Министерство образования и науки Республики Беларусь

Гомельский государственный университет
им.Ф.Скорины

кафедра математических проблем управления

"Исследование операций"
Лабораторный практикум

Гомель, 1998

Составители: Т.П.Бышик, В.Д.Левчук, В.Л.Мережа, Н.Б.Осипенко

Рецензенты: д.т.н., профессор В.В.Можаровский, к.ф.-м.н., доцент В.Н.Семенчук

Рекомендовано советом математического факультета.

В лабораторный практикум включены работы: решение задачи о назначениях венгерским методом; решение задачи о коммивояжере методом ветвей и границ; решение целочисленных линейных задач методом отсечения Гомори; решение матричных игр; расчет и анализ параметров сетевого графика; исследование систем массового обслуживания с параллельными обслуживающими каналами и ограниченным количеством мест в очереди.

Каждая из работ содержит постановку задачи, алгоритм решения и иллюстрированный пример.

Лабораторная работа №1
Решение задачи о назначениях венгерским методом

Постановка задачи: пусть имеется n видов работ и n исполнителей, каждый из которых может выполнить любую из этих работ; c_{ij}— эффективность выполнения i-ой работы j-ым исполнителем, $i,j = 1$,п. Из параметров c_{ij} можно составить $(n \times n)$ матрицу стоимостей (эффективностей) C. Найти такую расстановку исполнителей, чтобы суммарный эффект их труда был наибольшим.

Математическая модель задачи: введем переменные

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{работа i выполняется } j-\textit{м исполнителем,} \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Получаем задачу:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (1), \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (2), \quad i, j = \overline{1,n}$$

Ограничения (1) означают, что на каждую работу должен быть назначен только один исполнитель. Ограничения (2) означают, что каждый исполнитель выполняет только одну работу.

Определение. Система нулевых элементов матрицы, обладающая тем свойством, что никакая пара из них не лежит в одной строке или в одном столбце, называется *системой независимых нулей (СНИ).*

Идея метода.

Венгерский метод состоит в преобразовании исходной задачи с матрицей C в эквивалентную ей задачу минимизации с матрицей C''. Если в матрице C'' имеется система из n независимых нулей, то решением задачи будет матрица X, у которой на местах, соответствующим независимым нулям, стоят 1, а остальные элементы являются нулевыми. Таким образом алгоритм направлен на построение СНН путем эквивалентных , преобразований матрицы C''.

Алгоритм метода.

0. Преобразуем матрицу C в матрицу C'' следующим образом:

a) $c'_{ij} = \max\{c_{ij}\} - c_{ij}, \quad i, j = \overline{1,n};$;

b) $c'' = c'_{ij} - \min\limits_{1\le j\le n}\{c'_{ij}\}, \quad i, j = \overline{1,n}.$

Приходим к задаче: $L'(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c''_{ij}x_{ij} \to \min \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i, j = \overline{1,n}$

1. Строим систему независимых нулей, помечая их *. Пусть число таких элементов равно k. Если $k=n$, то пишем ответ — матрицу X и $L(X)$. Если $k \ne n$, то помечаем столбцы, содержащие 0* сверху знаком «+». Все элементы в этих столбцах назовем *выделенными элементами (ВЭ)* (аналогично, так назовем элементы и в строках со знаком «+»).

2. Среди невыделенных элементов ищутся нулевые. Если они есть, то помечаем один из них 0' и переходим на 3. Если нет, то — 5.

3. Если в строке, содержащей только что найденный (У нет 0*, то — переход на 4. Иначе с соответствующего столбца снимается знак выделения и выделяется строка, содержащая 0' и осуществляется переход на 2.

4. Начиная с только что найденного 0' строится цепочка нулевых элементов матрицы по следующему правилу: исходный 0'; 0*, лежащий в одном столбце с этим 0'; 0', лежащий в строке с только что пройденным 0* и т.д. Заканчивается цепочка 0'. После построения цепочки штрихи у нулевых элементов этой цепочки заменяются на *, старые * в цепочке уничтожаются. Убираются знаки выделения строк и столбцов. * не входящие в цепочку переписываются. Далее переход на 1.

5. Ищем минимальный ненулевой неВЭ и обозначаем h. Затем, прибавляем h к элементам, которые стоят на пересечении выделенных строк и выделенных столбцов; отнимаем h от элементов, которые стоят на пересечении невыделенных строк и не выделенных столбцов; остальные элементы переписываем без изменений. Возвращаемся к 2.

Пример. Решить задачу о назначениях с матрицей C венгерским методом.

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to C' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \to C'' = \begin{pmatrix} 0^* & 2 & 4 & 0' \\ 5 & 0^* & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0^* & 4 \\ 6 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{matrix} + \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

1. В матрице C'' строим и подсчитываем число независимых нулей; $k = 3 < 4$, значит столбцы, содержащие 0* помечаем +.

2. Среди невыделенных элементов ищется нулевой, это элемент c_{14} помечаем его '.

3. В первой строке есть 0*, поэтому с первого столбца надо снять знак выделения ⊕ и отметить знаком + первую строку.

4. Среди неВЭ нет нулевых.

5. Выбираем минимальный элемент среди неВЭ $c_{31} = h = 3$ и

—прибавляем h к элементам, которые стоят на пересечении ВЭ строк и ВЭ столбцов;

—вычитаем h от элементов, которые стоят на пересечении неВЭ строк и неВЭ столбцов;

— оставляем без изменения остальные элементы. Получаем матрицу:

$$C''' = \begin{pmatrix} 0^* & 5 & 7 & 0' \\ 2 & 0^* & 3 & 3 \\ 0' & 1 & 0^* & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} + \\ \\ + \\ \\ \end{matrix}$$

2. Среди неВЭ есть нулевой: $c_{31} = 0$, помечаем его '.

3. В третьей строке существует 0*, значит снимаем с третьего столбца знак ⊕ и помечаем третью строку +.

2. Среди неВЭ нет нулей.

5. Выбираем в C''' $c_{21} = h = 2$ и снова строим новые нули, получаем матрицу:

$$C^{IV} = \begin{pmatrix} 0^* & 7 & 7 & 0' \\ 0' & 0^* & 1 & 1 \\ 0' & 3 & 0^* & 1 \\ 1 & 0' & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} + \\ + \\ + \\ \end{matrix}$$

2. Ищем 0 среди НЭ: $c_{21} = 0$; помечаем его 0'.
3. Во 2 строке есть 0*, снимаем знак ⊕ со 2 столбца и помечаем знаком + 2 строку.
2. В 4 строке есть $c_{42}=0$, помечаем его 0'.
3. В 4 строке нет 0^*.
4. Строим цепочку, начиная с c_{42} : $\{c_{42}, c_{22}, c_{21}, c_{11}, c_{14}\}$ В цепочке 'аменяем на *, а старые * убираем. Получаем C^{IV}

$$C^{V} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 7 & 0^* \\ 0^* & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0^* & 1 \\ 1 & 0^* & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Подсчитываем число $k = 4 = n$, значит записываем ответ:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L(X) = 8 + 4 + 9 + 7 = 28(ед.)$$

Задание: Решить задачу о назначениях венгерским методом.

