ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 4

Решение и геометрическая интерпретация игровых моделей размера 2 x 2, 2 x n, m x 2

В решении игр используется следующая теорема: если один из игроков применяет свою оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш равен цене игры ν вне зависимости от того, с какими частотами будет применять второй игрок стратегии, вошедшие в оптимальную.

Решение игры начинается с исключения заведомо невыгодных и дублирующих стратегий, т.е. исходную матрицу можно упростить, если исключить доминирующие столбцы, т.е. все элементы которых больше остальных и оставить доминирующие строки.

После этого, упрощенную матрицу проверяют на наличие седловой точки, что позволяет сразу определить решение и цену игры.

Если седловой точки нет, то переходят к определению оптимальных смешанных стратегий.

Пример 1. Исследовать и решить игру, заданную матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

1) Проверим наличие седловой точки:

$$\left.\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right| \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \quad \alpha = 1$$

$$\begin{matrix} 3 & 2 \end{matrix}$$

$$\beta = 2$$

$$\alpha \neq \beta, \textit{седловойточкинет}, \textit{причем}\ 1 \le \nu \le 2,\ .$$

2) Найдем оптимальные смешанные стратегии. Пусть для игрока A стратегия задается вектором $P = (p_1, p_2)$ и цена игры ν.

Тогда, на основании теоремы, при применении игроком B чистой стратегии B_1 или B_2 игрок A получит средний выигрыш, равный цене игры, т.е.

$$\begin{cases} -1\cdot p_1 + 3\cdot p_2 = \nu & (\text{при } B_1) \\ 2\cdot p_1 + p_2 = \nu & (\text{при } B_2) \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

следовательно, $p_1 = \frac{2}{5}, p_2 = \frac{3}{5}, \nu = \frac{7}{5}$.

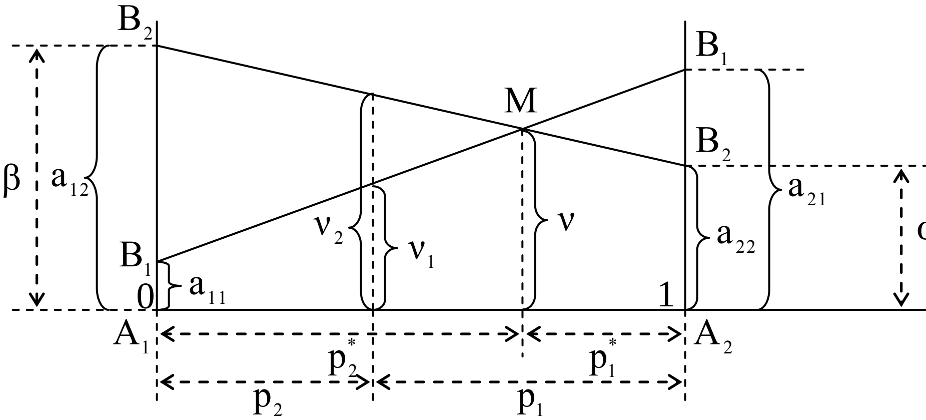
Аналогично, для игрока B, причем цена игры уже найдена, значит можно решить всего два уравнения

$$\begin{cases} -q_1 + 2\cdot q_2 = \frac{7}{5} & (\text{при } A_1) \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

откуда $q_1 = \frac{1}{5}, q_2 = \frac{4}{5}$.

Ответ: $P^* = \left(2/5, 3/5\right), Q^* = \left(1/5, 4/5\right), \nu = 7/5$.

Для геометрической интерпретации игры построим следующий график: в системе координат XOY отложим по оси OX отрезок A_1A_2 единичной длины, каждой точке $\overline{x}$ которого будет отвечать некоторая смешанная стратегия $\overline{p} = (p_1, p_2) = (p_1, 1-p_1)$



Так, точке A_1, для которой $p_2 = 0, p_1 = 1$, отвечает стратегия A_1, точке A_2, для которой $p_1 = 0, p_2 = 1$ - стратегия A_2.

При применении стратегии A_1 выигрыш равен a_{11}, если второй игрок применяет B_1, и a_{12}, если второй игрок применяет B_2. Следовательно, получим две точки B_1 и B_2.

