) $w = \cos z$, $D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$; [Ответ]

54. Найти конформное и однолистное отображение области G_1 на область G_2.

1) $G_1 = \{z : 6 < \operatorname{Re} z < 12\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$; [Решение] [Ответ]

2) $G_1 = \left\{z : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{6}\right\}$, $G_2 = \left\{w : 0 < \arg w < \frac{\pi}{2}\right\}$; [Ответ]

3) $G_1 = \left\{e^{i\frac{\pi}{4}} z : 0 < \operatorname{Im} z < 2\right\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$; [Ответ]

4) $G_1 = \{z : |z| = 3\}$, $G_2 = \left\{w = u + iv : \frac{u^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = 1\right\}$; [Ответ]

5) $G_1 = \left\{z : 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$; [Ответ]

6) $G_1 = \{z : 1 < |z| < e, 0 < \arg z < e\}$, $G_2 = \{w : 2 < \operatorname{Re} w < 3, 0 < \operatorname{Im} w < e\}$; [Ответ]

55. Отобразить с помощью интеграла Кристоффеля – Шварца верхнюю полуплоскость на треугольник с вершинами в точках A, B и C.

1) $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; [Ответ]

2) $A(2,0)$, $B(3,0)$, $C\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$; [Ответ]

3) $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$; [Ответ]

4) $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$; [Ответ]

5) $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$; [Ответ]

6) $A(1,1)$, $B(3,3)$, $C(-1,3)$; [Решение] [Ответ]

8.2. Базовые индивидуальные задания

56. Найти образ $w(D)$ при отображении $w = f(z)$ области D.

1) $w = z^2$, $D = \{z:\ |z| < 1,\ \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$; [Ответ]

2) $w = z^3$, $D = \left\{z:\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{15},\ 5 < |z| < 10\right\}$; [Ответ]

3) $w = z^2$, $D = \{z:\ \operatorname{Re} z > 0\} \setminus [3, 6]$; [Ответ]

4) $w = z^4$, $D = \left\{z:\ -\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{4},\ |z| < 4\right\}$; [Ответ]

5) $w = z^2$, $D = \{z:\ |z| < 4,\ \operatorname{Re} z > 0\} \setminus [0, 2]$; [Ответ]

6) $w = z^5$, $D = \left\{z:\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{20},\ 4 < |z| < 8\right\}$; [Ответ]

7) $w = z^2$, $D = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [0, 10i]$; [Ответ]

8) $w = z^5$, $D = \left\{z:\ 2 < \arg z < 2 + \dfrac{2\pi}{5}\right\}$; [Ответ]

9) $w = z^2$, $D = \{z:\ |z| < 2,\ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [i, 2i]$; [Ответ]

10) $w = z^2$, $D = \{z:\ |z| < 5,\ \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \left[0, \dfrac{5}{2}\right]$; [Ответ]

11) $w = z^4$, $D = \left\{z:\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{12},\ 3 < |z| < 6\right\}$; [Ответ]

12) $w = z^2$, $D = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [0, 2i]$; [Ответ]

13) $w = z^3$, $D = \left\{z:\ 0 < \arg z < \dfrac{2\pi}{3}\right\}$; [Ответ]

14) $w = z^2$, $D = \{z: \ 4 < |z| < 8, \ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [6i, 8i]$; [Ответ]

15) $w = z^3$, $D = \left\{z: \ \dfrac{\pi}{3} < \arg z < \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3}\right\}$; [Ответ]

16) $w = z^3$, $D = \left\{z: \ \dfrac{\pi}{6} < \arg z < \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3}\right\}$; [Ответ]

17) $w = z^2$, $D = \{z: \ \operatorname{Re} z < 0\} \setminus [-10, -5]$; [Ответ]

18) $w = z^4$, $D = \left\{z: \ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{8}, \ 2 < |z| < 4\right\}$; [Ответ]

19) $w = z^4$, $D = \left\{z: \ -\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{4}, \ |z| < 2\right\}$; [Ответ]

20) $w = z^5$, $D = \left\{z: \ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{30}, \ 1 < |z| < 2\right\}$; [Ответ]

57. Найти образ $w(D)$ при отображении $w = f(z)$ области D ($\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $\arg z \in (-\pi, \pi]$).

1) $w = \ln z$, $D = \{z: \ e^3 < |z| < e^4, \ 0 < \arg z < \pi\}$; [Ответ]

2) $w = \ln z$, $D = \left\{z: \ 1 < |z| < e^2, \ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; [Ответ]

3) $w = e^z$, $D = \{z: \ 1 < \operatorname{Re} z < 3, \ -1 < \operatorname{Im} z < 0\}$; [Ответ]

4) $w = e^z$, $D = \left\{z: \ \dfrac{\pi}{3} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{3} + \pi\right\}$; [Ответ]

5) $w = i \ln z$, $D = \left\{z: \ 1 < |z| < e, \ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\}$; [Ответ]

6) $w = e^z$, $D = \left\{z: \ 0 < \operatorname{Re} z < 1, \ \dfrac{\pi}{3} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; [Ответ]

7) $w = e^z$, $D = \left\{z: \ \ln 2 < |z| < \ln 4, \ \dfrac{\pi}{3} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; [Ответ]

8) $w = \ln z$, $D = \{z: \ 0 < \arg z < \pi\}$; [Ответ]

9) $w = \ln z,\ D = \left\{ z:\ |z| < 1,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2} \right\}$; [Ответ]

10) $w = e^z,\ D = \left\{ z:\ \dfrac{\pi}{3} < \operatorname{Im} z < \pi \right\}$; [Ответ]

11) $w = e^z,\ D = \left\{ e^{i\frac{\pi}{4}} z : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi \right\}$; [Ответ]

12) $w = \ln z,\ D = \left\{ z:\ |z| < 1,\ \dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{2} \right\}$; [Ответ]

13) $w = \ln z,\ D = \{ z:\ 1 < |z| < 2 \} \setminus [1, 2]$; [Ответ]

14) $w = e^z,\ D = \left\{ z:\ \operatorname{Re} z < 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2} \right\}$; [Ответ]

15) $w = e^z,\ D = \{ z:\ \operatorname{Re} z > 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi \}$; [Ответ]

16) $w = \ln z,\ D = \{ z:\ 1 < |z| < e \} \setminus [1, e]$; [Ответ]

17) $w = \ln z,\ D = \left\{ z:\ |z| = e,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4} \right\}$; [Ответ]

18) $w = e^{2z},\ D = \left\{ z:\ \operatorname{Re} z < 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{4} \right\}$; [Ответ]

19) $w = e^z,\ D = \{ z:\ \operatorname{Re} z > 1,\ 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi \}$; [Ответ]

20) $w = i \ln z,\ D = \left\{ z:\ 1 < |z| < e,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3} \right\}$; [Ответ]

58. Для функции Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ найти образ области D.

1) $D = \{ z:\ |z| < 1 \} \setminus \left[\dfrac{1}{2}, 1 \right)$; [Ответ]

2) $D = \left\{ z:\ |z| < \dfrac{1}{6} \right\} \setminus \left[\dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{6} \right)$; [Ответ]

3) $D = \left\{ z:\ \dfrac{1}{3} < |z| < 3,\ \operatorname{Re} z > 0 \right\}$; [Ответ]

4) $D = \left\{z:\ \dfrac{1}{2} < |z| < 2,\ \operatorname{Im} z > 0\right\}$; [Ответ]

5) $D = \left\{z:\ \dfrac{1}{2} < |z| < 2,\ \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\right\}$; [Ответ]

6) $D = \left\{z:\ \dfrac{\pi}{6} < \arg z < \dfrac{5\pi}{6}\right\}$; [Ответ]

7) $D = \left\{z:\ \dfrac{\pi}{3} < \arg z < \dfrac{2\pi}{3}\right\}$; [Ответ]

8) $D = \{z:\ |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$; [Ответ]

9) $D = \{z:\ |z| < 1,\ \operatorname{Im} z < 0\}$; [Ответ]

10) $D = \left\{z:\ \dfrac{1}{2} < |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\right\}$; [Ответ]

11) $D = \left\{z:\ \dfrac{1}{2} < |z| < 1,\ \operatorname{Re} z > 0\right\}$; [Ответ]

12) $D = \{z:\ |z| < 1\} \setminus \left[-\dfrac{1}{3}, 1\right)$; [Ответ]

13) $D = \{z:\ 1 < |z| < 2,\ \operatorname{Im} z > 0\}$; [Ответ]

14) $D = \{z:\ |z| > 2,\ \operatorname{Im} z > 0\}$; [Ответ]

15) $D = \left\{z:\ |z| < \dfrac{1}{2},\ \operatorname{Im} z > 0\right\}$; [Ответ]

16) $D = \{z:\ 1 < |z| < 7,\ \operatorname{Im} z > 0\}$; [Ответ]

17) $D = \left\{z:\ |z| < \dfrac{1}{3}\right\}$; [Ответ]

18) $D = \{z:\ |z| > 3\}$; [Ответ]

19) $D = \{z:\ |z| > 1\} \setminus \{[-2,-1] \cup [1,+\infty)\}$; [Ответ]

20) $D = \left\{z:\ \frac{1}{6} < |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\right\}$; [Ответ]

59. Найти образ $w(D)$ при отображении $w = f(z)$ области D.

1) $w = \cos z,\ D = \{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \pi,\ \operatorname{Im} z < 0\}$; [Ответ]

2) $w = \cos z,\ D = \left\{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2},\ \operatorname{Im} z > 0\right\}$; [Ответ]

3) $w = \cos z,\ D = \left\{z:\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2},\ \operatorname{Im} z > 0\right\}$; [Ответ]

4) $w = \cos z,\ D = \{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$; [Ответ]

5) $w = \cos z,\ D = \left\{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \pi,\ -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z > \frac{\pi}{4}\right\}$; [Ответ]

6) $w = \operatorname{ch} z,\ D = \{z:\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$; [Ответ]

7) $w = \operatorname{ch} z,\ D = \{z:\ \operatorname{Re} z > 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$; [Ответ]

8) $w = \operatorname{ch} z,\ D = \{z:\ \operatorname{Re} z < 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$; [Ответ]

9) $w = \sin z,\ D = \left\{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}\right\}$; [Ответ]

10) $w = \operatorname{tg} z,\ D = \{z:\ \operatorname{Im} z = 5\}$; [Ответ]

11) $w = \operatorname{tg} z,\ D = \left\{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}\right\}$; [Ответ]

12) $w = \operatorname{th} z,\ D = \{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$; [Ответ]

13) $w = \operatorname{tg} z,\ D = \{z:\ \operatorname{Re} z = 4\}$; [Ответ]

14) $w = \operatorname{tg} z,\ D = \{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \pi,\ \operatorname{Im} z > 0\}$; [Ответ]

15) $w = \operatorname{cth} z,\ D = \{z:\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$; [Ответ]

16) $w = \operatorname{cth} z$, $D = \{z : \operatorname{Re} z > 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$; [Ответ]

17) $w = \sin z$, $D = \left\{z : \operatorname{Re} z = \dfrac{\pi}{2}\right\}$; [Ответ]

18) $w = \sin z$, $D = \{z : \operatorname{Re} z = \pi\}$; [Ответ]

19) $w = \sin z$, $D = \{z : \operatorname{Im} z = 0\}$; [Ответ]

20) $w = \sin z$, $D = \left\{z : \operatorname{Im} z = \dfrac{\pi}{2}\right\}$; [Ответ]

60. Найти конформное и однолистное отображение области G_1 на область G_2.

1) $G_1 = \{z : |z| > 1\} \setminus [1, 10]$, $G_2 = \{w : \operatorname{Re} w > 0\}$; [Ответ]

2) $G_1 = \{z : |z - 10i| < 10,\ |z - 5i| > 5\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Re} w > 0\}$; [Ответ]

3) $G_1 = \left\{z : 0 < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{6}\right\}$, $G_2 = \left\{w : 0 < \arg w < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; [Ответ]

4) $G_1 = \{z : |z - 2| < 2,\ |z - 1| > 1\}$, $G_2 = \{w : 0 < \operatorname{Re} w < 1\}$; [Ответ]

5) $G_1 = \{z : |z| > 1\} \setminus \{[-2, -1] \cup [1, +\infty)\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$; [Ответ]

6) $G_1 = \{z : |z - 2i| < 2,\ |z - 2| < 2\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$; [Ответ]

7) $G_1 = \left\{z : |z| < 8,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Re} w > 0\}$; [Ответ]

8) $G_1 = \left\{z : 0 < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{3}\right\}$, $G_2 = \left\{w : -\dfrac{\pi}{2} < \arg w < 0\right\}$; [Ответ]

9) $G_1 = \{z : |z - 4| < 4,\ |z - 2| > 2\}$, $G_2 = \{w : 0 < \operatorname{Re} w < 1\}$; [Ответ]

10) $G_1 = \{z : 1 < \operatorname{Re} z < 2\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Re} w < 0\}$; [Ответ]

11) $G_1 = \{z : |z| < 2,\ |z - 1| > 1\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$; [Ответ]

12) $G_1 = \{z : |z| < 6\} \setminus \{[-6, 1] \cup [3, 6]\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$; [Ответ]

13) $G_1 = \left\{z : |z| < 2,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Re} w > 0\}$; [Ответ]

14) $G_1 = \{z:\ |z| < 2\}$, $G_2 = \mathbb{C} \setminus (0, +\infty)$; [Ответ]

15) $G_1 = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [0, 3i]$, $G_2 = \{w:\ \operatorname{Im} w < 0\}$; [Ответ]

16) $G_1 = \{z:\ |z| < 1\} \setminus \left\{[-1, 0] \cup \left[\frac{1}{6}, 1\right]\right\}$, $G_2 = \{w:\ \operatorname{Im} w > 0\}$; [Ответ]

17) $G_1 = \{z:\ |z| < 3,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, $G_2 = \{w:\ \operatorname{Re} w > 0\}$; [Ответ]

18) $G_1 = \left\{z:\ |z| < 2,\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\right\}$, $G_2 = \{w:\ \operatorname{Im} w > 0\}$; [Ответ]

19) $G_1 = \left\{e^{i\frac{\pi}{4}} z:\ 0 < \operatorname{Im} z < 8\right\}$, $G_2 = \{w:\ \operatorname{Re} w > 0\}$; [Ответ]

20) $G_1 = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \left\{z:\ |z| < \frac{1}{7}\right\}$, $G_2 = \{w:\ |w| < 1\}$; [Ответ]

61. С помощью интеграла Кристоффеля – Шварца отобразить верхнюю полуплоскость на треугольник с вершинами в точках A, B и C.

1) $A(0, 1)$, $B(0, 5)$, $C(2, 3)$; [Ответ]

2) $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-3, 2)$; [Ответ]

3) $A(2, 2)$, $B(3, 3)$, $C(2, 3)$; [Ответ]

4) $A(2, 0)$, $B(6, 0)$, $C(2, 4)$; [Ответ]

5) $A(-1, 0)$, $B(-1, 1)$, $C\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$; [Ответ]

6) $A(1, -1)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$; [Ответ]

7) $A(1, -1)$, $B(3, -3)$, $C(3, 1)$; [Ответ]

8) $A(1, 1)$, $B(2, 1)$, $C\left(\frac{3}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; [Ответ]

9) $A(0,-1)$, $B(1,-1)$, $C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$; [Ответ]

10) $A(0,-2)$, $B(2,-2)$, $C(3,-1)$; [Ответ]

11) $A(1,-1)$, $B(3,-1)$, $C(4,0)$; [Ответ]

12) $A(-1,-1)$, $B(-1,-3)$, $C(0,-4)$; [Ответ]

13) $A(1,1)$, $B(1,3)$, $C(0,4)$; [Ответ]

14) $A(-1,1)$, $B(0,2)$, $C(-1,2)$; [Ответ]

15) $A(0,2)$, $B(1,3)$, $C(0,3)$; [Ответ]

8.3. Задания для самостоятельной работы

62. Найти конформное и однолистное отображение области G на полуплоскость $\{w:\ \operatorname{Im} w > 0\}$. Сделать чертеж.

1) $G = \{z:\ |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$; [Ответ]

2) $G = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [0, ih],\ h > 0$; [Ответ]

3) $G = \{z:\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\} \setminus \left\{z:\ \operatorname{Im} z = \frac{\pi}{2},\ \operatorname{Re} z \leqslant 0\right\}$; [Ответ]

4) $G = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z:\ |z| < 1\}$; [Ответ]

5) $G = \left\{z:\ |z - i| < 1,\ \left|z - \frac{i}{2}\right| > \frac{1}{2}\right\}$; [Ответ]

6) $G = \mathbb{C} \setminus [0, 1]$; [Ответ]

7) $G = \mathbb{C} \setminus \big\{\{z:\ \operatorname{Re} z = 0\} \setminus [0, i]\big\}$; [Ответ]

8) $G = \{z:\ \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \{z:\ |z - 1| = 1\}$; [Ответ]

9) $G = \{z:\ |z| < 2,\ \operatorname{Im} z > 1\}$; [Ответ]

10) Область G изображена на рисунке 8.1. Центры окружностей находятся в точках $A(\sqrt{2} - 1, 0)$, $B(1 - \sqrt{2}, 0)$. [Ответ]

11) $G = \mathbb{C} \setminus \{z:\ |z| = 1, \operatorname{Im} z > 0\}$; [Ответ]

12) $G = \mathbb{C} \setminus [-i, i]$; [Ответ]

13) $G = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$; [Ответ]

14) $G = \mathbb{C} \setminus \left\{e^{i\frac{\pi}{4}} z + i:\ z \in [0, +\infty)\right\}$; [Ответ]

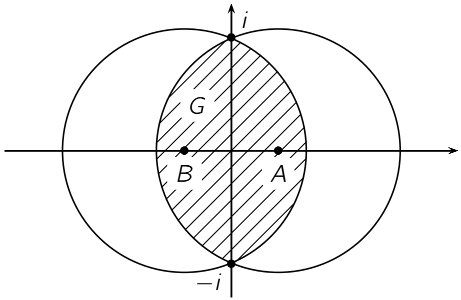

Рисунок 8.1

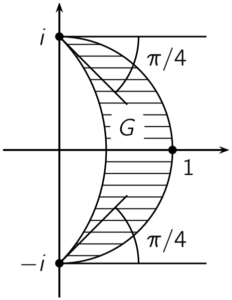

Рисунок 8.2

15) $G = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z:\ z = it,\ 0 < h \leqslant t < +\infty\}$; [Ответ]

16) Область G изображена на рисунке 8.2. [Ответ]

17) $G = \{z:\ |z| < 1\} \setminus [0, 1]$; [Ответ]

18) $G = \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -R] \cup [R, +\infty)\}$; [Ответ]

19) $G = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \left\{z:\ |z| = 1,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right\}$; [Ответ]

20) $G = \{z:\ |z| < 1\} \setminus \left\{[-1, 0] \cup \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]\right\}$; [Ответ]

8.4. Задания творческого характера

63. Найти образ $w(G)$ области D при отображении $w = f(z)$.

1) $w = \dfrac{z}{z^2+1}$, $G = \{z:\ |z| < 1\}$; [Ответ]

2) $w = \dfrac{1}{z^2+1}$, $G = \{z:\ |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$; [Ответ]

3) $w = \dfrac{1}{2}\left(z^n + \dfrac{1}{z^n}\right)$, $G = \left\{z:\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{n}\right\}$; [Ответ]

4) $w = \dfrac{z}{(1+z^n)^{\frac{2}{n}}}$, $w(1) > 0$, $G = \left\{z:\ |z| < 1,\ -\dfrac{\pi}{n} < \arg z < \dfrac{\pi}{n}\right\}$; [Ответ]

64. Отобразить конформно и однолистно область G_1 на область G_2.