Лабораторная работа №2
Решение задачи о коммивояжере методом ветвей и границ

Постановка задачи. Бродячий торговец должен посетить n городов и вернуться в исходный. Маршрут должен проходить через каждый город, причем один и только один раз. Расстояния (транспортные издержки, время на переезд и т.д.) между городами известны — c_{ij} $i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n}$. Требуется отыскать самый короткий (либо самый дешевый, либо самый быстрый и т.д.) маршрут.

Математическая модель:

$$\text{Пусть } x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{в маршруте есть переезд из } i \text{ города в } j;\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

$$L(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1 \quad i=\overline{1,n} \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 \quad j=\overline{1,n} \qquad (3)$$

$x=\left(x_{ij}, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}\right)$ — некоторый маршрут, $L(x)$ — суммарные издержки; (2) означает, что из каждого города торговец выезжает только раз; (3) означает, что в каждый город он въезжает один раз. К математической модели надо добавить дополнительное ограничение, исключающее замкнутые подциклы (подмаршруты) в маршрутах

Реализация метода ветвей и границ.

Рассмотрим дерево всевозможных маршрутов (см, рис.1, $n = 5$). Так как маршрут замкнут, то все равно из какого города начинать. Каждому маршруту соответствует ветвь дерева, начинающаяся на 1 уровне дерева в городе 1 и заканчивающаяся на последнем уровне в одном из городов. Ясно, что всего маршрутов $(n - 1)!$.

- С помощью дерева любое подмножество маршрутов можно разбить на более мелкие подмножества. Например, (см.рис.1), все множество маршрутов можно разбить на четыре подмножества с начальными участками: *{1, 2}*, *{1,3}*, *{1,4}* и *{1,5}*. Причем каждое такое подмножество включает *(5-2)!=3!=6* маршрутов дальнейших продолжений начального участка.
- Для каждого подмножества маршрутов может быть подсчитана эффективная нижняя граница по следующему способу.

Например, пусть задана матрица транспортных издержек

$$C=\begin{pmatrix} - & 8 & 18 & 14 & 8\\ 17 & - & 21 & 7 & 11\\ 20 & 9 & - & 8 & 12\\ 5 & 31 & 12 & - & 9\\ 4 & 3 & 15 & 6 & -\end{pmatrix}$$

Для нахождения оценки начального участка $\{1,2\}$ — $\xi\{1,2\}$ строим подматрицу матрицы C вычеркивая в ней первую строку и второй столбец. У полученной подматрицы $\overline{C}$ находим минимальные элементы у строк. Отнимаем их от элементов соответствующих строк и получаем подматрицу $\overline{\overline{C}}$. Находим у нее минимальные элементы у столбцов. В качестве оценки ξ берется сумма минимальных элементов строк подматрицы $\overline{C}$ и столбцов $\overline{\overline{C}}$ и длины начального участка

$$\overline{C}=\begin{pmatrix}17 & 21 & 7 & 11\\ 20 & - & 8 & 12\\ 5 & 12 & - & 9\\ 4 & 15 & 6 & -\end{pmatrix}\begin{matrix}7\\8\\5\\4\end{matrix} \qquad \overline{\overline{C}}=\begin{pmatrix}10 & 14 & 0 & 4\\ 12 & - & 0 & 4\\ 0 & 7 & - & 4\\ 0 & 9 & 2 & -\\ \hline 0 & 7 & 0 & 4\end{pmatrix}; \quad c_{12}=8$$

ζ {1,2}=(7+8+5+4+0+7+0+4)+8=43

Для нахождения оценки для участка *{1,5,3}* у матрицы *C* вычеркиваются строки 1 и 5 и столбцы 5 и 3.

В общем случае для подсчета оценки произвольного участка у матрицы *C* вычеркивают строки для городов из которых торговец выезжает и столбцы для городов куда он приезжает.

- Для вычисления рекорда итерации выбираются один либо несколько маршрутов. Вычисляются их длины. Рекордом *r* будет длина самого короткого из них. Соответствующий маршрут будет рекордным. На итерациях рекорд может быть улучшен.
- Если для некоторого подмножества маршрутов $\xi \ge r$, то его (и соответствующую ветвь дерева) можно исключить как заведомо не содержащую лучшего маршрута, чем рекордный. Решение задачи заканчивается когда будут отсечены все ветви.

Пример (для матрицы (4)).

0 итерация. $S_0=\{X\}$.

Вычислим $\xi(X)=8+7+8+5+3+7=38$. Вычислим длину одного из маршрутов $L(1,5,2,4,3,1)=8+3+7+12+20=50$. Он и будет пока рекордным. Так как $\xi_0=38<50=r_0$, то разбиваем *X* на 4 подмножества с начальными участками: *(1,2), (1,3),(1,4),(1,5)*.

Вычислим их оценки: $\xi(1,2)=43; \xi(1,3)=45; \xi(1,4)=59; \xi(1,5)=38;$

Строим список множеств для 1 итерации: $S_1=\{(1,2),(1,3),(1,5)\}$. Множество (1,4) отсекается, так как $\xi(1,4)=59>50=r_0$.

1 итерация. Вычислим $\xi_1=\min\{\xi(1,2),\xi(1,3),\xi(1,5)\}=38 \quad r_1=r_0=50$.

Так как $r_1=50>38=\xi_1$ то продолжим итерации. Разбиваем множество с наименьшей оценкой *(1,5)* на 3 подмножества: *(1,5,2), (1,5,3),(1,5,4)*. Вычислим их оценки: $\xi(1,5,2)=38; \xi(1,5,3)=44; \xi(1,5,4)=49$. Имеем $S_2=\{(1,2)(1,3),(1,5,2).(1,5,3),(1,5,4)\}$

2 итерация. $\xi_2=38, r_2=r_0=50$ Разбиваем *(1,5,2): (1,5,2,3), (1,5,2,4)*. У этих множеств лишь по одному элементу не хватает до полного маршрута. Поэтому вычислим длину маршрутов $L(1,5,2,3,4,1)=45, L(1,5,2,4,3,1)=50$. Получаем новый рекорд *45* и имеем $S_3=\{(1,2)(1,5,3)\}$. Остальные подмножества отсекаются.

<u>3 итерация</u>. $\xi_3 = 43,\ r_3 = 45$.Разбиваем *(1,2): (1,2,3), (1,2,4), (1,2,5).* $\xi(1,2,3) = 48, \xi(1,2,4) = 43, \xi(1,2,5) = 43$ Имеем $S_4 = \{(1,2,4),(1,5,3),(1,2,5)\}$.