Соответственно, при применении стратегии A_2 выигрыш может быть a_{21}(при B_1) или a_{22}(при B_2) (они показаны двумя точками на перпендикуляре, восстановленном в точке A_2).

Средний выигрыш ν_1 при любом сочетании стратегий A_1 и A_2 (с вероятностью p_1 и p_2) и стратегии B_1 второго игрока равен $\nu_1 = p_1 a_{11} + p_2 a_{21}$, и геометрически определяется ординатой, восстановленной в точке $\overline{p}$ до пересечения с отрезком B_1B_1. Аналогично, средний выигрыш при применении стратегии B_2 будет определяться ординатами точек, лежащих на отрезке B_2B_2.

Ординаты точек, лежащих на ломаной B_1MB_2 характеризуют минимальный выигрыш игрока A при использовании любой смешанной стратегии $\overline{p}$ на участке B_1M против стратегии B_2.

Следуя принципу максимина, получим, что оптимальное решение определяет точку M, в которой этот минимальный выигрыш достигает максимума. Ей отвечает на оси абсцисс точка $p^* = \left(p_1^*, p_2^*\right)$, а ее ордината равна цене игры ν.

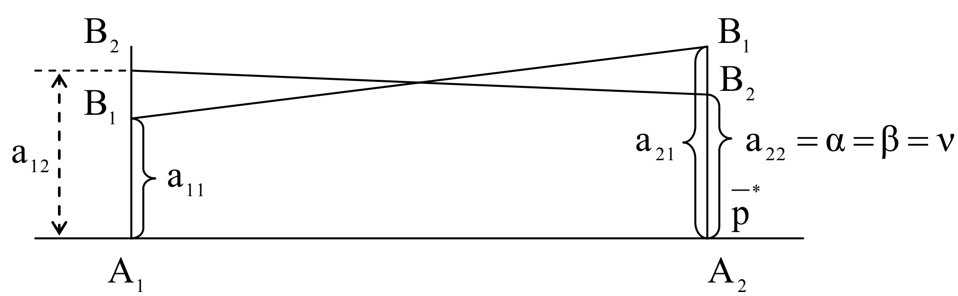
По цене игры находится оптимальная стратегия для игрока B, решением системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} q_1^* a_{11} + q_2^* a_{12} = \nu \quad (\text{при } A_1) \\ \quad q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases}$$

На этом чертеже можно показать нижнюю α и верхнюю β цену игры.

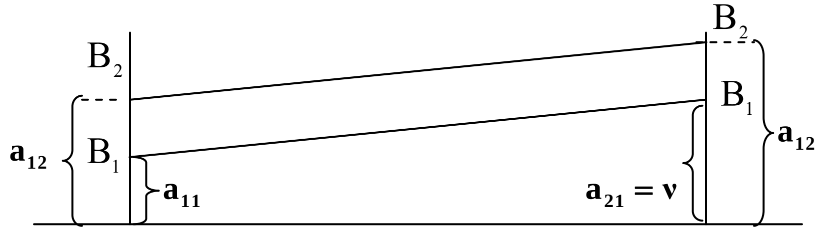
Если матрица имеет седловую точку, то получим следующие графики:

I.



Решением игры является чистая стратегия A_2 (для B-B_2), т.е. P^*=(0,1) и Q^*=(0,1).

II.



Решение игры соответствует т. B_1 и задается векторами $P^*=(0,1)$ и $Q^*=(1,0)$.

Пример 2. Решить и дать геометрическую интерпретацию игры, заданной матрицей $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

Решение:

1) Исследуем игру на седловую точку

$$\begin{array}{cc|c} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} & & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 4 & 5 \end{matrix} & & \end{array} \quad \alpha = 2$$

$$\beta = 4$$

$$\alpha \ne \beta, \textit{седловойточкинет}, \textit{причем } 2 \le \nu \le 4, \ .$$