1) $G_1 = \mathbb{C} \setminus \big\{[-1,1] \cup [-i,i]\big\}$, $G_2 = \{w:\ |w| > 1\}$; [Ответ]

2) $G_1 = \mathbb{C} \setminus \big\{(-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \cup \{z:\ \operatorname{Re} z = 0,\ \operatorname{Im} z \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)\big\}$, $G_2 = \{w:\ |w| > 1\}$; [Ответ]

3) $G_1 = \mathbb{C} \setminus \big\{\{z:\ \operatorname{Re} z = 0,\ \operatorname{Im} z \leqslant 0\} \cup \{z:\ |z| = 1,\ \operatorname{Im} z \leqslant 0\}\big\}$, $G_2 = \{w:\ |w| > 1\}$; [Ответ]

4) $G_1 = \mathbb{C} \setminus \big\{\{z:\ |z| = 1,\ \operatorname{Im} z \leqslant 0\} \cup [-2i, 0]\big\}$, $G_2 = \{w:\ \operatorname{Im} w > 0\}$; [Ответ]

65. Отобразить конформно и однолистно на верхнюю полуплоскость $\{w:\ \operatorname{Im} w > 0\}$ следующие области.

1) внутренность правой ветви гиперболы $\dfrac{x^2}{\cos^2\alpha} - \dfrac{y^2}{\sin^2\alpha} = 1$; [Ответ]

2) внешность правой ветви гиперболы $\dfrac{x^2}{\cos^2\alpha} - \dfrac{y^2}{\sin^2\alpha} = 1$; [Ответ]

3) область, заключенную между ветвями гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. [Ответ]

Глава 9

Отображение с помощью элементарных трансцендентных функций

9.1. Задания для аудиторной работы

9.2. Базовые индивидуальные задания

9.3. Задания для самостоятельной работы

9.4. Задания творческого характера

Задания для аудиторной работы по теме «Интегрирование функций комплексного переменного»

66. Вычислить интегралы по указанным кривым. Сделать вывод.

1) $\int\limits_{\Gamma}(1+3\operatorname{Im} z-4\bar{z})\,dz$, интегрирование ведется вдоль следующих линий, соединяющих точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$: а) прямой, б) параболе $y=x^2$, в) ломаной $z_1z_3z_2$, где $z_3=1$. [Решение] [Ответ]

2) $\int\limits_{\Gamma}(1+i-2\bar{z})\,dz$, интегрирование ведется вдоль следующих линий, соединяющих точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$: а) прямой, б) параболе $y=x^2$, в) ломаной $z_1z_3z_2$, где $z_3=1$. [Ответ]

3) $\int\limits_{\Gamma}\operatorname{Re} z\,dz$, интегрирование ведется вдоль следующих линий, соединяющих точки $z_1=i$ и $z_2=1$: а) прямой, б) параболе $y=1-x^2$, в) ломаной $z_1z_3z_2$, где $z_3=0$. [Ответ]

4) $\int\limits_{\Gamma}z\operatorname{Re} z\,dz$, интегрирование ведется вдоль следующих линий, соединяющих точки $z_1=-i$ и $z_2=1$: а) прямой, б) параболе $y=x^2-1$, в) ломаной $z_1z_3z_2$, где $z_3=-1$; [Ответ]

5) $\int\limits_{\Gamma}|z|\,dz$, интегрирование ведется вдоль следующих линий, соединяющих точки $z_1=1$ и $z_2=-1$: а) прямой, б) верхней дуге окружности $|z|=1$, проходимой в положительном направлении, в) ломаной $z_1z_3z_2$, где $z_3=i$. [Ответ]

67. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{\Gamma}|z|^2\,dz$, где Γ — отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=1$ и $z_2=2i$; [Решение] [Ответ]

2) $\int\limits_{\Gamma}(z^2+z\cdot\bar{z})\,dz$, где Γ — верхняя дуга окружности $|z|=1$, проходимая в положительном направлении; [Ответ]

3) $\int\limits_{\Gamma} e^{\bar{z}}\,dz$, где Γ — отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \pi - i\pi$; [Ответ]

4) $\int\limits_{\Gamma} (i\bar{z} + z^2)\,dz$, где Γ — дуга окружности $|z| = 2$, расположенная во второй четверти и проходимая в положительном направлении; [Ответ]

68. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z)\,dz$; [Решение] [Ответ]

2) $\int\limits_{0}^{i} z\cos z\,dz$; [Решение] [Ответ]

3) $\int\limits_{0}^{1+i} (z^3 - 1)\,dz$; [Ответ]

4) $\int\limits_{0}^{i} \sin z\cos z\,dz$; [Ответ]

5) $\int\limits_{1}^{i} (iz^3 + 3)\,dz$; [Ответ]

6) $\int\limits_{1}^{i} \frac{1 + \operatorname{tg} z}{\cos^2 z}\,dz$. [Ответ]

69. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{\Gamma} \operatorname{Ln} z\, dz$, где Γ — правая дуга окружности $|z| = 2$, проходимая в положительном направлении, $\operatorname{Ln} 2 = \ln 2$. [Решение] [Ответ]

2) $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, где Γ — верхняя дуга окружности $|z| = 1$, проходимая в положительном направлении, $\sqrt{1} = -1$. [Ответ]

3) $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}$, где Γ — верхняя дуга окружности $|z| = 1$, интегрирование ведется положительном направлении, $\sqrt[4]{1} = 1$. [Ответ]

4) $\int\limits_{|z|=1} z^i\, dz$, интегрирование ведется положительном направлении, $1^i = 1$. [Ответ]

Глава 10

Интегральная теорема и формула Коши

10.1. Задания для аудиторной работы

70. Вычислить интегралы, применяя интегральную теорему Коши:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2x\,dx$; [Решение] [Ответ]

2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2mx\,dx,\ m\in\mathbb{R}$; [Ответ]

3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\,dx$; [Ответ]

4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\,dx$; [Ответ]

5) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$; [Ответ]

71. Вычислить следующие интегралы, используя определение интеграла от функции комплексной переменной (Γ — отрезок прямой, соединяющей точки z_1 и z_2):

1) $\displaystyle\int\limits_\Gamma dz$; [Ответ]

2) $\displaystyle\int\limits_\Gamma z\,dz$. [Ответ]

72. Пусть Γ — простой замкнутый контур, ограничивающий область площади S. Доказать следующие равенства:

1) $\int\limits_{\Gamma} x\,dz = iS$;

2) $\int\limits_{\Gamma} y\,dz = -S$;

3) $\int\limits_{\Gamma} \bar{z}\,dz = 2iS$.

73. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в круге $D = \{z : |z-a| < R\}$ и удовлетворяет в нем условию $|f(z)| \leqslant M$. Доказать, что для любых $z_1, z_2 \in D$ выполняется неравенство:

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz \leqslant M \cdot |z_2 - z_1|.$$

74. Вычислите интегралы по замкнутому контуру Γ (обход ведется против часовой стрелки).

1) $\oint\limits_{\Gamma} \frac{z}{z+1}\,dz$; а) $\Gamma = \{|z| = 1/2\}$, б) $\Gamma = \{|z| = 2\}$; [Решение] [Ответ]

2) $\oint\limits_{\Gamma} \frac{\cos z}{z-\pi}\,dz$; а) $\Gamma = \{|z| = 1\}$, б) $\Gamma = \{|z-\pi| = 1\}$; [Ответ]

3) $\oint\limits_{\Gamma} \frac{e^z}{z^2+\pi^2}\,dz$; а) $\Gamma = \{|z| = 2\}$, б) $\Gamma = \{|z-i| = 3\}$, в) $\Gamma = \{|z| = 4\}$; [Решение] [Ответ]

4) $\oint\limits_{\Gamma} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2+4z+3}\,dz$; а) $\Gamma = \{|z-1| = 1\}$, б) $\Gamma = \{|z| = 2\}$, в) $\Gamma = \{|z+2| = 2\}$; [Ответ]

5) $\displaystyle\oint\limits_{\Gamma} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^2}\,dz$; а) $\Gamma = \{|z| = 1/2\}$, б) $\Gamma = \{|z| = 2\}$; [Решение] [Ответ]

6) $\displaystyle\oint\limits_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^3}\,dz$; а) $\Gamma = \{|z+2| = 1\}$, б) $\Gamma = \{|z| = 2\}$; [Ответ]

7) $\displaystyle\oint\limits_{\Gamma} \frac{z^2+5}{(z-1)^3(z+3)}\,dz$; а) $\Gamma = \{|z+1| = 1\}$, б) $\Gamma = \{|z| = 2\}$, в) $\Gamma = \{|z| = 4\}$; [Решение] [Ответ]

8) $\displaystyle\oint\limits_{\Gamma} \frac{3z^3+1}{(z^2-1)(z+1)}\,dz$; а) $\Gamma = \{|z-i| = 1\}$, б) $\Gamma = \{|z+2| = 2\}$, в) $\Gamma = \{|z+i| = 2\}$; [Ответ]

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz$; [Ответ]

10) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz$; [Ответ]

11) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz$; [Ответ]

12) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{z}}{z^2+2z}\,dz$; [Ответ]

13) $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz$; [Ответ]

14) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16}$; [Решение] [Ответ]

15) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}$; [Ответ]

16) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}\,dz$; [Ответ]

17) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z\,dz}{(z-2)^3(z+4)}$; [Ответ]

18) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2}\,dz$. [Ответ]

10.2. Базовые индивидуальные задания

10.3. Задания для самостоятельной работы

10.4. Задания творческого характера

Глава 11

Степенные ряды

11.1. Задания для аудиторной работы

11.2. Базовые индивидуальные задания

11.3. Задания для самостоятельной работы

11.4. Задания творческого характера

Глава 12

Ряды Тейлора

12.1. Задания для аудиторной работы

75. Найти радиус и область сходимости указанных рядов.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n;$ [Решение] [Ответ]

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{n^2},\ a \in \mathbb{C};$ [Решение] [Ответ]

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{n};$ [Решение] [Ответ]

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n + a^n) z^n;$ [Решение] [Ответ]

5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(4 + (-1)^n\right)^n z^n;$ [Ответ]

6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{n!};$ [Ответ]

7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 z^n}{3^n};$ [Ответ]

8) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\cos in) z^n;$ [Ответ]

9) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n;$ [Ответ]

76. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)$ в окрестности точки z_0.

1) $f(z) = \dfrac{1}{z-b}$, $z_0 = a$, $a \neq b$; [Решение] [Ответ]

2) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$, $z_0 = 0$; [Решение] [Ответ]

3) $f(z) = \dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $z_0 = 0$; [Решение] [Ответ]

4) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z+1}$, $z_0 = 0$; [Решение] [Ответ]

5) $f(z) = z^2 e^z$, $z_0 = 2$; [Решение] [Ответ]

Осталось сделать обратную замену $t = z - 2$.

6) $f(z) = \cos z \cos 3z$, $z_0 = 0$; [Решение] [Ответ]

7) $f(z) = e^z \cos z$, $z_0 = 0$; [Решение] [Ответ]

8) $f(z) = \dfrac{az+b}{(z+\alpha)(z+\beta)}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

9) $f(z) = z^2 e^{az}$, $z_0 = 1$; [Ответ]

10) $f(z) = \sin \alpha z \cdot \cos \beta z$, $z_0 = 0$; [Ответ]

11) $f(z) = \cos^3 z$, $z_0 = 0$; [Ответ]

12) $f(z) = \operatorname{ch} \alpha z \operatorname{sh} \beta z$, $z_0 = 0$; [Ответ]

13) $f(z) = e^{az} \sin bz$, $z_0 = 0$; [Ответ]

77. Найти три первых отличных от нуля члена разложения функции $f(z)$ в точке z_0.

1) $f(z) = \operatorname{tg} z$, $z_0 = 0$; [Решение] [Ответ]

12.2. Базовые индивидуальные задания

78. Найти радиус сходимости рядов.

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2+3^n)z^n;$ [Ответ]

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^3+2^{-n})z^n;$ [Ответ]

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^3+n)z^{n^2};$ [Ответ]

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n z^{n^2};$ [Ответ]

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^n z^{n^3};$ [Ответ]

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}z^n;$ [Ответ]

7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{7^n}z^{n^2};$ [Ответ]

8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^3+4^n)z^{n^2};$ [Ответ]

9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n+1};$ [Ответ]

10) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{4^n+1}$; [Ответ]

11) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n}}{n^2+1}$; [Ответ]

12) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{n^3+1}$; [Ответ]

13) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 7^n z^n$; [Ответ]

14) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 7^n z^{n^3}$; [Ответ]

15) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{\alpha n} z^n$; [Ответ]

16) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{\alpha n} z^{n^2}$; [Ответ]

17) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+1} z^n$; [Ответ]

18) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n^3+1} z^{n^2}$; [Ответ]

19) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+n}{3^n+1} z^n$; [Ответ]

20) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{4^n+1} z^{n^2}$; [Ответ]

79. Разложить заданную функцию $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = 0$.

1) $f(z) = \dfrac{3z+1}{(z+2)(z-3)}$; [Ответ]

2) $f(z) = \dfrac{3z-1}{(z+3)(z-2)}$; [Ответ]

3) $f(z) = \dfrac{5z+17}{(z+3)(z+4)}$; [Ответ]

4) $f(z) = \dfrac{5z-1}{(z+4)(z-3)}$; [Ответ]

5) $f(z) = \dfrac{8z+30}{(z+3)(z+5)}$; [Ответ]

6) $f(z) = \dfrac{-2z-30}{(z+3)(z-5)}$; [Ответ]

7) $f(z) = \dfrac{2z-30}{(z-3)(z+5)}$; [Ответ]

8) $f(z) = \dfrac{-8z+30}{(z-3)(z-5)}$; [Ответ]

9) $f(z) = \dfrac{10z+48}{(z+4)(z+6)}$; [Ответ]

10) $f(z) = \dfrac{-2z-48}{(z+4)(z-6)}$; [Ответ]

11) $f(z) = \dfrac{2z-48}{(z-4)(z+6)}$; [Ответ]

12) $f(z) = \dfrac{-10z+48}{(z-4)(z-6)}$; [Ответ]

13) $f(z) = \dfrac{12z + 70}{(z+5)(z+7)}$; [Ответ]

14) $f(z) = \dfrac{-2z - 70}{(z+5)(z-7)}$; [Ответ]

15) $f(z) = \dfrac{2z - 70}{(z-5)(z+7)}$; [Ответ]

16) $f(z) = \dfrac{-12z + 70}{(z-5)(z-7)}$; [Ответ]

17) $f(z) = \dfrac{11z + 56}{(z+4)(z+7)}$; [Ответ]

18) $f(z) = \dfrac{-3z + 56}{(z+4)(z-7)}$; [Ответ]

19) $f(z) = \dfrac{3z + 56}{(z-4)(z+7)}$; [Ответ]

20) $f(z) = \dfrac{-11z + 56}{(z-4)(z-7)}$; [Ответ]

80. Разложить функцию $f(z) = z^2 e^{az}$ в окрестности точки z_0.

1) $a = 2,\ z_0 = 1$; [Ответ]

2) $a = 2,\ z_0 = -1$; [Ответ]

3) $a = -2,\ z_0 = 1$; [Ответ]

4) $a = -2,\ z_0 = -1$; [Ответ]

5) $a = 3,\ z_0 = 2$; [Ответ]

6) $a = 3,\ z_0 = -2$; [Ответ]

7) $a = -3,\ z_0 = 2$; [Ответ]

8) $a = -3,\ z_0 = -2;$ [Ответ]

9) $a = 2,\ z_0 = 3;$ [Ответ]

10) $a = 2,\ z_0 = -3;$ [Ответ]

11) $a = -2,\ z_0 = 3;$ [Ответ]

12) $a = -2,\ z_0 = -3;$ [Ответ]

13) $a = 3,\ z_0 = 3;$ [Ответ]

14) $a = 3,\ z_0 = -3;$ [Ответ]

15) $a = -3,\ z_0 = 3;$ [Ответ]

16) $a = -3,\ z_0 = -3;$ [Ответ]

17) $a = 2,\ z_0 = 4;$ [Ответ]

18) $a = 2,\ z_0 = -4;$ [Ответ]

19) $a = -,\ z_0 = 4;$ [Ответ]

20) $a = -2,\ z_0 = -4;$ [Ответ]

81. Разложить заданную функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$.

1) $f(z) = \cos^2 z;$ [Ответ]

2) $f(z) = \sin^2 z;$ [Ответ]

3) $f(z) = \operatorname{ch}^2 z;$ [Ответ]

4) $f(z) = \operatorname{sh}^2 z;$ [Ответ]

5) $f(z) = \cos^2 z + \operatorname{ch}^2 z;$ [Ответ]

6) $f(z) = \cos^2 z + \operatorname{sh}^2 z;$ [Ответ]

7) $f(z) = \sin^2 z + \operatorname{ch}^2 z$; [Ответ]

8) $f(z) = \sin^2 z + \operatorname{sh}^2 z$; [Ответ]

9) $f(z) = \sin z \operatorname{ch} z$; [Ответ]

10) $f(z) = \cos z \operatorname{ch} z$; [Ответ]

11) $f(z) = \sin z \operatorname{sh} z$; [Ответ]

12) $f(z) = \cos z \operatorname{ch} z$; [Ответ]

13) $f(z) = \sin^3 z$; [Ответ]

14) $f(z) = \operatorname{ch}^3 z$; [Ответ]

15) $f(z) = \operatorname{sh}^3 z$; [Ответ]

16) $f(z) = \operatorname{sh} 2z \operatorname{sh} 3z$; [Ответ]

17) $f(z) = \operatorname{sh} 2z \operatorname{ch} 3z$; [Ответ]

18) $f(z) = \operatorname{ch} 2z \operatorname{ch} 3z$; [Ответ]

19) $f(z) = \sin 2z \operatorname{sh} 3z$; [Ответ]

20) $f(z) = \cos 2z \operatorname{ch} 3z$; [Ответ]

82. Разложить функцию $f(z) = e^{az} \cos bz$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$.

1) $a = -1,\ b = 1$; [Ответ]

2) $a = -1,\ b = -1$; [Ответ]

3) $a = 1,\ b = \sqrt{3}$; [Ответ]

4) $a = \sqrt{3},\ b = 1$; [Ответ]

5) $a = -1,\ b = \sqrt{3}$; [Ответ]

6) $a = -1,\ b = -\sqrt{3}$; [Ответ]

7) $a = -\sqrt{3},\ b = 1$; [Ответ]

8) $a = -\sqrt{3},\ b = -1$; [Ответ]

9) $a = \sqrt{3},\ b = -1$; [Ответ]

10) $a = 1,\ b = -\sqrt{3}$; [Ответ]

Разложить функцию $f(z) = e^{az}\sin bz$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$.

11) $a = -1,\ b = 1$; [Ответ]

12) $a = -1,\ b = -1$; [Ответ]

13) $a = 1,\ b = \sqrt{3}$; [Ответ]

14) $a = \sqrt{3},\ b = 1$; [Ответ]

15) $a = -1,\ b = \sqrt{3}$; [Ответ]

16) $a = -1,\ b = -\sqrt{3}$; [Ответ]

17) $a = -\sqrt{3},\ b = 1$; [Ответ]

18) $a = -\sqrt{3},\ b = -1$; [Ответ]

19) $a = \sqrt{3},\ b = -1$; [Ответ]

20) $a = 1,\ b = -\sqrt{3}$; [Ответ]

12.3. Задания для самостоятельной работы

83. Найти радиус сходимости рядов.

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{\operatorname{ch} \alpha n}$, $\alpha > 0$; [Ответ]

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha} z^n$; [Ответ]

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1)^{-\alpha} z^n$; [Ответ]

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!} z^n$; [Ответ]

84. С помощью метода неопределенных коэффициентов найти три первые, отличные от нуля, члена разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$ следующих функций.

1) $f(z) = \dfrac{z}{\operatorname{arctg} z}$; [Ответ]

2) $f(z) = \dfrac{z}{(1-z^2)\sin z}$; [Ответ]

3) $f(z) = e^{z \cos z}$; [Ответ]

85. Найти разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$ следующих аналитических функций, удовлетворяющих условиям.

