**Министерство образования Республики Беларусь**
**Учреждение образования**
**“Гомельский государственный университет**
**имени Франциска Скорины”**

**В.С.МОНАХОВ**

# ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КОНЕЧНЫХ ГРУПП И ИХ КЛАССОВ

**Учебное пособие**

**Гомель 2003**

ББК 22.144
М 77
УДК 512.542

Монахов В.С.

Введение в теорию конечных групп и их классов: Учебное пособие / В.С.Монахов. — Гомель: УО “ГГУ им. Ф.Скорины”, 2003. — 322 с.

В основу данного учебного пособия положены курсы лекций по теории конечных групп, читанные автором на математическом факультете Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины начиная с 1986/87 учебного года в рамках специализации "Алгебра и теория чисел". Здесь изложены основы теории конечных групп и основы теории классов конечных групп: формаций, классов Шунка, классов Фиттинга.

Книга состоит из пяти глав: группы и их подгруппы; гомоморфизмы и произведения групп; абелевы и нильпотентные группы; разрешимые и сверхразрешимые группы; проекторы и инъекторы.

Предназначено для студентов и аспирантов математических факультетов ВУЗов.

Библиогр.: 31 назв.

Рецензенты:
кафедра высшей алгебры Белорусского госуниверситета,
д-р физ.-мат. наук, профессор Э.М.Пальчик

*ПОСВЯЩАЕТСЯ 50–летию*
*Гомельской алгебраической школы*

## Предисловие

Начало развития исследований в области теории конечных групп в Гомеле связано с приездом в 1953 году профессора Сергея Антоновича Чунихина в только что открывшийся Белорусский государственный институт инженеров железнодорожного транспорта, ныне — Белорусский государственный университет транспорта. Здесь он возглавил кафедру высшей математики, а позднее в 1959 году создал лабораторию теории конечных групп Института математики АН БССР и в 1964 году кафедру алгебры и геометрии Гомельского педагогического института, преобразованного в 1969 году в университет. В 1956 году он был избран членом–корреспондентом АН БССР, а в 1966 году — академиком АН БССР.

За время работы С.А.Чунихина в г. Гомеле в 1953–1985 гг. создана крупная научная алгебраическая школа, активно развивающая в настоящее время под руководством члена–корреспондента НАН Беларуси профессора Л.А.Шеметкова различные направления современной теории групп и теории классов алгебраических систем. Об этом свидетельствуют монографии участников Гомельского алгебраического семинара С.А.Чунихина [16], Л.А. Шеметкова [19], [22], А.Н.Скибы [22], [13], М.В.Селькина [12], [5], С.Ф.Каморникова [5], Го Вэньбиня [25].

К учебным изданиям по теории групп участников Гомельского алгебраического семинара следует отнести прежде всего машинописные варианты текстов лекций С.А.Чунихина [17] и Л.А.Шеметкова [21], а также учебные пособия Л.А.Шеметкова [20], В.А.Ведерникова [3],



В.С.Монахова [10] и А.Н.Скибы [14].

Настоящая книга — расширенная запись лекций по теории конечных групп, читанных автором на математическом факультете Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины начиная с 1986/87 учебного года в рамках специализации "Алгебра и теория чисел". Её цель — изложить основы теории конечных групп и основы теории классов конечных групп: формаций, классов Шунка, классов Фиттинга.

При подборке материала автор использовал методики построения текстов лекций Л.А.Шеметкова [21] и Гащюца [24], а также отдельные фрагменты монографий Хупперта [26], Робинсона [30], учебных изданий Курцвейля и Стельмахера [29] и Верфрица [31].

Более углубленное изучение теории конечных групп и их классов читатель может осуществить по монографиям и обзорным статьям, указанным в литературе.

Автор выражает искреннюю благодарность члену–корреспонденту НАН Беларуси профессору Л.А.Шеметкову и профессору В.А.Ведерникову за многочисленные полезные консультации, способствующие улучшению качества излагаемого материала. Автор также благодарен рецензентам: коллективу кафедры высшей алгебры Белорусского госуниверситета, возглавляемому профессором О.И.Тавгенем, профессору этой кафедры О.В.Мельникову, заведующему кафедрой прикладной математики Полоцкого госуниверситета пофессору Э.М.Пальчику за конструктивные замечания, и к.ф.–м.н. И.В.Близнецу за помощь в подготовке рукописи книги к изданию.

*г.Гомель, апрель 2003 г.* *В.Монахов*

# ГЛАВА 1.
# ГРУППЫ И ИХ ПОДГРУППЫ

## § 1. Группы, примеры групп

*Бинарной алгебраической операцией* на множестве $X$ называют отображение декартова квадрата $X \times X$ во множество $X$. Если $\varphi : X \times X \to X$ — бинарная операция на $X$, то каждой упорядоченной паре $(a, b)$ элементов из $X$ соответствует однозначно определенный элемент $c = \varphi(a, b)$. Бинарную операцию на $X$ обозначают одним из символов: $+, \cdot, \oplus, \circ, \otimes, *$ и т.д. Если вместо $\varphi$ условимся писать $\circ$, то вместо $c = \varphi(a, b)$ пишем $c = a \circ b$.

Наиболее часто используются две формы записи алгебраической операции: аддитивная и мультипликативная. При *аддитивной* записи операцию называют *сложением* и вместо $c = a \circ b$ пишут $c = a + b$. При *мультипликативной* записи операцию называют *умножением* и вместо $c = a \circ b$ пишут $c = a \cdot b$ или $c = ab$. Будем использовать мультипликативную запись.

Говорят, что на множестве $X$ *определена* бинарная операция (умножение), если $ab \in X$ для всех $a, b \in X$.

Если $a(bc) = (ab)c$ для всех $a, b, c \in X$, то операция называется *ассоциативной*.

Если $ab = ba$ для всех $a, b \in X$, то операция называется *коммутативной*.

Элемент $e \in X$ называется *единичным*, если $ae = ea = a$ для всех $a \in X$.

*Обратным* к элементу $a$ называется такой элемент $a^{-1}$, что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

*Полугруппой* называется непустое множество $P$ с бинарной алгебраической операцией (умножение), удовле-





творяющей следующим требованиям:

(1) операция определена на $P$, т.е. $ab \in P$ для всех $a$ и $b \in P$;

(2) операция ассоциативна, т.е. $a(bc) = (ab)c$ для любых $a, b, c \in P$.

**Теорема 1.1.** *В полугруппе может быть не более одного единичного элемента. Если в полугруппе имеется единичный элемент, то каждый элемент обладает не более, чем одним обратным.*

*Доказательство.* Пусть $e_1$ и $e_2$ — единичные элементы полугруппы $P$. Тогда $e_1e_2 = e_1$, поскольку $e_2$ — единичный элемент, и $e_1e_2 = e_2$, поскольку $e_1$ — единичный элемент. Поэтому $e_1 = e_2$.

Пусть теперь $e$ — единичный элемент. Предположим, что $a_1$ и $a_2$ — обратные к $a$ элементы, т.е. $a_1a = aa_1 = e = a_2a = aa_2$. Тогда $a_1 = a_1e = a_1(aa_2) = (a_1a)a_2 = ea_2 = a_2$. □

**Теорема 1.2.** *В полугруппе результат применения операции к нескольким элементам не зависит от способа распределения скобок.*

*Доказательство.* Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — элементы мультипликативной полугруппы $P$. Не меняя порядка следования элементов, можно разными способами вычислять произведение этих элементов. Для $n \leq 4$ можно составить следующие произведения:

$n = 1$ $\quad a_1;$

$n = 2$ $\quad a_1a_2;$

$n = 3$ $\quad (a_1a_2)a_3,\ a_1(a_2a_3);$

$n = 4$ $\quad ((a_1a_2)a_3)a_4,\ (a_1(a_2a_3))a_4,\ a_1((a_2a_3)a_4),$
$a_1(a_2(a_3a_4)),\ (a_1a_2)(a_3a_4).$

Поскольку операция ассоциативна, то $(a_1a_2)a_3 = a_1(a_2a_3)$. Для $n = 4$, используя ассоциативность, легко проверить, что все пять произведений совпадают.

Продолжим доказательство индукцией по $n$. Считаем, что для числа элементов $< n$ справедливость утверждения установлена. Нам нужно показать, что

$$(a_1 \dots a_k)(a_{k+1} \dots a_n) = (a_1 \dots a_l)(a_{l+1} \dots a_n) \qquad < 1 >$$

при любых $k$ и $l$, $1 \leq k,\ l \leq n-1$. По предположению индукции внутри скобок произведения вычисляются однозначно. Пусть $k > l$. Тогда

$$(a_1 \dots a_k)(a_{k+1} \dots a_n) =$$
$$= ((a_1 \dots a_l)(a_{l+1} \dots a_k))(a_{k+1} \dots a_n) =$$
$$= (a_1 \dots a_l)((a_{l+1} \dots a_k)(a_{k+1} \dots a_n)) =$$
$$= (a_1 \dots a_l)(a_{l+1} \dots a_n).$$

□

Теорема 1.2 позволяет в полугруппах использовать знак кратного умножения:

$$a_1a_2 = \prod_{i=1}^{2} a_i; \quad a_1a_2a_3 = \prod_{i=1}^{3} a_i; \quad \dots ; \quad a_1a_2...a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

В частности, при $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ произведение $aa\dots a$ обозначают через $a^n$ и называют *$n$-й степенью элемента $a$*. Следствием теоремы 1.2 являются соотношения

$$a^n a^m = a^{n+m}; \quad (a^n)^m = a^{nm}, \quad n, m \in \mathbb{N}. \qquad < 2 >$$





В полугруппе $P$ с единицей $e$ для любого $a \in P$ полагают $a^0 = e$. Заметим еще, что если $ab = ba$, то

$$(ab)^n = a^n b^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}, \qquad < 3 >$$

что легко проверяется индукцией по $n$.

*Группой* называется непустое множество $G$ с бинарной алгебраической операцией (умножением), удовлетворяющей следующим требованиям:

(1) операция определена на $G$, т.е. $ab \in G$ для всех $a$ и $b \in G$;

(2) операция ассоциативна, т.е. $a(bc) = (ab)c$ для любых $a, b, c \in G$;

(3) в $G$ существует единичный элемент, т.е. такой элемент $e \in G$, что $ae = ea = a$ для всех $a \in G$;

(4) каждый элемент обладает обратным, т.е. для любого $a \in G$ существует такой элемент $a^{-1} \in G$, что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Более кратко, полугруппа с единицей, в которой каждый элемент обладает обратным, называется *группой*.

Группу с коммутативной операцией называют *коммутативной* или *абелевой*. Если $G$ — конечное множество, являющееся группой, то $G$ называют *конечной группой*, а число $|G|$ элементов в $G$ — *порядком группы $G$*.

Отметим некоторые начальные свойства групп, которые сформулируем в виде лемм. Следующее свойство вытекает из теоремы 1.1.

**Лемма 1.3.** *В мультипликативной группе имеется единственный единичный элемент и для каждого элемента существует единственный обратный.* □

**Лемма 1.4.** *$(a^{-1})^{-1} = a$ и $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ для любых элементов $a$ и $b$ группы $G$.*

*Доказательство.* Первое равенство очевидно. Так как

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = e,$$

$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}eb = e,$$

то $b^{-1}a^{-1}$ — обратный элемент для $ab$. Поэтому

$$b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1}.$$

□

Определим отрицательные целые степени элемента группы как обратные положительным степеням, т.е. положим,

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} \qquad <4>$$

для всех натуральных $n$.

**Лемма 1.5.** *$(a^s)^{-1} = (a^{-1})^s = a^{-s}$ для любого элемента $a$ группы $G$ и любого целого $s$.*

*Доказательство.* Пусть $s > 0$. Тогда по лемме 1.4 имеем

$$(a^s)^{-1} = (a \ldots a)^{-1} = a^{-1} \ldots a^{-1} = (a^{-1})^s.$$

Теперь $(a^s)^{-1} = a^{-s}$ по <4>.

Если $s = 0$, то

$$(a^s)^{-1} = e = (a^{-1})^s = a^{-s}.$$

Если $s < 0$, то

$$(a^s)^{-1} = ((a^{-1})^{|s|})^{-1} = ((a^{|s|})^{-1})^{-1} = a^{|s|} = a^{-s}$$

и

$$(a^{-1})^s = (a^{-1})^{-|s|} = ((a^{-1})^{|s|})^{-1} = ((a^{|s|})^{-1})^{-1} = a^{|s|} = a^{-s}.$$

□





**Лемма 1.6.** *Для любых целых $s$ и $t$ и любого элемента $a$ группы $G$ справедливы равенства:*

$$a^s a^t = a^{s+t}; \quad (a^s)^t = a^{st}.$$

*Доказательство.* Для натуральных показателей эти равенства уже получены в <2>. Если один из показателей нуль, то равенства также справедливы. Пусть $s$ и $t$ — отрицательные. Тогда используя леммы 1.5 и 1.4 и равенства <2> получаем, что

$$a^s a^t = a^{-|s|}a^{-|t|} = (a^{-1})^{|s|}(a^{-1})^{|t|} = (a^{-1})^{|s|+|t|} = a^{s+t};$$

$$(a^s)^t = (a^{-|s|})^t = ((a^{|s|})^{-1})^t = (a^{|s|})^{-t} = (a^{|s|})^{|t|} = a^{|s||t|} = a^{st}.$$

Если $s < 0$, $t > 0$, то

$$a^s a^t = a^{-|s|}a^t = \underbrace{a^{-1} \ldots a^{-1}}_{|s|}\underbrace{a \ldots a}_{t} = a^{t-|s|}$$

(или $a^{|s|-t}$, если $|s| \geq t$) $= a^{t+s}$;

$$(a^s)^t = \underbrace{a^s \ldots a^s}_{t} = \underbrace{a^{-1} \ldots a^{-1}}_{|s|} \ldots \underbrace{a^{-1} \ldots a^{-1}}_{|s|} = (a^{-1})^{|s|t} = a^{st};$$

Случай $s > 0$, $t < 0$ проверяется аналогично. □

**Лемма 1.7.** *В группе $G$ уравнения $ax = b$ и $yc = d$ имеют единственные решения $x = a^{-1}b$ и $y = dc^{-1}$.*

*Доказательство.* Так как

$$a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = eb = b,$$

то $a^{-1}b$ — решение уравнения $ax = b$. Если $t$ — произвольное решение уравнения $ax = b$, то

$$t = et = (a^{-1}a)t = a^{-1}(at) = a^{-1}b.$$

Аналогично проводятся рассуждения для уравнения $yc = d$. □

**Теорема 1.8.** *Полугруппа $P$ является группой тогда и только тогда, когда уравнения $ax = b, ya = b$ имеют решения для любых элементов $a, b \in P$.*

*Доказательство.* Если $P$ — группа, то по лемме 1.7 уравнения $ax = b, ya = b$ имеют решения для любых $a, b \in P$.

Обратно, пусть $P$ — полугруппа и уравнения $ax = b, ya = b$ имеют решения для всех $a$ и $b \in P$. Зафиксируем элемент $c \in P$ и обозначим через $x_c$ решение уравнения $cx = c$. Пусть $g$ — произвольный элемент из $P$ и пусть $y^*$ — решение уравнения $yc = g$. Умножив обе части равенства $cx_c = c$ слева на $y^*$, получим: $y^*cx_c = y^*c$ или $gx_c = g$. Таким образом, $gx_c = g$ для всех $g \in P$.

Решение уравнения $gx = x_c$ обозначим через $g^{-1}$. Итак $gg^{-1} = x_c$ для всех $g \in P$.

Пусть $a$ — произвольный элемент из $P$ и пусть $x_c a = b$. Умножим обе части равенства на $a^{-1}$ справа. Имеем: $x_c aa^{-1} = ba^{-1}$ или $x_c x_c = ba^{-1}$. Но $x_c x_c = x_c$, поэтому $x_c = ba^{-1}$. Так как $aa^{-1} = x_c$, то $aa^{-1} = ba^{-1}$. Через $t$ обозначим решение уравнения $a^{-1}x = x_c$, т.е. $a^{-1}t = x_c$. Умножив обе части уравнения $aa^{-1} = ba^{-1}$ справа на $t$, получим:

$$aa^{-1}t = ax_c = a = ba^{-1}t = bx_c = b,$$

т.е. $a = b$ и $x_c$ — единичный элемент полугруппы $P$. По теореме 1.1 единичный элемент в $P$ единственный.

Допустим, что $g^{-1}g = f$, где $g$ и $f \in P$. Умножив обе части равенства справа на $g^{-1}$ получим: $g^{-1}gg^{-1} = fg^{-1}$ или $g^{-1}x_c = g^{-1} = fg^{-1}$. Так как в $P$ единичный элемент





единственный, то $f = x_c$ и $g^{-1}$ — обратный элемент к элементу $g$ в полугруппе $P$. Поэтому $P$ — группа. □

Теорема 1.8 позволяет ввести следующее определение группы, эквивалентное исходному.

*Группой* называется непустое множество $G$ с бинарной алгебраической операцией (умножением), удовлетворяющей следующим требованиям:

(1) операция определена на $G$;

(2) операция ассоциативна;

(3) уравнения $ax = b, ya = b$ имеют решения для любых элементов $a, b \in G$.