4 <u>итерация</u>. $\xi_4 = 43, r_4 = 45$. Разбиваем *(1,2,4): (1,2,4,3), (1,2,4,5)*. Вычислим $L(1,2,4,3,5,1) = 43, L(1,2,4,5,3,1) = 59$. Новый рекорд *43*.

5 <u>итерация</u>. Так как $\xi_5 = r_5 = 43$, то маршрут *(1,2,4,3,5,1)* — оптимальный, $L^0 = 43$.

Дерево вариантов этой задачи имеет вид (см. рис. 2):

Задание. Решить задачу о коммивояжере методом ветвей и границ. Построить дерево вариантов для своей задачи.

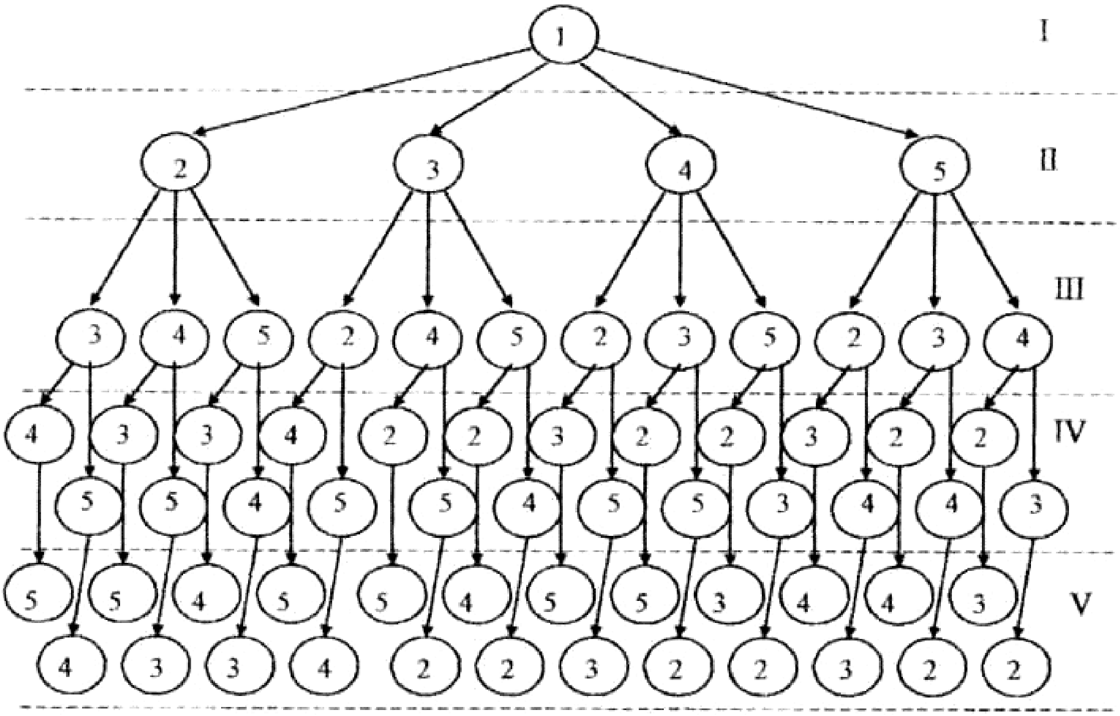


Рис.1

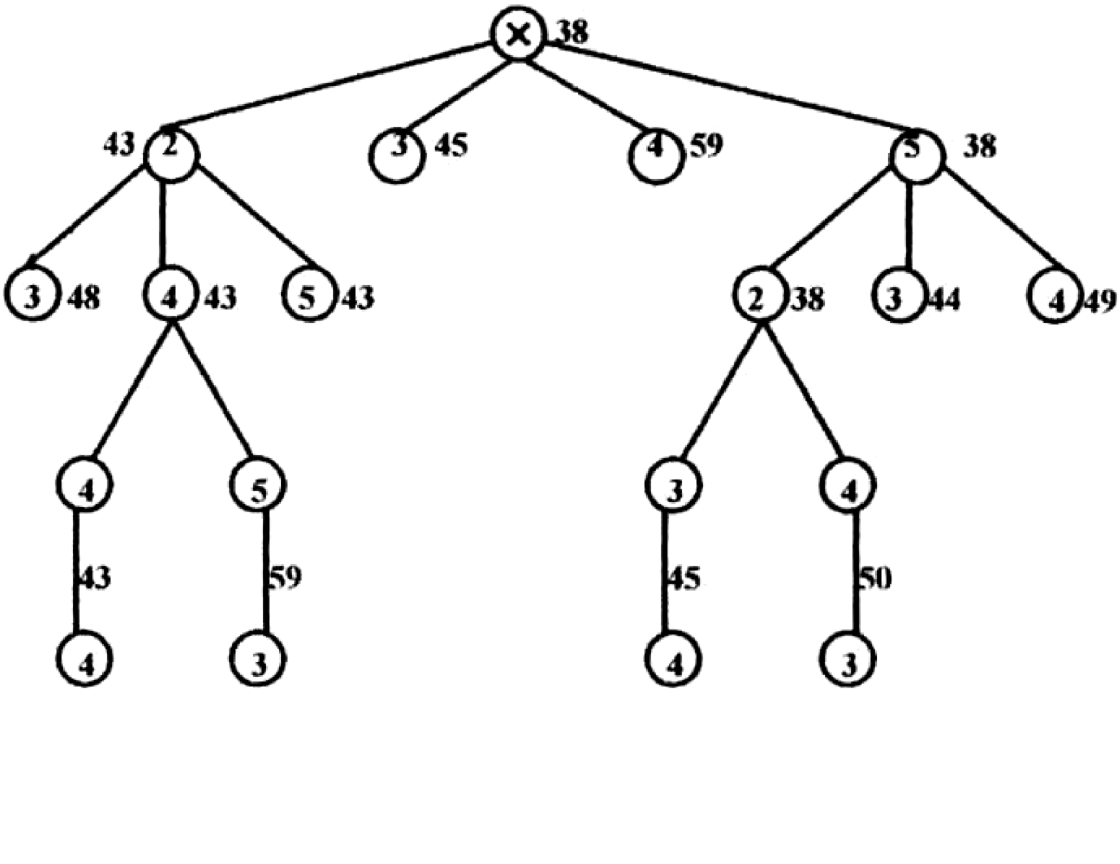


Рис.2.Дерево вариантов метода.

Лабораторная работа №3
Решение целочисленных линейных задач методом отсечения Гомори

Постановка задачи: найти $x \in R^n$ такое, что $z = c'x \to \max$ при ограничениях $Ax = b, x \geq 0, x_i$ — целые числа, $i = \overline{1,n}, b \in R^m, c \in R^n, A - (m \times n)$-матрица.