1) $f'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$; [Ответ]

2) $(1+z^2)f'(z)=1,\ f(0)=0;$ [Ответ]

3) $f''(z)+\lambda^2 f(z)=0,\ f(0)=0,\ f'(0)=\lambda;$ [Ответ]

4) $f''(z)+zf(z)=0,\ f(0)=1,\ f'(0)=0;$ [Ответ]

12.4. Задания творческого характера

Глава 13

Нули аналитической функции. Теорема единственности

13.1. Задания для аудиторной работы

86. Найти все нули z_k аналитической функции $w = f(z)$. Для каждого нуля найти его порядок, используя критерий

$$\begin{cases} f(z_k) = f'(z_k) = \ldots = f^{(n-1)}(z_k) = 0, \\ f^{(n)}(z_k) \neq 0. \end{cases}$$

1) $w = z \sin z$; [Решение] [Ответ]

2) $w = (z^2 + 1)^2$; [Ответ]

3) $w = 1 - \cos z$; [Ответ]

4) $w = \sin^2 z$; [Ответ]

5) $w = (z^2 - 4)^3$; [Ответ]

6) $w = \dfrac{(z^2 - 1)^2}{z}$; [Ответ]

87. Найти порядок n нуля z_0 функции $w = f(z)$, аналитической в точке z_0, представив ее в окрестности z_0 в виде

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z),$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и отлична от нуля в некоторой окрестности z_0.

1) $w = z^2(e^{z^2} - 1)$, $z_0 = 0$; [Решение] [Ответ]

2) $w = 1 - \cos z^2$, $z_0 = 0$; [Ответ]

3) $w = \sin z^3$, $z_0 = 0$; [Ответ]

4) $w = (z - 1)\sin^2(z - 1)$, $z_0 = 1$; [Ответ]

5) $w = 1 - \cos(z+1)$, $z_0 = -1$; [Ответ]

6) $w = (z-1)(e^{z-1} - 1)$, $z_0 = 1$; [Ответ]

88. Найти все нули z_k аналитической функции $w = f(z)$. Для каждого нуля найти его порядок n_k.

1) $w = \dfrac{z^2+9}{z^4}$; [Решение] [Ответ]

2) $w = \cos^3 z$; [Ответ]

3) $w = \dfrac{\sin^3 z}{z}$; [Ответ]

4) $w = \dfrac{(z^2-\pi^2)^2 \sin z}{z}$; [Ответ]

5) $w = (\sqrt{z} - 2)^3$; [Ответ]

6) $w = (1 - e^z)(z^2 - 4)^3$; [Ответ]

89. Существует ли функция $w = f(z)$, аналитическая в круге $D = \{z : |z| < 2\}$, для которой выполняются следующие условия?

1) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k+1, \\ 1, & n = 2k,\ k \in \mathbb{N}; \end{cases}$ [Решение] [Ответ]

2) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k+1, \\ \dfrac{1}{n}, & n = 2k,\ k \in \mathbb{N}; \end{cases}$ [Ответ]

3) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$; [Ответ]

4) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ \dfrac{1}{n^2}, & n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$ [Ответ]

5) $f\left(\pm\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n^2},\ n\in\mathbb{N};$ [Ответ]

6) $f\left(\pm\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n^3},\ n\in\mathbb{N};$ [Ответ]

90. Существует ли функция $w=f(z)$, аналитическая в круге $D=\{z:\ |z|<2\}$, для которой выполняются следующие условия?

1) $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n+\cos^2\frac{n\pi}{2}},\ n\in\mathbb{N};$ [Решение] [Ответ]

2) $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\sin^2\dfrac{n\pi}{2},\ n\in\mathbb{N};$ [Ответ]

3) $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}\cos n\pi,\ n\in\mathbb{N};$ [Ответ]

4) $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2n}\cos^2\dfrac{n\pi}{2},\ n\in\mathbb{N};$ [Ответ]

5) $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=f\left(\dfrac{1}{2n}\right),\ n\in\mathbb{N};$ [Ответ]

6) $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n^2}\cos^2\dfrac{n\pi}{2},\ n\in\mathbb{N};$ [Ответ]

13.2. Базовые индивидуальные задания

91. Используя критерий

$$\begin{cases} f(z_k) = f'(z_k) = \ldots = f^{(n-1)}(z_k) = 0, \\ f^{(n)}(z_k) \neq 0, \end{cases}$$

найти порядок n нуля z_0 аналитической функции $w = f(z)$.

1) $w = (z^2+1)^2$, $z_0 = i$; [Ответ]

2) $w = (1-\cos z)^2$, $z_0 = 0$; [Ответ]

3) $w = (1+\cos z)^2$, $z_0 = \pi$; [Ответ]

4) $w = (e^z-1)^2$, $z_0 = 0$; [Ответ]

5) $w = z - \sin z$, $z_0 = 0$; [Ответ]

6) $w = \cos z - \cos 2z$, $z_0 = 0$; [Ответ]

7) $w = \sin z - \sin 2z$, $z_0 = 0$; [Ответ]

8) $w = z^2 \cos\left(z + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $z_0 = 0$; [Ответ]

9) $w = (z^2-1)\sin \pi z$, $z_0 = 0$; [Ответ]

10) $w = (1+\cos \pi z)^2$, $z_0 = 1$; [Ответ]

11) $w = (z^2+\pi^2)^2$, $z_0 = i\pi$; [Ответ]

12) $w = (z^2-\pi^2)\sin z$, $z_0 = \pi$; [Ответ]

13) $w = \cos z - \cos^2 z$, $z_0 = 0$; [Ответ]

14) $w = \sin z \cos\left(z + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $z_0 = 0$; [Ответ]

15) $w = (z^2 - 1)\sin \pi z$, $z_0 = 1$; [Ответ]

16) $w = \sin \pi z \cos \dfrac{\pi}{2} z$, $z_0 = 1$; [Ответ]

17) $w = z(e^z - 1)$, $z_0 = 1$; [Ответ]

18) $w = (z^2 + 1)^8$, $z_0 = i$; [Ответ]

19) $w = (z^4 - 1)^2$, $z_0 = 1$; [Ответ]

20) $w = z \sin z \cos\left(z + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $z_0 = 0$; [Ответ]

92. Найти порядок n нуля z_0 функции $w = f(z)$, аналитической в точке z_0, представив ее в окрестности z_0 в виде

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z),$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и отлична от нуля в некоторой окрестности z_0.

1) $w = z \sin z^2$, $z_0 = 0$; [Ответ]

2) $w = \sin z^2 - z^2$, $z_0 = 0$; [Ответ]

3) $w = 1 - \cos z^3$, $z_0 = 1$; [Ответ]

4) $w = z^2(1 - \cos z^2)$, $z_0 = 0$; [Ответ]

5) $w = (z - \pi)^2(1 - \cos 2z)$, $z_0 = \pi$; [Ответ]

6) $w = (e^{z^3} - 1)z$, $z_0 = 0$; [Ответ]

7) $w = e^{z^2} - e^z$, $z_0 = 0$; [Ответ]

8) $w = 1 - \cos^2 \pi z$, $z_0 = 1$; [Ответ]

9) $w = e^{z^4} - e^{z^2}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

10) $w = z^4(e^{z^2} - e^z)$, $z_0 = 0$; [Ответ]

11) $w = z^2(\sin z^2 - \sin z)$, $z_0 = 0$; [Ответ]

12) $w = z^3(\cos z^2 - \cos z^3)$, $z_0 = 0$; [Ответ]

13) $w = (e^{z^2} - 1)z^5$, $z_0 = 0$; [Ответ]

14) $w = z^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + z^2\right)$, $z_0 = 0$; [Ответ]

15) $w = z(z - \sin z)$, $z_0 = 0$; [Ответ]

16) $w = z^2\left(1 - \dfrac{z^2}{2} - \cos z\right)$, $z_0 = 0$; [Ответ]

17) $w = z\left(z - \dfrac{z^3}{6} - \sin z\right)$, $z_0 = 0$; [Ответ]

18) $w = (z-1)^2(1 - \cos \pi z)$, $z_0 = 1$; [Ответ]

19) $w = (z-i)^2 \sin(z-i)^3$, $z_0 = i$; [Ответ]

20) $w = e^{z^2} - \cos z^2$, $z_0 = 0$; [Ответ]

93. Найти все нули z_k аналитической функции $w = f(z)$. Для каждого нуля найти его порядок n_k.

1) $w = e^z - 1$; [Ответ]

2) $w = z^2 \sin^2 z$; [Ответ]

3) $w = (z^2 \pi^2) \sin z$; [Ответ]

4) $w = \dfrac{1 - \operatorname{ctg} z}{z}$; [Ответ]

5) $w = e^{\sin z} - 1$; [Ответ]

6) $w = e^{1 - \cos z} - 1$; [Ответ]

7) $w = \dfrac{\sin^2 z}{z}$; [Ответ]

8) $w = z\sin^2 z$; [Ответ]

9) $w = z(1-\cos z)$; [Ответ]

10) $w = (z^4+1)^2$; [Ответ]

11) $w = \left(z - \dfrac{\pi}{2}\right)\cos z$; [Ответ]

12) $w = \dfrac{\sin^3 z}{z}$; [Ответ]

13) $w = z(z^3-1)$; [Ответ]

14) $w = (z-\pi)\sin \pi z$; [Ответ]

15) $w = e^z + 1$; [Ответ]

16) $w = \sin z + 2$; [Ответ]

17) $w = 3 - \cos z$; [Ответ]

18) $w = (z^2+4)^3$; [Ответ]

19) $w = 1 - \operatorname{ch} z$; [Ответ]

20) $w = \operatorname{sh} z$; [Ответ]

13.3. Задания для самостоятельной работы

94. Найти порядок нуля z_0 аналитической функции $w = f(z)$.

1) $w = 6\sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$, $z_0 = 0$; [Ответ]

2) $w = e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

3) $w = \dfrac{(z^2 - 4\pi^2)\sin z}{z^2}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

4) $w = z^3(e^{z^3} - e^z)$, $z_0 = 0$; [Ответ]

5) $w = (z-1)^2 \sin^2 (z-1)^2$, $z_0 = 1$; [Ответ]

6) $w = \left(1 - \sqrt{2 - 2\cos z}\right)^2$, $z_0 = \dfrac{\pi}{3}$; [Ответ]

7) $w = \left(\sqrt{z} - 2\right)^3$, $z_0 = 4$; [Ответ]

8) $w = \cos z^3$, $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$; [Ответ]

9) $w = \cos^3 z$, $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$; [Ответ]

10) $w = \left(1 - \sqrt{2 - 2\sin z}\right)^2$, $z_0 = \dfrac{\pi}{6}$; [Ответ]

95. Существует ли функция $w = f(z)$, аналитическая в круге $D = \{z : |z - z_0| < 2\}$, для которой выполняются следующие условия?

1) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

2) $f\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = -f\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) = -\dfrac{1}{(n+1)^3}$, $n \in \mathbb{N}$, $z_0 = 1$; [Ответ]

3) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

4) $\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right| < 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

5) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{3n}{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

6) $f(z) = f(3z)$, $z \in D$, $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

7) $f(z) = f\left(\dfrac{z}{2}\right)$, $z \in D$, $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

8) $f(z) = f(z^2)$, $z, z^2 \in D$, $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

9) $f(z) = f\left(\sqrt{z}\right)$, $z \in D$, $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$, $z_0 = 0$, $\sqrt{1} = 1$; [Ответ]

10) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 3^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

13.4. Задания творческого характера

96. Функция $f(z) = \cos\frac{1}{z}$ имеет бесконечную последовательность нулей $z_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, сходящуюся к нулю. Однако $f(z) \not\equiv 0$. Нет ли здесь противоречия с теоремой единственности?

97. Точка z_0 называется A-точкой аналитической функции $w = f(z)$, если $f(z) = A$. Может ли последовательность A точек функции, отличной от тождественно равной постоянной и аналитической в $\mathbb{C}$, иметь предельную точку?

98. С помощью теоремы единственности доказать, что для всех $z \in \mathbb{C}$ выполняются равенства.

1) $\sin 2z = 2\sin z\cos z$; [Ответ]

2) $\operatorname{ch} 2z = \operatorname{sh}^z + \operatorname{ch}^2 z$; [Ответ]

3) $\sin^z + \cos^2 z = 1$; [Ответ]

4) $e^z \cdot e^{-z} = 1$. [Ответ]

99. Пусть функция $w = f(z)$ является аналитической в окрестности некоторой точки и множество E, принимаемой ею в этой окрестности значений, конечно. Доказать, что E состоит из одной точки.

100. Пусть функция $w = f(z)$, аналитическая в односвязной области $D(f)$, принимает только целые значения. Доказать, что $f(z) = \mathrm{const}$ в $D(f)$.

101. Пусть функция $w = f(z)$ является аналитической в области G и некоторая точка $z_0 \in G$ является ее нулем бесконечного порядка, т.е. $f(z_0) = 0$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ все производные $f^{(n)}(z_0) = 0$. Доказать, что $f(z) \equiv 0$ в G.

102. Пусть $p \in \mathbb{N}$ и $p \geqslant 2$. Существует ли отличная от тождественно равной постоянной и аналитическая в некоторой окрестности точки z_0 функция $w = f(z)$, удовлетворяющая в этой окрестности условию $f(z) = f(z^p)$?

103. Доказать, что если функция $w = f(z)$ является аналитической в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ и в каждой точке его границы, то она аналитически продолжается и в некоторый круг $D_\rho = \{z : |z| < \rho\}$, $\rho > 1$.

104. Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки z_0 и $f(z_0) = 0$. Доказать, что если $f(z)$ тождественно не равна нулю, то найдется окрестности точки z_0, в которой нет нулей $f(z)$, отличных от z_0.

105. Используя теорему единственности доказать, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt}\,dt = \frac{1}{z}, \quad \text{если } \operatorname{Re} z > 0.$$

Глава 14

Ряд Лорана

14.1. Задания для аудиторной работы

14.2. Базовые индивидуальные задания

14.3. Задания для самостоятельной работы

14.4. Задания творческого характера

Глава 15

Изолированные особые точки аналитической функции

15.1. Задания для аудиторной работы

15.2. Базовые индивидуальные задания

15.3. Задания для самостоятельной работы

15.4. Задания творческого характера

Глава 16

Вычисление вычетов

16.1. Задания для аудиторной работы

16.2. Базовые индивидуальные задания

16.3. Задания для самостоятельной работы

16.4. Задания творческого характера

Глава 17

Вычисление интегралов с помощью вычетов

17.1. Задания для аудиторной работы

17.2. Базовые индивидуальные задания

17.3. Задания для самостоятельной работы

17.4. Задания творческого характера

Глава 18

Вычисление определенных интегралов

18.1. Задания для аудиторной работы

18.2. Базовые индивидуальные задания

18.3. Задания для самостоятельной работы

18.4. Задания творческого характера

Глава 19

Вычисление несобственных интегралов

19.1. Задания для аудиторной работы

19.2. Базовые индивидуальные задания

19.3. Задания для самостоятельной работы

19.4. Задания творческого характера

Глава 20

Вычисление интегралов от многозначных функций

20.1. Задания для аудиторной работы

20.2. Базовые индивидуальные задания

20.3. Задания для самостоятельной работы

20.4. Задания творческого характера

Решения и указания

Глава 1. Комплексные числа и действия над ними

Решение задачи 1.1

Арифметические действия над комплексными числами осуществляются по обычным правилам с учетом того, что $i^2 = -1$. Поэтому,

$$z_1 + z_2 = 1 - i + 1 + i = 2,$$
$$z_1 \cdot z_2 = (1 - i)(1 + i) = 1^2 - i^2 = 1 + 1 = 2.$$

При делении комплексных чисел числитель и знаменатель дроби следует умножить на число, сопряженное знаменателю, т.е.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i-1}{2} = -i.$$

Осталось выполнить последнее действие:

$$z_1^2 + z_2^2 = (1-i)^2 + (1+i)^2 = 1 - 2i - 1 + 1 + 2i - 1 = 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 2.1

Изобразим число $z = 1 + i$ на комплексной плоскости Найдем модуль

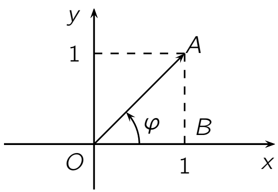

Рисунок Р.1

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Ясно, что $\arg z = \varphi = \angle AOB$. Поэтому

$$\operatorname{tg} \angle AOB = \frac{1}{1} = 1,$$

и

$$\arg z = \frac{\pi}{4}.$$

Модули и аргументы комплексных чисел $\overline{z} = 1 - i$, $-\overline{z} = -1 + i$ и $-z = -1 - i$ находятся аналогично. Здесь изобразим лишь их на комплексной плоскости. [Вернуться к условию]

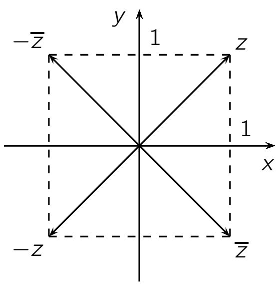

Рисунок Р.2

Решение задачи 3.1

Сначала найдем модуль и аргумент данного комплексного числа. Изобразим его на комплексной плоскости.

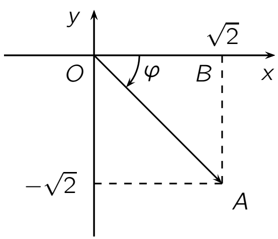

Рисунок Р.3

В этом случае

$$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = 2.$$

$$\arg z = \varphi = -\angle AOB = \frac{\pi}{4}.$$

Поэтому в тригонометрической форме

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

данное число запишется следующим образом

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

а в показательной форме

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

так

$$z = 2\, e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Для возведения числа в требуемую степень воспользуемся формулой Муавра

$$z^6 = |z|^6(\cos 6\varphi + i \sin 6\varphi) = 2^6 \left(\cos\left(-6 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-6 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 64 \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 64(0 + i) = 64i.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 4.1

Сначала найдем модуль и аргумент комплексного числа $z = 1$. Очевидно,

$$|z| = 1, \quad \arg z = 0.$$

Все значения корня находим по формуле

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

В данном случае

$$w_k = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1}e^{i\frac{2k\pi}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Подставляя все требуемые значения k, получаем

$$\begin{aligned}
w_0 &= e^0 = 1;\\
w_1 &= e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i;\\
w_2 &= e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1;\\
w_3 &= e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.
\end{aligned}$$

Все значения $\sqrt[4]{1}$ лежат в вершинах квадрата, вписанного в окружность радиуса 1 с центром в начале координат (рисунок Р.4). [Вернуться к условию]

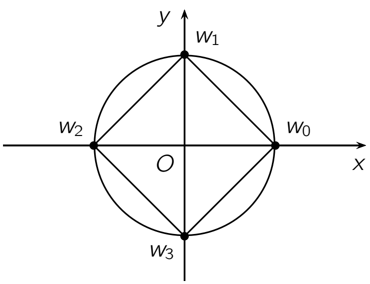

Рисунок Р.4

Решение задачи 5.1

Пусть $z = x + iy$. Тогда уравнение можно переписать в виде

$$(x + iy)^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0.$$

Выполним несложные преобразования

$$x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} + 2ixy = 0.$$

Комплексные числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части. Поэтому, последнее уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0, \\ 2xy = 0. \end{cases}$$

Принимая во внимание второе уравнение, возможны две ситуации. Если $x = 0$, то

$$-y^2 + \sqrt{y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = |y|,$$

т.е. $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 1$. Так как $z = x + iy$, то в этом случае решениями исходного уравнения будут числа $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$.

Если же $y = 0$, то

$$x^2 + \sqrt{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -|x|,$$

т.е. $x = 0$. В этом случае получим решением уравнения будет $z_1 = 0$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 6.1

Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$\operatorname{Re}(iz) = \operatorname{Re}(i(x+iy)) = \operatorname{Re}(ix - y) = -y$$

и поэтому

$$\{z :\ 0 < \operatorname{Re}(iz) < 1\} = \{z = x + iy :\ 0 < -y < 1\} = \\ = \{z = x + iy :\ -1 < y < 0\}.$$

Полученная область изображена на рисунке Р.5. [Вернуться к условию]

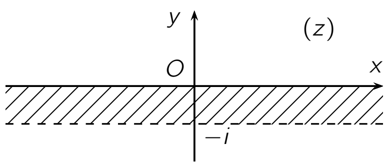

Рисунок Р.5

Решение задачи 7.1

Пусть $z = x + iy$. Выделив действительную и мнимую часть в правой часть исходного уравнения, получим

$$x + iy = i + \cos t + i \sin t = \cos t + i(1 + \sin t).$$

Комплексные числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части. Поэтому, последнее уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y - 1 = \sin t. \end{cases}$$

Возведем в квадрат оба уравнения и сложим. Получим

$$x^2 + (y-1)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t,$$

т.е.

$$x^2 + (y-1)^2 = 1? \quad t \in [0, 2\pi].$$

Значит, исходное уравнение задает на плоскости окружность с центром в точке $(0, 1)$ и радиусом 1 (рисунок Р.6).