Говорят, что элемент $a$ группы $G$ *сопряжен* с элементом $b$ посредством элемента $x$, если $a = x^{-1}bx$. Вместо $x^{-1}bx$ удобнее писать $b^x$. Через $a^G = \{a^x \mid x \in G\}$ обозначим совокупность всех элементов группы $G$, сопряженных с элементом $a$, и назовём *классом сопряженных элементов*. Ясно, что в абелевой группе каждый класс сопряженных элементов состоит из одного элемента, т.е. если группа $G$ абелева, то $a^G = \{a\}$ для всех $a \in G$.

**Лемма 1.9.** *Пусть $a, b, x, y \in G$. Тогда:*

*(1) $a^{xy} = (a^x)^y$;*

*(2) $(ab)^x = a^x b^x$;*

*(3) $(a^x)^{-1} = (a^{-1})^x$;*

*(4) $(a^x)^k = (a^k)^x$ для любого $k \in \mathbb{Z}$;*

*(5) два класса сопряженных элементов либо совпадают, либо их пересечение пусто;*

*(6) группа является объединением непересекающихся классов сопряженных элементов.*

*Доказательство.* Утверждения (1–4) очевидны.

(5) Пусть $a^G \cap b^G \neq \emptyset$; $d \in a^G \cap b^G$. Тогда $d = a^x = b^y$ для некоторых $x, y \in G$. Поэтому

$$x^{-1}ax = y^{-1}by;\ a = xy^{-1}byx^{-1} = b^{yx^{-1}} \in b^G.$$

Если $c = a^z \in a^G$, то $c = b^{yx^{-1}z} \in b^G$ и $a^G \subseteq b^G$. Аналогично проверяется, что $b^G \subseteq a^G$, поэтому $a^G = b^G$.

(6) Так как $a = a^e \in a^G$, то каждый элемент группы $G$ принадлежит некоторому классу сопряженных элементов и ввиду (5) группа распадается на непересекающиеся классы сопряженных элементов. □

Для рассмотрения примеров нам потребуется следующие стандартные обозначения:

$\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;
$\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел;
$\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел.

Все приведенные определения и полученные результаты легко распространяются на множества с аддитивной записью операции. Связь между аддитивной и мультипликативной записями операций представлена в следующей таблице.





| **Мультипликативная запись операции** | **Аддитивная запись операции** |
|---|---|
| умножение | сложение |
| произведение $ab$<br>$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \ldots a_n$ | сумма $a+b$<br>$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ |
| единичный элемент $e$<br>$ae = ea = a$ | нулевой элемент 0<br>$a + 0 = 0 + a = a$ |
| обратный элемент $a^{-1}$<br>$aa^{-1} = a^{-1}a = e$ | противоположный элемент $-a$<br>$a + (-a) = -a + a = 0$ |
| ассоциативность<br>$(ab)c = a(bc)$ | ассоциативность<br>$(a+b)+c = a+(b+c)$ |
| коммутативность<br>$ab = ba$ | коммутативность<br>$a+b = b+a$ |
| степень $a^n$ при $n > 0$<br>$a^n = \underbrace{a \ldots a}_{n \text{ раз}}$ | кратное $na$ при $n > 0$<br>$na = \underbrace{a + \ldots + a}_{n \text{ раз}}$ |
| степень $a^n$ при $n < 0$<br>$a^n = \underbrace{a^{-1} \ldots a^{-1}}_{-n \text{ раз}}$ | кратное $na$ при $n < 0$<br>$na = \underbrace{(-a) + \ldots + (-a)}_{-n \text{ раз}}$ |
| $a^n = e$ при $n = 0$ | $na = 0$ при $n = 0$ |
| $a^n a^m = a^{n+m}$ | $na + ma = (n+m)a$ |
| $(a^n)^m = a^{nm}$ | $m(na) = (mn)a$ |
| $(ab)^n = a^n b^n$, если $ab = ba$ | $n(a+b) = na + nb$, если $a + b = b + a$ |

**Пример 1.10.** Числовые группы.

(a) Множества $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ с операцией сложения — абелевы группы. Все требования определения группы проверяются без труда. □

(b) Множество $\mathbb{N}$ со сложением не является группой, так как в $\mathbb{N}$ нет нулевого элемента и противоположных. Однако $\mathbb{N}$ со сложением — полугруппа. □

(c) Ни одно из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ с умножением группу не образует. Если положим $\mathbb{R}^{\#} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}^{\#} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}^{\#} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то $\mathbb{R}^{\#}$, $\mathbb{Q}^{\#}$ и $\mathbb{C}^{\#}$ с умножением являются абелевыми группами. $\mathbb{Z}^{\#} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $\mathbb{N}$ с умножением полугруппы, но не группы. □

(d) Множество $\{-1, 1\}$ с умножением — конечная абелева группа порядка 2. □

**Пример 1.11.** Матричные группы.

(a) Пусть $P$ — некоторое поле. Через $M(n, P)$ обозначим совокупность всех квадратных $n \times n$–матриц с элементами из $P$. Ясно, что $M(n, P)$ с операцией умножения матриц — полугруппа с единичной матрицей в качестве единичного элемента. Так как только невырожденные матрицы обладают обратными, то $M(n, P)$ не является группой. □

(b) Пусть $GL(n, P) = \{A \in M(n, P) \mid \det A \neq 0\}$. Тогда $GL(n, P)$ — группа, которую называют *полной* или *общей линейной группой степени* $n$ *над* $P$. □

(c) $SL(n, P) = \{A \in GL(n, P) \mid \det A = 1\}$ — группа, которая называется *специальной линейной группой степени* $n$ *над* $P$. □

**Пример 1.12.** Группы перестановок.

(a) Пусть $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Взаимно однозначное отображение множества $X$ на себя называется *перестановкой степени* $n$. Совокупность всех перестановок степени $n$ обозначают через $S_n$. Перестановку $\tau \in S_n$ удобно изображать двустрочной таблицей, полностью указывая





образы всех элементов:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}$$

или

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

где $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = X$; $\tau : 1 \mapsto a_1, \dots, n \mapsto a_n$.

Тождественное преобразование $\varepsilon_X$ является взаимно однозначным отображением и поэтому $\varepsilon_X \in S_n$. Очевидно, что

$$\varepsilon = \varepsilon_X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Произведение $\delta\tau$ двух перестановок $\delta$ и $\tau$ находится как произведение отображений:

$$\delta\tau(k) = \delta(\tau(k)), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Легко проверить, что множество $S_n$ всех перестановок степени $n$ с операцией умножения перестановок образует конечную группу порядка $n!$ с единичным элементом

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

которую называют *симметрической группой степени* $n$. При $n \geq 3$ эта группа неабелева. □

(b) Четные перестановки образуют конечную группу $A_n$ порядка $n!/2$, которую называют *знакопеременной группой степени* $n$. При $n \geq 4$ эта группа неабелева. □

**Пример 1.13.** Группы функций.

(a) Проверим, что четыре функции $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$, $f_4(x) = -\frac{1}{x}$ с операцией умножения образуют группу. Составим таблицу умножения этих функций.

| | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
| $f_2$ | $f_2$ | $f_1$ | $f_4$ | $f_3$ |
| $f_3$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_1$ | $f_2$ |
| $f_4$ | $f_4$ | $f_3$ | $f_2$ | $f_1$ |

Произведение $f_if_j$ ставится на пересечении строки $f_i$ и столбца $f_j$. Например,

$$f_2f_3 : x \overset{f_3}{\mapsto} \frac{1}{x} \overset{f_2}{\mapsto} -\frac{1}{x},$$

поэтому $f_2f_3 = f_4$.

Из таблицы видно, что умножение определено на множестве $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ и коммутативно. Поскольку умножение отображений ассоциативно, то выполняется второе требование определения группы. Функция $f_1$ является единичным элементом, а $f_i^{-1} = f_i$, т.е. каждый элемент является для себя обратным элементом. Таким образом, множество $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ с умножением является конечной абелевой группой порядка 4. □

(b) *Аффинным преобразованием прямой* называется отображение

$$\varphi_{a,b} : x \mapsto ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

множества $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Совокупность всех аффинных преобразований прямой обозначается через $A_1(\mathbb{R})$. В соответствии с умножением отображений аффинные преобразования прямой перемножаются так:

$$\varphi_{a,b}\varphi_{c,d} : x \mapsto cx + d \mapsto c(ax + b) + d = acx + (bc + d)$$

и $\varphi_{a,b}\varphi_{c,d} = \varphi_{ac,bc+d}$. Поэтому $A_1(\mathbb{R})$ является неабелевой группой с единичным элементом $\varphi_{1,0}$ и обратным элементом $\varphi_{a^{-1},-a^{-1}b}$ для элемента $\varphi_{a,b}$. □

**Пример 1.14.** Перечислим все классы сопряженных элементов группы $S_3$.

$$S_3 = \{\varepsilon, (12), (13), (23), (123), (132)\}.$$

Вычислим $(12)^x$, где $x$ пробегает элементы из $S_3$. Ясно, что

$$(12)^\varepsilon = (12)^{(12)} = (12).$$

Далее

$(12)^{(13)} = (13)^{-1}(12)(13) = (31)(12)(13) = (23);$
$(12)^{(23)} = (32)(12)(23) = (13);$
$(12)^{(123)} = (321)(12)(123) = (13);$
$(12)^{(132)} = (231)(12)(132) = (23).$

Итак, $(12)^{S_3} = \{(12), (23), (13)\}$.

Вычислив $x^y$ для всех $x$ и $y$ из $S_3$, получаем, что в $S_3$ имеется три класса сопряженных элементов:

$\varepsilon^{S_3} = \{\varepsilon\};$
$(12)^{S_3} = (13)^{S_3} = (23)^{S_3} = \{(12), (13), (23)\};$
$(123)^{S_3} = (132)^{S_3} = \{(123), (132)\}.$

Поэтому $S_3 = \varepsilon^{S_3} \bigcup (12)^{S_3} \bigcup (123)^{S_3}$. □

**Теорема 1.15.** *Две перестановки сопряжены в $S_n$ тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое число независимых циклов каждой длины.*

*Доказательство.* Пусть

$$\tau = (a_{11} \dots a_{1r})(a_{21} \dots a_{2s}) \dots (a_{m1} \dots a_{mt})$$

— разложение перестановки $\tau$ на независимые циклы, и пусть $\pi$ — произвольная перестановка из $S_n$. Мы можем перестановку записать следующим образом:

$$\pi = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} & b_{21} & \dots & b_{2s} & \dots & b_{m1} \dots & b_{mt} \\ a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{21} & \dots & a_{2s} & \dots & a_{m1} \dots & a_{mt} \end{pmatrix}.$$

Тогда для произвольного $b_{ik}$ имеем:

$$\pi^{-1}\tau\pi : b_{ik} \overset{\pi}{\mapsto} a_{ik} \overset{\tau}{\mapsto} \begin{cases} a_{ik+1} \overset{\pi^{-1}}{\mapsto} b_{ik+1} \\ a_{i1} \overset{\pi^{-1}}{\mapsto} b_{i1} \end{cases}.$$

Поэтому

$$\pi^{-1}\tau\pi = (b_{11} \dots b_{1r})(b_{21} \dots b_{2s}) \dots (b_{m1} \dots b_{mt}),$$

т.е. сопряженные перестановки имеют одинаковое число циклов каждой длины.

Обратно, если перестановки

$$\delta = (c_{11} \dots c_{1r})(c_{21} \dots c_{2s}) \dots (c_{m1} \dots c_{mt})$$

и

$$\sigma = (d_{11} \dots d_{1r})(d_{21} \dots d_{2s}) \dots (d_{m1} \dots d_{mt})$$

имеют одинаковое число циклов каждой длины, то

$$\alpha = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1r} & d_{21} & \dots & d_{2s} & \dots & d_{m1} & \dots & d_{mt} \\ c_{11} & \dots & c_{1r} & c_{21} & \dots & c_{2s} & \dots & c_{m1} & \dots & c_{mt} \end{pmatrix}$$

— такая перестановка, что $\alpha^{-1}\sigma\alpha = \delta$. Таким образом, перестановки $\delta$ и $\sigma$ с одинаковым числом циклов каждой длины сопряжены. □





**Пример 1.16.** Рассмотрим симметрическую группу степени 4. Запись (...)(.) обозначает любую перестановку в $S_4$, разлагающуюся на циклы длины 3 и 1. В $S_4$ возможны следующие разложения:

$$(.)(.)(.)(.); \quad (.)(.)(..); \quad (.)(...); \quad (..)(..); \quad (....).$$

На основании теоремы 1.15 группа $S_4$ имеет пять классов сопряженных элементов. □

## § 2. Подгруппы

Среди непустых подмножеств множества $G$ некоторые могут быть группами. Подмножество $H$ группы $G$ называется *подгруппой*, если $H$ — группа относительно той же операции, которая определена на группе $G$. Для подгруппы используется следующее обозначение: $H \leq G$. Запись $H \leq G$ читается так: $H$ — подгруппа группы $G$.

**Теорема 2.1.** (Критерий подгруппы) *Непустое подмножество $H$ группы $G$ будет подгруппой тогда и только тогда, когда $h_1h_2 \in H$ и $h_1^{-1} \in H$ для всех $h_1, h_2 \in H$.*

*Доказательство.* Пусть $H$ — подгруппа группы $G$, т. е. $H$ — группа относительно той же операции, которая определена на группе $G$. На $H$ определена алгебраическая операция, поэтому $h_1h_2 \in H$ для всех $h_1, h_2 \in H$.

Проверим, что единица $e_1$ подгруппы $H$ совпадает с единицей $e$ группы $G$. Ясно, что $e_1e = ee_1 = e_1$, т.к. $e_1$ — элемент из $G$. В группе $G$ для $e_1$ имеется обратный элемент $e_1^{-1}$, то есть $e_1^{-1}e_1 = e_1e_1^{-1} = e$. Так как $e_1$ — единица в $H$, то $e_1e_1 = e_1$. Умножив обе части последнего равенства на $e_1^{-1}$, получим: $e_1^{-1}e_1e_1 = e_1^{-1}e_1$ или $ee_1 = e$, поэтому $e_1 = e$. Таким образом, единицы подгруппы $H$ и группы $G$ совпадают.

Так как $H$ — подгруппа, то для каждого $h \in H$ существует в подгруппе $H$ обратный элемент $h^{-1}$, то есть такой элемент, что $h^{-1}h = hh^{-1} = e_1 = e$. Это означает, что $h^{-1}$ является обратным элементом в группе $G$ для элемента $h \in H$.

Обратно, пусть $h_1h_2 \in H$ и $h_1^{-1} \in H$ для всех $h_1, h_2 \in H$. Тогда алгебраическая операция определена на $H$. Она ассоциативна в $H$, так как ассоциативность справедлива для всех элементов из $G$. Элемент $h^{-1}$ обратный к $h \in H$ также принадлежит $H$, поэтому $h^{-1}h \in H$ и $hh^{-1} \in H$. Поскольку $h^{-1}h = e = hh^{-1}$, то $e \in H$ и $H$ — группа. □

Отметим, что каждая группа $G$ обладает *единичной подгруппой* $E = \{e\}$. Сама группа $G$ также считается подгруппой в $G$. Эти подгруппы называют *тривиальными подгруппами*. *Нетривиальная подгруппа* группы $G$ это такая подгруппа $H$ из $G$, которая отлична от $G$ и отлична от единичной подгруппы $E$. *Собственной* называется подгруппа, отличная от группы. Очевидна следующая

**Лемма 2.2.** *(1) Если $H$ — подгруппа группы $G$ и $K$ — подгруппа в $H$, то $K$ — подгруппа группы $G$;*

*(2) если $H$ и $K$ — подгруппы группы $G$ и $H$ содержится в $K$, то $H$ — подгруппа в $K$.* □

Пусть $T$ — подмножество группы $G$ и $x \in G$. Через

$$T^x = \{x^{-1}tx \mid t \in T\}$$

обозначим подмножество всех элементов группы $G$ вида $x^{-1}tx = t^x$, где $t$ пробегает все элементы множества $T$. Подмножество $T^x$ называется подмножеством, *сопряженным* подмножеству $T$ посредством элемента $x$.





**Лемма 2.3.** *Если $H$ — подгруппа группы $G$, то $H^x$ — также подгруппа группы $G$ для любого $x \in G$.*

*Доказательство.* Воспользуемся критерием подгруппы. Пусть $t_1, t_2 \in H^x$. Тогда существуют элементы $h_1, h_2 \in H$ такие, что $t_1 = h_1^x, t_2 = h_2^x$. Поэтому

$$t_1t_2 = h_1^x h_2^x = (h_1h_2)^x \in H^x,$$

т.к. $h_1h_2 \in H$. Кроме того,

$$t_1^{-1} = (x^{-1}h_1x)^{-1} = x^{-1}h_1^{-1}x \in H^x,$$

т.к. $h_1^{-1} \in H$. Условия теоремы 2.1 выполняются, поэтому $H^x$ — подгруппа группы $G$. □

Подгруппа $H^x$ называется подгруппой, *сопряженной* подгруппе $H$ посредством элемента $x$.