Идея метода. Сначала решается соответствующая непрерывная задача (условия целочисленности не учитываются) симплекс-методом. Если полученный оптимальный план целочислен, то он будет решением исходной задачи. Если нет, то по одной из дробных компонент этого плана строится дополнительное ограничение (сечение Гомори), которое "отсекает" его от множества планов, а все целочисленные остаются, непрерывная задача с дополнительным ограничением снова решается. При этом используется результат решения предыдущей задачи (последняя симплекс таблица) и ее удобно решать двойственным симплекс-методом. Если новый оптимальный план целочисленен, то получено решение исходной задачи, в противном случае операция (построения сечения Гомори) повторяется. И т.д. Доказано, что метод Гомори через конечное число таких операций позволяет построить решение задачи.

Пример. Пусть мы имеем задачу целочисленного линейного программирования.

$z = x_1 + x_2 \to \max$

$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$

$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9, x_i \geq 0$ — целые числа $i = \overline{1,n}$

Применим к непрерывной задаче симплекс-метод. Получим оптимальный план: $x^0 = \left(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}, 0, 0\right) \quad z_{\max} = 3\frac{3}{4}$.

Обозначим:

$[\alpha]$ — целая часть числа α;

$\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$ — дробная часть α.

Последняя симплекс-таблица имеет вид:

$a_Б$	b	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	9/4	1	0	3/4	-1/4
a_2	3/2	0	1	-1/2	1/2
Δ	15/4	0	0	1/4	1/4

Так как план X^0 не целочисленен применим к задаче метод Гомори.

1. Из $b_г$ выбираем число с наибольшей дробной частью. Так как $\max\left[\left\{\frac{9}{4}\right\} = \frac{1}{4}; \left\{\frac{3}{2}\right\} = \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$, то по II строке строим отсечение Гомори по формуле:

$$\{b_i\} - \sum_{j \in I_H} \{a_{ij}\} x_{ij} \leq 0$$

имеем $\left\{\frac{3}{2}\right\} - \left(\left\{-\frac{1}{2}\right\}x_3 + \left\{\frac{1}{2}\right\}x_4\right) \leq 0 \qquad \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\right) \leq 0$; $-\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \leq -\frac{1}{2}$

Приводим это ограничение к равенству введя дополнительную переменную $x_5 \geq 0$. $-\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}$

Так как $b_5 = -\frac{1}{2}$, значит строим двойственную симплекс-таблицу и решаем полученную задачу двойственным симплекс-методом$(\delta = \Delta)$.

$a_Б$	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	9/4	1	0	3/4	-1/4	0
a_2	3/2	0	1	-1/2	1/2	0
a_5	-1/2	0	0	-1/2	-1/2	1
Δ	15/4	0	0	1/4	1/4	0
σ				1/2	1/2	
a_1	3/2	1	0	0	-1	3/2
a_2	2	0	1	0	1	-1
a_3	1	0	0	1	1	-2
Δ	7/2	0	0	0	0	1/2

3.Строим сечение Гомори для I строки:

$$\left\{\frac{3}{2}\right\} - \left(\{-1\}x_4 + \left\{\frac{3}{2}\right\}x_5\right) \leq 0 \qquad \frac{1}{2} - \left(0 * x_4 + \frac{1}{2}x_5\right) \leq 0,\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_5 \leq 0;\ -\frac{1}{2} + x_5 + x_6 = -\frac{1}{2}$$

4. Строим новую двойственную симплекс-таблицу.

a_1	3/2	1	0	0	-1	3/2	0
a_2	2	0	1	0	1	-1	0
a_3	1	0	0	1	1	-2	0
a_6	-1/2	0	0	0	0	-1/2	1
Δ	7/2	0	0	0	0	1/2	0
a_1	0						
a_2	3						
a_3	3						
a_5	1						
Δ	3	0	0	0	0	0	1

$x^* = (0,3,3,0), \quad z_{max} = 3$

<u>Задание.</u> Решить задачу методом отсечения Гомори.

Лабораторная работа №4
Решение матричных игр

Рассмотрим конечную игру двух лиц с нулевой суммой. Пусть игрок 1 имеет m ходов — $A_1, A_2, ..., A_m$,а игрок 2 (противник) -— n ходов $B_1, B_2, ..., B_n$. Если игрок 1 выбрал ход A_i, игрок 2 выбрал B_j, то они получают выигрыш, соответственно: $u_1\left(A_i, B_j\right), u_2\left(A_i, B_j\right)$ причем $u_1\left(A_i, B_j\right) = -u_2\left(A_i, B_j\right) = a_{ij}$ Из элементов a_{ij} можно составить матрицу $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

которая называется платежной- Тогда ходу A_i игрока 1 будет соответствовать выбор им $i-ой$ строки матрицы A, а ходу B_j для игрока 2— $j-ой$ столбца. Цель игрока 1 максимизировать u_1 игрока 2 — максимизировать u_2 (или минимизировать $-u_2$). Игроки выбирают свои ходы не зная какие ходы выберет противник. Считая противника разумным, игроки могут придерживаться осторожных (перестраховочных) стратегий. Игрок 1 в каждой строке находит минимальный элемент $\alpha_i = \min\limits_j \alpha_{ij}, i = \overline{1, m}$, а затем находит свой гарантированный выигрыш $\alpha = \max\limits_i \alpha_i$. Выбор соответствующий строки (строк) будет его макси-минной стратегией (при любом поведении игрока 2 он получит не менее α). Аналогично игрок 2 находит $\beta_j = \max\limits_i \alpha_{ij}$ и $\beta = \min\limits_j \beta_j$. Его мини-максной стратегией будет выбор соответствующего столбца (при любом поведении игрока a он обеспечит себе проигрыш не более β).

Если $\alpha = \beta$, то это значит, что существует элемент $\alpha_{i^* j^*}$ который будет минимальным в строке i^* и максимальным в столбце j^*. Тогда стратегии A_{i^*} и B_{j^*} будут оптимальными для игроков 1 и 2. Величина $\gamma = \alpha = \beta$ называется *ценой игры,* а пара ходов (A_{i^*}, B_{j^*}) — *седлоеой точкой игры.*

Если седловой точки у игры нет и розыгрыши совершаются неоднократно, то естественно для игрока 1 попытаться увеличить а, а для игрока 2 — уменьшить β.

Смешанными стратегиями игроков 1 и 2 будем называть соответственно $p = \left(p_{1,} p_{2,...,} p_m\right)$ и $q = \left(q_{1,} q_{2,...,} q_n\right)$, где $p_i \geq 0, q_j \geq 0$— вероятности (частоты) применения чистых стратегий A_i и B_j при этом $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1, \sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$.Величина $H\left(p, q\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} p_i q_j \alpha_{ij}$ — средний выигрыш (математическое ожидание игрока 1).