2) Составляем систему уравнений

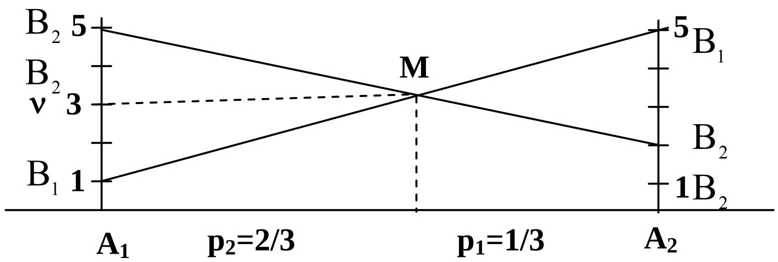
$$\begin{cases} \mathbf{p_1 + 4p_2 = \nu} \quad (\mathbf{ппр\ B_1}) \\ \mathbf{5p_1 + 2p_2 = \nu} \quad (\mathbf{ппр\ B_2}) \\ \mathbf{p_1 + p_2 = 1} \end{cases}$$

Имеем $\boldsymbol{p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{3}{3}, \nu = 3}$, т.е. $\boldsymbol{P^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}$

Для II игрока:

$$\begin{cases} \boldsymbol{q_1 + 5q_2 = 3} \\ \boldsymbol{q_1 + q_2 = 1} \end{cases}, \ \boldsymbol{q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{1}{2}, Q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

3) Строим график



Пример 3. Решить и дать геометрическую интерпретацию игры $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

Решение:

1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \alpha = 2$$

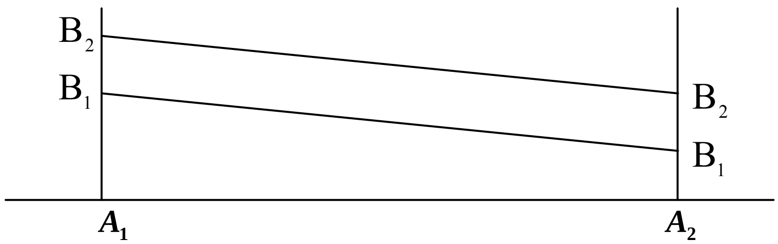
$$\begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix}$$

$$\beta = 2 \qquad \alpha = \beta = \nu = 2,$$

Игра имеет седловую точку.

2) Решение игры: $P^*=(1,0)$ и $Q^*=(1,0)$

3)



из графика видно, что стратегия B_2 заведомо невыгодна и A_1 лучше A_2.

Пример 4. Найти графики решения и цену игры с матрицей (2х4)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Решение.

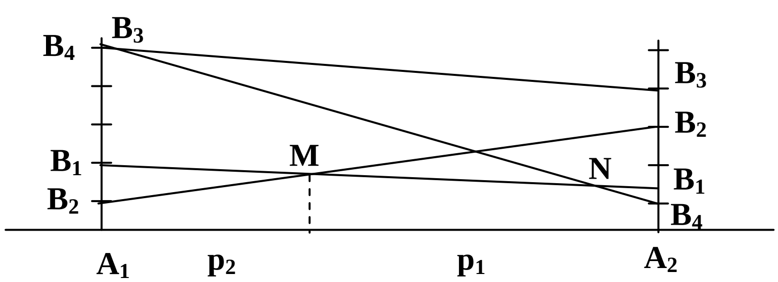
1) Исследуем матрицу на наличие седловой точки:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 5 & 3 \end{matrix}$$

$\alpha = 1, \alpha \neq \beta, 1 \leq \nu \leq 2$, седловой точки нет.

2) Строим график



Ломаная B_2MNB_4 даёт нижнюю границу выигрыша, находим максимальную точку – M, в которой пересекаются чистые стратегии B_2 и B_1 и найдем координаты точки M как пересечение 2-х прямых B_1B_1 и B_2B_2:

$$\begin{cases} 2p_1 + p_2 = \nu & (\text{по I столбцу}) \text{ при } B_1 \\ p_1 + 3p_2 = \nu & (\text{по II столбцу}) \text{ при } B_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

Имеем $p_1 = \frac{2}{3},\ p_2 = \frac{1}{3},\ \nu = \frac{5}{3}$

Для II игрока:

$$\begin{cases} 2q_1 + q_2 = 5/3 & (\textit{по I строке}) \ \textit{при } A_1 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

$q_1 = \frac{2}{3},\ q_2 = \frac{1}{3},$ т.к. B_3 и B_4 не выгодно использовать, значит $q_3=0$, $q_4=0$.