**Лемма 2.4.** *Пересечение любого непустого семейства подгрупп группы является подгруппой.*

*Доказательство.* Пусть $D = \bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha$, где $H_\alpha$ — подгруппа группы $G$ для любого $\alpha \in I$ и $I$ — некоторое множество индексов. Если $d_1$ и $d_2 \in D$, то $d_1$ и $d_2 \in H_\alpha$ для всех $\alpha \in I$. Поэтому $d_1d_2 \in H_\alpha$ и $d_1d_2 \in D$. Если $d \in D$, то $d \in H_\alpha$ и $d^{-1} \in H_\alpha$ для всех $\alpha \in I$. Поэтому $d^{-1} \in D$ и $D$ — подгруппа группы $G$ по теореме 2.1. □

**Подгруппа, порожденная множеством.** Пусть $T$ — непустое подмножество группы $G$. Пересечение всех подгрупп группы $G$, содержащих подмножество $T$, называется *подгруппой, порожденной подмножеством* $T$, и обозначается через $\langle T \rangle$. Таким образом,

$$\langle T \rangle = \bigcap_{T \subseteq H \leq G} H.$$

Условимся через $T^{-1}$ обозначать множество всех обратных элементов к элементам из $T$, т.е.

$$T^{-1} = \{t^{-1} \mid t \in T\}.$$

**Теорема 2.5.** *Пусть $T$ — непустое подмножество группы $G$. Тогда подгруппа $\langle T\rangle$, порождённая подмножеством $T$, состоит из всех конечных произведений элементов из $T$ и им обратных элементов, т.е.*

$$\langle T\rangle = \{t_1 \cdots t_n \mid t_i \in \{T \cup T^{-1}\}, n \in \mathbb{N}\}.$$

*Доказательство.* Пусть

$$F = \{t_1 \cdots t_n \mid t_i \in \{T \cup T^{-1}\},\ n \in \mathbb{N}\}$$

и пусть $u, v \in F$. Тогда

$$u = t_1 \cdots t_n, v = h_1 \cdots h_k,\ t_i, h_j \in \{T \cup T^{-1}\},\ n, k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$uv = t_1 \cdots t_n h_1 \cdots h_k$$

также является конечным произведением элементов из $\{T \cup T^{-1}\}$. Кроме того,

$$u^{-1} = (t_1 \cdots t_n)^{-1} = t_n^{-1} \cdots t_1^{-1} \in F,$$

т.к. $t_i^{-1} \in \{T \cup T^{-1}\}$. Требования критерия подгруппы выполняются, поэтому $F$ — подгруппа.

По определению

$$\langle T\rangle = \bigcap_{T \subseteq H \leq G} H.$$

Если $H$ — подгруппа и $T \subseteq H$, то по критерию подгруппы $T^{-1} \subseteq H$ и $F \subseteq H$. Поэтому $F \subseteq \langle T\rangle$.





Подгруппа $F$ содержит подмножество $T$, поэтому $F$ встречается среди подгрупп, участвующих в пересечении

$$\langle T\rangle = \bigcap_{T \subseteq H \leq G} H.$$

Следовательно, $\langle T\rangle \subseteq F$. Таким образом, $\langle T\rangle = F$. □

**Следствие 2.6.** *Подгруппа, порожденная непустым множеством $T$, является наименьшей подгруппой, содержащей множество $T$.* □

**Решетка подгрупп.** Пусть $\mathbf{S}(G)$ обозначает множество всех подгрупп группы $G$ с бинарным отношением $\leq$ . Две подгруппы $A$ и $B \in \mathbf{S}(G)$ группы $G$ находятся в бинарном отношении $\leq$ тогда и только тогда, когда $A$ — подгруппа в $B$. Ясно, что отношение $\leq$ рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Поэтому $\mathbf{S}(G)$ — частично упорядоченное множество с наименьшим элементом $E$ и наибольшим элементом $G$.

Для каждой пары $\{A, B\}$ подгрупп пересечение $A \cap B$ будет наибольшей подгруппой, содержащейся в $A$ и в $B$. Поэтому $A \cap B$ — точная нижняя грань двухэлементного множества $\{A, B\}$, т.е. $A \cap B = A \wedge B$. Из следствия 2.6 получаем, что $\langle A \cup B\rangle$ будет точной верхней гранью множества $\{A, B\}$, т.е. $A \vee B = \langle A \cup B\rangle$. Таким образом, доказана

**Теорема 2.7.** *Множество $\mathbf{S}(G)$ всех подгрупп группы $G$ с бинарным отношением $\leq$ является решеткой.* □

**Централизатор.** Пусть $T$ — непустое подмножество группы $G$. Совокупность всех элементов группы $G$, перестановочных с каждым элементом множества $T$, называется *централизатором* множества $T$ в группе $G$ и обозначается через $C_G(T)$. Таким образом,

$$C_G(T) = \{x \in G \mid xt = tx \text{ для } \quad \text{всех t} \in T\}.$$

**Лемма 2.8.** *(1) Если $T$ — подмножество группы $G$, то централизатор $C_G(T)$ является подгруппой группы $G$.*

*(2) Если $S$ и $T$ — подмножества группы $G$ и $S \subseteq T$, то $C_G(T) \subseteq C_G(S)$.*

*(3) Если $T$ — подмножество группы $G$ и $x \in G$, то $C_G(T^x) = C_G(T)^x$.*

*Доказательство.* (1) Пусть $x$ и $y \in C_G(T)$. Тогда для любого элемента $t \in T$ получаем, что $xt = tx$, $yt = ty$. Поэтому

$$xyt = xty = txy, \quad xy \in C_G(T).$$

Умножив обе части равенства $xt = tx$ на $x^{-1}$ слева, получим:

$$t = x^{-1}tx,\ tx^{-1} = x^{-1}t,\ x^{-1} \in C_G(T).$$

По критерию подгруппы централизатор $C_G(T)$ является подгруппой группы $G$.

(2) Если $x \in C_G(T)$, то $x$ перестановочен со всеми элементами из $T$, а так как $S \subseteq T$, то $x$ будет перестановочен со всеми элементами из $S$. Поэтому $x \in C_G(S)$ и $C_G(T) \subseteq C_G(S)$.

(3) Если $g \in C_G(T^x)$, то $gt^x = t^x g$ для всех $t \in T$. Так как

$$gt^x = gx^{-1}tx = t^x g = x^{-1}txg,$$

то

$$xgx^{-1}t = txgx^{-1}, \quad xgx^{-1} \in C_G(T).$$





Поэтому $g \in C_G(T)^x$ и

$$C_G(T^x) \subseteq C_G(T)^x.$$

Аналогично проверяется обратное включение. □

**Центр группы.** *Центром* группы $G$ называется совокупность всех элементов группы $G$, перестановочных с каждым элементом группы $G$. Центр группы $G$ обозначается через $Z(G)$. Ясно, что $Z(G) = C_G(G)$, т.е. центр группы $G$ совпадает с централизатором подмножества $G$ в группе $G$. Кроме того,

$$Z(G) = \bigcap_{g \in G} C_G(g).$$

**Лемма 2.9.** *Для группы $G$ справедливы следующие утверждения:*

*(1) если $a \in Z(G)$, то класс сопряженных с $a$ элементов состоит из одного элемента $a$, т.е. $a^G = \{a\}$; обратно, если $a^G = \{a\}$, то $a \in Z(G)$;*

*(2) $Z(G)^x = Z(G)$ для всех $x \in G$;*

*(3) центр $Z(G)$ группы $G$ является абелевой подгруппой группы $G$;*

*(4) группа $G$ абелева тогда и только тогда, когда она совпадает со своим центром;*

*(5) если $H$ — подгруппа группы $G$, то*

$$C_G(H) \cap H = Z(H);$$

*(6) если $x \in G$, то $\langle Z(G), x\rangle$ — абелева подгруппа.*

*Доказательство.* (1) Если $a \in Z(G)$, то $a^G = \{a^x | x \in G\} = \{a\}$, т.к. $a^x = x^{-1}ax = x^{-1}xa = a$. Обратно, если $a^G = \{a\}$, то $a^x = a$ для всех $x \in G$ и $a \in Z(G)$;

(2) Так как $Z(G) = C_G(G)$, то

$$Z(G)^x = C_G(G)^x = C_G(G^x) = C_G(G) = Z(G)$$

для всех $x \in G$. Здесь использовали лемму 2.8(3).

(3) По лемме 2.8 множество $Z(G) = C_G(G)$ является подгруппой. Если $x$ и $y \in Z(G)$, то $xg = gx$, $yg = gy$ для всех элементов $g \in G$. В частности, $xy = yx$ и $Z(G)$ абелева.

(4) Если $G$ абелева, то каждый элемент группы $G$ перестановочен со всеми элементами группы $G$, поэтому $G = Z(G)$. Обратно, если $G = Z(G)$, то из (1) следует, что $G$ абелева.

(5) Пусть $H$ — подгруппа группы $G$. Если $z \in Z(H)$, то $zh = hz$ для всех $h \in H$, поэтому $z \in C_G(H)$ и

$$Z(H) \subseteq H \cap C_G(H).$$

Обратно, если

$$c \in H \cap C_G(H),$$

то $ch = hc$ для всех $h \in H$ и $c \in Z(H)$, т.е.

$$H \cap C_G(H) \subseteq Z(H).$$

Таким образом,

$$Z(H) = H \cap C_G(H).$$

(6) Пусть $x$ — произвольный элемент группы $G$ и $H = \langle Z(G), x\rangle$ — подгруппа, порожденная подмножеством $S = Z(G) \cup \{x\}$. Ясно, что любые два элемента $s$ и $t$ подмножества $S$ перестановочны. Поэтому перестановочны элементы $s^{-1}$ и $t^{-1}$. Теперь по теореме 2.5 подгруппа $H$ абелева. □





**Пример 2.10.** (a) В примере 1.1(a) показано, что с операцией сложения множества $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ являются группами. Поэтому

$$\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}.$$

Так как эти группы абелевы, то они совпадают со своими центрами. □

(b) В примере 1.1(c–d) показано, что с операцией умножения следующие множества являются группами: $\mathbb{Q}^{\#}, \mathbb{R}^{\#}, \mathbb{C}^{\#}, \{-1, 1\}$. Поэтому

$$\{-1, 1\} \leq \mathbb{Q}^{\#} \leq \mathbb{R}^{\#} \leq \mathbb{C}^{\#}.$$

Так как эти группы абелевы, то они совпадают со своими центрами. □

**Пример 2.11.** В примере 1.2 показано, что $GL(n, P)$ и $SL(n, P)$ — группы, где $P$ — некоторое поле. Поэтому $SL(n, P) \leq GL(n, P)$. □

**Пример 2.12.** В примере 1.3 показано, что совокупность $S_n$ всех перестановок степени $n$ и совокупность $A_n$ всех четных перестановок с операцией умножения перестановок являются группами. Поэтому $A_n \leq S_n$. Можно показать, что при $n \geq 4$ центры этих групп являются единичными подгруппами. □

## § 3. Циклические группы

Зафиксируем элемент $a$ в группе $G$. Пересечение всех подгрупп группы $G$, содержащих элемент $a$, назовем *циклической подгруппой, порожденной элементом* $a$, и обозначим через $\langle a\rangle$. Таким образом,

$$\langle a\rangle = \bigcap_{a \in H \leq G} H.$$

Из теоремы 2.5 в случае $T = \{a\}$ вытекает

**Теорема 3.1.** *Циклическая подгруппа $\langle a \rangle$, порожденная элементом $a$, состоит из всевозможных целых степеней элемента $a$, т.е. $\langle a \rangle = \{a^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.* □

**Следствие 3.2.** *Циклическая подгруппа абелева.*

*Доказательство.* Пусть $G$ — группа, $\langle a \rangle$ — циклическая подгруппа, порождённая элементом $a \in G$, и $x, y$ — произвольные элементы подгруппы $\langle a \rangle$. Тогда по теореме 3.1 $x = a^n,\ y = a^m$ для некоторых целых чисел $n, m$ и

$$xy = a^n a^m = a^{n+m} = a^{m+n} = a^m a^n = yx,$$

т.е. подгруппа $\langle a \rangle$ абелева. □

**Порядок элемента.** Для элемента $a \in G$ имеются следующие две возможности.

Все степени элемента $a$ различны, т.е. $a^m \neq a^n$ для целых $m \neq n$. В этом случае говорят, что элемент $a$ имеет *бесконечный порядок*.

Имеются совпадения $a^m = a^n$ при $m \neq n$. Если, например, $m > n$, то $m - n > 0$ и $a^{m-n} = e$, т.е. существуют натуральные степени элемента $a$, равные единичному элементу. Наименьшее натуральное число $k$, при котором $a^k = e$, называют *порядком* элемента $a$ и пишут $\mid a \mid = k$.

Ясно, что в любой группе единичный элемент $e$ имеет порядок 1. Других элементов порядка 1 в группе нет. В конечной группе все элементы, очевидно, имеют конечные порядки.

Следующая теорема показывает, что циклическая подгруппа, порожденная элементом конечного порядка $k$, состоит точно из $k$ элементов.





**Теорема 3.3.** *Пусть элемент $a \in G$ имеет конечный порядок $k$. Тогда $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \ldots, a^{k-1}\}$ и $a^m = e$ тогда и только тогда, когда $m = kq$, где $q$ — целое число.*

*Доказательство.* По теореме 3.1 циклическая подгруппа

$$\langle a \rangle = \{a^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

состоит из всевозможных степеней $a^m$, где $m$ пробегает все целые числа. Любое целое число $m$ можно представить в виде

$$m = kq + r, \quad 0 \le r \le k - 1.$$

Поэтому

$$a^m = a^{kq+r} = a^{kq} a^r = (a^k)^q a^r = a^r$$

и

$$\langle a \rangle \subseteq \{e, a, \ldots, a^{k-1}\}.$$

Обратное включение очевидно, значит,

$$\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \ldots, a^{k-1}\}.$$

Так как $a^m = a^r$, то $a^m = e$ лишь при $r = 0$, т.е. тогда $m = kq$. □

Если группа $G$ совпадает с одной из своих циклических подгрупп, то группу $G$ называют *циклической группой*. В этом случае в группе $G$ имеется элемент $a$ такой, что $G = \langle a \rangle$ и по теореме 3.1 все элементы в группе $G$ являются целыми степенями элемента $a$:

$$G = \langle a \rangle = \{a^m \mid m \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, a^{-2}, a^{-1}, a^0 = e, a, a^2, \ldots\}.$$

Если элемент $a$ имеет бесконечный порядок, то все эти элементы в группе $G$ попарно различны и $G$ — *бесконечная циклическая группа*.

Если элемент $a$ имеет конечный порядок $k$, то $G = \langle a \rangle = \{e, a, \ldots, a^{k-1}\}$ по теореме 3.3, т.е. циклическая группа $G$, порожденная элементом $a$ порядка $k$, состоит из $k$ элементов. В этом случае $G$ — *конечная циклическая группа порядка* $k$.

**Подгруппы циклических групп.**

**Теорема 3.4.** *Все подгруппы бесконечной циклической группы $G = \langle a \rangle$ исчерпываются единичной подгруппой $E = \{e\}$ и бесконечными циклическими подгруппами $\langle a^m \rangle$ для каждого натурального $m$.*

*Доказательство.* Пусть $H$ — произвольная подгруппа бесконечной циклической группы $G = \langle a \rangle$. Тогда $e \in H$ и если других элементов в $H$ нет, то $H = \{e\}$ — единичная подгруппа.

Пусть $a^t \in H$, $a^t \neq e$. Тогда обратный элемент $a^{-t}$ также принадлежит $H$ и можно выбрать в $H$ элемент $a^m$ с наименьшим натуральным показателем $m$. Если $a^n$ — произвольный элемент из $H$, то

$$n = mq + r, \quad 0 \leq r < m$$

и

$$a^r = a^{n-mq} = a^n a^{-mq} = a^n((a^m)^q)^{-1} \in H.$$

По выбору $m$ заключаем, что $r = 0$ и $n$ кратно $m$. Таким образом, $H \subseteq \langle a^m \rangle$. Так как $H$ — подгруппа, то выполняется и обратное включение $\langle a^m \rangle \subseteq H$. Итак, $H = \langle a^m \rangle$. Заметим, что для каждого $m \geq 2$ подгруппа $\langle a^m \rangle$ бесконечна и не совпадает с $G$. □





**Следствие 3.5.** *Все неединичные подгруппы бесконечной циклической группы являются бесконечными циклическими подгруппами.* □

Напомним, что $(n, m)$ означает наибольший общий делитель чисел $n$ и $m$.

**Лемма 3.6.** *Если $\langle a \rangle$ — циклическая группа порядка $n$, то элемент $a^m$ имеет порядок $n/(n,m)$. В частности, элемент $a^m$ имеет порядок $n$ тогда и только тогда, когда $n$ и $m$ взаимно просты.*

*Доказательство.* Пусть $n = dn_1$, $m = dm_1$, где $d = (n, m)$. Ясно, что $n_1$ и $m_1$ взаимно просты. Если $a^{mt} = e$, то $dn_1$ делит $mt = dm_1 t$ и $n_1$ делит $t$. Так как

$$a^{mn_1} = a^{dm_1 n_1} = a^{nm_1} = e,$$

то $n_1$ — порядок элемента $a^m$. □

**Теорема 3.7.** *Все подгруппы конечной циклической группы $\langle a \rangle$ порядка $n$ исчерпываются циклическими подгруппами $\langle a^m \rangle$ порядка $n/m$ для каждого натурального $m$, делящего $n$.*

*Доказательство.* Пусть $H$ — подгруппа группы

$$\langle a \rangle = \{e, a, \ldots, a^{n-1}\}.$$

Тогда $e \in H$ и если других элементов в $H$ нет, то $H = \{e\} = \langle a^n \rangle$ — единичная подгруппа порядка 1.