[Вернуться к условию]

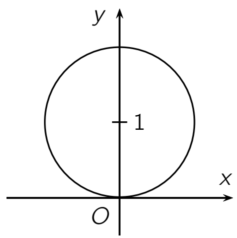

Рисунок Р.6

Глава 2. Элементарные трансцендентные функции

Решение задачи 10.1

По определению

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где главное значение аргумента $\arg z \in (-\pi, \pi]$. Так как $|-1| = 1$, а $\arg(-1) = \pi$, то

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i\pi + i2k\pi = i(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При возведении в степень поступим следующим образом. Так как

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z},$$

то

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i}.$$

Из определения логарифма следует, что

$$\operatorname{Ln} i = \ln|i| + i\arg i + i2k\pi = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} + i2k\pi = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому,

$$i^i = e^{i\cdot i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}+2m\pi},$$

где $m = -k \in \mathbb{Z}$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 11.1

а) Положим $z = x + iy$. Тогда

$$w = iz^2 = i(x+iy)^2 = i(x^2 + i2xy - y^2) = -2xy + i(x^2 - y^2).$$

Отсюда

$$\operatorname{Re} w = -2xy, \quad \operatorname{Im} w = x^2 - y^2.$$

б) Положим $z = x + iy$. Учитывая формулы для гиперболических функций, получаем

$$w = \operatorname{ch} iz = \operatorname{ch} i(x+iy) = \operatorname{ch}(ix - y) = \operatorname{ch} ix \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} ix \operatorname{sh} y.$$

Осталось применить формулы связи гиперболических и тригонометрических функций

$$\operatorname{ch} ix = \cos x, \quad \operatorname{sh} ix = i \sin x.$$

Окончательно,

$$w = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$

т.е.

$$\operatorname{Re} w = \cos x \operatorname{ch} y, \quad \operatorname{Im} w = -\sin x \operatorname{sh} y.$$

в) Пусть $z = |z|e^{i \arg z}$, $\arg z \in (-\pi, pi]$. По определению показательной функции

$$w = z^i = e^{i \operatorname{Ln} z} = e^{i(\ln|z| + i \arg z)} = e^{-\arg z + i \ln|z|} =$$
$$= e^{-\arg z} e^{i \ln|z|} = e^{-\arg z}(\cos(\ln|z|) + i \sin(\ln|z|)).$$

Тогда

$$\operatorname{Re} w = e^{-\arg z} \cos(\ln|z|), \quad \operatorname{Im} w = e^{-\arg z} \sin(\ln|z|).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 12.1

Воспользуемся определением. $\operatorname{Arccos} z$ — это такое число w, что

$$\cos w = z.$$

Учитывая определение $\cos w$ последнее равенство перепишем в виде

$$\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z.$$

Выразим w из этого уравнения. Сделаем замену

$$e^{iw} = t.$$

Получим и решим уравнение относительно t:

$$t + \frac{1}{t} = 2z, \quad t^2 - 2zt + 1 = 0.$$

Поскольку дискриминант этого уравнения $D = 4z^2 - 4$, то его решениями будут

$$t = z + \sqrt{z^2 - 1}.$$

Здесь корень принимает два значения и правая часть может быть переписана в виде

$$t = z \pm \sqrt{z^2 - 1}.$$

Но обычно это не делают. Далее, учитывая замену, получаем

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}.$$

Откуда следует, что

$$iw = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \quad w = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

т.е.

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

что и требовалось доказать.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 12.2

По определению

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Возведем оба равенства квадрат

$$\sin^2 z = \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4}, \quad \cos z = \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4},$$

и сложим

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \frac{1}{4}\left(-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}\right) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$$

Что и требовалось доказать. [Вернуться к условию]

Решение задачи 12.3

Воспользуемся определением тригонометрических функций

$$\operatorname{tg} iz = \frac{\sin iz}{\cos iz} = \frac{e^{i\cdot iz} - e^{i\cdot(-iz)}}{2i} : \frac{e^{i\cdot iz} + e^{i\cdot(-iz)}}{2} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} : \frac{e^{-z} + e^{z)}}{2}.$$

Осталось вспомнить, что

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{z}}{2}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} iz = -\frac{1}{i}\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = i \operatorname{th} z,$$

что и требовалось доказать.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 13.1

Воспользуемся формулой

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\,\operatorname{Ln} i\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

Получим,

$$\operatorname{Arcsin} i = -i\,\operatorname{Ln} i(i + \sqrt{-2}) = -i\,\operatorname{Ln} i(i \pm i\sqrt{2}) = -i\,\operatorname{Ln}(-1 \pm \sqrt{2}).$$

Заметим, что

$$\operatorname{Ln}(\sqrt{2} - 1) = \ln(\sqrt{2} - 1) + i2k\pi,$$

$$\operatorname{Ln}(-\sqrt{2} - 1) = \ln(\sqrt{2} + 1) + i\pi + i2k\pi.$$

Поэтому,

$$\operatorname{Arcsin} i = -i\big(\ln(\sqrt{2} - 1) + i2k\pi\big) = 2k\pi - i\ln(\sqrt{2} - 1)$$

или

$$\operatorname{Arcsin} i = -i\big(\ln(\sqrt{2} + 1) + i\pi + i2k\pi\big) = \pi + 2k\pi - i\ln(\sqrt{2} + 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 14.1

Очевидно,

$$z = \operatorname{Arccos} 2.$$

Для нахождения этих значений воспользуемся формулой

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

Получим,

$$\operatorname{Arccos} 2 = -i \operatorname{Ln}\left(2 + \sqrt{3}\right) = \\ = -i(\ln(2+\sqrt{3}) + i2k\pi) = 2k\pi - i\ln(2+\sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z},$$

т.е.

$$z = 2k\pi - i\ln(2+\sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

[Вернуться к условию]

Глава 3. Функции комплексного переменного

Решение задачи 9.1

Покажем, что предела

$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{Re} z}{z}$$

не существует. Для этого воспользуемся определением предела на языке последовательностей. Пусть

$$z_n=\frac{1}{n},\quad \text{а}\quad \widetilde{z}_n=\frac{i}{n}.$$

Обе эти последовательности сходятся к нулю, т.е.

$$z_n\to 0\quad \text{и}\quad \widetilde{z}_n\to 0.$$

При этом

$$f(z_n)=1,\quad \text{а}\quad f(\widetilde{z}_n)=0\quad \text{при любых } n\in\mathbb{N}$$

Это означает, что

$$f(z_n)\to 1,\quad \text{а}\quad f(\widetilde{z}_n)\to 0\quad \text{при } n\to\infty.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{Re} z}{z}$$

не существует.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 9.6

Покажем, что предел

$$\lim_{z\to 0}\frac{z\,\mathrm{Im}\,z}{|z|}=0.$$

Действительно,

$$0\leqslant|f(z)|=\left|\frac{z\,\mathrm{Im}\,z}{z}\right|=|\,\mathrm{Im}\,z|\leqslant z.$$

Но

$$\lim_{z\to 0}|z|=0.$$

Тогда и

$$\lim_{z\to 0}|f(z)|=0.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{z\to 0}f(z)=0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 10.1

Так как

$$w = \overline{z}^2 \cdot z = (x - iy)^2(x + iy) = (x^2 - y^2)x + 2xy^2 + i\big((x^2 - y^2)y - 2x^2y\big),$$

то

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = (x^2 - y^2)x + 2xy^2,$$

$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = (x^2 - y^2)y - 2x^2y.$$

Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в каждой точке (x, y), поэтому функция $w = \overline{z}^2 \cdot z$ непрерывна в каждой точке $z = x + iy$ комплексной плоскости. [Вернуться к условию]

Решение задачи 10.2

По определению

$$w = \sin z = \sin(x + iy) = \frac{e^{x+iy} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

Следовательно,

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(\sin z) = \sin x \operatorname{ch} y,$$

$$u(x, y) = \operatorname{Im}(\sin z) = \cos x \operatorname{sh} y.$$

Так как функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в каждой точке (x, y), то функция $w = \sin z$ непрерывна в каждой точке $z = x + iy$ комплексной плоскости. [Вернуться к условию]

Решение задачи 11.1

По критерию дифференцируемости функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке $z = x + iy$ тогда и только тогда, когда $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x, y) как функции двух действительных переменных и выполняются условия Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

В нашем случае $u(x, y) = xy$, $v(x, y) = x^2 - y^2$. Так как частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \ \frac{\partial u}{\partial y} = x, \ \frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial v}{\partial y} = -2y$$

непрерывны для любых (x, y), то u и v дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$. Условия Коши – Римана имеют вид:

$$\begin{cases} y = -2y, \\ x = -2x. \end{cases}$$

Они выполняются только в точке $(0, 0)$. Поэтому данная функция $w = f(z)$ дифференцируема только в точке $z = 0$.

Для аналитичности в точке z_0 требуется дифференцируемость $f(z)$ в некоторой ее окрестности. Следовательно, точек аналитичности $f(z)$ не имеет.

Производную функции $w = f(z)$ в точке дифференцируемости $z_0 = x_0 + iy_0$ будем находить по формуле

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

В нашем случае $z_0 = 0 = 0 + i0$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x$$

и, следовательно,

$$f'(0) = 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 12.1

Проведем те же рассуждения, что и при решении задачи 3.1. Имеем

$$w = x + ay + i(bx + cy),$$

$$u(x, y) = x + ay, \quad v(x, y) = bx + cy.$$

Частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \; \frac{\partial u}{\partial y} = a, \; \frac{\partial v}{\partial x} = b, \; \frac{\partial v}{\partial y} = c$$

непрерывны для любых (x, y), то $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$. Условия Коши – Римана имеют вид:

$$\begin{cases} 1 = c, \\ a = -b. \end{cases}$$

Поэтому функция $w = f(z)$ будет дифференцируемой, а значит и аналитической в $\mathbb{C}$ при условиях $a = -b$ и $c = 1$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 13.1

Проведем те же рассуждения, что и при решении задач 3.1, 4.1. Имеем

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \ \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \ \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

непрерывны для любых (x, y), то $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$. Условия Коши – Римана выполняются при любых (x, y). Значит функция $w = e^z$ дифференцируема в $\mathbb{C}$. Теперь найдем производную

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^{x+iy} = e^z.$$

Итак,

$$(e^z)' = e^z.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 14.1

Функция $u(x, y)$, имеющая в области G непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяющая в этой области уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

называется гармонической. В данном случае $u(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2? \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 1,$$

т.е. все частные производные второго порядка непрерывны. Однако, функция $u(x, y)$ не удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому $u(x, y)$ не является гармонической в области определения.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 15.1

Найдем частные производные функции $u(x, y) = \varphi(xy)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(xy) \cdot (xy)'_x = \varphi'(xy) \cdot y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(xy) \cdot x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi'(xy) \cdot y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi'(xy) \cdot x^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \varphi'(xy) + \varphi''(xy)xy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \varphi'(xy) + \varphi''(xy)xy.$$

Все частные второго порядка функции $u(x, y)$ непрерывны. Уравнение Лапласа имеет вид:

$$\varphi''(xy)(x^2 + y^2) = 0.$$

Отсюда следует, что $u(x, y)$ является гармонической в $\mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi''(t) = 0,$$

т.е. в случае, когда $\varphi(t)$ представляет собой линейную функцию:

$$\varphi(t) = at + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, гармонические функции такого вида заданы равенством

$$u(x, y) = axy + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 16.1

Первый способ. Находим функцию $v(x, y)$ по формуле

$$v(x, u) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + a, \quad a \in \mathbb{R},$$

где криволинейный интеграл берется по любой кривой, лежащей в $\mathbb{C}$ и соединяющей точку (x_0, y_0) с (x, y). Положим $(x_0, y_0) = (0, 0)$, а в качестве кривой интегрирования L возьмем ломаную $L = L_1 \cap L_2$ (см. рис. P.7),

$$L_1 = \{z \in \mathbb{C} : \; z(t) = t, t \in [0, x]\}, \; L_2 = \{z \in \mathbb{C} : \; z(t) = x + it, t \in [0, y]\}.$$

В данном случае

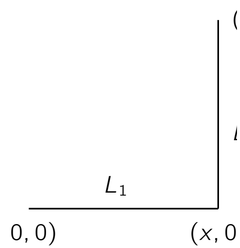

Рисунок P.7

$$u(x, y) = e^{-y} \cos x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-y} \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y} \sin x.$$

Поэтому,

$$v(x,y)=\int_0^x(-\cos t)\,dt+\int_0^y(-e^{-t}\sin x)\,dt+a=\sin x+\sin x\cdot e^{-t}\Big|_0^y+a=$$
$$=\sin x+e^{-y}\sin x-\sin x+a=e^{-y}\sin x+a.$$

Тогда искомая функция примет вид

$$f(z)=e^{-y}\cos x+ie^{-y}\sin x+a=e^{i(x+iy)}+a=e^{iz+a}.$$

Так как $f(-i)=e$, то $a=0$. Следовательно, $f(z)=e^{iz}$.

Второй способ. Так как функции $u(x,y)$и $v(x,y)$связаны условиями Коши – Римана, то $v(x,y)$ найдем из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\frac{\partial v}{\partial x}=e^{-y}\cos x,\\ \frac{\partial v}{\partial y}=-e^{-y}\sin x.\end{cases}$$

Интегрируя первое уравнение по переменной x, получаем

$$v(x,y)=e^{-y}\sin x+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — некоторая функция одной действительной переменной. Функция $v(x,y)$ удовлетворяет второму уравнению системы. Поэтому справедливо равенство

$$-e^{-y}\sin x+\varphi'(y)=-e^{-y}\sin x,$$

т.е. $\varphi'(y)=0$. Отсюда следует, что

$$\varphi(y)\equiv\text{const}=a\in\mathbb{R}.$$

Итак,

$$f(z)=e^{-y}\cos x+ie^{-y}\sin x+a.$$

Далее, поступая также как и в первом способе решения, окончательно получаем

$$f(z) = e^{iz}.$$

[Вернуться к условию]

Глава 4. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Решение задачи 34.1

Найдем производную данной функции

$$w' = 3z^2.$$

Коэффициент растяжения в точке равен модулю значения производной в этой точке, т.е.

$$k = |f'(z_0)| = |3 \cdot 1^2| = 3.$$

В свою очередь, угол поворота равен аргументу производной, т.е.

$$\theta = \arg f'(z_0) = \arg 3 = 0.$$

Таким образом, все кривые, проходящие через точку $z_0 = 1$ при отображении $w = z^3$ будут растягиваться с коэффициентом $k = 3$ и не будут поворачиваться. [Вернуться к условию]

Решение задачи 34.3

Найдем значение производной функции в данной точке

$$f'(z_0) = 3(1+i)^2 = 3(1+2i-1) = 6i.$$

Поэтому,

$$k = |f'(z_0)| = 6, \quad \theta = \arg f'(z_0) = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, все кривые, проходящие через точку $z_0 = 1 + i$ при отображении $w = z^3$ будут растягиваться с коэффициентом $k = 6$ и не будут поворачиваться на один и тот же угол $\theta = \pi/2$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 36.1

Найдем производную данной функции

$$w' = 4z^3.$$

Линейное растяжение характеризуется величиной $k = |f'(z)|$. При этом, если $k > 1$, то происходит растяжение, если же $k < 1$ — сжатие. Следовательно, в данном случае сжатие происходит при выполнении условия

$$|4z^3| < 1,$$

т.е. в круге

$$|z| < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Растяжение происходит при выполнении условия

$$|4z^3| > 1,$$

т.е. вне круга

$$|z| > \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 36.2

Найдем производную данной функции $w' = 2z-1$. В данном случае сжатие происходит при выполнении условия

$$|2z-1|<1,$$

а растяжение —

$$|2z-1|>1.$$

Выясним, что представляют собой эти области. Пусть $z = x+iy$, тогда

$$|2(x+iy)-1|<1,$$

$$|2x-1+2iy|<1,$$

$$\sqrt{(2x-1)^2+4y^2}<1,$$

$$(2x-1)^2+4y^2<1,$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2<\frac{1}{4}.$$

Таким образом, сжатие происходит в круге с центром в точке $(1/2, 0)$ радиуса $1/2$, а растяжение — вне его.

[Вернуться к условию]

Глава 8. Отображение с помощью элементарных функций

Решение задачи 50.1

Найдем, например, образ $w_3(D_3)$. Очевидно,

$$w_3 = z^4 = \left(|z|e^{i\arg z}\right)^4 = |z|^4 e^{4i\arg z}.$$

Если $|z| < 2$, то $|z^4| < 16$, а если

$$-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4},$$

то

$$-\pi < 4\arg z < \pi.$$

Поэтому,

$$w_3(D_3) = \{w : |w| < 16\} \setminus [-16, 0].$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 51.1

Найдем $w_1(D_1)$. Так как,

$$w_1 = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy},$$

то $|e^z|e^x$, а $\arg e^x = y$. Если $z \in D_1$, то $2 < x < 4$, $\pi/6 < y < \pi/3$. Тогда $w \in w_1(D_1)$ только в том случае, когда $e^2 < |w| < e^4$, а $\pi/6 < \arg w < \pi/3$, т.е.

$$w_1(D_1) = \left\{ w : \ e^2 < |w| < e^4, \ \frac{\pi}{6} < \arg w < \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Найдем $w_2(D_2)$. По определению

$$w_2 = \ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Если $z \in D_2$, то $1 < |z| < e$, а $0 < \arg z < \pi$. В этом случае $0 < \ln |z| < 1$, $0 < \arg z < \pi$. Поэтому,

$$w_2(D_2) = \{z : \ 1 < |z| < e, \ 0 < \arg z < \pi\}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 52.3

Пусть $|z| = r$, $\arg z = \varphi$. Тогда

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi = u + iv.$$

Если r фиксировано, а $\varphi \in [0, 2\pi)$, то

$$\frac{4u^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{4v^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1,$$

т.е. окружность $|z| = r \neq 1$ переходит в эллипс (при $r = 1$ — в отрезок $[-1, 1]$, так как $v \equiv 0$).

Пусть теперь $z \in D_1$. Тогда $1 < |z| < 2$, $\operatorname{Im} z > 0$, т.е. $1 < r < 2$, $\varphi \in (0, \pi)$. Поскольку при $1 < r < 2$ все эллипсы, являющиеся образами окружностей $|z| = r$, принадлежат внутренности эллипса ($r = 2$)

$$\frac{u^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 1, \tag{P.1}$$

и при $r \to 1$ стягиваются к отрезку $[-1, 1]$, то $w \in w(D_1)$ только в том случае, когда $\operatorname{Im} w = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi > 0$ и w лежит во внутренности эллипса (**??**), т.е.

$$w(D_1) = \left\{ w = u + iv : \ \operatorname{Im} w > 0,\ \frac{u^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} < 1 \right\}.$$

Если $z \in D_2$, то $1/2 < r < 1$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $\operatorname{Im} w(z) = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi < 0$, а $w(z)$ лежит во внутренности эллипса (**??**), т.е.

$$w(D_2) = \left\{ w = u + iv : \ \operatorname{Im} w < 0,\ \frac{u^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} < 1 \right\}.$$

Области $w(D_1)$ и $w(D_2)$ изображены рисунке P.8.