<u>Основная теорема</u>. Любая матричная игра имеет пару оптимальных смешанных стратегий $p^* = \left(p_i^* \; i = \overline{1, m}\right), q^* = \left(q_j^* \; j = \overline{1, n}\right)$, обладающую свойством:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j^* \alpha_{ij} \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i^* q_j^* \alpha_{ij} \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i^* q_j \alpha_{ij}$$

и цену игры $\gamma = H\left(p^*, q^*\right)$. (То есть если игрок 1 не придерживается p^*, а игрок 2 придерживается q^* тогда он может получить меньше γ. Соответственно для игрока 2.)

Будем считать .что все элементы платежной матрицы неотрицательны (если это не так, то можно ко всем ее элементам прибавить некоторое положительное число L, переводящее платежи в область неотрицательных значений; при этом решение игры p^* и q^* не изменится, цена игры лишь увеличится на L. Тогда $\gamma > 0$

Введем обозначения: $x_i = \dfrac{p_i}{\gamma}, i = \overline{1,m}; \quad y_j = \dfrac{q_j}{\gamma}, j = \overline{1,n};$

Известно, что задача нахождения p^* и q^* сводится к паре взаимодвойственных задач:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \to \min, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} x_i \ge 1, \quad x_i \ge 0; i = \overline{1,m} \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_i \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_i \le 1, \quad y_i \ge 0; j = \overline{1,n} \tag{2}$$

Предположим, что мы нашли их решения (оно всегда существует)

$$x_0 = \left(x_i^0, i = \overline{1,m}\right) \quad y_0 = \left(y_j^0, j = \overline{1,n}\right)$$

Тогда:

$$\frac{1}{\gamma} = \sum_{i=1}^{m} x_i^0 = \sum_{j=1}^{n} y_j^0; \qquad p_i^* = x_i^0 \gamma, i = \overline{1,m}; \quad q_j^* = \gamma y_j^0, j = \overline{1,n}$$

<u>Замечание</u>. Задачу (2) удобно решать, применяя симплекс-метод, а задачу (1) — двойственный симплекс-метод. Однако на практике достаточно решить лишь одну из них, например задачу (2). Решение двойственной ей задачи (1) легко получить из последней симплекс-таблицы (см. пример).

Оптимальные стратегии p^* и q^* можно искать, применяя приближенный метод Брауна-Робинсон, который заключается в следующем. Розыгрыш осуществляется искусственно. Игроки попеременно выбирают свои стратегии (строки и столбцы матрицы A), в ответ на поведение противника. Этот выбор они делают по результатам всех предыдущих ходов. Суммируются выбранные ранее строки игроком 1 и столбцы игроком 2. После чего игрок 2 находит минимальное число в полученной строке и отвечает соответствующей ему стратегией, а игрок 1 находит максимальное в полученном столбце и делает соответствующий ему ход. Начинает розыгрыш, например, игрок 1 стратегией A_1. Данные сводятся в специальную таблицу (смотри пример). Там же записываются средний выигрыш a игрока 1 и средний проигрыш β игрока 2. После достаточного количества итераций (N), подсчитывают частоты $\overline{p_i} = \dfrac{S_i}{N}, \quad \overline{q_j} = \dfrac{K_j}{N}, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}, \quad S_i$ — количество стратегий A_i; в них; Kj — количество стратегий Bj в них. Они и служат приближенными значениями для p^* и q^*. Средние арифметические a и β, служат оценками нижней и верхней цены игры. Известно, что при $N \approx 20,25$ может быть получено достаточно хорошее приближение к решению задачи. <u>Пример.</u> Решить игру, заданную следующей платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение.

1. Прежде всего проверим не имеет ли матрица A седловой точки:
$\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2; \quad \beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 3$.

Так как $\alpha \neq \beta$, то седловой точки нет и решением игры будет смешанная стратегия, а цена игры заключена в пределах $2 < v < 3$.

2. Решим игру сведением к задаче линейного программирования. Для этого построим пару взаимодвойственных задач по матрице A:

$$\left.\begin{array}{l} Z = x_1 + x_2 + x_4 \to \min, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geq 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} T = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \to \max, \\ 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_4 \leq 1, \\ 5y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 3y_4 \leq 1, \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 + 2y_4 \leq 1, \\ y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4} \end{array}\right\} \quad (2)$$

Решим, например, вторую задачу. Чтобы решить эту задачу симплекс-методом, приведем ее к каноническому виду.

$$\left.\begin{array}{l} T = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \to \max, \\ 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_4 + y_5 = 1, \\ 5y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 3y_4 + y_6 = 1, \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 + 2y_4 + y_7 = 1, \\ y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,7} \end{array}\right\}$$

Построим симплекс-таблицы:

	C		1	1	1	1	0	0	0	
$C_Б$	$a_Б$	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	θ
0	a_5	1	2	3	4	1	1	0	0	1/2
0	a_6	1	5	2	2	3	0	1	0	1/5
0	a_7	1	4	1	3	2	0	0	1	1/4
	Δ	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	
	a_5	3/5	0	11/5	16/5	-1/5	1	-2/5	0	3/11
	a_1	1/5	1	2/5	2/5	3/5	0	1/5	0	1/2
	a_7	1/5	0	-3/5	7/5	-2/5	0	1/5	1	---
	Δ	1/5	0	-3/5	-3/5	-2/5	0	1/5	0	
	a_2	3/11	0	1	16/11	-1/11	5/11	-2/11	0	
	a_1	1/11	1	0	-2/11	7/11	-2/11	3/11	0	
	a_7	4/11	0	0	25/11	-5/11	3/11	1/11	1	
	Δ	4/11	0	0	3/11	-5/11	3/11	1/11	0	
	a_2	2/7								
	a_4	1/7								
	a_7	3/7								

	Δ	3/7	5/7	0	1/7	0	1/7	2/7	0	

Оптимальное решение задачи (2): $y^* = \left(0;\frac{2}{7};0;\frac{1}{7};0;0;\frac{3}{7}\right), T_{\max} = \frac{3}{7}|$. Получим цену игры $\upsilon = \frac{1}{T_{\max}} = \frac{7}{3}$ и компоненты оптимальной смешанной стратегии q_j^* игрока *B*:

$q_1^* = vy_1^* = \frac{7}{3} * 0 = 0,$

$q_2^* = vy_2^* = \frac{7}{3} * \frac{2}{7} = \frac{2}{3},$

$q_3^* = vy_3^* = \frac{7}{3} * 0 = 0,$

$q_4^* = vy_4^* = \frac{7}{3} * \frac{1}{7} = \frac{1}{3}.$

Так как базисным переменным y_5, y_6, y_7 задачи (2) соответствуют свободные переменные $x_ъ, x_2, x_3$ задачи (1), можем из Δ-строки последней симплекс-таблицы выписать оптимальное решение задачи (1):

$$x_1^* = \frac{1}{7}; x_2^* = \frac{2}{7}; x_3^* = 0; Z_{\min} = \frac{3}{7}$$

Теперь вычислим компоненты оптимального оптимальной смешанной стратегии p_i^* игрока *A:*

$p_1^* = vx_1^* = \frac{7}{3} * \frac{1}{7} = 0,$

$p_2^* = vx_2^* = \frac{7}{3} * \frac{2}{7} = \frac{2}{3},$

$p_3^* = vx_3^* = \frac{7}{3} * 0 = 0.$

Итак $p^* = \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};0\right)$, $q^* = \left(0;\frac{2}{3};0;\frac{1}{3}\right)$, $v = 2\frac{1}{2}$.