Пусть $a^m \in H$, $a^m \neq e$, $m$ — наименьшее. Допустим, что $a^t$ — произвольный элемент из $H$. Разделим число $t$ на $m$ с остатком:

$$t = mq + r, \quad 0 \leq r < m.$$

Теперь,

$$a^r = a^{t-mq} = a^t a^{-mq} = a^t (a^{mq})^{-1} \in H,$$

поскольку $a^t$ и $a^m \in H$. По выбору $m$ получаем, что $r = 0$ и $t$ делится на $m$. Итак, в $H$ все элементы являются степенями элемента $a^m$. Следовательно, $H = \langle a^m \rangle$ — циклическая группа.

Убедимся, что $m$ делит $n$. Пусть

$$n = mq + r, \quad 0 \leq r < m.$$

Тогда

$$a^r = a^{n-mq} = a^n (a^{mq})^{-1} = e((a^m)^q)^{-1} \in H.$$

Из минимальности $m$ следует, что $r = 0$ и $n$ делится на $m$. По лемме 3.6 порядок $H$ равен $n/m$. □

**Следствие 3.8.** *В конечной циклической группе порядка $n$ для каждого натурального делителя $d$ числа $n$ существует единственная подгруппа порядка $d$.*

*Доказательство.* Пусть $G = \langle a \rangle$ — конечная циклическая группа порядка $n$ и $d$ — натуральное число, делящее $n$. По теореме 3.7 в группе $G$ существует подгруппа $D = \langle a^{n/d} \rangle$ порядка $d$. Если $M$ — другая подгруппа порядка $d$, то по теореме 3.7 подгруппа $M = \langle a^m \rangle$, $m$ делит $n$ и $| \, a^m \, | = n/m = d$. Поэтому $m = n/d$ и $M = \langle a^m \rangle = \langle a^{n/d} \rangle = D$. □

Следующая теорема позволяет упростить критерий подгруппы в случае, когда группа конечная.





**Теорема 3.9.** *Пусть $H$ — непустое подмножество группы $G$ и пусть каждый элемент из $H$ имеет конечный порядок. Если $h_1 h_2 \in H$ для всех $h_1$ и $h_2 \in H$, то $H$ — подгруппа.*

*Доказательство.* Так как каждый элемент $h \in H$ имеет конечный порядок, то

$$\langle h \rangle = \{e, h, \ldots, h^{k-1}\}, \quad k = | \, h \, | \, .$$

Очевидно,

$$h h^{k-1} = h^{k-1} h = h^k = e, \quad h^{k-1} = h^{-1}.$$

По условию теоремы

$$h^{-1} = \underbrace{h \ldots h}_{(k-1) \text{ раз}} \in H.$$

Теперь $H$ — подгруппа по теореме 2.1. □

**Следствие 3.10.** *Если $H$ — непустое подмножество конечной группы $G$ и $h_1 h_2 \in H$ для всех $h_1$ и $h_2 \in H$, то $H$ — подгруппа.* □

Таким образом, можно дать следующее определение подгруппы конечной группы. Непустое подмножество $H$ конечной группы $G$ называется *подгруппой*, если $h_1 h_2 \in H$ для всех $h_1$ и $h_2 \in H$.

**Пример 3.11.** Рассмотрим аддитивную группу $\mathbb{Z}$ целых чисел. В аддитивной записи теорема 3.1 принимает вид: циклическая подгруппа $\langle a \rangle$, порожденная элементом $a$, состоит из всевозможных кратных элемента $a$, то есть $\langle a \rangle = \{ma \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Так как $\langle 1 \rangle = \{m1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$, то циклическая подгруппа, порожденная элементом 1, совпадает со всей группой. Итак, $(\mathbb{Z},+)$ — бесконечная циклическая группа. Ясно, что $\langle -1\rangle = \mathbb{Z}$ и $\langle a\rangle \neq \mathbb{Z}$ для любого целого $a \notin \{-1,1\}$. □

**Пример 3.12.** Для каждого натурального $n$ в мультипликативной группе $\mathbb{C}^{\#}$ комплексных чисел без нуля имеется $n$ различных корней степени $n$ из единицы, которые находятся по следующей формуле:

$$\varepsilon_k = cos\frac{2k\pi}{n} + isin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0,1,\dots,n-1.$$

Так как $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$, то множество корней степени $n$ из единицы образует циклическую группу $\langle \varepsilon_1\rangle$ порядка $n$, порожденную элементом $\varepsilon_1$. □

**Теорема 3.13.** *Порядок перестановки есть наименьшее общее кратное длин её независимых циклов.*

*Доказательство.* Если $(a_1a_2)$ — цикл длины 2, то $(a_1a_2)(a_1a_2) = \varepsilon$, т.е. транспозиция есть перестановка порядка 2. Если $(a_1a_2a_3)$ — цикл длины 3, то

$$(a_1a_2a_3)(a_1a_2a_3) = (a_1a_3a_2);\ (a_1a_2a_3)^3 = \varepsilon,$$

т.е. цикл длины 3 имеет порядок 3. Аналогично цикл $(a_1a_2\dots a_k)$ длины $k$ есть перестановка порядка $k$.

Пусть теперь перестановка

$$\tau = (a_1a_2\dots a_{l_1})\dots(b_1b_2\dots b_{l_t})$$

разложима в произведение независимых циклов длины $l_1, l_2, \dots, l_t$. Так как независимые циклы перестановочны, то

$$\tau^k = (a_1a_2\dots a_{l_1})^k\dots(b_1b_2\dots b_{l_t})^k.$$





Поэтому $\tau^k = \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $k$ делится на $l_1, l_2, \dots, l_t$, т.е. $k$ — кратное числам $l_1, l_2, \dots, l_t$. Если $k$ — порядок перестановки $\tau$, то $k$ — наименьшее натуральное число, для которого $\tau^k = \varepsilon$. Следовательно, порядок перестановки есть наименьшее общее кратное длин её независимых циклов. □

**Пример 3.14.** Перечислим порядки элементов в группе $S_3$.

Так как $S_3 = \{\varepsilon, (12), (13), (23), (123), (132)\}$, то на основании теоремы 3.13 имеем:

$$\mid \varepsilon \mid = 1, \mid (12) \mid = \mid (13) \mid = \mid (23) \mid = 2, \mid (123) \mid = \mid (132) \mid = 3.$$

□

**Пример 3.15.** Перечислим порядки элементов в группе $S_4$.

Запись (...)(.) обозначает любую перестановку в $S_4$, разлагающуюся на циклы длины 3 и 1. В $S_4$ возможны следующие разложения: (.)(.)(.)(.), (.)(.)(..), (.)(...), (..)(..), (....). На основании теоремы 3.13 в группе $S_4$ элементы имеют порядки 1,2,3,4. □

**Пример 3.16.** В группе $S_6$ нет элементов порядка 7,8,9,10. □

**Лемма 3.17.** *Если в группе все неединичные элементы имеют порядок 2, то группа абелева.*

*Доказательство.* Пусть $\mid a \mid = 2$ для всех $a \in G^{\#}$. Тогда $a^2 = e$ и $a = a^{-1}$ для всех $a \in G$. Так как $(ab)^2 = abab = e$ для всех $a, b \in G$, то $ab = b^{-1}a^{-1} = ba$. □

**Лемма 3.18.** *Порядки сопряженных элементов равны.*

*Доказательство.* Воспользуемся леммой 1.9(4). Пусть $a, x \in G$ и $| a |= k$. Тогда

$$(a^x)^k = (a^k)^x = e$$

и $|a^x|$ делит $k$ по теореме 3.3. Если $| a^x |= l$, то

$$a^l = ((a^x)^{x^{-1}})^l = ((a^x)^l)^{x^{-1}} = e$$

и $l$ делится на $k$. □

## § 4. Изоморфизм групп

Две группы $G$ и $G_1$ называются *изоморфными*, если существует биекция $f : G \to G_1$ такая, что $f(ab) = f(a)f(b)$ для всех $a, b \in G$. Факт изоморфизма записывают так: $G \simeq G_1$.

Отметим простейшие свойства изоморфизма.

**Лемма 4.1.** *Пусть $f : G \to G_1$ — изоморфизм группы $G$ на группу $G_1$. Тогда:*

*(1) если $e$ — единичный элемент группы $G$, то $f(e)$ — единичный элемент группы $G_1$;*

*(2) если $a^{-1}$ — обратный элемент к элементу $a$ в группе $G$, то $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$, т.е. $f(a^{-1})$ — обратный элемент к элементу $f(a)$ в группе $G_1$.* □

**Лемма 4.2.** *(1) $G \simeq G$.*

*(2) Пусть $f : G \to G_1$ — изоморфизм групп. Тогда обратное отображение $f^{-1} : G_1 \to G$ является изоморфизмом. Таким образом, если $G \simeq G_1$, то $G_1 \simeq G$.*

*(3) Если $G \simeq G_1$, а $G_1 \simeq G_2$, то $G \simeq G_2$.*

*(4) Отношение “быть изоморфными группами” является отношением эквивалентности.*





*Доказательство.* (1) Отображение $e_G : G \to G$, переводящее каждый элемент в себя, т.е. $e_G : g \mapsto g$ для всех $g \in G$, очевидно, изоморфизм $G$ на $G$.

(2) Известно, что для каждого биективного отображения $f : G \to G_1$ существует обратное отображение $f^{-1} : G_1 \to G$, которое также будет биекцией. Если $a \in G$ и $f(a) = a_1 \in G_1$, то $f^{-1}(a_1) = a$. Пусть еще $b \in G$ и $b_1 = f(b) \in G_1$. Тогда $f^{-1}(b_1) = b$ и

$$a_1 b_1 = f(a)f(b) = f(ab)$$

поскольку $f$ изоморфизм. Отсюда

$$f^{-1}(a_1 b_1) = ab = f^{-1}(a_1)f^{-1}(b_1),$$

что доказывает изоморфизм $f^{-1}$.

(3) Пусть $f : G \to G_1$ — изоморфизм групп $G$ и $G_1$, а $\varphi : G_1 \to G_2$ — изоморфизм $G_1$ и $G_2$. Тогда $\varphi f$ — биективное отображение $G$ на $G_2$ причем,

$$\varphi f(ab) = \varphi(f(ab)) = \varphi(f(a)f(b)) =$$

$$= \varphi(f(a))\varphi(f(b)) = \varphi f(a)\varphi f(b)$$

для любых $a$ и $b \in G$. Значит, $\varphi f$ — изоморфизм $G$ и $G_2$.

(4) следует из (1-3). □

Теперь можно утверждать, что множество всех групп распадается на непересекающиеся классы изоморфных групп.

**Теорема 4.3.** *(1) Все бесконечные циклические группы изоморфны между собой и изоморфны аддитивной группе целых чисел.*

*(2) Все конечные циклические группы одного порядка изоморфны между собой.*

*Доказательство.* (1) Пусть $< g >$ — бесконечная циклическая группа, порожденная элементом $g$, а $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел. Все степени $g^n$ различны, поэтому отображение $f : n \mapsto g^n$ будет биекцией между $\mathbb{Z}$ и $< g >$. Так как $g^{m+n} = g^m g^n$, то

$$f(m+n) = g^{m+n} = g^m g^n = f(m)f(n)$$

и $f$ — изоморфизм. Таким образом, каждая бесконечная циклическая группа изоморфна аддитивной группе целых чисел. Поэтому все бесконечные циклические группы изоморфны между собой.

(2) Пусть теперь

$$G_1 = \{e_1, g_1, g_1^2, \dots, g_1^{k-1}\};\ G_2 = \{e_2, g_2, g_2^2, \dots, g_2^{k-1}\}$$

— две мультипликативные циклические группы порядка $k$. Определим отображение

$$f : g_1^t \mapsto g_2^t,\ t = 0, 1, 2, \dots, k-1.$$

Для любых $n$ и $m \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ пусть $n + m = kq + r,\quad 0 \le r \le k-1$. Тогда

$$f(g_1^n g_1^m) = f(g_1^{n+m}) = f(g_1^r) = g_2^r = g_2^{n+m}$$
$$= g_2^n g_2^m = f(g_1^n) f(g_1^m).$$

□

**Матрица перестановки.** Установим теперь связь между перестановками из симметрической группы $S_n$ степени $n$ и квадратными $n \times n$−матрицами. *Матрицей перестановки* $\pi \in S_n$ назовем $n \times n$−матрицу $\mathcal{M}(\pi)$=$(a_{ij})$, определенную так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = \pi(j), \\ 0, & \text{если } i \neq \pi(j). \end{cases}$$





Таким образом, в матрице перестановки $n$ единиц, остальные элементы равны нулю. Единица встречается один раз в каждой строке и в каждом столбце. В $j$−ом столбце единица стоит на $\pi(j)$−м месте, т.е. в матрице $\mathcal{M}(\pi)$ только элементы $a_{\pi(k)k} = 1$, где $k = 1, 2, \dots, n$, остальные нули. Очевидно, $\mathcal{M}(\varepsilon) = E$. Через $\operatorname{sgn}(\pi)$ обозначается знак перестановки $\pi$.

**Теорема 4.4.** *(1) Матрица произведения перестановок равна произведению матриц перестановок, т.е.* $\mathcal{M}(\pi\tau) = \mathcal{M}(\pi)\mathcal{M}(\tau)$ *для всех* $\pi$ *и* $\tau \in S_n$.

*(2)* $\det \mathcal{M}(\pi) = sgn(\pi)$ *для всех* $\pi \in S_n$.

*(3) Отображение* $\mathcal{M} : \tau \mapsto \mathcal{M}(\tau)$ *осуществляет изоморфизм симметрической группы* $S_n$ *степени* $n$ *и подгруппы* $Im\mathcal{M} = \{\mathcal{M}(\tau) \mid \tau \in S_n\}$ *из группы* $GL(n, \mathbb{R})$.

*Доказательство.* (1) Пусть $\pi(k) = \tau$, тогда в строке $\mathcal{M}(\pi)_i$ единица стоит на $k$−ом месте. В столбце $\mathcal{M}(\tau)^j$ единица стоит на $\tau(j)$−м месте. Поэтому

$$\mathcal{M}(\pi)_i \mathcal{M}(\tau)^j = (0 \dots 1 \dots 0)[0 \dots 1 \dots 0] =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если } k = \tau(j), \text{ где } \pi(k) = i, \\ 0, & \text{если } k \neq \tau(j) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если } i = \pi\tau(j), \\ 0, & \text{если } i \neq \pi\tau(j). \end{cases}$$

Так как $\mathcal{M}(\pi\tau) = a(ij)$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = \pi\tau(j), \\ 0, & \text{если } i \neq \pi\tau(j), \end{cases}$$

то $a_{ij} = \mathcal{M}(\pi)_i \mathcal{M}(\tau)^j$ и $\mathcal{M}(\pi\tau) = \mathcal{M}(\pi)\mathcal{M}(\tau)$.

(2) В матрице $\mathcal{M}(\pi) = (a_{ij})$ только элементы $a_{\pi(k)k}$ равны единице, где $k = 1, 2, \dots, n$, остальные нули. Если $\tau \neq \pi^{-1}$, то существует число $m$ такое, что $\tau(m) \neq \pi^{-1}(m)$ и $a_{n\pi^{-1}(m)} \neq a_{m\tau(m)}$. Но

$$a_{m\tau(m)} = a_{\pi(\pi^{-1}(m))\pi^{-1}(m)} = 1,$$

значит $a_{m\tau(m)} = 0$ и в сумме

$$\det \mathcal{M}(\pi) = \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} \dots a_{n\tau(n)}$$

только одно ненулевое слагаемое, которое отвечает перестановке $\pi^{-1}$. Поэтому

$$\det \mathcal{M}(\pi) = \mathrm{sgn}(\pi^{-1}) a_{1\pi^{-1}(1)} \dots a_{n\pi^{-1}(n)}.$$

Поскольку $\mathrm{sgn}(\pi^{-1}) = \mathrm{sgn}(\pi)$, а

$$a_{i\pi^{-1}(i)} = a_{\pi(\pi^{-1}(i))\pi^{-1}(i)} = 1,$$

то $\det \mathcal{M}(\pi) = \mathrm{sgn}(\pi)$.

(3) Так как

$$\det \mathcal{M}(\tau) = \mathrm{sgn}(\tau) \in \{-1, 1\},$$

то $\mathcal{M}$ отображение $S_n$ в $GL(n, \mathbb{R})$. Из построения $\mathcal{M}(\tau)$ следует, что $\mathcal{M}$ — инъекция. Покажем, что $\mathrm{Im}\mathcal{M}$ — подгруппа группы $GL(n, \mathbb{R})$. Так как $\mathcal{M}(\tau)\mathcal{M}(\pi) = \mathcal{M}(\tau\pi)$ по (1), то $\mathcal{M}(\tau)\mathcal{M}(\pi) \in \mathrm{Im}\mathcal{M}$. Далее, $\mathcal{M}(\varepsilon) = E$, и если $\tau$ имеет порядок $t$, то $\tau^t = \varepsilon$ и $\mathcal{M}(\tau^t) = E = \mathcal{M}(\tau)^t$, т.е. порядок матрицы $\mathcal{M}(\tau)$ делит $t$. Таким образом, все матрицы перестановок имеют конечные порядки и $\mathrm{Im}\mathcal{M}$ — подгруппа $GL(n, \mathbb{R})$ по теореме 3.9. Поэтому $\mathcal{M} : S_n \to \mathrm{Im}\mathcal{M}$ — биекция, а по (1) отображение $\mathcal{M}$ — изоморфизм. □





**Теорема 4.5.** (Кэли) *Любая конечная группа порядка $n$ изоморфна подгруппе симметрической группы $S_n$ степени $n$.*

*Доказательство.* Пусть $G$ — конечная группа порядка $n$ и $G = \{g_1 = e, g_2, \dots, g_n\}$ — все её элементы. Можно считать, что $S_n$ — совокупность всех биективных отображений множества $\{e, g_2, \dots, g_n\}$ на себя. Для каждого $x \in G$ определим отображение $l_x : g_i \mapsto xg_i = l_x(g_i)$ множества $G$ в себя. Если $xg_i = xg_j$, то $g_i = g_j$ и $l_x$ — инъекция. Но инъекция конечного множества всегда биекция, поэтому $l_x \in S_n$.