[Вернуться к условию]

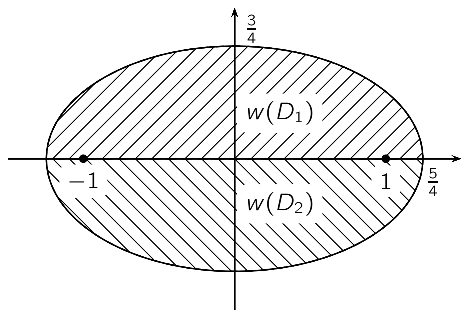

Рисунок Р.8

Решение задачи 53.1

По определению

$$w_3 = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})\cos x + i\frac{1}{2}(e^{-y} - e^y)\sin x.$$

Если $z \in D$, то $-\pi/2 < x < \pi/2$, $y > 0$. Поэтому,

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})\cos x > 0,$$

а

$$v(x, y) = \frac{1}{2}(e^{-y} - e^y)\sin x$$

пробегает все значения из $\mathbb{R}$. При этом $v(x, y) = 0$ только в том случае, когда $x = 0$ и

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}).$$

Но при $y > 0$

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) > 1.$$

Поэтому, $w \in w(D)$ только в том случае, когда $\operatorname{Re} w > 0$ и $w \neq [0, 1]$, т.е.

$$w(D) = \{w: \operatorname{Re} w > 0\} \setminus [0, 1].$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 54.1

Отображение $\tau = z - 6$ переводит полосу G_1 в полосу $G_1^* = \{\tau : 0 < \operatorname{Re}\tau < 6\}$ τ-плоскости (рисунок Р.9).

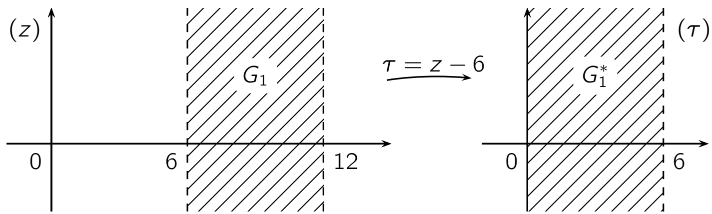

Рисунок Р.9

Отображение $\xi = \pi/6\tau$ переводит полосу G_1^* τ-плоскости в полосу $G_2^* = \{\xi : 0 < \operatorname{Re}\xi < \pi\}$ ξ-плоскости (рисунок Р.10).

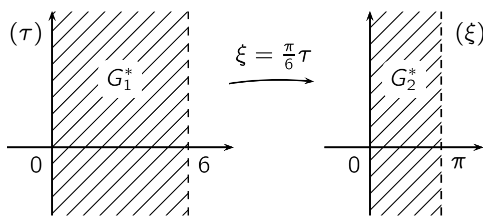

Рисунок Р.10

Отображение $w = e^{i\xi}$ переводит полосу G_2^* ξ-плоскости в верхнюю полуплоскость w-плоскости (рисунок Р.11).

Искомое отображение является композицией указанных трех отображений, т.е.

$$w = e^{i\frac{\pi(z-6)}{6}} : \; G_1 \to G_2.$$

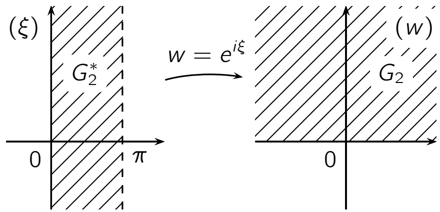

Рисунок Р.11

[Вернуться к условию]

Решение задачи 55.6

Отображение полуплоскости $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ на треугольник с вершинами в точках $A_1(0,0)$, $B_1(1,0)$ и $C_1(x_0, y_0)$, где $y_0 > 0$, $0 < \alpha_k < 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ (рисунок Р.12). задается интегралом Кристоффеля –

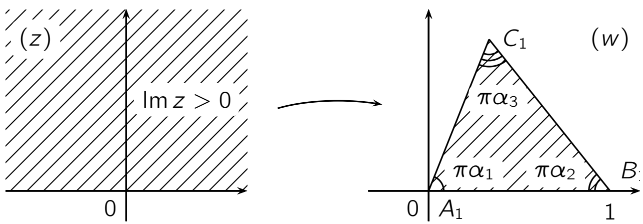

Рисунок Р.12

Шварца

$$w = \frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2)} \int_0^z \xi^{\alpha_1 - 1}(1-\xi)^{\alpha_2 - 1}\, d\xi,$$

где $B(x,y)$ — бета-функция Эйлера, т.е.

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt.$$

Отобразим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ указанного вида (рисунок Р.13).
Для этого используем последовательность элементарных преобразований:
1) $\tau = w - 3 - 3i$ — параллельный перенос;
2) $u = e^{i\pi}\tau$ — поворот на угол π;

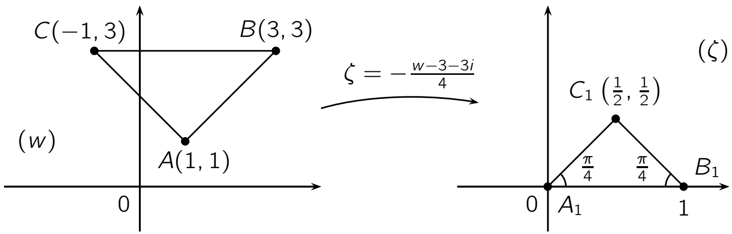

Рисунок Р.13

3) $\zeta = u/4$ — подобие.

Тогда искомое отображение является линейным и имеет вид

$$\zeta = -\frac{w-3-3i}{4}.$$

Так как

$$\zeta(1+i) = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2},$$

то $C_1(1/2, 1/2)$, т.е. треугольник $A_1B_1C_1$ — равнобедренный и углы при основании A_1B_1 равны $\pi/4$.

Тогда отображение верхней полуплоскости на треугольник $A_1B_1C_1$ имеет вид:

$$\zeta = \frac{1}{B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)} \int_0^z \xi^{-\frac{3}{4}}(1-\xi)^{-\frac{3}{4}}\,d\xi. \tag{Р.2}$$

Найдем отображение $\Delta A_1B_1C_1$ на ΔABC. Для этого найдем обратное отображение к линейному отображению $\zeta = -(w-3-3i)/4$, т.е. выразим w через ζ. В результате получим

$$w = -4\zeta + 3 + 3i. \tag{Р.3}$$

Тогда искомое отображение полуплоскости на ΔABC является композицией отображений (Р.2) и (Р.3), т.е.

$$w = \frac{-4}{B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)} \int_0^z \xi^{-\frac{3}{4}}(1-\xi)^{-\frac{3}{4}}\,d\xi + 3 + 3i.$$

[Вернуться к условию]

Глава 9. Отображение с помощью элементарных трансцендентных функций

Решение задачи 66.1

Для вычисления данного интеграла выделим действительную и мнимую часть подынтегральной функции. Пусть $z = x + iy$, тогда:

$$1 + 3\operatorname{Im} z - 4\bar{z} = 1 + 3y - 4(x - iy) = (1 + 3y - 4x) + 4iy = u(x, y) + iv(x, y).$$

Далее воспользуемся формулой

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\Gamma (v\,dx + u\,dy).$$

а) Составим уравнение прямой, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$ (другими словами, точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$). Искомое уравнение $y = x$. При этом $x \in [0, 1]$ и $dy = dx$.

Значит,

$$\int_\Gamma (1 + 3\operatorname{Im} z - 4\bar{z})\,dz =$$

$$= \int_\Gamma ((1 + 3y - 4x)\,dx - 4y\,dy) + i\int_\Gamma (4y\,dx + (1 + 3y - 4x)\,dy) =$$

$$= \int_0^1 (1 - 5x)\,dx + i\int_0^1 (1 + 3x)\,dx = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i.$$

б) В этом случае $y = x^2$, $x \in [0, 1]$ и $dy = 2x\,dx$. Следовательно:

$$\int_\Gamma (1 + 3\operatorname{Im} z - 4\bar{z})\,dz =$$

$$= \int_\Gamma (1 + 3x^2 - 4x - 8x^3)\,dx + i\int_\Gamma (6x^3 - 4x^2 + 2x)\,dx = -2 + \frac{7}{6}\,i.$$

в) Отрезок z_1z_3 является частью прямой $y=0$. При этом $x\in[0,1]$, $dy=0$. Отрезок z_3z_2 является частью прямой $x=1$. При этом $y\in[0,1]$, $dx=0$. Воспользовавшись свойством линейности криволинейного интеграла, получим

$$\int\limits_{\Gamma}(1+3\operatorname{Im}z-4\bar z)\,dz=$$

$$=\int\limits_{z_1z_3}(1+3\operatorname{Im}z-4\bar z)\,dz+\int\limits_{z_3z_2}(1+3\operatorname{Im}z-4\bar z)\,dz=$$

$$=\int\limits_0^1(1-4x)\,dx-\int\limits_0^1 4y\,dy+i\int\limits_0^1(3y-3)\,dy=-3-\frac{3}{2}\,i.$$

Вывод: интеграл от неаналитической функции зависит от формы пути интегрирования.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 67.1

Воспользуемся формулой

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(z(t)\big)\cdot z'(t)\,dt.$$

Уравнение прямой, проходящей через точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \pi - i\pi$ имеет вид $y = 2(1-x)$ или (в параметрической форме)

$$x = t, \quad y = 2(1-t),$$

при этом параметр t изменяется от 1 до 0. Поэтому в комплексной форме путь интегрирования задается уравнением $z = t + 2(1-t)i$. Так как $dz = (1-2i)\,dt$, то

$$\int_{\Gamma} |z|^2\,dz = \int_{1}^{0} |t + 2(1-t)i|^2 (1-2i)\,dt =$$

$$= -(1-2i)\int_{0}^{1} \left(t^2 + 4(1-t)^2\right)dt = -\frac{5}{3} + \frac{10}{3}\,i.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 68.1

В рассматриваемом случае подынтегральная функция является аналитической во всей комплексной плоскости, поэтому воспользуемся формулой Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z)\,dz = \left(3\frac{z^3}{3} + 2\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{1-i}^{1+i} =$$

$$= (z^3 + z^2)\Big|_{1-i}^{1+i} = (1+i)^3 + (1+i)^2 - (1-i)^3 + (1-i)^2 = 7 + 19i.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 68.2

Воспользуемся формулой интегрирования по частям. Положим $u = z$, $dv = \cos z\,dz$. Тогда $du = dx$, $v = \sin z$. Значит,

$$\int_0^i z\cos z\,dz = z\sin x\Big|_0^i - \int_0^i \sin z\,dz = i\sin i - 0 + \cos z\Big|_0^i = i\sin i + \cos i - 1.$$

Так как по формуле Эйлера $\cos i + i\sin i = e^{-1}$, окончательно получим

$$\int_0^i z\cos z\,dz = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 69.1

Функция $\operatorname{Ln} z$ является многозначной,

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k).$$

Поэтому для вычисления интеграла выделим нужную ветвь. Положим в этом равенстве $z = 2$, при этом $|z| = 2$, $\arg z = 0$. Получим

$$\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + i(0 + 2\pi k).$$

Учитывая условие $\operatorname{Ln} 2 = \ln 2$, заключаем, что $k = 0$ (главная ветвь). Значит, подынтегральная функция имеет вид:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z = \ln z.$$

Теперь вычисление интеграла можно провести двумя способами.

Первый способ. Пусть $z = 2\,e^{it}$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. При этом $\ln|z| = \ln 2$, $\arg z = t$, $dz = 2i\,e^{it}$. Поэтому,

$$\int\limits_{\Gamma} \operatorname{Ln} z\,dz = \int\limits_{\Gamma} (\ln|z| + i\arg z)\,dz = 2i\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\ln 2 + it)\,e^{it}\,dt =$$

$$= 2i\ln 2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{it}\,dt - 2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} t\,e^{it}\,dt =$$

$$= 2\ln 2\,e^{it}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + 2ti\,e^{it}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - 2i\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{it}\,dt =$$

$$= 4i\ln 2 - 2\,e^{it}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4i\ln 2 - 4i = 4i\ln\frac{2}{e}.$$

Второй способ. Выделенная ветвь $\ln z$ многозначной функции $\operatorname{Ln} z$ является аналитической во всей комплексной плоскости с разрезом по промежутку $(-\infty, 0)$ действительной оси. Поэтому для вычисления интеграла применим формулу Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_{\Gamma} \operatorname{Ln} z\, dz = \int\limits_{-2i}^{2i} \ln z\, dz = z \ln z \Big|_{-2i}^{2i} - \int\limits_{-2i}^{2i} dz =$$

$$= 2i \ln 2i + 2i \ln(-2i) - 4i = 4i \ln \frac{2}{e}.$$

Заметим, что интегрирование ведется по произвольному пути, соединяющему точки $-2i$ и $2i$ с условием, что этот путь не пересекает разреза $(-\infty, 0)$. [Вернуться к условию]

Глава 10. Интегральная теорема и формула Коши

Решение задачи 70.1

Рассмотрим функцию $f(z) = e^{-z^2}$. В силу аналитичности этой функции в $\mathbb{C}$ интеграл от нее по любому замкнутому контуру равен нулю. В частности,

$$\int_{ABCD} e^{-z^2}\,dz = 0,$$

где $ABCD$ — прямоугольник, изображенный на рис. P.14. Другими словами

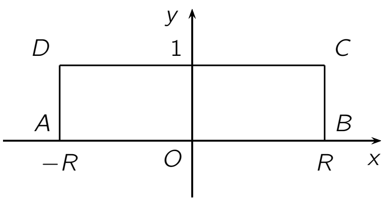

Рисунок P.14

$$\int_{AB} e^{-z^2}\,dz + \int_{BC} e^{-z^2}\,dz + \int_{CD} e^{-z^2}\,dz + \int_{DA} e^{-z^2}\,dz = 0. \tag{P.4}$$

Далее займемся каждым из интегралов, стоящих в левой части последнего равенства. Уравнение стороны AB имеет вид $y = 0$. При этом x изменяется от $-R$ до R. Поэтому

$$I_1 = \int_{AB} e^{-z^2}\,dz = \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx.$$

На стороне BC выполняются условия $z = R + iy$, $dz = i\,dy$, $y \in [0,1]$. Значит

$$I_2 = \int\limits_{BC} e^{-z^2}\,dz = i\int\limits_0^1 e^{-(R+iy)^2}\,dy.$$

Для стороны CD имеем $z = x + i$, $dz = dx$, x изменяется от R до $-R$. Тогда

$$I_3 = \int\limits_{CD} e^{-z^2}\,dz = -\int\limits_{-R}^{R} e^{-(x+i)^2}\,dx.$$

В случае отрезка DA $z = -R + iy$, $dz = i\,dy$, y изменяется от 1 до 0, и

$$I_4 = \int\limits_{DA} e^{-z^2}\,dz = -i\int\limits_0^1 e^{-(R-iy)^2}\,dy.$$

Теперь заметим, что равенство (P.4) останется в силе при увеличении R. Поэтому,

$$\lim_{R\to+\infty} I_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \quad \text{(интеграл Пуассона).}$$

Оценим интеграл I_2:

$$|I_2| = \left| i\int\limits_0^1 e^{-(R+iy)^2}\,dy \right| \leqslant \int\limits_0^1 \left| e^{-(R^2+2Ryi-y^2)} \right| dy =$$

$$= \int\limits_0^1 e^{-(R^2-y^2)} \left| e^{-2Ryi} \right| dy = \int\limits_0^1 e^{-(R^2-y^2)}\,dy =$$

$$= e^{-R^2}\int\limits_0^1 e^{y^2}\,dy < e^{-R^2}\cdot e = e^{-R^2+1}.$$

Поскольку
$$\lim_{R\to+\infty} e^{-R^2+1} = 0,$$
то и
$$\lim_{R\to+\infty} I_2 = 0.$$

Аналогичным образом можно показать, что
$$\lim_{R\to+\infty} I_4 = 0.$$

Что касается интеграла I_3, то
$$I_3 = -\int_{-R}^{R} e^{-(x^2+2xi-1)}\,dx = -e\int_{-R}^{R} e^{-x^2}(\cos 2x - i\sin 2x)\,dx.$$
В силу четности подынтегральной функции
$$\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\cos 2x\,dx = 2\int_{0}^{R} e^{-x^2}\cos 2x\,dx,$$
$$\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\sin 2x\,dx = 0.$$
Поэтому
$$\lim_{R\to+\infty} I_3 = -2e\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2x\,dx.$$

Осталось перейти к пределу при $R\to+\infty$ в равенстве (P.4)
$$\sqrt{\pi} - 2e\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2x\,dx = 0.$$

Откуда

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2x \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2e}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 74.1

Подынтегральная функция $f(z) = z/(1+z)$ является аналитической во всей комплексной плоскости за исключением точки $z = -1$ (нуля знаменателя). Сделаем рисунки, соответствующие каждому случаю (рис. P.15, P.16).

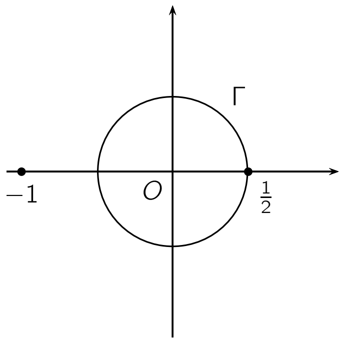

Рисунок P.15

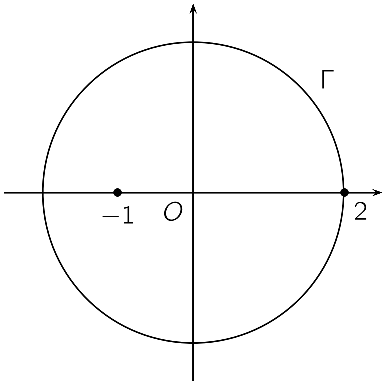

Рисунок P.16

а) Точка $z_0 = -1$ не лежит внутри окружности $\{|z| = 1/2\}$ (рис. P.15). Поэтому, по теореме Коши

$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z}{z+1}\,dz = 0.$$

б) Так как функция $f(z) = z$ аналитична во всей комплексной плоскости, точка $z_0 = -1$ лежит внутри окружности $|z| = 2$ ((рис. P.16)), то применим интегральную формулу Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

Получим

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z}{z+1}dz = 2\pi i f(-1) = -2\pi i.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 74.3

Подынтегральная функция $f(z) = e^z/(z^2+\pi^2)$ является аналитической во всей комплексной плоскости за исключением точек $z = \pm i\pi$ (нулей знаменателя). Сделаем рисунки, соответствующие каждому случаю (рис. Р.17, Р.18, Р.19).

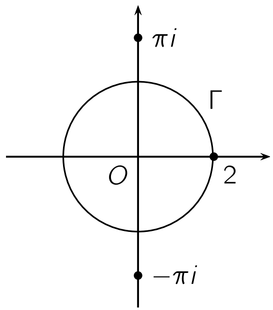

Рисунок Р.17

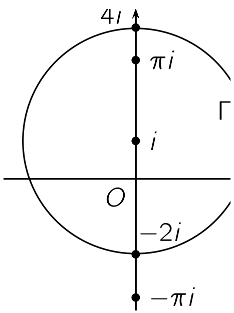

Рисунок Р.18

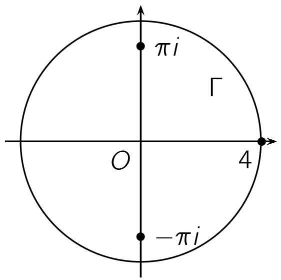

Рисунок Р.19

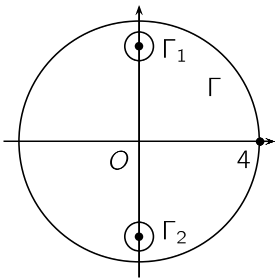

Рисунок Р.20

а) Внутри окружности $\{|z| = 2\}$ не лежит ни одна из точек $\pm\pi$ (рис. P.17). Поэтому, по теореме Коши

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+\pi^2}\,dz = 0.$$

б) Внутри окружности $\{|z-i| = 3\}$ лежит только точка π (рис. P.18). Преобразуем подынтегральную функцию

$$\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{e^z}{z^2+\pi^2}\,dz = \oint\limits_{|z-i|=3} \frac{e^z}{(z-\pi i)(z+\pi i)}\,dz = \oint\limits_{|z-i|=3} \frac{\frac{e^z}{z+\pi i}}{z-\pi i}\,dz.$$

Функция $f(z) = e^z/(z+\pi i)$ является аналитической в круге $\{|z-i| \leqslant 3\}$. Поэтому, применим интегральную формулу Коши:

$$\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{\frac{e^z}{z+\pi i}}{z-\pi i}\,dz = 2\pi i \left.\frac{e^z}{z+\pi i}\right|_{z=\pi i} = 2\pi i\,\frac{e^{i\pi}}{2\pi i} = -1.$$

в) Внутри окружности $\{|z| = 4\}$ лежат обе точки $\pm\pi$ (рис. P.19). Вычисление интеграла можно провести двумя способами.