3. Решим игру методом Брауна-Робинсона. Чтобы получить неплохое приближенное решение игры этим методом вам достаточно выполнить 20 итераций.

Вычисления удобно проводить в следующей таблице (см. таблицу 1)

Первый свой ход игрок *A* выбирает случайным образом, например, стратегию A_1. В столбцы B_1-B_4 при первой итерации записывается строка исходной матрицы, соответствующая выбранной стратегии игрока 1, а затем суммируются строки, согласно выбранным в последствии стратегиям этот игрока. В столбцах A_1-A_3 заносятся суммы столбцов матрицы *A* соответственно выбранным ходам игрока 2. Стратегии (столбцы и строки) игроки 2 и 1 выбирают попеременно, в ответ на ход противника и так, чтобы минимизировать свой проигрыш (выбирается наименьшее число среди A_1-A_n) и максимизировать свой выигрыш (выбирается среди B_1-B_3), соответственно.
Каждый раз рассчитываются :

α_k — наименьший из накопленных выигрышей игрока 1 за *k* партий, деленный на число партий *k*;

β_k — наибольший из накопленных проигрышей игрока 2 за k партий, деленный на число партий k:

$v_k^{cp} = \dfrac{\alpha_k + \beta_k}{2}$ — приближенное значение цены игры.

Сделав последнюю итерацию, определяем вероятности применения игроками своих стратегий:

$$p_1^* = \frac{8}{25} \approx 0,32;\ p_2^* = \frac{17}{25} \approx 0,68;\ p_3^* = 0$$

$$q_1^* = 0;\ q_2^* = \frac{17}{25} \approx 0,68;\ q_3^* = 0;\ q_4^* = \frac{8}{25} \approx 0,32$$

Приближенное значение цены игры $v \approx v_{25}^{cp} = 2,28$.

Сравнив это решение с полученным в предыдущем пункте видим, что получились очень близкие значения.

Задание: решить матричную игру сведением к задаче линейного программирования и методом Брауна-Робинсона, сравнить ответы.

Таблица 1.

Номер партии	Игрок 1					Игрок 2				Приблизительное значение цены игры		
	Стратегия игрока 1	Накопленный выигрыш при стратегиях игрока 2				Стратегия игрока 2	Накопленный выигрыш при стратегиях игрока 2			α_k	β_k	v_k
		B_1	B_2	B_3	B_4		A_1	A_2	A_3			
1.	A_1	2	3	4	14	B_4	1	3	2	1	3	2
2.	A_2	7	5	6		B_4	2	6	4	2	3	2,5
3.	A_2	12	7	8	3	B_4	3	9	6	1	3	2
4.	A_2	17	9	10	6	B_4	4	12	8	1,5	3	2,25
5.	A_2	22	11	12	9	B_4	5	15	10	1,8	3	2,4
6.	A_2	17	13	14	12	B_4	6	18	12	2	3	2,5
7.	A_2	32	15	16	15	B_2	9	20	13	2,14	2,86	2,5
8.	A_2	37	17	18	18	B_2	12	22	14	2,13	2,75	2,44
9.	A_2	42	19	20	21	B_2	15	24	15	2,11	2,67	2,39
10.	A_2	47	21	22	24	B_2	18	26	16	2,1	2,6	2,35
11.	A_2	52	23	24	27	B_2	21	28	17	2,1	2,55	2,32
12.	A_2	57	25	26	30	B_2	24	30	18	2,08	2,5	2,29
13.	A_2	63	27	28	33	B_2	27	32	19	2,08	2,46	2,27
14.	A_2	68	29	30	36	B_2	30	34	20	2,07	2,43	2,25
15.	A_2	73	31	32	39	B_2	33	36	21	2,07	2,4	2,24
16.	A_2	78	33	34	42	B_2	36	38	22	2,06	2,38	2,22
17.	A_2	83	35	36	45	B_2	39	40	23	2,06	2,35	2,21
18.	A_2	88	37	38	48	B_2	42	42	24	2,06	2,33	2,2
19.	A_1	90	40	42	49	B_2	45	44	25	2,11	2,37	2,34
20.	A_1	92	43	46	50	B_2	48	46	26	2,15	2,4	2,26
21.	A_1	94	46	50	51	B_2	51	48	27	2,19	2,43	2,31
22.	A_1	96	49	54	52	B_2	54	50	28	2,23	2,45	2,34
23.	A_1	98	52	58	53	B_2	57	52	29	2,26	2,48	2,37
24.	A_1	100	55	62	54	B_4	58	55	31	2,25	2,42	2,33
25.	A_1	102	58	64	55	B_4	59	58	32	2,2	2,36	2,28

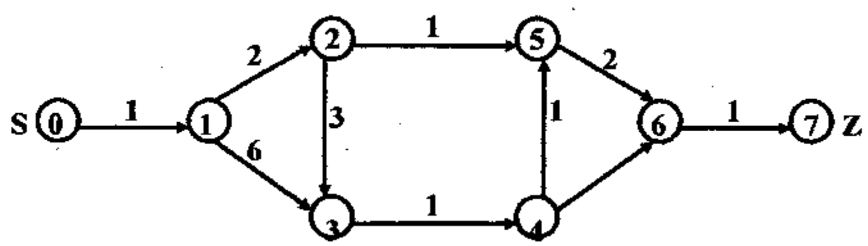
Лабораторная работа №5
Расчет и анализ параметров сетевого графика

Постановка задачи. Пусть имеется проект некоторого комплекса работ. Проект задается перечнем работ, их продолжительностью и последовательностью их выполнения.

Представление проекта в виде сети называется *сетевым графиком.* Ориентированные дуги представляют работы. Вершины (события) представляют последовательность выполнения работ. В сетевом графике должно быть одно начальное и одно конечное событие.

Рассмотрим некоторые алгоритмы расчета ряда плановых показателей по сетевому графику работ, одновременно иллюстрируя их на примере.

Пример.



Данный график задает 10 работ: *(0,1),(1,2),(1,3),...* и 8 событий, связанных с началом и завершением работ. Числа *у* дуг означают продолжительность перехода от одного события к другому.