Зададим теперь отображение $\varphi : G \to S_n$, полагая $\varphi : x \mapsto l_x$. Тогда $\mathrm{Im}\varphi = \{lg_1, lg_2, \dots, lg_n\}$. Покажем, что $\mathrm{Im}\varphi$ — подгруппа группы $S_n$. Если $l_x$ и $l_y$ — произвольные элементы из $\mathrm{Im}\varphi$, то

$$l_x l_y(g_i) = l_x(l_y(g_i)) = l_x(yg_i) = xyg_i = l_{xy}(g_i) \qquad <1>$$

и $l_x l_y = l_{xy} \in \mathrm{Im}\varphi$. По теореме 3.9 множество $\mathrm{Im}\varphi$ есть подгруппа группы $S_n$. Из <1> заключаем, что $l_x l_y = l_{xy}$, поэтому $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ и $\varphi$ — изоморфизм между $G$ и $\mathrm{Im}\varphi$. □

Сопоставляя теорему Кэли с теоремой 4.4(3), получаем

**Следствие 4.6.** *Любая конечная группа порядка $n$ изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(n, \mathbb{R})$ степени $n$ над $\mathbb{R}$.* □

**Следствие 4.7.** *Число неизоморфных групп данного порядка конечно.*

*Доказательство.* Зафиксируем натуральное число $n$. По теореме Кэли каждая группа порядка $n$ изоморфна подгруппе симметрической группы $S_n$. Так как группа $S_n$ конечна, то число её неизоморфных подгрупп конечно. $\square$

**Автоморфизмы групп.** Положив $G_1 = G$ в определении изоморфизма, получим изоморфное отображение группы $G$ на себя, которое называют *автоморфизмом* группы $G$. Совокупность всех автоморфизмов группы $G$ обозначим через $\mathrm{Aut}G$. Если $\varphi$ и $\psi$ — автоморфизмы группы $G$, то согласно определению умножения отображений произведение автоморфизмов определяется так:

$$\varphi\psi(ab) = \varphi(\psi(ab)) = \varphi(\psi(a)\psi(b)) =$$

$$= \varphi(\psi(a))\varphi(\psi(b)) = \varphi\psi(a)\varphi\psi(b)$$

для любых $a$ и $b \in G$. Поэтому $\varphi\psi$ — автоморфизм $G$ и умножение автоморфизмов определено на $\mathrm{Aut}G$. Ассоциативность умножения автоморфизмов вытекает из ассоциативности умножения отображений. Единичное отображение $e_G : G \to G$, переводящее каждый элемент в себя, является автоморфизмом группы $G$. По лемме 4.2 каждый автоморфизм обладает обратным. Таким образом доказана следующая

**Теорема 4.8.** *Совокупность AutG всех автоморфизмов группы G является группой.* $\square$

**Пример 4.9.** Проверим, что

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$





— группа относительно умножения, изоморфная мультипликативной группе $G_1 = \{1, -1\}$.

Так как

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G.$$

Остальные произведения элементов из $G$ также принадлежат $G$, поэтому $G$ — группа. Отображение

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto 1, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto -1,$$

очевидно, будет изоморфизмом. $\square$

**Пример 4.10.** Покажем, что мультипликативная группа $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел изоморфна аддитивной группе $\mathbb{R}$ всех действительных чисел. В качестве изоморфного отображения может служить логарифмическая функция $\ln x$. Если $x$ и $y \in \mathbb{R}_+$, то $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. Так как функция $y = \ln x$ задает биективное отображение $\mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}$, то $\ln$ — изоморфизм групп $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}$. $\square$

**Пример 4.11.** Найдем матрицы, соответствующие перестановкам степени 3.

Так как $S_3 = \{\varepsilon, (12), (13), (23), (123), (132)\}$, то

$$\mathcal{M}(\varepsilon) = E; \qquad \mathcal{M}(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{M}(13) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{M}(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{M}(123) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{M}(132) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

**Пример 4.12.** Пусть $H \leq G$ и $x \in G$. Зададим отображение $f : H \to H^x$ полагая $f(h) = h^x$ для всех $h \in H$. Ясно, что $f$ — биекция. Так как

$$f(h_1 h_2) = (h_1 h_2)^x = (h_1)^x (h_2)^x = f(h_1) f(h_2),$$

то $f$ — изоморфизм. Таким образом, в любой группе сопряженные подгруппы изоморфны. □

## § 5. Смежные классы

Пусть $G$ — группа, $H \leq G$ и $g \in G$. *Правым смежным классом* группы $G$ по подгруппе $H$ называется множество

$$Hg = \{hg \mid h \in H\}$$

всех элементов группы $G$ вида $hg$, где $h$ пробегает все элементы подгруппы $H$.

Аналогично определяется *левый смежный класс*

$$gH = \{gh \mid h \in H\}.$$





**Лемма 5.1.** *Пусть $G$ — группа, $H$ — подгруппа. Тогда:*

*(1) $H = He$;*

*(2) $g \in Hg$ для каждого $g \in G$;*

*(3) если $a \in H$, то $Ha = H$; если $b \in Ha$, то $Hb = Ha$;*

*(4) $Ha = Hb$ тогда и только тогда, когда $ab^{-1} \in H$;*

*(5) два смежных класса либо совпадают, либо их пересечение пусто;*

*(6) если $H$ — конечная подгруппа, то $\mid Hg \mid = \mid H \mid$ для всех $g \in G$.*

*Доказательство.* Первые три свойства вытекают из определения правого смежного класса.

(4) Если $Ha = Hb$, то $ea = hb$, $h \in H$ и $ab^{-1} = h \in H$. Обратно, если $ab^{-1} \in H$, то $ab^{-1} = h \in H$, поэтому $a = hb$ и $Ha = Hhb = Hb$.

(5) Пусть $Ha \cap Hb \neq \emptyset$ и $c \in Ha \cap Hb$. Тогда $c = h_1 a = h_2 b$ и $ab^{-1} = h_1^{-1} h_2 \in H$. Теперь $Ha = Hb$ по свойству (4).

(6) Для каждого $g \in G$ отображение $\phi : h \mapsto hg$ есть биекция множеств $H$ и $Hg$. Поэтому $\mid H \mid = \mid Hg \mid$. □

Из свойств (2) и (5) следует, что каждый элемент группы $G$ содержится точно в одном правом смежном классе по подгруппе $H$. Это свойство позволяет ввести следующее определение.

**Трансверсаль.** Пусть $H$ — подгруппа группы $G$. Подмножество $T$ элементов группы $G$ называется *правой трансверсалью* подгруппы $H$ в группе $G$, если $T$ содержит точно один элемент из каждого правого смежного класса группы $G$ по подгруппе $H$. Итак, если

$$T = \{t_\alpha \mid \alpha \in I\}$$

— правая трансверсаль подгруппы $H$ в группе $G$, то

$$G = \bigcup_{t_\alpha \in T} Ht_\alpha,\ Ht_\alpha \cap Ht_\beta = \emptyset \text{ при } \quad \alpha \neq \beta.$$

Таким образом справедлива

**Теорема 5.2.** *Группа $G$ является объединением непересекающихся правых смежных классов по подгруппе $H$.*

□

Если $G$ — конечная группа, то число различных правых смежных классов по подгруппе $H$ также будет конечно, оно называется *индексом подгруппы* $H$ в группе $G$ и обозначается через $\mid G : H \mid$. Ясно, что индекс подгруппы $H$ в конечной группе $G$ совпадает с числом элементов в правой трансверсали $T$ подгруппы $H$, т.е.

$$|G : H| = |T| = |G|/|H|.$$

**Теорема 5.3.** (Лагранж) *Если $H$ — подгруппа конечной группы $G$, то $\mid G \mid=\mid H \mid\mid G : H \mid$. В частности, порядок конечной группы делится на порядок каждой своей подгруппы.*

*Доказательство.* Пусть индекс подгруппы $H$ в группе $G$ равен $n$. По теореме 5.2 имеем разложение

$$G = Hg_1 \cup Hg_2 \cup ... \cup Hg_n,\ Hg_i \cap Hg_j = \emptyset \text{ при } \quad i \neq j.$$

Так как $\mid Hg_i \mid=\mid H \mid$ для всех $i$, то $\mid G \mid=\mid H \mid\mid G : H \mid$. □

**Следствие 5.4.** *Порядок каждого элемента конечной группы делит порядок всей группы.*





*Доказательство.* Порядок элемента $a$ совпадает с порядком циклической подгруппы $\langle a \rangle$, порожденной этим элементом, см. теорему 3.3. Поэтому, $\mid \langle a \rangle \mid=\mid a \mid$ делит $\mid G \mid$. □

Аналогично определяется *левая трансверсаль* подгруппы $H$ в группе $G$. Если

$$L = \{l_\alpha \ \mid \ \alpha \in J\}$$

— левая трансверсаль подгруппы $H$ в группе $G$, то

$$G = \cup_{\ \alpha \in J} \ l_\alpha H,\ l_\alpha H \cap l_\beta H = \emptyset \text{ при } \quad \alpha \neq \beta.$$

Ясно, что индекс подгруппы $H$ в конечной группе $G$ совпадает с числом элементов в левой трансверсали $L$ подгруппы $H$, т.е. $\mid G : H \mid=\mid L \mid$. Для левой трансверсали справедлив аналог теоремы 5.2. Поэтому из теоремы Лагранжа вытекает

**Следствие 5.5.** *Число левых и число правых смежных классов конечной группы $G$ по подгруппе $H$ совпадают.*

□

**Теорема 5.6.** *В группе простого порядка нет нетривиальных подгрупп. В частности, группа простого порядка циклическая.*

*Доказательство.* Пусть $G$ — конечная группа простого порядка $p$. Если $H$ — подгруппа группы $G$, то по теореме Лагранжа $\mid H \mid$ делит $\mid G \mid$. Поэтому либо $\mid H \mid= 1$ и $H$ — единичная подгруппа, либо $\mid H \mid= p$ и $H$ совпадает с группой $G$. Выберем неединичный элемент $a$ в группе $G$ и рассмотрим циклическую подгруппу $\langle a \rangle$, порожденную этим элементом. Так как $a \neq e$, то $\langle a \rangle \neq E$, поэтому $\langle a \rangle = G$ и $G$ — циклическая группа. □

**Теорема 5.7.** *Пусть $H \le K \le G$ и $G$ — конечная группа. Если $T$ — правая трансверсалъ подгруппы $H$ в группе $K$, а $S$ — правая трансверсаль подгруппы $K$ в группе $G$, то $TS$ — правая трансверсалъ подгруппы $H$ в группе $G$. В частности,*

$$| G : H |=| G : K || K : H | .$$

*Доказательство.* Пусть $T = \{t_1, ..., t_k\},\ S = \{s_1, ..., s_n\}$. Тогда

$$K = Ht_1 \cup ... \cup Ht_k,\ Ht_i \cap Ht_j = \emptyset,\ i \neq j;$$

$$G = Ks_1 \cup ... \cup Ks_n,\ Ks_i \cap Ks_j = \emptyset,\ i \neq j.$$

Теперь

$$G = (Ht_1 \cup ... \cup Ht_k)s_1 \cup ... \cup (Ht_1 \cup ... \cup Ht_k)s_n. \quad < 1 >$$

Предположим, что $Ht_as_b = Ht_cs_d$ для некоторых натуральных $a, b, c$ и $d$. Тогда

$$t_as_b(t_cs_d)^{-1} = t_as_bs_d^{-1}t_c^{-1} \in H \le K,$$

поэтому

$$s_bs_d^{-1} \in t_a^{-1}Kt_c = K,\ Ks_b = Ks_d.$$

Но $s_b$ и $s_d$ — элементы из правой трансверсали подгруппы $K$ в группе $G$, поэтому $s_b = s_d$ и $b = d$. Теперь

$$t_as_b(t_cs_d)^{-1} = t_at_c^{-1} \in H,\ Ht_a = Ht_c$$

и $a = c$. Таким образом, <1> является разложением группы $G$ по подгруппе $H$ и $TS$ — правая трансверсаль подгруппы $H$ в группе $G$. Так как индекс подгруппы совпадает с числом элементов в правой трансверсали этой подгруппы, то

$$| G : H |=| TS |=| T || S |=| K : H || G : K | .$$

□





**Двойные смежные классы.** Пусть $H$ и $K$ — подгруппы группы $G$ и $g \in G$. Множество

$$HgK = \{hgk \mid h \in H,\ k \in K\}$$

называется *двойным смежным классом* группы $G$ по подгруппам $H$ и $K$.

**Лемма 5.8.** *Пусть $H$ и $K$ — подгруппы группы $G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

*(1) каждый элемент $g \in G$ содержится в единственном двойном смежном классе $HgK$;*

*(2) два двойных смежных класса по $H$ и $K$ либо совпадают, либо их пересечение пусто;*

*(3) группа $G$ есть объединение непересекающихся двойных смежных классов по подгруппам $H$ и $K$;*

*(4) каждый двойной смежный класс по $H$ и $K$ есть объединение правых смежных классов по $H$; каждый двойной смежный класс по $H$ и $K$ есть объединение левых смежных классов по $K$;*

*(5) если группа $G$ конечна, то двойной смежный класс $HgK$ содержит $| K : H^g \cap K |$ правых смежных классов по $H$ и $| H : H \cap K^{g^{-1}} |$ левых смежных классов по $K$.*

*Доказательство.* (1) Так как каждая подгруппа содержит единичный элемент, то

$$g = ege \in HgK.$$

Допустим, что $g \in HxK$. Тогда $g = hxk$ для некоторых $h \in H,\ k \in K$ и

$$HgK = H(hxk)K = HxK.$$

(2) и (3) следуют из (1).

(4) Так как

$$HgK = \cup_{\ k\in K}\ Hgk = \cup_{\ h\in H}\ hgK,$$

то утверждение (4) доказано.

(5) Подсчитаем число правых смежных классов в разложении

$$HgK = \cup_{\ k\in K}\ Hgk.$$

Допустим, что $Hgk_1 = Hgk_2$. Тогда $Hgk_1k_2^{-1} = Hg$ и

$$k_1k_2^{-1} \in g^{-1}Hg \cap K = H^g \cap K$$

по лемме 5.1. Справедливо и обратное, т.е. если $k_1k_2^{-1} \in H^g \cap K$, то

$$k_1k_2^{-1} \in g^{-1}Hg,\ gk_1k_2^{-1} \in Hg,\ gk_1 \in Hgk_2$$

и $Hgk_1 = Hgk_2$. Поэтому, в двойном смежном классе $HgK$ правых смежных классов по $H$ столько, сколько их в группе $K$ по подгруппе $H^g \cap K$.

Аналогично,

$$HgK = \cup_{\ h\in H}\ hgK \quad \text{и} \quad h_1gK = h_2gK$$

тогда и только тогда, когда $h_1^{-1}h_2 \in H \cap K^{g^{-1}}$. Поэтому, в $HgK$ левых смежных классов по $K$ будет точно столько, каков индекс $\mid H : H \cap K^{g^{-1}} \mid$. □

**Произведение подгрупп.** При $g = e$ двойной смежный класс

$$HgK = HK = \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}$$

превращается в произведение подгрупп $H$ и $K$. В общем случае $HK$ не является подгруппой.





Говорят, что подгруппы $H$ и $K$ *перестановочны*, если $HK = KH$. Равенство $HK = KH$ означает, что для любых $h_1 \in H, k_1 \in K$ существуют $h_2 \in H, k_2 \in K$ такие, что $h_1k_1 = k_2h_2$.

**Теорема 5.9.** *Произведение двух подгрупп является подгруппой тогда и только тогда, когда эти подгруппы перестановочны.*

*Доказательство.* Пусть $H$ и $K$ — подгруппы группы $G$. Предположим, что $HK$ — подгруппа, и пусть $h \in H,\ k \in K$. Тогда

$$kh = (h^{-1}k^{-1})^{-1} \in HK \quad \text{и} \quad KH \subseteq HK.$$

Поскольку для элемента $hk$ в подгруппе $HK$ существует элемент $h_1k_1$ такой, что $(h_1k_1)^{-1} = hk$, то

$$hk = k_1^{-1}h_1^{-1} \in KH \quad \text{и} \quad HK \subseteq KH.$$

Итак, если $HK$ — подгруппа, то $HK = KH$.