Ответ: $P^*=(2/3,1/3)$, $Q^*=(2/3,1/3,0,0)$, $\nu=5/3$.

Пример 5.

Сделать тоже для игры с матрицей (4x2).

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

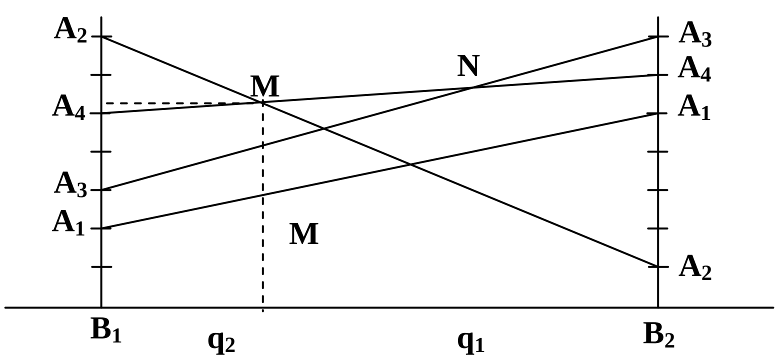
Решение

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{array} \quad \alpha = 4. \qquad \begin{matrix} \alpha \neq \beta, \quad 4 \le \nu \le 7 \\ \textit{седловой точки нет} \end{matrix}$$

1) $\begin{matrix} 7 & 7 \end{matrix}$

$\beta = 7$

2)



Ломаная A_2MNA_3 даёт верхнюю границу проигрыша, находим максимальную точку – M, в которой пересекаются чистые стратегии A_2 и A_4 и найдем координаты точки M :

$$\begin{cases} 7q_1 + q_2 = \nu & \text{(по II строке) при } A_2 \\ 4q_1 + 6q_2 = \nu & \text{(по IV строке) при } A_4 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

Имеем $q_1 = \frac{5}{8}, q_2 = \frac{3}{8}, \nu = \frac{19}{4}$

Для I игрока по элементам a_{21} и a_{41} строим систему:

$$\begin{cases} 7p_2 + 4p_4 = 19/4 \\ p_2 + p_4 = 1 \end{cases} \quad p_2 = \frac{1}{4},\ p_4 = \frac{3}{4},$$

Ответ: $P^*=(0,1/4,0,3/4)$, $Q^*=(5/8,3/8)$, $\nu=19/4$.

Задание: 1. решить графическим методом игру размером 2*3

2. решить графическим методом игру размером 3*2

Варианты заданий:

1) а) $\begin{pmatrix} 14 & 13 & 20 \\ 17 & 19 & 12 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 16 & 17 \\ 13 & 19 \\ 20 & 11 \end{pmatrix}$

2) а) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 11 \\ 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 9 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$

3) а) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 11 \\ 9 & 10 & 2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 5 & 10 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$

4) а) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 10 \\ 7 & 11 & 3 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 9 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$

5) а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 7 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$

6) а) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 9 \\ 10 & 11 & 7 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 6 & 11 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$

7) а) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

8) а) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 10 \\ 6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 7 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$

9) а) $\begin{pmatrix} 17 & 19 & 12 \\ 14 & 13 & 20 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 17 & 14 \\ 18 & 13 \\ 12 & 19 \end{pmatrix}$

10) а) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 10 \\ 6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 8 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$

11) а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 9 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

12) а) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 9 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 6 & 11 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$

13) а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 8 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$

14) а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

15) а) $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 8 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

16) а) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 10 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

17) а) $\begin{pmatrix} 10 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 7 & 3 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$

18) а) $\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 8 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$

19) а) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

20) а) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 7 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

21) а) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 9 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$

22) а) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 11 \\ 6 & 10 & 3 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$

23) а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

24) а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

25) а) $\begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 4 & 3 & 10 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

26) а) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 10 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 7 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

27) а) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 10 \\ 10 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 6 & 14 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

28) а) $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

29) а) $\begin{pmatrix} 17 & 19 & 10 \\ 15 & 13 & 20 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 17 & 14 \\ 18 & 13 \\ 10 & 22 \end{pmatrix}$

30) а) $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 12 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$