1. Расчет наиболее раннего возможного времени наступления каждого события

$$t_p(j), \quad j=\overline{0,7}, \text{ «}p\text{»— раннее}$$

Формула:

$$t_p(0)=0, t_p(j)=\max_j\left[t_p(i)+t_{ij}\right]$$

где *max* берется по событиям, для которых существует работа *(i,j).*

Для нашего графика:

$$\begin{aligned}
&t_p(0)=0, t_p(1)=\left[t_p(0)+t_{01}\right]=0+1=1,\\
&t_p(2)=\left[t_p(1)+t_{12}\right]=1+2=3,\\
&t_p(3)=\max\left[t_p(1)+t_{13}, t_p(2)+t_{23}\right]=\max[1+6,3+3]=7,\\
&t_p(4)=\left[t_p(3)+t_{25}\right]=7+1=8, \qquad (*)\\
&t_p(5)=\max\left[t_p(2)+t_{25}, t_p(4)+t_{45}\right]=\max[3+1,8+1]=9,\\
&t_p(6)=\max\left[t_p(4)=t_p(4)+t_{46}, t_p(5)+t_{56}\right]=\max[10,11]=11\\
&t_p(7)=\left[t_p(6)+t_{67}\right]=11+1=12.
\end{aligned}$$

Таким образом установлено время начала каждой работы при соблюдении плановых сроков и время выполнения всех работ — 12 единиц времени (например, месяцев).

2. Определение критического пути.

Последовательность работ в сети $(i_1,i_2),(i_2,i_3),...,$ в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей работы, называется *путем* и обозначается перечислением событий $L=(i_1,i_2,...,i_k)$

Путь для которого начало совпадает с исходным событием, а конец с завершающим, называется *полным путем.* Указанный путь имеет 5 полных путей: $L_1 = (0,1,2,5,6,7)$, $L_2 = (0,1,2,3,4,6,7)$, $L_3 = (0,1,2,3,4,5,6,7)$, $L_4 = (0,1,3,4,6,7)$, $L_5 = (0,1,3,4,5,6,7)$. *Длиной пути* называется сумма продолжительностей составляющих его работ. Путь, имеющий максимальную длину, называется *критическим путем.* Поиск критического пути ведется от последнего события сети. В качестве события, предшествующего событию с номером j в критическом пути принимается событие с номером k, для которого

$$t_p(k) + t_{kj} = \max_i \left[t_p(i) + t_{ij} \right]$$

Эти номера k выбираем, начиная с последней строки формул (*): 7,6,5,4,3,1,0.

Таким образом, в нашем примере критический путь $L_{кр}= L_5$ — (0,1,3,4,5,6, 7). Длина $L_{кр}$ = 12 (единицам времени).

3. Определение наиболее позднего возможного времени. Критический путь определяет общую продолжительность работ по созданию объекта, для которого составлен сетевой график. Чтобы сократить срок создания объекта нужно сократить время выполнения работ на критическом пути.

Возникает вопрос о резервах времени выполнения работ. Наличие таких резервов позволяет перераспределить силы для выполнения параллельных работ.

Для определения резервов времени предварительно вычисляется наиболее позднее возможное время начала выполнения каждого события, не изменяющее сроки выполнения всей разработки. Эти величины обозначим $t_n(j)$ ("n" — позднее). Для их определения предварительно рассчитываются величины $t'_n(j)$— длина наибольшего пути от события j до конца разработки. Величины $t'_n(j)$ определяются от последнего события по алгоритму:

$$t'_n(z) = 0, t'_n(j) = \max_i \left[t'_n(i) + t_{ij} \right]$$

Для данного примера имеем:

$t'_n(7) = 0;\quad t'_n(6) = 1;\quad t'_n(5) = 3;$

$t'_n(4) = \max\left[t'_n(6) + t_{46}; t'_n(5) + t_{45} \right] = \max[3,4] = 4;$

$t'_n(3) = 5;\quad t'_n(2) = \max\left[t'_n(5) + t_{25}, t'_n(3) + t_{23} \right] = \max[4,8] = 8;$

$t'_n(1) = \max\left[t'_n(2) + t_{12}, t'_n(3) + t_{13} \right] = \max[10,11] = 11;\quad t'_n(0) = 12.$

Величины $t_n(j)$ определяются из соотношения:

$$t_n(o) = t_{кр} - t'_n(j)$$

Имеем: $t_n(0)=12\text{-}12=0;$ $t_n(1)=1;$ $t_n(2)=4$;$t_n(3)=7;$ $t_n(4)=8;$ $t_n(5)=9;$ $t_n(6)=11;$ $t_n(7)=12.$

4. Определение полного резерва времени.

Для работы (i, j) полный резерв времени $R_n(i,j)$ определяется зависимостью:

$$R_n(i, j) = t_n(j) - t_p(i) - t_{ij}$$

и определяют насколько может быть затянуто выполнение работы (i,j) без удлинения сроков выполнения проекта.

Имеем:

$R_n(0,1)=0; R_n(1,2)=t_n(2)-t_p(1)-t_{12}=4-1-2=1;$

$R_n(1,3)=0; R_n(2,3)=1; R_n(2,5)=5; R_n(3,4)=0;$

$R_n(4,5)=0; R_n(4,6)=1; R_n(5,6)=0; R_n(6,7)=0.$

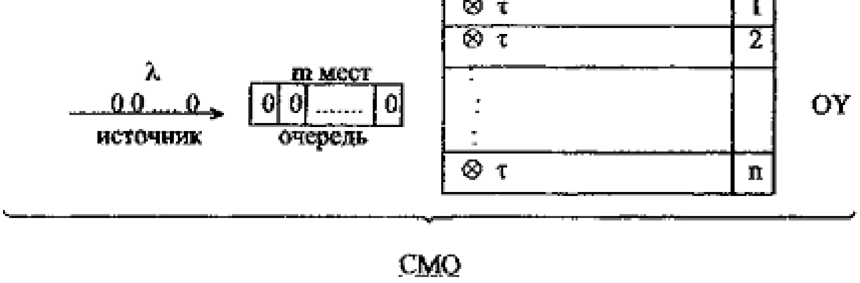
Для работ критического пути $R_n(i,j)=0$. Использование одного из полных резервов работ может влиять на величину другого.

Так $R_n(1,2)=1, R_n(2,5)=5$. Но если использовать резерв $R_n(1,2)$, то величина $R_n(2,5)$ станет равной 4.