Обратно, пусть $HK = KH$. Тогда для любых $h_1, h_2 \in H,\ k_1, k_2 \in K$ имеем: $k_1h_2 = h_3k_3$, где $h_3 \in H,\ k_3 \in K$. Поэтому

$$(h_1k_1)(h_2k_2) = h_1(k_1h_2)k_2 = h_1h_3k_3k_2 \in HK$$

и

$$(h_1k_1)^{-1} = k_1^{-1}h_1^{-1} \in KH = HK.$$

Значит, $HK$ — подгруппа. □

**Теорема 5.10.** *Если $H$ и $K$ — подгруппы конечной группы $G$, то* $\mid HK \mid = \mid H \mid\mid K \mid / \mid H \cap K \mid$.

*Доказательство.* Рассмотрим $HeK$ и применим лемму 5.8. По этой лемме $HK$ есть объединение правых смежных классов по $H$ и этих правых смежных классов $\mid K : K \cap H \mid$ штук. Так как $\mid Hk \mid = \mid H \mid$ и различные правые смежные классы имеют пустое пересечение, то

$$\mid HK \mid = \mid H \mid\mid K : K \cap H \mid = \mid H \mid\mid K \mid / \mid K \cap H \mid .$$

□

Если $HK = G$, то говорят, что группа $G$ есть *произведение своих подгрупп $H$ и $K$*, либо группа $G$ *факторизуема подгруппами $H$ и $K$*. В этом случае каждый элемент $g \in G$ представим в виде $g = hk$, где $h \in H,\ k \in K$.

**Лемма 5.11.** *Если $H$ и $K$ — подгруппы группы $G$ и $G = HK$, то $G = KH$ и $G = H^x K$ при любом $x \in G$.*

*Доказательство.* Так как $G = HK$ — подгруппа группы $G$, то $G = HK = KH$ по теореме 5.9. Если $x$ — произвольный элемент из группы $G$, то $x = hk$, где $h \in H,\ k \in K$ и

$$H^x K = H^{hk} K = H^k K = k^{-1} HkK =$$

$$= k^{-1} HK = k^{-1} KH = KH = G.$$

□

**Лемма 5.12.** *Если $H$ — собственная подгруппа группы $G$, то $H^x H \neq G$ при любом $x \in G$.*

*Доказательство.* Допустим противное, т.е. предположим, что существует $x \in G$ такой, что $H^x H = G$. По лемме 5.11

$$G = (H^x)^{x^{-1}} H = HH = H,$$





противоречие. Поэтому предположение неверно и $H^x H \neq G$ при любом $x \in G$. □

**Теорема 5.13.** *Для любого простого числа $p$ группа порядка $p^2$ абелева. Кроме того, группа порядка $p^2$ либо циклическая, либо является произведением двух своих подгрупп порядка $p$.*

*Доказательство.* Пусть $p$ — простое число и $G$ — группа порядка $p^2$. Выберем неединичный элемент $a \in G$ и пусть $A = \langle a \rangle$. Если $A = G$, то $G$ — циклическая группа. Пусть $A \neq G$. По теореме Лагранжа $\mid A \mid = p$. Выберем $b \in G \setminus A$ и пусть $B = \langle b \rangle$. Если $B = G$, то $G = \langle b \rangle$ — циклическая группа. Пусть $B \neq G$. По теореме Лагранжа $\mid B \mid = p$. Так как $A \cap B$ — собственная подгруппа в $A$ и в $B$, то по теореме Лагранжа $A \cap B = E$ и

$$\mid AB \mid = \mid A \mid\mid B \mid = p^2, \quad \text{т.е.} \quad AB = BA = G.$$

По лемме 5.12 подгруппы $A$ и $B$ не сопряжены между собой. Если существует элемент $g \in G$ такой, что $A \neq A^g$, то $A \cap A^g = E$ и

$$\mid AA^g \mid = \mid A \mid\mid A^g \mid = \mid G \mid, \quad \text{т.е.} \quad G = AA^g,$$

что противоречит лемме 5.12. Поэтому допущение неверно и $A = A^g$ при любом $g \in G$. Аналогично, $B = B^g$ при любом $g \in G$. Теперь для любых $a \in A,\ b \in B$ имеем:

$$aba^{-1}b^{-1} = (aba^{-1})b^{-1} \in B^{a^{-1}} B = B,$$

$$aba^{-1}b^{-1} = a(ba^{-1}b^{-1}) \in AA^{b^{-1}} = A,$$

поэтому $aba^{-1}b^{-1} \in A \cap B = E$, $aba^{-1}b^{-1} = e$ и $ab = ba$. □

**Лемма 5.14.** *Для группы $G$ справедливы следующие утверждения:*

*(1) если $H$ — абелева подгруппа группы $G$, то $Z(G)H$ — также абелева подгруппа группы $G$;*

*(2) если $K$ — подгруппа группы $G$, то $Z(G)Z(K)$ — абелева подгруппа группы $G$.*

*Доказательство.* (1) Пусть $H$ — абелева подгруппа группы $G$. Из определения центра группы следует, что для $Z(G)$ и $H$ выполняются условия теоремы 5.9, поэтому $Z(G)H = HZ(G)$ — подгруппа группы $G$. Если $x$ и $y \in Z(G)H$, то $x = z_1h_1,\ y = z_2h_2$, где $z_i \in Z(G),\ h_i \in H,\ i = 1, 2$. Теперь

$$xy = z_1h_1z_2h_2 = z_2h_2z_1h_1 = yx,$$

т.е. $Z(G)H$ абелева.

(2) Пусть $K$ — произвольная подгруппа группы $G$. Тогда центр $Z(K)$ является абелевой подгруппой группы $G$ и $Z(G)Z(H)$ — абелева подгруппа по (1). □

Произведение двух непустых подмножеств $T$ и $S$ группы $G$ определяется как множество

$$TS = \{ts \mid t \in T,\ s \in S\}.$$

**Лемма 5.15.** *Пусть $T$ и $S$ — непустые подмножества группы $G$, $x$ и $y \in G$. Тогда:*

*(1) $T^{(xy)} = (T^x)^y$;*

*(2) множество всех элементов $g \in G$, для которых $T^g = T$, образует подгруппу группы $G$;*

*(3) $(TS)^x = T^xS^x$;*

*(4) $(T \cap S)^x = T^x \cap S^x$.*





*Доказательство.* (1) Каждый элемент множества $T^{(xy)}$ может быть записан в виде $(xy)^{-1}txy$, где $t \in T$. Так как

$$(xy)^{-1}txy = y^{-1}x^{-1}txy \quad \text{и} \quad x^{-1}tx \in T^x,$$

то

$$y^{-1}(x^{-1}tx)y \in (T^x)^y, \quad \text{т.е.} \quad T^{(xy)} \subseteq (T^x)^y.$$

Обратно, каждый элемент множества $(T^x)^y$ может быть записан в виде $y^{-1}(x^{-1}sx)y$, где $s \in T$. Поэтому

$$y^{-1}(x^{-1}sx)y = (xy)^{-1}s(xy) \in T^{(xy)},$$

т.е. $(T^x)^y \subseteq T^{(xy)}$. Таким образом, $(T^x)^y = T^{(xy)}$.

(2) Пусть $H$ — множество всех элементов $g$ группы $G$, для которых $T^g = T$. Если $g$ и $h \in H$, то

$$T^{(gh)} = (T^g)^h = T^h = T \quad \text{и} \quad gh \in H.$$

Из равенства $T = T^g$ получаем, что

$$T^{g^{-1}} = (T^g)^{g^{-1}} = T^{gg^{-1}} = T,$$

поэтому $g^{-1} \in H$ и $H$ — подгруппа группы $G$.

Утверждения (3) и (4) проверяются элементарно. □

**Нормализатор.** Если $T$ — непустое подмножество группы $G$ и $g \in G$, то

$$gT = \{gt \mid t \in T\} \quad \text{и} \quad Tg = \{tg \mid t \in T\}.$$

Элемент $g \in G$ называется *перестановочным* с подмножеством $T$, если $gT = Tg$. Равенство $gT = Tg$ означает, что для любого элемента $t_1 \in T$ существует такой элемент

$t_2 \in T$, что $gt_1 = t_2 g$. Если элемент $g$ перестановочен с подмножеством $T$, то

$$gT = Tg \quad \text{и} \quad T = g^{-1}Tg = T^g.$$

Совокупность всех элементов группы $G$, перестановочных с подмножеством $T$ называется *нормализатором* подмножества $T$ в группе $G$ и обозначается через $N_G(T)$. Итак,

$$N_G(T) = \{g \in G \mid gT = Tg\} = \{g \in G \mid T^g = T\}.$$

**Лемма 5.16.** *Пусть $T$ — непустое подмножество группы $G$, $g$ — произвольный элемент группы $G$. Тогда:*

*(1) $N_G(T) \leq G$;*
*(2) $C_G(T) \leq N_G(T)$;*
*(3) $N_G(T^g) = N_G(T)^g$;*
*(4) $N_G(T) \leq N_G(C_G(T))$;*
*(5) если $H$ — подгруппа группы $G$, то $H \leq N_G(H)$.*

*Доказательство.* Утверждение (1) следует из леммы 5.15(2).

(2) Если $x \in C_G(T)$, то $x$ перестановочен с каждым элементом множества $T$, поэтому $xT = Tx$ и $x \in N_G(T)$.

(3) Если $x \in N_G(T^g)$, то $(T^g)^x = T^g$ и $T^{(gxg^{-1})} = T$ по лемме 5.15. Поэтому $gxg^{-1} \in N_G(T)$ и

$$x \in g^{-1}N_G(T)g = N_G(T)^g.$$

Таким образом, $N_G(T^g) \subseteq N_G(T)^g$. Обратно, если $y \in N_G(T)^g$, то $y = z^g$ для некоторого $z \in N_G(T)$ и $zT = Tz$. Отсюда $g^{-1}zTg = g^{-1}Tzg$ и

$$g^{-1}zTg = g^{-1}zgg^{-1}Tg = z^gT^g = yT^g.$$





Аналогично,

$$g^{-1}Tzg = g^{-1}Tgg^{-1}zg = T^gz^g = T^gy.$$

Таким образом, $yT^g = T^gy$ и $y \in N_G(T^g)$, т.е. $N_G(T)^g \subseteq N_G(T^g)$. Следовательно, $N_G(T)^g = N_G(T^g)$.

(4) Если $x \in N_G(T)$, то $T = T^x$ и

$$C_G(T) = C_G(T^x) = C_G(T)^x, \quad \text{т.е.} \quad x \in N_G(C_G(T)).$$

(5) Если $h \in H$, то $hH = H = Hh$ и $h \in N_G(H)$, т.е. $H \leq N_G(H)$. □

**Теорема 5.17.** *Пусть $S$ — непустое подмножество конечной группы $G$. Если $T = \{t_1, ..., t_n\}$ — правая трансверсаль нормализатора $N_G(S)$ в группе $G$, то $\Sigma = \{S^{t_1}, ..., S^{t_n}\}$ — совокупность всех подмножеств, сопряженных с $S$ в группе $G$ и $S^{t_i} \neq S^{t_j}$ при $i \neq j$. В частности, число подмножеств, сопряженных с $S$ в группе $G$, совпадает с индексом нормализатора $N_G(S)$.*

*Доказательство.* Пусть $K = N_G(S)$. По условию

$$G = Kt_1 \cup ... \cup Kt_n, \ Kt_i \neq Kt_j \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Если $x$ — произвольный элемент из группы $G$, то $x = kt_i$ для некоторого $k \in K$ и натурального $i$. Поэтому

$$S^x = S^{kt_i} = S^{t_i} \in \Sigma.$$

Если предположить, что $S^{t_i} = S^{t_j}$, то $S = S^{t_jt_i^{-1}}$ и $t_jt_i^{-1} \in K$, т.е. $Kt_j = Kt_i$. Так как элементы $t_i$ и $t_j$ из правой трансверсали подгруппы $K$ в группе $G$, то $i = j$ и во множестве $\Sigma$ все элементы попарно различны. Таким образом, $\mid \Sigma \mid = \mid T \mid = \mid G : N_G(S) \mid$. □

Теперь с помощью теоремы Лагранжа получаем

**Следствие 5.18.** *Число подмножеств, сопряженных данному непустому подмножеству $S$ в конечной группе $G$, делит порядок группы $G$.* □

Пусть множество $S$ состоит из одного элемента $s$, т.е. $S = \{s\}$. Тогда нормализатор и централизатор множества $S$ совпадают. Поэтому справедливо

**Следствие 5.19.** *Если $s$ — элемент конечной группы $G$ и $T = \{t_1, ..., t_n\}$ — правая трансверсалъ централизатора $C_G(S)$, то $s^G = \{s^{t_1}, ..., s^{t_n}\}$. В частности, число элементов, сопряженных элементу $s$ в группе $G$, совпадает с индексом централизатора $C_G(S)$ в группе $G$ и делит порядок группы $G$.* □

В дальнейшем неоднократно будет использоваться следующее утверждение.

**Лемма 5.20.** (Тождество Дедекинда) *Если $A, B$ и $C$ — подгруппы группы $G$ и $A \leq C$, то*

$$C \cap AB = A(C \cap B).$$

*Доказательство.* Если $x \in C \cap AB$, то $x = ab$, где $a \in A$, $b \in B$. Так как $A \leq C$, то $a \in C$. Но $x \in C$, поэтому $b = a^{-1}x$ также принадлежит $C$. Таким образом, $x = ab \in A(C \cap B)$.

Обратно, пусть

$$x = ab \in A(C \cap B),\ a \in A,\ b \in C \cap B.$$

Поскольку $A \leq C$, то $a \in C$ и $x = ab \in C$. Таким образом, $x = ab \in C \cap AB$. □





**Пример 5.21.** Найдем разложение симметрической группы $S_3$ в левые смежные классы по подгруппе $\langle(12)\rangle$.

Для этого найдем все левые смежные классы группы

$$S_3 = \{\epsilon, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

по подгруппе $H = \langle a\rangle = \{\epsilon, (12)\}$.

$\epsilon H = \epsilon\{\epsilon, (12)\} = \{\epsilon, (12)\} = H$;

$(12)H = (12)\{\epsilon, (12)\} = \{(12), \epsilon\} = H$;

$(13)H = (13)\{\epsilon, (12)\} = \{(13), (123)\}$;

$(23)H = (23)\{\epsilon, (12)\} = \{(23), (132)\}$;

$(123)H = (123)\{\epsilon, (12)\} = \{(123), (13)\} = (13)H$;

$(132)H = (132)\{\epsilon, (12)\} = \{(132), (23)\} = (23)H$.

Искомое разложение принимает вид:

$$S_3 = \epsilon H\ \cup\ (13)H\ \cup (23)H.$$

□

**Пример 5.22.** Найдем все подгруппы группы $S_3$.

Порядок группы $S_3$ равен 6. По теореме Лагранжа ее подгруппы могут быть только следующих порядков: 1,2,3,6. Подгруппы порядка 1 и 6 это единичная подгруппа $H_1 = \{\epsilon\}$ и вся группа $H_2 = G$. Подгруппы порядка 2 и 3 по теореме 5.6 циклические, поэтому для их нахождения надо пересмотреть все циклические подгруппы в $S_3$. Перебирая все элементы группы $S_3$ получаем следующие подгруппы:

$H_3 = \langle(12)\rangle = \{\epsilon, (12)\}$;

$H_4 = \langle(13)\rangle = \{\epsilon, (13)\}$;

$H_5 = \langle(23)\rangle = \{\epsilon, (23)\}$;

$H_6 = \langle(123)\rangle = \{\epsilon, (123), (132)\} = \langle(132)\rangle$.

Итак, $S_3$ имеет шесть подгрупп. Так как элементы $(12), (13), (23)$ сопряжены в $S_3$ (см. пример 1.14), то подгруппы $H_3, H_4, H_5$ сопряжены, причем $H_3^{(23)} = H_4$, $H_3^{(13)} = H_5$. Следовательно, группа $S_3$ содержит четыре класса сопряженных подгрупп:

$$\{H_1\},\ \{H_2\};\ \{H_3, H_4, H_5\},\ \{H_6\}.$$

□

## § 6. Нормальные подгруппы и факторгруппы

Подгруппа $H$ называется *нормальной подгруппой* группы $G$, если $xH = Hx$ для всех $x \in G$. Запись $H \lhd G$ читается так: $H$ — нормальная подгруппа группы $G$. Равенство $xH = Hx$ означает, что для любого элемента $h_1 \in H$ существует элемент $h_2 \in H$ такой, что $xh_1 = h_2x$.

**Теорема 6.1.** (Критерий нормальной подгруппы) *Для подгруппы $H$ группы $G$ следующие утверждения эквивалентны:*

*(1) $H$ — нормальная подгруппа группы $G$;*

*(2) подгруппа $H$ вместе с каждым своим элементом содержит все ему сопряжённые элементы, т.е. $h^x \in H$ для всех $h \in H$ и всех $x \in G$;*

*(3) подгруппа $H$ совпадает с каждой своей сопряженной подгруппой, т.е. $H = H^x$ для всех $x \in G$.*

*Доказательство.* Доказательство проведем по схеме (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2) Пусть $H \lhd G$, т.е. $xH = Hx$ для всех $x \in G$. Если $h$ — произвольный элемент из $H$, то $hx \in Hx = xH$. Поэтому существует элемент $h_1 \in H$ такой, что $hx = xh_1$. Теперь $x^{-1}hx = h_1 \in H$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Пусть выполняются требование (2). Тогда $H^x = \{h^x \mid h \in H\} \subseteq H$ для всех $x \in G$. В частности,





$H^{x^{-1}} \subseteq H$, т.е. $xHx^{-1} \subseteq H$. Теперь $H \subseteq x^{-1}Hx = H^x$ и $H = H^x$ для всех $x \in G$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Если $H^x = H$ для всех $x \in G$, то $x^{-1}Hx = H$ и $Hx = xH$ для всех $x \in G$, т.е. $H$ нормальна в $G$. □

**Следствие 6.2.** *Если $H \lhd G$ и $h \in H$, то $h^G \subseteq H$. Обратно, если $h^G \subseteq H$ для всех $h \in H$, то $H \lhd G$.* □

Понятие "нормальная подгруппа" можно рассматривать не только по отношению ко всей группе, но и относительно подгрупп. Если $H \leq K \leq G$, то подгруппа $H$ будет нормальной в $K$, если $xH = Hx$ для всех $x \in K$.