Первый способ. Разложим дробь $1/(z^2+\pi^2)$ на простейшие дроби:

$$\frac{1}{z^2+pi^2} = \frac{1}{(z-\pi i)(z+\pi i)} = \frac{A}{z-\pi i} + \frac{B}{z+\pi i} = \\ = \frac{A(z+\pi i)+B(z-\pi i)}{(z-\pi i)(z+\pi i)}.$$

Приравняем получившийся и исходный числители:

$$A(z+\pi i) + B(z-\pi i) = 1.$$

При $z = \pi i$ получим

$$2\pi i A = 1, \quad A = \frac{1}{2\pi i} = -\frac{i}{2\pi}.$$

При $z = -\pi i$ получим

$$-2\pi i B = 1, \quad B = -\frac{1}{2\pi i} = \frac{i}{2\pi}.$$

Тогда

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2+\pi^2}\,dz = -\frac{i}{2\pi}\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z}{z-\pi i}\,dz + \frac{i}{2\pi}\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z}{z+\pi i}\,dz =$$

$$= -\frac{i}{2\pi} 2\pi i\, e^z\Big|_{z=\pi i} + \frac{i}{2\pi} 2\pi i\, e^z\Big|_{z=-\pi i} = e^{i\pi} - e^{-\pi i} = 0.$$

Второй способ. Построим две окружности Γ_1 и Γ_2 с центрами в точках πi и $-\pi i$ соответственно. Радиусы этих окружностей выберем таким образом, чтобы, во-первых, эти окружности не пересекались, и, во-вторых, чтобы эти окружности полностью лежали внутри пути интегрирования Γ. Этим условиям удовлетворяют, например, окружности $\Gamma_1 = \{|z-\pi i| = 1/2\}$ и $\Gamma_2 = \{|z+\pi i| = 1/2\}$ (см. рис. Р.21).

Подынтегральная функция является аналитической является аналитической в многосвязной области, ограниченной окружностями Γ, Γ_1 и Γ_2. Значит, по интегральной теореме Коши для многосвязной области

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2+\pi^2}\,dz = \oint\limits_{|z-\pi i|=1/2} \frac{e^z}{z^2+\pi^2}\,dz + \oint\limits_{|z+\pi i|=1/2} \frac{e^z}{z^2+\pi^2}\,dz.$$

Для каждого интеграла в правой части последнего равенства применим интегральную формулу Коши. Будем иметь

$$\oint\limits_{|z-\pi i|=1/2} \frac{e^z}{z^2+\pi^2}\,dz = \oint\limits_{|z-\pi i|=1/2} \frac{\frac{e^z}{z+\pi i}}{z-\pi i}\,dz = 2\pi i \frac{e^z}{z+\pi i}\Big|_{z=\pi i} = -1,$$

$$\oint\limits_{|z+\pi i|=1/2} \frac{e^z}{z^2+\pi^2}\,dz = \oint\limits_{|z+\pi i|=1/2} \frac{\frac{e^z}{z-\pi i}}{z+\pi i}\,dz = 2\pi i \frac{e^z}{z-\pi i}\Big|_{z=-\pi i} = 1.$$

Поэтому,

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2+\pi^2}\,dz = -1+1 = 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 74.5

Подынтегральная функция $f(z) = \operatorname{ch} z/(z+1)^2$ является аналитической во всей комплексной плоскости за исключением точки $z = -1$ (нуля знаменателя).

а) Точка $z_0 = -1$ не лежит внутри окружности $\{|z| = 1/2\}$ (рис. P.15). Поэтому, по теореме Коши

$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z}{z+1} dz = 0.$$

б) Так как функция $f(z) = \operatorname{ch} z$ аналитична во всей комплексной плоскости, точка $z_0 = -1$ лежит внутри окружности $|z| = 2$ (рис. P.16), то применим интегральную формулу Коши для производных:

$$f(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

В данном случае $n + 1 = 2$, т.е. $n = 1$. Поэтому, получим

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(-1) = 2\pi i \operatorname{sh} z\Big|_{z=-1} = -2\pi i \operatorname{sh} 1.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 74.7

Подынтегральная функция $f(z) = (z^2+5)/((z-1)^3(z+3))$ является аналитической во всей комплексной плоскости за исключением точек $z = 1$ и $z = -3$ (нулей знаменателя). Сделаем рисунки, соответствующие каждому случаю (рис. P.21, P.22, P.23).

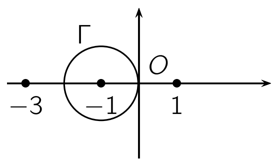

Рисунок P.21

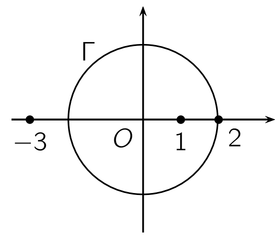

Рисунок P.22

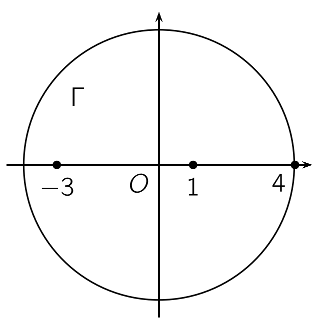

Рисунок P.23

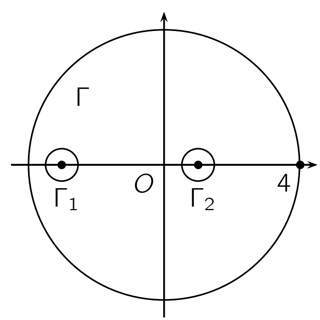

Рисунок P.24

а) Внутри окружности $\{|z+1|=1\}$ не лежит ни одна из точек 1 или -3 (рис. P.21). Поэтому, по теореме Коши

$$\oint\limits_{|z+1|=1} \frac{z^2+5}{(z-1)^3(z+3)}\,dz = 0.$$

б) Внутри окружности $\{|z|=2\}$ лежит только точка 1 (рис. P.22). Преобразуем подынтегральную функцию

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2+5}{(z-1)^3(z+3)}\,dz = \oint\limits_{|z|=2} \frac{\frac{z^2+5}{z+3}}{(z-1)^3}\,dz.$$

Функция $f(z)=(z^2+5)/(z+3)$ является аналитической в круге $\{|z|\leqslant 2\}$. Поэтому, применим интегральную формулу Коши для производных ($n+1=3$, $n=2$):

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\frac{z^2+5}{z+3}}{(z-1)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{z^2+5}{z+3}\right)''\Bigg|_{z=1} = \pi i\,\frac{28}{(z+3)^3}\Bigg|_{z=1} = \frac{7\pi i}{16}.$$

в) Внутри окружности $\{|z|=4\}$ лежат обе точки -3 и 1 (рис. P.23). Построим две окружности Γ_1 и Γ_2 с центрами в точках -3 и 1 соответственно. Радиусы этих окружностей выберем таким образом, чтобы, во-первых, эти окружности не пересекались, и, во-вторых, чтобы эти окружности полностью лежали внутри пути интегрирования Γ. Этим условиям удовлетворяют, например, окружности $\Gamma_1=\{|z+3|=1/2\}$ и $\Gamma_2=\{|z-1|=1/2\}$ (см. рис. P.24).

Подынтегральная функция является аналитической является аналитической в многосвязной области, ограниченной окружностями Γ, Γ_1 и Γ_2. Значит, по интегральной теореме Коши для многосвязной области

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{z^2+5}{(z-1)^3(z+3)}\,dz =$$

$$= \oint\limits_{|z+3|=1/2} \frac{z^2+5}{(z-1)^3(z+3)}\,dz + \oint\limits_{|z-1|=1/2} \frac{z^2+5}{(z-1)^3(z+3)}\,dz.$$

Для каждого интеграла в правой части последнего равенства применим интегральные формулы Коши (при этом второй из интегралов равен интегралу, вычисленному в пункте б)). Будем иметь

$$\oint\limits_{|z+3|=1/2} \frac{z^2+5}{(z-1)^3(z+3)}\,dz = \oint\limits_{|z+3|=1/2} \frac{\frac{z^2+5}{(z-1)^3}}{z+3}\,dz =$$

$$= 2\pi i \frac{z^2+5}{(z-1)^3}\Bigg|_{z=-3} = -\frac{7\pi i}{16},$$

$$\oint\limits_{|z-1|=1/2} \frac{z^2+5}{(z-1)^3(z+3)}\,dz = \frac{14\pi i}{4}.$$

Поэтому,

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{z^2+5}{(z-1)^3(z+3)}\,dz = -\frac{7\pi i}{16} + \frac{7\pi i}{16} = 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 74.14

В области, ограниченной окружностью $|z| = 5$, имеем две точки $z = 4i$, $z = -4i$, в которых знаменатель подынтегральной функции обращается в ноль.

Разложим подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{1}{z^2+16} = \frac{1}{(z+4i)(z-4i)} = \frac{1}{8i}\left(\frac{1}{z-4i} - \frac{1}{z+4i}\right).$$

Подставим в интеграл

$$\oint\limits_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16} = \frac{1}{8i}\oint\limits_{|z|=5} \frac{1}{z-4i}\,dz - \frac{1}{8i}\oint\limits_{|z|=5} \frac{1}{z+4i}\,dz.$$

К каждому из полученных интегралов, применим интегральную формулу Коши. Получим

$$\oint\limits_{|z|=5} \frac{1}{z-4i}\,dz = 2\pi i \cdot 1 = \frac{2}{\pi}i$$

$$\oint\limits_{|z|=5} \frac{1}{z+4i}\,dz = 2\pi i \cdot 1 = \frac{2}{\pi}i.$$

Окончательно,

$$\oint\limits_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16} = \frac{1}{8i}2\pi i - \frac{1}{8i}2\pi i = 0.$$

[Вернуться к условию]

Глава 12. Ряды Тейлора

Решение задачи 75.1

Находим

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Значит, $R = e$, область сходимости $|z| < e$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 75.2

Находим
$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$$
Значит, $R = 1$, область сходимости $|z-a| < 1$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 75.3

Находим

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln\frac{1}{n}}{n^2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-\ln n}{n^2}} = e^0 = 1.$$

Значит, $R = 1$, область сходимости $|z| < 1$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 75.4

Находим

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|(n + a^n)\right|^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} |a|, & \text{если } |a| > 1, \\ 1, & \text{если } |a| \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда при $|a| > 1$, $R = 1/|a|$, при $|a| \leqslant 1$, $R = 1$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 76.1

$$f(z)=\frac{1}{z-b}=\frac{1}{z-a-(b-a)}=\frac{-1}{(b-a)\left(1-\frac{z-a}{b-a}\right)}=$$
$$=\frac{-1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 76.2

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 76.3

Находим

$$f(z) = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2} = \frac{2z+3}{z^2+3z+2}.$$

Находим A и B

$$A(z+2) + B(z+1) = 2z+3,$$

$$(A+B)z + (2A+B) = 2z+3.$$

Решив систему

$$\begin{cases} A+B=2, \\ 2A+B=3, \end{cases}$$

получим $A=1$, $B=1$. Тогда разложение в ряд Тейлора

$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 76.4

$$f(z) = \frac{1-z}{(1+z+z^2)(1-z)} = \frac{1-z}{1-z^3} = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty}(z^3)^n =$$
$$= (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} z^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty}(z^{3n} - z^{3n+1}).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 76.5

Обозначим

$$z = (z-2) + 2 = t + 2.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
z^2 e^z =&(t+2)^2 e^{t+2} = e^2(t^2+4t+4)e^t = e^2(t^2+4t+4)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!} = \\
=&e^2(t^2+4t+4)\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots\right) = \\
=&e^2\left(1+t(4+1)+t^2\left(1+\frac{1}{2!}\right)+t^3\left(1+\frac{4\cdot 1}{2!}+\frac{4\cdot 1}{3!}\right)+\ldots+\right. \\
&\left.+\,t^n\left(\frac{4}{n!}+\frac{4}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}\right)+\ldots\right) = \\
=&e^2\sum_{n=3}^{\infty}t^n\left(\frac{4}{n!}+\frac{4}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)^2}\right)+e^2\left(1+5t+\frac{3}{2}t^2\right).
\end{aligned}$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 76.6

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \cos z\cos 3z = \frac{1}{2}(\cos 4z + \cos 2z) = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(4z)^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2z)^{2n}}{(2n)!} = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(4^{2n}+2^{2n})z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2^{4n-1}+2^{2n-1})z^{2n}.
\end{aligned}
$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 76.7

$$f(z) = e^z \cos z = e^z \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}(e^{(1+i)z} + e^{(1-i)z}) = \\ = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big((1+i)^n + (1-i)^n\big) z^n}{n!}.$$

Упростим выражение

$$\frac{1}{2}\big((1+i)^n + (1-i)^n\big) = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n + \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^n\left(e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right) = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

Окончательно получаем

$$e^z \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4} z^n}{n!}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 77.1

Воспользуемся формулой

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

где c_k находятся из бесконечной системы уравнений

$$\begin{aligned}
a_0 &= b_0 c_0,\\
a_1 &= b_0 c_1 + b_1 c_0,\\
a_2 &= b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_n &= b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \ldots + b_{n-1} c_1 + b_n c_0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

В данном случае имеем

$$a_{2k} = 0,\ \ a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!},\ \ a_1 = 1,\ \ a_3 = -\frac{1}{3!},\ \ a_5 = \frac{1}{5!};$$

$$b_{2k+1} = 0,\ \ b_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!},\ \ b_0 = 1,\ \ b_2 = -\frac{1}{2!},\ \ b_4 = \frac{1}{4!}.$$

Подставляя эти данные в систему, последовательно получаем

$$0 = 1 \cdot c_0, \quad \text{т.е. } c_0 = 0,$$

$$1 = 1 \cdot c_1 + 1 \cdot {}_0, \quad \text{т.е. } c_1 = 1,$$

$$0 = 1 \cdot c_2 + 0 \cdot c_1 + \left(-\frac{1}{2!}\right) \cdot c_0, \quad \text{т.е. } c_2 = 0,$$

$$-\frac{1}{6} = 1 \cdot c_3 + 1 \cdot c_2 + 0 \cdot c_0, \quad \text{т.е. } c_3 = -\frac{1}{6},$$

$$0 = 1 \cdot c_4 + 0 \cdot c_3 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot c_2 + 0 \cdot c_1 + \frac{1}{4!} c_0, \quad \text{т.е. } c_4 = 0,$$

$$\frac{1}{120} = 1 \cdot c_5 + 0 \cdot c_4 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot c_3 + 0 \cdot c_2 + \frac{1}{4!} c_1 + 0 \cdot c_0.$$

Последнее уравнение преобразуется к виду

$$\frac{1}{120} = c_5 + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}, \quad \text{т.е. } c_5 = -\frac{7}{60}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg} z = z - \frac{z^3}{6} - \frac{7}{60} z^5 + \ldots$$

[Вернуться к условию]

Глава 13. Нули аналитической функции. Теорема единственности

Решение задачи 86.1

Нулями функции $w = z \sin z$ являются точки $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Так как

$$f'(z) = \sin z + z \cos z$$

и $f'(z_k) \neq 0$ при $k \neq 0$, то порядок нулей $z_k = k\pi$ при $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ равен $n = 1$. Далее,

$$f''(z) = 2\cos z - z \sin z, \quad f''(0) \neq 0.$$

Поэтому порядок нуля $z_0 = 0$ равен $n = 2$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 87.1

Разложим данную функцию в ряд Тейлора по степеням z. Для этого воспользуемся известным разложением для e^{ξ}, положив $\xi = z^2$. В результате получим

$$z^2(e^{z^2}-1) = z^2\left(\frac{z^2}{1!}+\frac{z^4}{2!}+\frac{z^6}{3!}+\dots\right) = \\ = z^4\left(1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{3!}+\dots\right) = z^4\varphi(z),$$

где $\varphi(0) = 1 \neq 0$ и функция $\varphi(z)$ аналитична в точке 0 (как сумма степенного ряда). Отсюда следует, что $n = 4$, т.е. $z_0 = 0$ — нуль четвертого порядка. Решение этой задачи с помощью вычисления производных является более громоздким. [Вернуться к условию]

Решение задачи 88.1

Данная функция имеет нули в точках $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$. Так как

$$f'(z) = -\frac{2(z^2+18)}{z^5},$$

то $f'(z_1) \neq 0$ и $f'(z_2) \neq 0$. Это значит, что порядок этих нулей совпадает и равен 1. [Вернуться к условию]

Решение задачи 89.1

Предположим, что такая функция $w = f(z)$ существует. Рассмотрим множество $E = \{1/(2k+1)\}_{k=1}^{\infty}$ и функцию $g_1(z) \equiv 0$. Так как E в D имеет предельную точку $a = 0$, и $f(z) = g_1(z)$ для всех $z \in E$, то по теореме единственности $f(z) = g_1(z) = 0$ для всех $z \in D$. Рассмотрим теперь множество $E_1 = \{1/(2k)\}_{k=2}^{\infty}$ и функцию $g_2(z) \equiv 1$. E_1 имеет в D предельную точку $a = 0$, и аналитические функции $f(z)$ и $g_2(z)$ совпадают на E_1, т.е. $f(z) = g_2(z)$ для всех $z \in E_1$. По теореме единственности $f(z) = g_2(z) = 1$ для всех $z \in D$. Итак, одновременно $f(z)$ тождественно равна 0 и 1 в D. Полученное противоречие показывает, что функции с указанными свойствами не существует. [Вернуться к условию]

Решение задачи 90.1

Предположим, что такая функция $w = f(z)$ существует. Рассмотрим множество $E = \{1/(2k+1)\}_{k=1}^{\infty}$. Это множество имеет в D предельную точку $a = 0$. Функция $g(z) = z$ является аналитической в D и

$$f\left(\frac{1}{2k+1}\right) = g\left(\frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

По теореме единственности $f(z) = z$ для всех $z \in D$. В частности,

$$f\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Но по условию

$$f\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2k + \cos^2 k\pi} = \frac{1}{2k+1} \neq \frac{1}{2k} = f\left(\frac{1}{2k}\right).$$

Полученное противоречие показывает, что функции с указанными свойствами не существует.