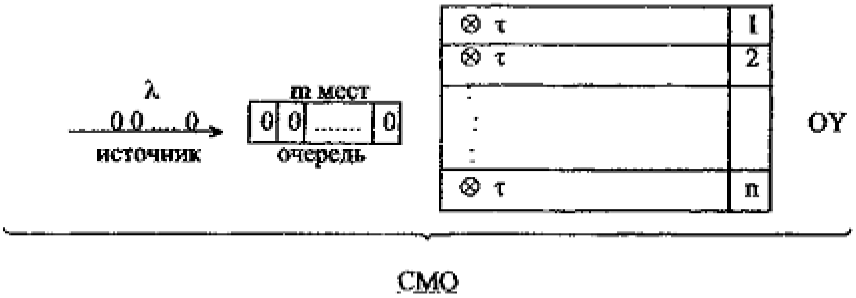
5. Свободный резерв времени. $P_C(i,j)=t_p(j)-t_n(i)-t_{ij}$

Если для работы *(i, j)* выполняется условие: $t_n(i)+t_{ij}<t_p(i)$, то работа обладает свободным резервом времени $P_C(2,5)=4; P_C(4,6)=1$. Использование величины $p_c(i,j)$ не влияет на величину резервов времени остальных работ сети.

Задание. Произвести расчет показателей сетевого графика. Сделать выводы.



луживания
каналами и
в очереди
)):



На входе поток требований с интенсивностью λ, в очереди *m* мест, в ОУ *n* каналов, обслуживающих с интенсивностью $\mu=\frac{1}{\tau}$, где τ— среднее время обслуживания одной заявки. Если все *n*+*m* мест в СМО заняты, то требование покидает ее.

Обозначим через $E_k, k=\overline{0,n+m}$ состояние, при котором в системе находится *k* требований, а через $p_k(t)$, соответствующую вероятность. Система уравнений для определения вероятностей состояний:

$$(1)\quad \begin{cases} p_0'(t)=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t), \\ p_k'=\lambda p_{k-1}(t)-(\lambda+k\mu)\,p_k(t)+(k+1)\,\mu p_{k+1}(t), k=\overline{1,n-1} \\ p_k'(t)=\lambda p_{k-1}(t)-(\lambda+n\mu)\,p_k(t)+n\mu p_{k+1}(t), k=\overline{n,n+m-1} \\ p_{n+m}'=\lambda p_{n+m-1}(t)-n\mu p_{n+m}(t) \end{cases}$$

Решая эту систему дифференциальных уравнений возможно найти $p_k(t)$ для каждого *t > 0* при некоторых начальных условиях $p_i(0), i=\overline{0,n+m}$. Так как в системе существует предельные установившиеся состояния $p_k(t)\to p_k$ при $t\to\infty$, то для них в пределе получаем систему ($p_k'(t)\to 0$ при $t\to\infty$).

$$(2)\quad \begin{cases} -\lambda p_0+\mu p_1=0 \\ \lambda p_{k-1}-(\lambda+k\mu)\,p_k+\mu(k+1)\,p_{k+1}=0, \quad k=\overline{1,n-1} \\ \lambda p_{k-1}-(\lambda+n\mu)\,p_k+n\mu p_{k+1}=0, \quad k=\overline{n,n+m-1} \\ \lambda p_{n+m-1}-n\mu p_{n+m}=0. \end{cases}$$

с нормирующим условием $\sum_{k=0}^{n+m} p_k=1$.

Решая эту систему, получим

$$\begin{cases} p_k=\dfrac{\rho^k}{\lambda_k!}p_0, k=\overline{1,n-1} \qquad p_k=\dfrac{\rho^k}{n^{k-m}n!}p_0, k=\overline{n,n+m} \\ p_0=\left[\sum_{k=0}^{n}\dfrac{\rho^k}{k!}+\dfrac{\rho^n\left[\left(\dfrac{\rho}{n}\right)^{m+1}-\dfrac{\rho}{n}\right]}{n!\left(\dfrac{\rho}{n}-1\right)}\right]^{-1}, где\ \rho=\dfrac{\lambda}{\mu}. \end{cases}$$

Отсюда возможно определить основные характеристики системы:

1) p_0 — вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны;

2) $p_k, k=\overline{1,n}$ — вероятность того, что обслуживанием заняты k каналов;

3) $p_{n+1} = \dfrac{\rho^{n+1}}{n!n^m} p_0, l=\overline{1,m}$ — вероятность того, что все каналы в СМО заняты и l требований находятся в очереди;

4) $p_{отк.} = p_{n+m}$ — вероятность отказа;

5) $N_3 = \rho\left[1-\dfrac{\rho^{n+m}}{n!n^m} p_0\right]$ — среднее количество каналов, занятых обслуживанием (математическое ожидание);

6) $N_{пр.} = n - N_3$ — среднее количество простаивающих каналов;

7) $K_{пр.} = N_{пр.}/n, \quad K_3 = \dfrac{N_3}{n} = 1 - K_{пр.}$ — коэффициенты простоя и занятости;

8) $q = 1 - p_{отк.}$ — относительная пропускная способность (доля обслуженных требований от общего количества поступивших);

9) $A = \lambda q$ — абсолютная пропускная способность (среднее количество требований, обслуженных системой в единицу времени);

10) $L_{ож.} = \dfrac{\rho^{n+1}}{n!n} p_0\left[1+2\dfrac{\rho}{n}+3\left(\dfrac{\rho}{n}\right)^2+\ldots+m\left(\dfrac{\rho}{n}\right)^{m-1}\right]$ — среднее количество требований в очереди;

11) $L = L_{ож.} + N_3$ — среднее количество требований в СМО;

12) $W = \dfrac{L_{ож.}}{\lambda}$ — среднее время ожидания в очереди;

13) $V = W + \dfrac{q}{\mu}$ — среднее время пребывания в СМО.

Задание. Рассчитывается пункт обслуживания населения (парикмахерская, химчистка и т.д.). Количество обслуживающих каналов (мастеров, приемщиков) — n с средним временем обслуживания τ. Количество мест в зале ожидания m. Если все места в очереди заняты, то клиент покидает пункт, расчетный поток клиентов для обслуживания случайный, а моменты их прихода распределены по закону Пуассона с параметром λ (клиентов в час).

1) При заданных m, τ, λ рассчитать количество n так, чтобы было обслужено не менее $a\%$ клиентов. Рассчитать для полученного n остальные характеристики СМО.

2) При заданных n, τ, λ рассчитать, максимальное m так. чтобы среднее время ожидания в очереди не превысило b часов.

3) Составить системы уравнений Колмогорова для полученного m.

Исследование операций. Лабораторный практикум.
Составители:
Бышик Татьяна Петровна
Левчук Виктор Дмитриевич
Мережа Валерий Леонидович
Осипенко Наталья Борисовна

Подписано в печать 06.01.98. Формат 60 х 80 1/16. Печать офсетная. Усл.п.л. 1,6. Уч.-изд.л. 1,3. Тираж 100 экз. Заказ 114 .

Отпечатано на ротапринте Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины.
246699, Гомель, ул. Советская, 104