**Лемма 6.3.** *Пусть $H$ — подгруппа группы $G$. Тогда:*

*(1) $H \lhd N_G(H)$;*

*(2) если $H \leq K \leq G$ и $H \lhd K$, то $K \leq N_G(H)$;*

*(3) $N_G(H)$ — наибольшая подгруппа группы $G$, в которой $H$ нормальна;*

*(4) если $H \lhd G$, то $N_G(H) = G$. Обратно, если $N_G(H) = G$, то $H \lhd G$;*

*(5) $C_G(T) \lhd N_G(T)$ для любого непустого подмножества $T$ группы $G$.*

*Доказательство.* (1) Если $x \in N_G(H)$, то $H^x = H$ и $H \lhd N_G(H)$.

(2) Пусть $H \leq K \leq G$ и $H \lhd K$. Если $x \in K$, то $H^x = H$ и $x \in N_G(H)$, т.е. $K \leq N_G(H)$.

(3) Из (1) следует, что $H \lhd N_G(H)$, а из (2) получаем, что $N_G(H)$ содержит любую подгруппу, в которой $H$ нормальна. Поэтому $N_G(H)$ — наибольшая подгруппа, содержащая подгруппу $H$ в качестве нормальной подгруппы.

Утверждение (4) следует из (3).

(5) Если $x \in N_G(T)$, то $T = T^x$. Поэтому $C_G(T)^x = C_G(T)$ по лемме 2.8(3) и $C_G(T) \lhd N_G(T)$. □

**Лемма 6.4.** *Пусть $H$ — нормальная подгруппа группы $G$. Тогда:*

*(1) если $L \le G$, то $HL \le G$ и $H \cap L \lhd L$;*

*(2) если $L \lhd G$, то $HL \lhd G$ и $H \cap L \lhd G$;*

*(3) $C_G(H) \lhd G$;*

*(4) $Z(H) \lhd G$.*

*Доказательство.* (1) Если $L \le G$, то $HL = LH$ и $HL \le G$ по теореме 5.9. Так как

$$(H \cap L)^l = H^l \cap L^l = H \cap L$$

для всех $l \in L$, то $H \cap L \lhd L$.

(2) Если $L \lhd G$, то, очевидно, $HL \lhd G$ и $H \cap L \lhd G$.

(3) Так как $C_G(H) \lhd N_G(H)$ по лемме 6.3(5) и $N_G(H) = G$ по лемме 6.3(4), то $C_G(H) \lhd G$.

(4) Так как $Z(H) = H \cap C_G(H)$ по лемме 2.9(5), то $Z(H) \lhd G$ по (2). □

**Простая группа.** В каждой группе $G$ тривиальные подгруппы (единичная подгруппа $E$ и сама группа $G$) являются нормальными подгруппами. Если в неединичной группе $G$ нет других нормальных подгрупп, то группа $G$ называется *простой*. Единичную группу $E$ считают непростой группой.

**Теорема 6.5.** *Абелева простая группа является циклической группой простого порядка. Обратно, каждая группа простого порядка будет простой абелевой группой.*





*Доказательство.* Очевидно, что в абелевых группах все подгруппы нормальны. Поэтому в простой абелевой группе совокупность всех подгрупп исчерпывается тривиальными подгруппами.

Пусть $G$ — абелева простая группа и $G \ne E$. Тогда в $G$ существует неединичный элемент $a$ и циклическая подгруппа $\langle a \rangle$ нормальна в $G$. Так как $G$ простая, то $\langle a \rangle = G$ и $G$ — циклическая группа. По теореме 3.4 бесконечная циклическая группа $\langle a \rangle$ обладает нетривиальной подгруппой, например, $\langle a^2 \rangle$, поэтому она не простая.

Пусть $G = \langle a \rangle$ — конечная циклическая группа, $|\, a \,| = n$ и $p$ — простое число, делящее $n$. Элемент $a^p$ имеет порядок $n/p$, поэтому циклическая подгруппа $\langle a^p \rangle$, порождённая элементом $a^p$, отлична от $G$. Но тогда она нормальна в $G$. Это возможно лишь в случае, когда $\langle a^p \rangle = E$ — единичная подгруппа, т.е. когда $n = p$ — простое число.

Обратно, пусть $G$ — группа простого порядка $p$. По теореме 5.6 в группе $G$ все подгруппы тривиальны и $G$ — простая группа. □

Существуют неабелевы простые группы, например, знакопеременная группа $A_n$ степени $n$ является простой неабелевой группой для любого $n > 4$.

**Факторгруппа.** Пусть $H$ — нормальная подгруппа группы $G$. Обозначим через $\overline{G}$ совокупность всех левых смежных классов группы $G$ по подгруппе $H$, т.е. $\overline{G} = \{xH \mid x \in G\}$. Положим

$$(xH)(yH) = xyH. \qquad <1>$$

Проверим, что это равенство задает алгебраическую операцию на множестве $\overline{G}$. Если $xH = x_1H$, $yH = y_1H$ для некоторых $x_1, y_1 \in G$, то $x_1 = xh$, $y_1 = yg$, $h$ и $g \in H$. Поэтому

$$(x_1H)(y_1H) = x_1y_1H = (xh)(yg)H = xy(y^{-1}hy)gH = xyH,$$

т.к. $y^{-1}hy \in H$ по теореме 6.1. Таким образом, равенство <1> не зависит от выбора представителей смежных классов и каждой паре $xH$, $yH$ ставится в соответствие единственный элемент $xyH$.

Ясно, что предложенная операция <1> определена на $\overline{G}$ и ассоциативна. Элемент $eH = H$ будет единичным, а элемент $a^{-1}H$ — обратным к элементу $aH$. Таким образом, доказана следующая

**Теорема 6.6.** *Совокупность $\overline{G} = \{xH \mid x \in G\}$ всех левых смежных классов группы $G$ по нормальной подгруппе $H$ с операцией*

$$(xH)(yH) = xyH$$

*образует группу с единичным элементом $eH = H$ и обратным элементом $(aH)^{-1} = a^{-1}H$.* □

Группа $\overline{G}$ называется *факторгруппой* группы $G$ по подгруппе $H$ и обозначается через $G/H$.

Если $H$ не будет нормальной подгруппой, то равенство <1> не будет задавать алгебраическую операцию, и совокупность левых смежных классов не будет группой.

Очевидно, что если группа $G$ конечна, то факторгруппа группы $G$ по любой нормальной подгруппе $H$ также будет конечной группой порядка, равного индексу подгруппы $H$ в группе $G$, т.е.

$$| G/H |=| G : H |=| G | / | H | .$$





**Лемма 6.7.** *Если $G/Z(G)$ циклическая, то $G$ абелева.*

*Доказательство.* Пусть $G/Z(G) = \langle gZ(G)\rangle$ циклическая и $a, b$ — произвольные элементы группы $G$. Тогда

$$a = g^k z_1,\ b = g^l z_2,\ z_1, z_2 \in Z(G),\ k, l \in \mathbb{Z}$$

и

$$ab = g^k z_1 g^l z_2 = g^k g^l z_1 z_2 = g^l g^k z_2 z_1 = g^l z_2 g^k z_1 = ba.$$

□

**Теорема 6.8.** *Все факторгруппы бесконечной циклической группы $\langle a\rangle$ исчерпываются бесконечной циклической группой $\langle a\rangle/E \simeq \langle a\rangle$ и конечными циклическими группами $\langle a\langle a^m\rangle\rangle$ порядка $m$ для каждого натурального $m$.*

*Доказательство.* По теореме 3.4, с. 31, все подгруппы бесконечной циклической группы $A = \langle a\rangle$ исчерпываются единичной подгруппой $E$ и бесконечными циклическими подгруппами $M = \langle a^m\rangle$, $m \in \mathbb{N}$. Так как каждая циклическая группа абелева, то в ней любая подгруппа нормальна. Факторгруппа $A/E$ очевидно будет бесконечной циклической группой, изоморфной $A$.

Так как $A = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, то факторгруппа $A/M$ состоит из смежных классов $a^kM$, $k \in \mathbb{Z}$. Если два смежных класса совпадут $a^sM = a^tM$, то $a^{s-t} \in M$ и $s - t$ кратно $m$. Отсюда следует, что смежные классы

$$M, aM, a^2M, \dots , a^{m-1}M$$

попарно различны. Кроме того, для любого $a^tM \in A/M$ имеем:

$$t = mq + r, \quad 0 \le r < m \quad \text{и} \quad a^tM = a^{mq}a^rM = a^rM.$$

Таким образом,

$$A/M = \{M, aM, a^2M, \dots, a^{m-1}M\} = \langle aM \rangle,$$

т.е. факторгруппа $A/M$ будет конечной циклической группой порядка $m$. □

**Теорема 6.9.** *Все факторгруппы конечной циклической группы $\langle a \rangle$ порядка $n$ исчерпываются конечными циклическими группами $\langle a\langle a^m \rangle\rangle$ порядка $m$ для каждого натурального $m$ делящего $n$.*

*Доказательство.* По теореме 3.7, с. 32, все подгруппы конечной циклической группы $A = \langle a \rangle$ порядка $n$ исчерпываются циклическими подгруппами $M = \langle a^m \rangle$ порядка $n/m$ для каждого натурального $m$, делящего $n$. Легко проверить, что

$$A/M = \langle aM \rangle = \{aM, a^2M, \dots, a^{m-1}M, M\},$$

т.е. $A/M$ будет циклической группой порядка $m$, порожденной элементом $a\langle a^m \rangle$. □

**Теорема о соответствии.** Условимся через $\mathbf{S}(G, H)$ обозначать совокупность всех подгрупп группы $G$, содержащих подгруппу $H$. В частности, $\mathbf{S}(G, E)$=$\mathbf{S}(G)$ — совокупность всех подгрупп группы $G$, а $\mathbf{S}(G, G) = \{G\}$.

**Теорема 6.10.** (Теорема о соответствии) *Пусть $H$ — нормальная подгруппа группы $G$. Тогда:*

*(1) если $U$ — подгруппа группы $G$ и $H \leq U$, то $\overline{U} = U/H$ — подгруппа факторгруппы $\overline{G} = G/H$;*

*(2) каждая подгруппа факторгруппы $\overline{G} = G/H$ имеет вид $\overline{V} = V/H$, где $V$ — подгруппа группы $G$ и $H \leq V$;*





*(3) отображение $\varphi : U \mapsto \overline{U}$ является биекцией множества $\mathbf{S}(G, H)$ на множество $\mathbf{S}(\overline{G})$;*

*(4) если $N \in \mathbf{S}(G, H)$, то $N$ — нормальная подгруппа группы $G$ тогда и только тогда, когда $N/H$ — нормальная подгруппа факторгруппы $G/H$.*

*Доказательство.* (1) Пусть $U \in \mathbf{S}(G, H)$ и пусть $\overline{U} = \{uH \mid u \in U\}$ — совокупность смежных классов группы $U$ по своей нормальной подгруппе $H$. Если $u_1H, u_2H \in \overline{U}$, то $u_1, u_2 \in U$, а так как $U$ — подгруппа, то $u_1u_2 \in U$ и $u_1^{-1} \in U$. Поэтому,

$$(u_1H)(u_2H) = u_1u_2H \in \overline{U},\ (u_1H)^{-1} = u_1^{-1}H \in \overline{U}$$

и по критерию подгруппы совокупность $\overline{U}$ — подгруппа группы $\overline{G}$.

(2) Пусть $\overline{V}$ — произвольная подгруппа из $\overline{G}$. Тогда $\overline{V}$ состоит из некоторых смежных классов группы $G$ по подгруппе $H$. Обозначим через $V$ множество всех тех элементов группы $G$, из которых состоят смежные классы, принадлежащие $\overline{V}$, т.е. $V = \{x \in G \mid xH \in \overline{V}\}$. Если $v_1, v_2 \in V$, то $v_1H, v_2H \in \overline{V}$, а так как $\overline{V}$ — подгруппа, то

$$(v_1H)(v_2H) = v_1v_2H \in \overline{V} \quad \text{и} \quad (v_1H)^{-1} = v_1^{-1}H \in \overline{V}.$$

Следовательно, $v_1v_2 \in V$ и $v_1^{-1} \in V$, т.е. $V$ — подгруппа группы $G$. Ясно, что $H \leq V$.

(3) Отображение $\varphi : U \mapsto \overline{U}$ будет сюръекцией по (2). Докажем, что $\varphi$ — инъекция. Пусть $U$ и $V$ — подгруппы, содержащие $H$, и предположим, что подгруппы $\overline{U} = \{uH \mid u \in U\}$ и $\overline{V} = \{vH \mid v \in V\}$ совпадают. Тогда для любого элемента $u \in U$ существует элемент $v \in V$ такой, что $uH = vH$. Поэтому $v^{-1}u \in H \leq V \bigcap U$. Теперь $u \in V$

и $U \le V$. Аналогично проверяется обратное включение. Следовательно $U = V$ и $\varphi$ — инъекция.

(4) Если $N \lhd G$, $N \in \mathbf{S}(G, H)$, то

$$(gH)^{-1}(nH)(gH) = g^{-1}ngH \in N/H$$

для всех $g \in G$, $n \in N$. Поэтому $\overline{N} = N/H \lhd \overline{G}$. Обратно, если $\overline{N} \lhd \overline{G}$, то

$$g^{-1}ngH = (gH)^{-1}(nH)(gH) \in \overline{N}$$

и $g^{-1}ng \in N$, значит $N \lhd G$. □

Совокупность всех нормальных подгрупп группы $G$ обозначим через $\mathbf{Sn}(G)$.

**Теорема 6.11.** *Множество $\mathbf{Sn}(G)$ с бинарным отношением $\le$ является подрешеткой решетки $\mathbf{S}(G)$ всех подгрупп группы $G$.*

*Доказательство.* В теореме 2.7, с. 24, доказано, что множество $\mathbf{S}(G)$ с бинарным отношением $\le$ является решеткой. Ясно, что $\mathbf{Sn}(G) \subseteq \mathbf{S}(G)$. По лемме 6.4(2) $H \cap L \lhd G$ и $\langle H \cup L \rangle = HL \lhd G$ для всех $H, L \lhd G$, поэтому $H \cap L = H \wedge L$, $HL = H \vee L$ и $\mathbf{Sn}(G)$ — подрешетка решетки $\mathbf{S}(G)$. □

Собственная нормальная подгруппа $H$ неединичной группы $G$ называется *максимальной нормальной* подгруппой группы $G$, если из условий: $H \le K \lhd G$ следует, что $H = K$, либо $K = G$. У единичной группы $E$ максимальной нормальной подгруппой считают саму группу $E$.





**Теорема 6.12.** *(1) Если $H$ — максимальная нормальная подгруппа неединичной группы $G$, то факторгруппа $G/H$ является простой группой.*

*(2) Если $H$ — нормальная подгруппа группы $G$ и факторгруппа $G/H$ простая, то $H$ — максимальная нормальная подгруппа группы $G$.*

*Доказательство.* (1) Предположим, что факторгруппа $G/H$ непростая. Тогда существует нетривиальная нормальная подгруппа $K/H$ группы $G/H$. По теореме 6.10(4) подгруппа $K$ нормальна в $G$ и $K \ne G$, $K \ne H$, $H \le K$. Противоречие, с тем, что $H$ — максимальная нормальная подгруппа группы $G$.

(2) Пусть $H$ — нормальная подгруппа группы $G$ и факторгруппа $G/H$ простая. Предположим, что существует нормальная подгруппа $L$ группы $G$ такая, что $H \le L$, $H \ne L$, $L \ne G$. Тогда $L/H$ — нетривиальная нормальная подгруппа факторгруппы $G/H$, т.е. факторгруппа $G/H$ непростая. Противоречие. □

**Теорема 6.13.** *Если $p$ — наименьший простой делитель порядка конечной группы, то каждая подгруппа индекса $p$ нормальна в группе.*

*Доказательство.* Пусть $G$ — конечная группа, $p$ — наименьший простой делитель $\mid G \mid$ и $H$ — подгруппа индекса $p$. Предположим, что подгруппа $H$ не является нормальной подгруппой группы $G$. По теореме 6.1 существует элемент $x \in G$ такой, что $H \ne H^x$. Так как $\mid H \mid / \mid H \cap H^x \mid \ne 1$ и делит $\mid G \mid$, то $\mid H \mid / \mid H \cap H^x \mid \ge p$ и

$$\mid G \mid \ge \mid HH^x \mid = \mid H \mid\mid H^x \mid / \mid H \cap H^x \mid \ge$$
$$\ge \mid H \mid p = \mid H \mid\mid G : H \mid = \mid G \mid$$

по теореме 5.10. Поэтому $G = HH^x$, что противоречит лемме 5.12. □

**Пример 6.14.** Подгруппа индекса 2 нормальна в группе. В частности, $A_n \lhd S_n$. □

**Пример 6.15.** Найти все факторгруппы группы $S_3$.

Среди подгрупп группы $S_3$ со своими сопряженными совпадают подгруппы

$$E = H_1,\ S_3 = H_2,\ H = H_6 = \langle (123) \rangle,$$

см. пример 5.22. По теореме 6.1 эти три подгруппы нормальны в $S_3$.