[Вернуться к условию]

Ответы к задачам

Глава 1. Комплексные числа и действия над ними

Ответ к задаче 1.1

$2,\ 2,\ -i,\ 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.2

2, 2, i, 0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.3

$3 - i,\ 4 - 3i,\ -i,\ 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.4

$1 + 2i,\ -1 + i,\ 1 - i,\ -1 + 2i.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.5

$1,\ 1+i,\ -1-i,\ -1-2i.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.6

$2,\ 10,\ -4/5-3/5i,\ -16.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.1

$\sqrt{2}$, $\pi/4$, $\sqrt{2}$, $-\pi/4$, $\sqrt{2}$, $3\pi/4$, $\sqrt{2}$, $-3\pi/4$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.2

$2,\ \pi/3,\ 2,\ -\pi/3,\ 2,\ 2\pi/3,\ 2,\ -2\pi/3.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.3

$2,\ \pi/6,\ 2,\ -\pi/6,\ 2,\ 5\pi/6,\ 2,\ -5\pi/6.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.4

$1, \ \pi/2, \ 1, \ -\pi/2, \ 1, \ \pi/2, \ 1, \ -\pi/2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.5

$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \pi,\ 1,\ \pi.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.6

$1,\ -\pi/4,\ 1,\ \pi/4,\ 1,\ -3\pi/4,\ 1,\ 3\pi/4.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.1

$2e^{-\pi i/4}$, $64i$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.2

$2e^{-\pi i/3}$, 64.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.3

$2e^{\pi i/6}$, -64.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.4

$\sqrt{2}e^{3\pi i/4}$, $8i$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.5

$e^{-\pi i/2}$, -1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.6

$e^{\pi i/2}$, -1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.1

$1,\ i,\ -1,\ -i.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.2

$\sqrt{3}/2 - i/2$, i, $-\sqrt{3}/2 - i/2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.3

$1/2 + i\sqrt{3}/2,\ -1,\ 1/2 - i\sqrt{3}/2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.4

$\sqrt{2}/2(1+i)$, $\sqrt{2}/2(-1+i)$, $\sqrt{2}/2(-1-i)$, $\sqrt{2}/2(1-i)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.5

$\sqrt{3} + i,\ -\sqrt{3} + i,\ -2i.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.6

$\sqrt{6}/2 + i\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{6}/2 - i\sqrt{2}/2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.1

$0,\ -i,\ i.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.2

$4 + 3i$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.3

$-1/3 - 2/3i$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.4

$-1 - i$, $2 - i$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.5

$-1 + 3/2i$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.6

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.2

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.3

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.4

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.5

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.6

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.1

окружность $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.2

отрезок с концами в точках $z_1 = 0$, $z_2 = 4 + 8i$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.3

гипербола $y = 1/x$, $x > 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.4

парабола $y = x^2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.5

$-1 + 3/2i$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.6

полуокружность $x^2 + y^2 = 1,\ y \geqslant 0.$ [Вернуться к условию]

Глава 2. Элементарные трансцендентные функции

Ответ к задаче 10.1

$i(\pi + 2k\pi)$, $e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.2

$i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.3

$\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $e^{-\pi+2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.4

$\ln\sqrt{2}+i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right),\ e^{2k\pi},\ k\in\mathbb{Z}.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.5

$\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $e^{-\frac{\pi}{3}+2k\pi+i\ln\sqrt{2}}$, $k\in\mathbb{Z}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.6

$i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $e^{(-1+i)\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$, $k\in\mathbb{Z}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11.1

а) $-2xy$, $x^2 - y^2$; б) $\cos x \operatorname{ch} y$, $-\sin x \operatorname{sh} y$; в) $e^{-\arg z}\cos(\ln|z|)$, $e^{-\arg z}\sin(\ln|z|)$, $\arg z \in (-\pi, \pi]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11.2

а) $\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}$, $\dfrac{2x}{x^2+(y-1)^2}$; б) $\cos y \operatorname{sh} x$, $\sin y \operatorname{ch} x$; в) $e^{-\frac{\pi}{2}y}\cos\dfrac{\pi x}{2}$, $e^{-\frac{\pi}{2}y}\sin\dfrac{\pi x}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11.3

а) $y^2 - x^2 - 2x$, $-2xy + 2y$; б) $\cos y \operatorname{ch} x$, $\sin y \operatorname{sh} x$; в) $e^{-\pi y} \cos \pi x$, $e^{-\pi y} \sin \pi x$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11.4

а) $\dfrac{x}{x^2+y^2}+x,\ \dfrac{-y}{x^2+y^2}+y$; б) $-\sin y \operatorname{ch} x,\ \cos y \operatorname{sh} x$; в) $e^{-\frac{\pi}{4}x}\cos\dfrac{\pi y}{4},\ e^{-\frac{\pi}{4}x}\sin\dfrac{\pi y}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11.5

а) x^2+y^2-y, x; б) $-\cos x \operatorname{sh} y$, $\sin x \operatorname{ch} y$; в) $e^{\frac{\pi}{4}y}\cos\dfrac{\pi x}{4}$, $-e^{\frac{\pi}{4}y}\sin\dfrac{\pi x}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11.6

а) $\dfrac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$, $\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$; б) $-\cos x \operatorname{sh} y$, $\sin x \operatorname{ch} y$; в) $e^{\ln|z|-\arg z}\cos(\arg z + \ln|z|)$, $e^{\ln|z|-\arg z}\sin(\arg z + \ln|z|)$, $\arg z \in (-\pi, \pi]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 13.1

$2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1)$, $\pi + 2k\pi - i\ln(\sqrt{2}+1)$, $k \in \mathbb{Z}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 13.2

$\pm\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\pm i\ln(\sqrt{2}\pm 1)$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 13.3

$2k\pi \pm i\ln(2+\sqrt{3})$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 13.4

$i\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 13.5

$\ln(\sqrt{5} \pm 2) + i\pi\left(2k \pm \frac{1}{2}\right);$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 13.6

$\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \ \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 14.1

$2k\pi \pm i\ln(2+\sqrt{3})$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 14.2

$\frac{\pi}{4} + 2k\pi - i\ln(\sqrt{2} \pm 1);$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 14.3

$2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1)$, $(2k+1)\pi - i\ln(\sqrt{2}+1)$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 14.4

$\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+(2k+1)\pi\right)+\frac{i}{4}\ln 5;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 14.5

$i\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 14.6

$2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 14.7

$2k\pi \pm i \ln(2+\sqrt{3})$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 14.8

$i\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$;

[Вернуться к условию]

Глава 3. Функции комплексного переменного

Ответ к задаче 9.1

нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 9.2

нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 9.3

нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 9.4

да, 0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 9.5

нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 9.6

да, 0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11.1

а) $z = 0$, б) $\emptyset$, в) $w'(0) = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11.2

а) $z = x + ix$, $x \in \mathbb{R}$, б) $\emptyset$, в) $w'(z) = 2z$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11.3

а) $z = 0$, б) $\emptyset$, в) $w'(0) = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11.4

а) $\forall z \in \mathbb{C}$, б) $\forall z \in \mathbb{C}$, в) $w'(z) = 3x^2 - 3y^2 + i6xy$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11.5

а) $z = 0$, б) $\emptyset$, в) $w'(0) = 0$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11.6

а) $z = 0$, б) $\emptyset$, в) $w'(0) = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.1

а) $a = -b$, $c = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.2

а) $c = 2a = -2b$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.3

а) $a = -2b = -2c$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.4

а) $a = c$, $b = -1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.5

а) $c = 2b = -2a$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.6

а) $a = -c$, $b = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 14.1

нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 14.2

да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 14.3

да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 14.4

да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 14.5

да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 14.6

да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.1

да, $u = axy + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.2

да, $u = \alpha(ax + by) + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.3

не существует.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.4

да, $u = a \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y} + b,\ a, b \in \mathbb{R}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.5

да, $u = a \ln(x^2 + y^2) + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.6

да, $u = \dfrac{ax}{x^2 + y^2} + b,\ a, b \in \mathbb{R}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.1

$f(z) = e^{iz}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.2

$f(z) = ie^{iz}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.3

$f(z) = i(z^2 - z)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.4

$f(z) = \dfrac{i}{z}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.5

$f(z) = \sin z$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.6

$f(z) = \operatorname{ch} z.$

[Вернуться к условию]

Глава 4. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Ответ к задаче 34.1

3, 0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 34.3

6, $\pi/2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 36.1

$|z| < 1/\sqrt[3]{4}$ сжимается, $|z| > 1/\sqrt[3]{4}$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 36.2

$(x-1/2)^2+y^2<1/4$ сжимается, $(x-1/2)^2+y^2>1/4$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 36.3

?????????

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 36.4

????????? [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 36.5

?????????

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 36.6

?????????

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 37.1

??????????

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 37.2

??????????

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 37.3

??????????

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 37.4

??????????

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 37.5

??????????

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 37.6

?????????? [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 38.1

??????????

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 38.2

??????????

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 38.3

??????????

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 38.4

??????????

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 38.5

??????????

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 38.6

??????????

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.1

$\sqrt{2}$, $\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.2

3, 0;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.3

4, 0;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.4

$\sqrt{2}$, $-\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.5

$3,\ \pi;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.6

4, $-\pi/2$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.7

$\sqrt{2}$, $3\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.8

6, $\pi/2$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.9

$8\sqrt{2}$, $3\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.10

$\sqrt{2}$, $-3\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.11

$6, \ -\pi/2;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.12

$8\sqrt{2}$, $-3\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.13

2, $\pi/3$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.14

$6, \ -\pi/2;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.15

$8\sqrt{2}$, $\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.16

$2, \ -\pi/3;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.17

$6,\ \pi/2;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.18

$8\sqrt{2}$, $-\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.19

2, $2\pi/3$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.20

24, $\pi/2$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.21

$64\sqrt{2}$, $3\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.22

$2, \ -2\pi/3;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.23

24, $-\pi/2$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.24

$64\sqrt{2}$, $-3\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.25

$2, \pi/6;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.26

24, $-\pi/2$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.27

$64\sqrt{2}$, $\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.28

$2,\ -\pi/6;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.29

24, $-\pi/2$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39.30

$64\sqrt{2}$, $-\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.1

2, $\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.2

$1/2$, $\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.3

$5,\ \operatorname{arctg}\dfrac{8}{15};$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.4

$1/\sqrt{2}$, $-\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.5

$1/\sqrt{2}$, $\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.6

$1/\sqrt{2}$, $-3\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.7

$1/\sqrt{2}$, $3\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.8

2, π;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.9

$3,\ -\pi/2;$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.10

$1/3, \ -\pi/2;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.11

$7, \operatorname{arctg} \dfrac{20}{21};$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.12

$\sqrt{2}$, $-\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.13

$\sqrt{2}$, $\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.14

$\sqrt{2}$, $-3\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.15

$\sqrt{2}$, $3\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.16

1, π;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.17

$4,\ \pi/3;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.18

$1/4$, $\pi/3$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.19

$7, \ \operatorname{arctg}\dfrac{24}{7};$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.20

$\sqrt{2}/6,\ -\pi/4;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.21

$\sqrt{2}/6$, $\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.22

$\sqrt{2}/6$, $-3\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.23

$\sqrt{2}/6$, $3\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.24

$1/2$, π;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.25

5, $-\pi/6$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.26

$1/6$, $-\pi/2$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.27

$6, \ \operatorname{arctg} \dfrac{5}{12};$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.28

$3/\sqrt{2}$, $\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.29

$2\sqrt{2}$, $-3\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40.30

$\frac{2}{7}$, π;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.1

$\operatorname{Re} z < 0$ сжимается, $\operatorname{Re} z > 0$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.2

$|z| < \dfrac{1}{\sqrt[3]{12}}$ сжимается, $|z| > \dfrac{1}{\sqrt[3]{12}}$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.3

$|z| < \frac{1}{\sqrt{6}}$ сжимается, $|z| > \frac{1}{\sqrt{6}}$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.4

$|z| < \frac{1}{8}$ сжимается, $|z| > \frac{1}{8}$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.5

$|z+2| > 1$ сжимается, $|z+2| < 1$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.6

$|z+1|>1$ сжимается, $|z+1|<1$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.7

$|z+2| < 1/2$ сжимается, $|z+2| > 1/2$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.8

$\operatorname{Re} z < 0$ сжимается, $\operatorname{Re} z > 0$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.9

$|z| < \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}}$ сжимается, $|z| > \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}}$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.10

$|z| < \dfrac{1}{\sqrt{12}}$ сжимается, $|z| > \dfrac{1}{\sqrt{12}}$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.11

$|z| < \dfrac{1}{4}$ сжимается, $|z| > \dfrac{1}{4}$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.12

$|z+5|>1$ сжимается, $|z+5|<1$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.13

$|z+3| > 1$ сжимается, $|z+3| < 1$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.14

$|z+1| < 1/2$ сжимается, $|z+1| > 1/2$ растягивается. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.15

$\operatorname{Re} z < 0$ сжимается, $\operatorname{Re} z > 0$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.16

$|z| < \dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}$ сжимается, $|z| > \dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.17

$|z| < \dfrac{1}{\sqrt{9}}$ сжимается, $|z| > \dfrac{1}{\sqrt{9}}$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.18

$|z| < \frac{1}{10}$ сжимается, $|z| > \frac{1}{10}$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.19

$|z+3|>1$ сжимается, $|z+3|<1$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.20

$|z+2|>1$ сжимается, $|z+2|<1$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.21

$|z+3|<1/2$ сжимается, $|z+3|>1/2$ растягивается. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.22

$\operatorname{Re} z < 0$ сжимается, $\operatorname{Re} z > 0$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.23

$|z| < \dfrac{1}{\sqrt[3]{20}}$ сжимается, $|z| > \dfrac{1}{\sqrt[3]{20}}$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.24

$|z| < \dfrac{1}{\sqrt{21}}$ сжимается, $|z| > \dfrac{1}{\sqrt{21}}$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.25

$|z| < \frac{1}{6}$ сжимается, $|z| > \frac{1}{6}$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.26

$|z+8|>1$ сжимается, $|z+8|<1$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.27

$|z+7|>1$ сжимается, $|z+7|<1$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.28

$|z+4| < 1/2$ сжимается, $|z+4| > 1/2$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.29

$\operatorname{Re} z < 0$ сжимается, $\operatorname{Re} z > 0$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.30

$|z| < \dfrac{1}{\sqrt[3]{28}}$ сжимается, $|z| > \dfrac{1}{\sqrt[3]{28}}$ растягивается.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.1

$|z| = \dfrac{1}{10};$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.2

$|z-3| = \frac{1}{2}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.3

$|z+4|=1$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.4

$|z - 3i| = \sqrt{6}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.5

$\operatorname{Re} z = 0$; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.6

$|z| = \frac{1}{6}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.7

$|z - 5| = \dfrac{1}{2};$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.8

$|z+2|=1$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.9

$|z - 7i| = \sqrt{14}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.10

$\operatorname{Re} z = 0$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.11

$|z| = \dfrac{1}{8}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.12

$|z-7| = \frac{1}{2};$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.13

$|z+8|=1$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.14

$|z - 9i| = 3\sqrt{2}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.15

$\operatorname{Re} z = 0$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.16

$|z| = \dfrac{1}{18}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.17

$|z-4|=\frac{1}{2};$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.18

$|z+7| = 1;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.19

$|z - 7i| = \sqrt{14}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.20

$\operatorname{Re} z = 0$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.21

$|z| = \dfrac{1}{12};$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.22

$|z-8|=\frac{1}{2}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.23

$|z+6|=1;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.24

$|z - 5i| = \sqrt{10}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.25

$\operatorname{Re} z = 0$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.26

$|z| = \dfrac{1}{14}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.27

$|z - 6| = \frac{1}{2};$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.28

$|z+9|=1;$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.29

$|z - 4i| = 2\sqrt{2}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42.30

$\operatorname{Re} z = 0$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.1

$\arg z = -\pi/6$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.2

$\operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z > 0;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.3

$\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Re} z > 3$; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.4

$\arg z = -\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.5

$\operatorname{Re} z = 0$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.6

$\arg z = -\pi/2$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.7

$\operatorname{Re} z < 0$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.8

$\arg z = -\pi/6$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.9

$\operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z > 0;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.10

$\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Re} z > 7$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.11

$\arg z = -\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.12

$\operatorname{Re} z = 0$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.13

$\arg z = -\pi/2$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.14

$\operatorname{Re} z < 0$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.15

$\arg z = -\pi/6$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.16

$\operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z > 0;$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.17

$\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Re} z > 5$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.18

$\arg z = -\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.19

$\operatorname{Re} z = 0$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.20

$\arg z = -\pi/2;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.21

$\operatorname{Re} z < 0$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.22

$\arg z = -\pi/6;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.23

$\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Re} z > 0$; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.24

$\operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z > 6;$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.25

$\arg z = -\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.26

$\operatorname{Re} z = 0$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.27

$\arg z = -\pi/2$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.28

$\operatorname{Re} z < 0$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.29

$\arg z = -\pi/6$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43.30

$\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Re} z > 4$;

[Вернуться к условию]

Глава 5. Линейная функция

Ответ к задаче 44.1

параллельный перенос на вектор, параллельный мнимой оси; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.2

параллельный перенос на вектор, параллельный действительной оси;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.3

поворот на угол π и параллельный перенос;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.4

поворот на угол $\pi/2$ и параллельный перенос; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.5

поворот на угол $\pi/3$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.6

растяжение в 6 раз;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.7

поворот на угол $(-\pi/4)$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.8

параллельный перенос на вектор, параллельный мнимой оси;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.9

параллельный перенос на вектор, параллельный действительной оси; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.10

поворот на угол π и параллельный перенос;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.11

поворот на угол $\pi/2$ и параллельный перенос;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.12

поворот на угол $\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.13

растяжение в 8 раз;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.14

поворот на угол $3\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.15

параллельный перенос на вектор, параллельный мнимой оси;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.16

параллельный перенос на вектор, параллельный действительной оси;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.17

поворот на угол π и параллельный перенос;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.18

поворот на угол $\pi/2$ и параллельный перенос;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.19

поворот на угол $\pi/6$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.20

растяжение в 4 раза;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.21

поворот на угол $\pi/4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.22

параллельный перенос на вектор, параллельный мнимой оси;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.23

параллельный перенос на вектор, параллельный действительной оси;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.24

поворот на угол π и параллельный перенос;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.25

поворот на угол $\pi/2$ и параллельный перенос;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.26

поворот на угол $\pi/2$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.27

растяжение в 5 раз;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.28

поворот на угол $(-3\pi/4)$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.29

поворот на угол $-\pi/2$ и параллельный перенос;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.30

поворот на угол $(-\pi/3)$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 45.1

$w = z + b$, $w = -z + b - 4i$, $b \in \mathbb{R}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 45.2

$w = z + bi$, $w = -z + 3 + bi$, $b \in \mathbb{R}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 45.3

$w = az + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 45.4

$w = -i(az + b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 45.5

$w = az + bi,\ a, b \in \mathbb{R},\ a > 0;$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 45.6

$w = i(az + b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 45.7

$w = -az + b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a > 0;$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 45.8

$w = az + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.1

$w = (2/5 - 1/5i)z + 1/5 + 7/5i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.2

$w = (1 + i)z + 1 - 2i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.3

$w = (3/5 + 6/5i)z + 12/5 - 16/5i$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.4

$w = (19/29 - 4/29i)z + 4/29 + 48/29i;$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.5

$w = (9/5 + 2/5i)z + 2/5 - 14/5i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.6

$w = (9/29 - 8/29i)z + 16/29 + 76/29i;$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.7

$w = (13/5 + 4/5i)z + 8/5 - 36/5i$; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.8

$w = (7/13 - 4/13i)z + 4/13 + 20/13i;$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.9

$w = (1/13 - 8/13i)z + 16/13 + 28/13i$; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.10

$w = (2+i)z + 2 - 6i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.11

$w = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}z + 5 + 5i$, $w = (1+i)z + 5(1+i)$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.12

$w = -\frac{iz}{2} + i\frac{3}{2} - 1;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.13

$w = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}z + 6 + 6i$, $w = (1 + i)z + 6(1 + i)$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.14

$w = -\frac{iz}{2} + 4i - 1;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.15

$w = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}z + 4 + 4i$, $w = (1 + i)z + 4(1 + i)$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.16

$w = -\frac{iz}{2} + i\frac{7}{2} - 1;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.17

$w = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}z + 3 + 3i$, $w = (1+i)z + 3(1+i)$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.18

$w = -\frac{iz}{2} + i\frac{1}{2} - 1;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.19

$w = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}z + 8 + 8i$, $w = (1+i)z + 8(1+i)$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.20

$w = -\frac{iz}{2} + i - 1;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.21

$w = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}z + 2 + 2i$, $w = (1+i)z + 2(1+i)$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.22

$w = -\dfrac{iz}{2} + 2i - 1;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.23

$w = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}z + 7 + 7i$, $w = (1+i)z + 7(1+i)$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.24

$w = -\frac{iz}{2} + 5i - 1;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.25

$w = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}z + 1 + i$, $w = (1 + i)z + 1 + i$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.26

$w = -\dfrac{iz}{2} + 3i - 1;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.27

$w = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}z + 9 + 9i$, $w = (1+i)z + 9(1+i)$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.28

$w = -\frac{iz}{2} + i\frac{9}{2} - 1;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.29

$w = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}z + 10 + 10i$, $w = (1+i)z + 10(1+i)$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46.30

$w = -\frac{iz}{2} + i\frac{5}{2} - 1;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.1

$z_0 = 1/2 + 1/4i$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.2

нет неподвижной точки;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.3

$z_0 = 3/5 - 6/5i$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.4

$z_0 = -3$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.5

$z_0 = -3 - i$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.6

нет неподвижной точки;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.7

$z_0 = 4/5 + 8/5i$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.8

$z_0 = 1/2;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.9

$z_0 = -1 + 2/3i$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.10

нет неподвижной точки;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.11

$z_0 = 1/10 - 3/10i$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.12

$z_0 = 1/3;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.13

$z_0 = -1 - i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.14

нет неподвижной точки;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.15

$z_0 = 1/5 + 3/5i$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.16

$z_0 = -2;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.17

$z_0 = -2 - 3i$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.18

нет неподвижной точки;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.19

$z_0 = 1/10 - 3/10i$; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.20

$z_0 = -1$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.21

$z_0 = 1 + 1/3i$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.22

нет неподвижной точки;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.23

$z_0 = 2/5 - 4/5i$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.24

$z_0 = -1/2;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.25

$z_0 = 3/2 - 1/2i$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.26

нет неподвижной точки;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.27

$z_0 = 1/10 + 3/10i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.28

$z_0 = -3/2;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.29

$z_0 = 3/4 + 1/2i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47.30

нет неподвижной точки;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.1

$w = 2z + 6 - 6i$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.2

$w = 2z + 4 - 4i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.3

$w = 2z + 8 - 8i$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.4

$w = 2z + 10 - 10i$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.5

$w = 2z + 2 - 2i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.6

$w = 2z + 12 - 12i;$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.7

$w = e^{i\frac{\pi}{2}} z + 2 + i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.8

$w = e^{-i\frac{\pi}{2}}z + 2 + i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.9

$w = e^{i\frac{\pi}{4}}z + 2 + i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.10

$w = e^{-i\frac{\pi}{4}}z + 2 + i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.11

$w = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 + i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.12

$w = e^{-i\frac{\pi}{3}}z + 2 + i$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.13

$w = e^{i\frac{\pi}{6}}z + 2 + i;$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.14

$w = e^{-i\frac{\pi}{6}}z + 2 + i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.15

$w = 2e^{i\frac{\pi}{2}} z + 4 + 2i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.16

$w = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}z + 4 + 2i;$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.17

$w = 2e^{i\frac{\pi}{4}}z + 4 + 2i$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.18

$w = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}z + 4 + 2i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.19

$w = 2e^{i\frac{\pi}{3}}z + 4 + 2i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.20

$w = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}z + 4 + 2i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.21

$w = 2e^{i\frac{\pi}{6}}z + 4 + 2i;$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.22

$w = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}z + 4 + 2i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.23

$w = 3e^{i\frac{\pi}{2}}z + 6 + 3i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.24

$w = 3e^{-i\frac{\pi}{2}} z + 6 + 3i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.25

$w = 3e^{i\frac{\pi}{4}}z + 6 + 3i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.26

$w = 3e^{-i\frac{\pi}{4}} z + 6 + 3i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.27

$w = 3e^{i\frac{\pi}{3}}z + 6 + 3i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.28

$w = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}z + 6 + 3i;$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.29

$w = 3e^{i\frac{\pi}{6}}z + 6 + 3i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48.30

$w = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}z + 6 + 3i;$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.1

$w = \dfrac{z-1}{2}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.2

$w = \dfrac{z-1}{4}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.3

$w = \dfrac{z-1}{6}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.4

$w = \dfrac{z-2}{2};$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.5

$w = \dfrac{z-2}{4}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.6

$w = \dfrac{z-2}{6}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.7

$w = \dfrac{z-3}{2};$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.8

$w = \frac{z-3}{4}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.9

$$w = \frac{z-3}{6};$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.10

$w = \dfrac{z - 4}{2}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.11

$w = \dfrac{z-4}{4}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.12

$w = \dfrac{z-4}{6}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.13

$w = \dfrac{z-5}{2}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.14

$w = \dfrac{z-5}{4};$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.15

$w = \dfrac{z-5}{6};$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.16

$w = \dfrac{-z + 3}{2} + i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.17

$$w = \frac{-z+5}{4} + i;$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.18

$$w = \frac{-z+7}{6} + i;$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.19

$$w = \frac{-z+4}{2} + i;$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.20

$w = \dfrac{-z+6}{4} + i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.21

$$w = \frac{-z+8}{6} + i;$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.22

$$w = \frac{-z+5}{2} + i;$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.23

$w = \dfrac{-z+7}{4} + i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.24

$$w = \frac{-z+9}{6} + i;$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.25

$$w = \frac{-z+6}{2} + i;$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.26

$w = \dfrac{-z+8}{4} + i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.27

$w = \dfrac{-z+10}{6} + i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.28

$$w = \frac{-z+7}{2} + i;$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.29

$w = \dfrac{-z + 9}{4} + i;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49.30

$w = \dfrac{-z+11}{6} + i;$

[Вернуться к условию]

Глава 8. Отображение с помощью элементарных функций

Ответ к задаче 50.1

$w_1(D_1) = \{w : 1 < |w| < 4\} \setminus [-4, -9/4]$, $w_2(D_2) = \{w : |w| < 64\} \setminus [-64, 0]$ $w_3(D_3) = \{w : |w| < 16\} \setminus [-16, 0]$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 50.2

$w_1(D_1) = \mathbb{C} \setminus \{w : w \in [9, 36]\}$, $w_2(D_2) = \{w : 0 < \arg w < \frac{\pi}{5}, 25 < |w| < 100\}$ $w_3(D_3) = \mathbb{C} \setminus \{w : \arg w = 0\}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.1

$w_1(D_1) = \{w : \ e^2 < |w| < e^4, \ \pi/6 < \arg w < \pi/3\}$, $w_1(D_2) = \{w : \ 0 < \operatorname{Re} w < 1, \ 0 < \operatorname{Im} w < \pi\}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.2

$w_1(D_1) = \{w : 4 < |w| < 8,\ \pi/12 < \arg w < \pi/3\}$, $w_1(D_2) = \{w : 1 < \operatorname{Re} w < \ln 6,\ 0 < \operatorname{Im} w < \pi/2\}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.3

$w_1(D_1) = \{w:\ 1 < |w| < 2,\ \pi/6 < \arg w < \pi/3\}$, $w_1(D_2) = \{w:\ 0 \leqslant \operatorname{Re} w \leqslant 1,\ 0 \leqslant \operatorname{Im} w \leqslant \pi/2\}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 52.1

$w(D_1)$ — внешность эллипса $u^2/(5/4)^2 + v^2/(3/4)^2 = 1$, $w(D_2)$ — внешность эллипса $u^2/(5/4)^2 + v^2/(3/4)^2 = 1$, $w(D_3) = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, $w(D_4) = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 52.2

$w(D_1) = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$, $w(D_2) = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$, $w(D_3) = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$, $w(D_4) = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$,

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 52.3

$w(D_1) = \{w = u + iv : \operatorname{Im} w > 0,\ u^2/(5/4)^2 + v^2/(3/4)^2 < 1\}$, $w(D_2) = \{w = u + iv : \operatorname{Im} w < 0,\ u^2/(5/4)^2 + v^2/(3/4)^2 < 1\}$, $w(D_3) = \{w = u + iv : \operatorname{Re} w > 0,\ u^2/(5/4)^2 + v^2/(3/4)^2 < 1\} \setminus [1, 5/4]$, $w(D_4) = \{w = u + iv : \operatorname{Im} w > 0,\ u^2/(\sqrt{2}/2)^2 - v^2/(\sqrt{2}/2)^2 < 1\}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 53.1

$w(D) = \{w : \operatorname{Re} w > 0\} \setminus [0, 1];$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 53.2

$w(D) = \{w : \operatorname{Im} w > 0\};$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 53.3

$w(D) = \{w : |w| < 1\};$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 53.4

$w(D) = \{w : \operatorname{Im} w > 0\};$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 53.5

$w(D) = \{w : \operatorname{Re} w > 0\}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 53.6

$w(D) = \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)\};$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 54.1

$w = \exp\left(i\pi(z-6)/6\right);$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 54.2

$w = e^{i3z}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 54.3

$w = \exp\big((1-i)z\pi/2\big)$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 54.4

$w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 54.5

$w = -(1 + iz^4)/(i + z^4)$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 54.6

$w = \ln z + 2;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 55.1

$$w = \frac{1}{B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)} \int\limits_0^z \xi^{-\frac{2}{3}} (1-\xi)^{-\frac{2}{3}}\, d\xi;$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 55.2

$$w = \frac{1}{B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)} \int\limits_0^z \xi^{-\frac{3}{4}} (1-\xi)^{-\frac{3}{4}}\, d\xi + 2;$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 55.3

$$w = \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)} \int\limits_0^z \xi^{-\frac{1}{2}} (1-\xi)^{-\frac{3}{4}} \, d\xi;$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 55.4

$$w = \frac{1}{B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)} \int_0^z \xi^{-\frac{3}{4}} (1 - \xi)^{-\frac{1}{2}} \, d\xi;$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 55.5

$$w = \frac{1}{B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)} \int\limits_0^z \xi^{-\frac{3}{4}} (1-\xi)^{-\frac{3}{4}}\, d\xi + i;$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 55.6

$$w = \frac{-4}{B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)} \int\limits_0^z \xi^{-\frac{3}{4}}(1-\xi)^{-\frac{3}{4}}\, d\xi + 3 + 3i;$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.2

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.3

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.4

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.5

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.6

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.7

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.8

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.9

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.10

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.11

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.12

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.13

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.14

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.15

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.16

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.17

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.18

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.19

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.20

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.2

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.3

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.4

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.5

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.6

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.7

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.8

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.9

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.10

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.11

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.12

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.13

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.14

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.15

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.16

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.17

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.18

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.19

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.20

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.2

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.3

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.4

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.5

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.6

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.7

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.8

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.9

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.10

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.11

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.12

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.13

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.14

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.15

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.16

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.17

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.18

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.19

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.20

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.2

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.3

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.4

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.5

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.6

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.7

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.8

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.9

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.10

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.11

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.12

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.13

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.14

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.15

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.16

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.17

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.18

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.19

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.20

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.2

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.3

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.4

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.5

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.6

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.7

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.8

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.9

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.10

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.11

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.12

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.13

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.14

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.15

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.16

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.17

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.18

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.19

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.20

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 61.1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 61.2

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 61.3

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 61.4

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 61.5

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 61.6

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 61.7

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 61.8

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 61.9

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 61.10

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 61.11

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 61.12

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 61.13

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 61.14

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 61.15

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.1

$w = (z+1)^2/(z-1)^2$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.2

$w = i\sqrt{-z^2 - h^2}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.3

$w = i\sqrt{-e^{2z} - 1}$; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.4

$w = (z-1)^2/(z+1)^2$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.5

$w = e^{-2\pi(1/z+i/2)}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.6

$$w = i\sqrt{\frac{z-1}{z}};$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.7

$w = i\sqrt{i(1/z + i)}$; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.8

$w = e^{2\pi i/z}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.9

$w = (z - \sqrt{3} - i)^2/(z + \sqrt{3} - i)^2;$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.10

$w = i\big((z+i)/(z-i)\big)^2;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.11

$w = i\sqrt{i(z-1)/(z+1)}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.12

$w = \sqrt{(z+i)/(i-z)}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.13

$w = \sqrt{(z+1)/(1-z)}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.14

$w = e^{-i\pi/8}\sqrt{z-i}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.15

$w = \sqrt{z^2 + h^2}/z;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.16

$w = \dfrac{4}{\pi}\left(\ln\dfrac{z+i}{z-i} - i\dfrac{\pi}{2}\right);$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.17

$w = i\left((\sqrt{z}+1)/(\sqrt{z}-1)\right)^2$; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.18

$w = \sqrt{(z+1)/(z-1)}$; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.19

$w = \sqrt{\big((z-1)/(z+1)\big)^2 + 1}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.20

$$w = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - z - \frac{1}{z}\right)};$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 63.1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 63.2

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 63.3

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 63.4

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 64.1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 64.2

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 64.3

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 64.4

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 65.1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 65.2

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 65.3

[Вернуться к условию]

Глава 9. Отображение с помощью элементарных трансцендентных функций

Ответ к задаче 66.1

а) $-3/2 + 5/2i$, б) $-2 + 7/6i$, в) $-3 - 3/2i$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 66.2

а) $-2+2i$, б) $-2+4/3i$, в) -2

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 66.3

а) $1/2 - 1/2i$, б) $1/2 - 2/3i$, в) $1/2$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 66.4

а) $-1/2+1/6i$, б) $-7/12+4/15i$, в) $-1/2-1/6i$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 66.5

а) -1, б) -2, в) $-1+\sqrt{2}/2\ln(\sqrt{2}-1)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 67.1

$-5/3 + 10/3i$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 67.2

$-8/3$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 67.3

$(e^{\pi}+1)i$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 67.4

$-2\pi - 8/3 + 8/3i$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 68.1

$7 + 19i$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 68.2

$(1-e)/e$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 68.3

$-2-i$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 68.4

$\frac{1}{4}(1 - \operatorname{ch} 1)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 68.5

$-3+3i$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 68.6

$$-\operatorname{tg} 1 - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 1 - \frac{1}{2}\operatorname{th}^2 1 + i \operatorname{th} 1$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 69.1

$4i \ln(2/e)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 69.2

$2 - 2i$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 69.3

$-2\sqrt{2} - 4 - 2i\sqrt{2}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 69.4

$-2\sqrt{2} - 4 - 2i\sqrt{2}$ [Вернуться к условию]

Глава 10. Интегральная теорема и формула Коши

Ответ к задаче 70.1

$\sqrt{\pi}/(2e)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 70.2

$\sqrt{\pi}/2\, e^{-m^2}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 70.3

$\sqrt{\pi}/(2\sqrt{2})$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 70.4

$\sqrt{\pi}/(2\sqrt{2})$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 70.5

$\sqrt{\pi}/2$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 71.1

$z_2 - z_1$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 71.2

$1/2(z_2^2 - z_1^2)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.1

а) 0, б) $-2\pi i$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.2

а) 0, б) $-2\pi i$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.3

а) 0, б) -1, в) 0

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.4

а) 0, б) $\pi i \cos 1$, в) $\pi i(\cos 1 - \cos 3)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.5

а) 0, б) $-2\pi i \operatorname{sh} 1$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.6

а) 0, б) $-\pi i$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.7

а) 0, б) -1, в) 0

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.8

а) 0, б) $-8\pi i$, в) $-6\pi i$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.9

0

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.10

$$-\frac{\pi i}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.11

$$\frac{e^{36}-1}{3}\pi i$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.12

πi

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.13

$$\frac{\pi}{e}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.14

0

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.15

$$-\frac{\pi i}{45}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.16

$$-\frac{\pi^2 i}{2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.17

$$-\frac{\pi i}{27}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.18

$$-\frac{1+i}{2}e^{i}$$

[Вернуться к условию]

Глава 12. Ряды Тейлора

Ответ к задаче 75.1

$R = e$, $|z| < e$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 75.2

$R = 1$, $|z - a| < 1$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 75.3

$R = 1$, $|z| < 1$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 75.4

$R = 1/|a|$ при $|a| > 1$, $R = 1$ при $|a| \leqslant 1$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 75.5

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 75.6

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 75.7

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 75.8

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 75.9

?????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.1

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}};$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.2

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1};$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.3

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n;$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.4

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z^{3n} - z^{3n+1});$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.5

$$e^2\sum_{n=3}^{\infty}(z-2)^n\left(\frac{4}{n!}+\frac{4}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)^2}\right)+e^2\left(1+5(z-2)+\frac{3}{2}(z-2)^2\right);$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.6

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2^{4n-1} + 2^{2n-1})z^{2n};$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.7

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} z^n}{n!};$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.8

?????????????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.9

?????????????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.10

?????????????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.11

?????????????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.12

?????????????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.13

?????????????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.1

$$z - \frac{z^3}{6} - \frac{7}{60}z^5 + \ldots;$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.1

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.2

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.3

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.4

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.5

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.6

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.7

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.8

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.9

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.10

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.11

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.12

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.13

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.14

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.15

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.16

?????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.17

?????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.18

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.19

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.20

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.1

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.2

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.3

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.4

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.5

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.6

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.7

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.8

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.9

?????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.10

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.11

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.12

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.13

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.14

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.15

?????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.16

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.17

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.18

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.19

?????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.20

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.1

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.2

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.3

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.4

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.5

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.6

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.7

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.8

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.9

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.10

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.11

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.12

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.13

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.14

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.15

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.16

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.17

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.18

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.19

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.20

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.1

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.2

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.3

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.4

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.5

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.6

?????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.7

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.8

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.9

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.10

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.11

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.12

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.13

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.14

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.15

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.16

?????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.17

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.18

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.19

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.20

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82.1

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82.2

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82.3

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82.4

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82.5

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82.6

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82.7

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82.8

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82.9

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82.10

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82.11

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82.12

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82.13

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82.14

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82.15

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82.16

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82.17

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82.18

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82.19

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82.20

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 83.1

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 83.2

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 83.3

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 83.4

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 84.1

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 84.2

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 84.3

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 85.1

????????????;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 85.2

?????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 85.3

????????????; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 85.4

????????????;

[Вернуться к условию]

Глава 13. Нули аналитической функции. Теорема единственности

Ответ к задаче 86.1

$z_0 = 0$, $n = 2$, $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n = 1$; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 86.2

$z_1 = i$, $z_2 = -i$, $n = 2$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 86.3

$z_k = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ n = 2;$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 86.4

$z_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ n = 2;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 86.5

$z_1 = 2,\ z_2 = -2,\ n = 3;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 86.6

$z_1 = 1,\ z_2 = -1,\ n = 2;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 87.1

$n = 4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 87.2

$n = 4$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 87.3

$n = 3$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 87.4

$n = 3$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 87.5

$n = 2$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 87.6

$n = 2$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.1

$z_1 = 3i,\ n_1 = 1,\ z_2 = -3i,\ n_2 = 1;$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.2

$z_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ n_k = 3,\ k \in \mathbb{Z};$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.3

$z_0 = 0$, $n_0 = 2$, $z_k = k\pi$, $n_k = 3$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.4

$z_1 = \pi,\ n_1 = 3,\ z_{-1} = -\pi,\ n_{-1} = 3,\ z_k = k\pi,\ n_k = 1,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\};$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.5

$z_0 = 4$ — нуль ветви, для которой $\sqrt{1} = 1$, $n_0 = 3$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.6

$z_1^* = 2,\ n_1^* = 3,\ z_2^* = -2,\ n_2^* = 3,\ z_k = 2k\pi i,\ n_k = 1,\ k \in \mathbb{Z};$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 89.1

не существует;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 89.2

не существует;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 89.3

существует, $f(z) = 1/(z+1)$; [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 89.4

не существует;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 89.5

существует, $f(z) = z^2$;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 89.6

не существует;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 90.1

не существует;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 90.2

не существует;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 90.3

не существует;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 90.4

не существует;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 90.5

такими функциями являются только константы;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 90.6

не существует;

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91.1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91.2

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91.3

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91.4

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91.5

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91.6

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91.7

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91.8

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91.9

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91.10

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91.11

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91.12

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91.13

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91.14

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91.15

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91.16

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91.17

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91.18

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91.19

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91.20

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 92.1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 92.2

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 92.3

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 92.4

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 92.5

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 92.6

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 92.7

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 92.8

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 92.9

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 92.10

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 92.11

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 92.12

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 92.13

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 92.14

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 92.15

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 92.16

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 92.17

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 92.18

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 92.19

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 92.20

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93.1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93.2

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93.3

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93.4

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93.5

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93.6

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93.7

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93.8

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93.9

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93.10

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93.11

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93.12

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93.13

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93.14

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93.15

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93.16

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93.17

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93.18

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93.19

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93.20

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 94.1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 94.2

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 94.3

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 94.4

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 94.5

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 94.6

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 94.7

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 94.8

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 94.9

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 94.10

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 95.1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 95.2

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 95.3

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 95.4

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 95.5

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 95.6

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 95.7

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 95.8

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 95.9

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 95.10

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 98.1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 98.2

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 98.3

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 98.4

[Вернуться к условию]

Часть III

Тесты