$E$ — единичная подгруппа, поэтому

$$S_3/E = \{E,\ (12)E,\ (13)E,\ (23)E,\ (123)E,\ (132)E\}$$

изоморфна $S_3$.

Так как

$$S_3/H_2 = S_3/S_3 = \{S_3\},$$

то $S_3/S_3$ — группа, изоморфная единичной группе.

Осталось рассмотреть нормальную подгруппу $H = H_6 = \langle (123) \rangle$. Ее порядок равен 3, а порядок $S_3/H$ равен 2. Поэтому $S_3/H$ — циклическая группа порядка 2. Смежные классы $S_3$ по $H$ исчерпываются двумя классами: $H$ и $(12)H$. Таким образом, группа $S_3$ имеет три факторгруппы:

$$S_3/E \simeq S_3,\ S_3/S_3 \simeq E,\ S_3/H = \{H, (12)H\} = \langle (12)H \rangle.$$

□





**Пример 6.16.** В аддитивной группе $\mathbb{Z}$ целых чисел рассмотрим подгруппу $5\mathbb{Z} = \{5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ чисел, кратных 5. Так как $\mathbb{Z}$ абелева, то $5\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$. Смежные классы $\mathbb{Z}$ по $5\mathbb{Z}$ имеют вид: $i + 5\mathbb{Z}$, где $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Факторгруппа

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{5\mathbb{Z}, 1 + 5\mathbb{Z}, 2 + 5\mathbb{Z}, 3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\}$$

состоит из пяти элементов. Нулевым элементом будет $5\mathbb{Z}$. Сложение в аддитивной факторгруппе $G/H$ определяется равенством

$$(a + H) + (b + H) = (a + b) + H.$$

Например,

$$(2 + 5\mathbb{Z}) + (4 + 5\mathbb{Z}) = 6 + 5\mathbb{Z} = 1 + 5\mathbb{Z}.$$

Вычисляя остальные суммы, можно было бы составить таблицу сложения для факторгруппы. Ясно, что $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \langle 1 + 5\mathbb{Z} \rangle$ — циклическая группа порядка 5. □

## § 7. Силовские подгруппы конечных групп

По теореме Лагранжа порядок каждой подгруппы делит порядок конечной группы. Обратное утверждение не всегда верно, т.е. если натуральное число $d$ делит порядок конечной группы $G$, то в группе $G$ может и не быть подгруппы порядка $d$.

**Пример 7.1.** Знакопеременная группа $A_4$ порядка 12 не содержит подгрупп порядка 6.

Допустим противное, пусть $H$ — подгруппа порядка 6 в группе $A_4$. Тогда $\mid A_4 : H \mid = 2$ и $H \lhd A_4$ по примеру 6.14. Группа $A_4$ содержит подгруппы

$$K_1 = \langle (234) \rangle;\ K_2 = \langle (134) \rangle.$$

Если $K_i \not\leq H$, то $H \cap K_i = E$ и $\mid HK_i \mid = \mid H \mid\mid K_i \mid = 18$, противоречие. Поэтому $K_1 K_2 \subseteq H$, а т.к. $K_1 \cap K_2 = E$, то $\mid K_1 K_2 \mid = 9$. Противоречие. Поэтому допущение неверно и группа $A_4$ не содержит подгрупп порядка 6. □

Вполне естественно возникает вопрос: *для каких делителей $d$ порядка конечной группы имеется подгруппа порядка $d$?*

Положительный ответ на этот вопрос в случае, когда $d$ — степень простого числа, дает теорема Силова. Для доказательства теоремы Силова потребуется следующая

**Лемма 7.2.** *Если порядок конечной абелевой группы $G$ делится на простое число $p$, то в группе $G$ существует элемент порядка $p$.*

*Доказательство.* Предположим противное, т.е. допустим, что существует абелева группа $G$ порядка $n$, простое число $p$ делит $n$ и в группе $G$ нет элементов порядка $p$. Пусть $G = \{a_1, \dots, a_n\}$.





Если $p$ делит $\mid a_i \mid$ для некоторого $i$, то $a_i^{|a_i|/p}$ — элемент порядка $p$, противоречие. Поэтому все элементы группы $G$ имеют порядки, не делящиеся на $p$. По теореме 5.10, с. 52,

$$\mid \langle a_1 \rangle \langle a_2 \rangle \mid = \frac{\mid \langle a_1 \rangle \mid\mid \langle a_2 \rangle \mid}{\mid \langle a_1 \rangle \cap \langle a_2 \rangle \mid}$$

не делится на $p$.

Так как группа $G$ абелева, то $A_2 = \langle a_1 \rangle \langle a_2 \rangle$ — подгруппа по теореме 5.9, с. 52, и к произведению $A_2 \langle a_3 \rangle$ можно вновь применить теорему 5.10, с. 52. По этой теореме

$$\mid A_2 \langle a_3 \rangle \mid = \frac{\mid A_2 \mid\mid \langle a_3 \rangle \mid}{\mid A_2 \cap \langle a_3 \rangle \mid}$$

не делится на $p$.

Затем $A_2 \langle a_3 \rangle$ обозначаем через $A_3$ и опять получаем, что $\mid A_3 \langle a_4 \rangle \mid$ не делится на $p$. Через конечное число шагов приходим к выводу, что $\mid A_{n-1} \langle a_n \rangle \mid$ не делится на $p$. Но

$$A_{n-1} = \langle a_1 \rangle \dots \langle a_{n-1} \rangle$$

и $A_{n-1} \langle a_n \rangle = G$, т.е. получаем, что $\mid G \mid$ не делится на $p$. Противоречие. Значит, допущение неверно и лемма справедлива. □

Пусть $p$ — простое число. $p-$*Группой* называют конечную группу, порядок которой есть степень числа $p$. Конечная группа называется *примарной*, если она является $p-$группой для некоторого простого $p$.

**Теорема 7.3.** (Силов) *Пусть конечная группа $G$ имеет порядок $p^m s$, где $p$ — простое число и $p$ не делит $s$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

*(1) в группе $G$ существует подгруппа порядка $p^i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$;*

*(2) если $H$ — $p$–подгруппа группы $G$ и $P$ — подгруппа порядка $p^m$, то существует такой элемент $a \in G$, что $H \leq P^a$;*

*(3) любые две подгруппы порядка $p^m$ сопряжены в группе $G$;*

*(4) число подгрупп порядка $p^m$ в группе $G$ сравнимо с единицей по модулю $p$ и делит $s$.*

*Доказательство.* (1) Доказательство проведем индукцией по $\mid G \mid$. По индукции считаем, что для всех групп, порядок которых меньше порядка $G$ утверждение (1) теоремы выполняется. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Порядок центра $Z(G)$ делится на $p$.

Так как $Z(G)$ — абелева группа, то к $Z(G)$ применима лемма 7.2. По этой лемме в $Z(G)$ есть элемент $z$ порядка $p$. Так как $N = \langle z \rangle$ — нормальная подгруппа группы $G$ порядка $p$, то факторгруппа $G/N$ имеет порядок $p^{m-1}s <\mid G \mid$ и по индукции в группе $G/N = \overline{G}$ имеется подгруппа $\overline{P_i}$ порядка $p^i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, m-1$. По теореме о соответствии в группе $G$ имеется подгруппа $P_i$ такая, что $P_i \geq N$ и $P_i/N = \overline{P_i}$. Теперь $\mid P_i \mid = p^{i+1}$, где $i = 1, 2, \ldots, m-1$. Итак, в группе $G$ имеется подгруппа $N$ порядка $p$ и подгруппы $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$ порядков $p^2, p^3, \ldots, p^m$ соответственно.

Случай 2. Порядок центра $Z(G)$ группы $G$ не делится на $p$.

Рассмотрим разложение группы $G$ в объединение различных классов сопряженных элементов

$$G = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_d, \qquad <1>$$





где

$$K_i = x_i^G = \{x_i^g \mid g \in G\}$$

— класс сопряженных с $x_i$ элементов. По лемме 1.9 различные классы сопряженных элементов имеют пустое пересечение, а по следствию 5.19 число элементов в классе $x_i^G$ равно индексу централизатора $C_G(x_i)$. Пусть

$$k_i = \mid K_i \mid = \mid G : C_G(x_i) \mid .$$

Централизатор каждого элемента из центра совпадает с группой $G$. И обратно, если централизатор некоторого элемента совпадает с группой, то этот элемент попадает в центр $G$. Поэтому из <1> получаем

$$\mid G \mid = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\mid Z(G) \mid} + k_c + k_{c+1} + \ldots + k_d, \qquad <2>$$

где $k_j > 1$ для каждого $j \geq c$. Если все числа $k_c, \ldots, k_d$ делятся на $p$, то из <2> следует, что $\mid Z(G) \mid$ делится на $p$, что противоречит рассматриваемому случаю. Итак, существует $k_f$, где $f \geq c$ такое, что $p$ не делит $k_f$. Поскольку $k_f = \mid G : C_G(x_f) \mid$, то

$$\mid C_G(x_f) \mid = p^m s_1 <\mid G \mid,$$

где $s_1 = s/k_f$ — целое число и $p$ не делит $s_1$. Теперь к группе $C_G(x_f)$ применима индукция. По индукции в группе $C_G(x_f)$ существует подгруппа порядка $p^i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$. Эта подгруппа будет искомой и для группы $G$.

(2) Рассмотрим разложение группы $G$ на двойные смежные классы по подгруппам $P$ и $H$ :

$$G = Px_1H \cup Px_2H \cup \ldots \cup Px_tH. \qquad <3>$$

Зададим отображение

$$\varphi_i : gx_ih \mapsto x_i^{-1}gx_ih, \ g \in P, h \in H,$$

переводящее элементы двойного смежного класса $Px_iH$ в элементы произведения подгрупп $x_i^{-1}Px_i = P^{x_i}$ и $H$. Легко проверить, что отображение $\varphi_i$ взаимно однозначно, поэтому, используя теорему 5.10, получаем:

$$| Px_iH |=| P^{x_i}H |= \frac{| P^{x_i} || H |}{| P^{x_i} \cap H |} = \frac{p^m p^b}{| P^{x_i} \cap H |},$$

где $p^b =| H |$. Так как $P^{x_i} \cap H$ есть подгруппа в $H$, то по теореме Лагранжа $| P^{x_i} \cap H |$ делит $p^b$ и $p^b / | P^{x_i} \cap H |$ — целое число. Из <3> теперь получаем:

$$p^m s = \sum_{i=1}^{t} | Px_iH |= \sum_{i=1}^{t} p^m \frac{p^b}{| P^{x_i} \cap H |} = p^m \sum_{i=1}^{t} \frac{p^b}{| P^{x_i} \cap H |}.$$

Сокращая обе части на $p^m$ получим:

$$s = \sum_{i=1}^{t} \frac{p^b}{| P^{x_i} \cap H |}. \qquad < 4 >$$

Так как $s$ взаимно просто с $p$, а $p^b / | p^{x_i} \cap H |$ — целое число, являющееся степенью $p$, то в правой части $< 4 >$ существует слагаемое, равное единице. Пусть, например, $p^b =| P^{x_j} \cap H |$, где $1 \leq j \leq t$. Тогда $H \leq P^{x_j}$.

(3) Пусть $P_1$ и $P_2$ — подгруппы порядка $p^m$. По (2) существует элемент $a \in G$ такой, что $P_1 \leq P_2^a$. Так как $| P_1 |=| P_2^a |$, то $P_1 = P_2^a$.

(4) Пусть $G$ — группа порядка $p^m s$, $(p, s) = 1$, $P$ — подгруппа порядка $p^m$ и $N = N_G(P)$ — нормализатор





подгруппы $P$ в группе $G$. Рассмотрим разложение группы $G$ на двойные смежные классы по $P$ и $N$:

$$G = Px_1N \cup Px_2N \cup \ldots \cup Px_tN. \qquad < 5 >$$

Отображение

$$\varphi_i : gx_ih \mapsto x_i^{-1}gx_ih, \ g \in P, h \in N,$$

будет взаимно однозначным отображением $Px_iN$ на $P^{x_i}N$. Теперь из $< 5 >$ получаем:

$$| G |= \sum_{i=1}^{t} | P^{x_i}N |= \sum_{i=1}^{t} \frac{| P^{x_i} || N |}{| P^{x_i} \cap N |} =| N | \sum_{i=1}^{t} \frac{| P^{x_i} |}{| P^{x_i} \cap N |}.$$

Положим $| G : N |= \rho$. Элемент $x_1$ можно выбрать единичным, поэтому $Px_1N = P^{x_1}N = N$ и $P^{x_1} \cap N = P$. Теперь

$$\rho = 1 + \sum_{i=2}^{t} | P^{x_i} | / | P^{x_i} \cap N | . \qquad < 6 >$$

Проверим, что под знаком суммы нет слагаемых равных 1. Допустим противное, т.е. что для некоторого $j \geq 2$ имеем равенство $| P^{x_j} |=| P^{x_j} \cap N |$. Это означает, что $P^{x_j} \leq N$ и подгруппа $N$ содержит две подгруппы $P$ и $P^{x_j}$ порядка $p^m$. По (3) существует элемент $y \in N$ такой, что $P = P^{x_j y}$. Но тогда $x_j y \in N$, а так как $y \in N$, то и $x_j \in N$. Но это возможно только при $j = 1$, противоречие. Значит, допущение неверно и в равенстве <6> под знаком суммы все слагаемые отличны от единицы. Поскольку каждое слагаемое есть степень простого $p$, то из равенства $< 6 >$ получаем сравнение $\rho \equiv 1 \pmod p$. По (3) все подгруппы порядка $p^m$ группы $G$ сопряжены между собой, а по следствию 5.19 число подгрупп, сопряженных с $P$ равно $\rho$. Поскольку $P \leq N$, то $\rho$ делит $s$. $\square$

*Силовской $p$–подгруппой* конечной группы $G$ называют такую $p$–подгруппу, индекс которой не делится на $p$. Непосредственно из теоремы получаем

**Следствие 7.4.** *Пусть конечная группа $G$ имеет порядок $p^m s$, где $p$ — простое число и $p$ не делит $s$. Тогда:*

*(1) существует силовская $p$–подгруппа и её порядок равен $p^m$;*

*(2) каждая $p$–подгруппа содержится в некоторой силовской $p$–подгруппе;*

*(3) любые две силовские $p$–подгруппы сопряжены;*

*(4) число силовских $p$–подгрупп сравнимо с единицей по модулю $p$ и делит $s$.* □

**Теорема 7.5.** *Для конечной группы $G$ и её силовской $p$–подгруппы $P$ справедливы следующие утверждения:*

*(1) если $K \lhd G$, то $P \cap K$ — силовская $p$–подгруппа в $K$, а $PK/K$ — силовская $p$–подгруппа в $G/K$;*

*(2) $N_{G/K}(PK/K) = N_G(P)K/K$;*

*(3) если $K_1 \lhd G$ и $K_2 \lhd G$, то*

$$K_1K_2 \cap P = (K_1 \cap P)(K_2 \cap P)$$

*и*

$$K_1P \cap K_2P = (K_1 \cap K_2)P;$$

*(4) пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — все простые делители порядка группы $G$, $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$, и пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — соответствующие им силовские подгруппы. Тогда*

$$G = \langle P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n \rangle,$$

*а если $n = 2$, то $G = P_1P_2$.*





*Доказательство.* (1) Так как $| P |= p^m$ и $p$ не делит $| G : P |$, то $P \cap K$ — $p$–группа, а из того, что

$$| PK |=| P || K | / | P \cap K |,$$

следует

$$| PK : P |=| K : K \cap P |.$$

Из теоремы 5.7 получаем, что

$$| G : P |=| G : PK || PK : P |$$

и $| K : K \cap P |$ не делится на $p$. Значит $K \cap P$ — силовская $p$–подгруппа в $K$.

Поскольку $| PK/K |=| P/P \cap K |$, то $PK/K$ — $p$–группа, а так как

$$| G/K : PK/K |=| G : PK |=| G : P | / | PK : P |$$

не делится на $p$, то $PK/K$ — силовская $p$–подгруппа в $G/K$.

(2) Для $x \in N_G(P)$ получаем

$$(x^{-1}K)(PK/K)(xK) = P^x K/K = PK/K,$$

т.е. $N_G(P)K/K \leq N_{G/K}(PK/K)$. Обратно, если $yK \in N_{G/K}(PK/K)$, то $P^yK = PK$. Теперь $P$ и $P^y$ — силовские подгруппы в $PK$, которые по следствию 7.4 сопряжены в $PK$, т.е. существует элемент $ak \in PK$, $a \in P, k \in K$, такой, что $P^y = P^{ak} = P^k$. Теперь $yk^{-1} \in N_G(P)$ и $y \in N_G(P)K$, т.е.

$$N_{G/K}(PK/K) \leq N_G(P)K/K.$$

(3) Если

$$ab \in (K_1 \cap P)(K_2 \cap P), \quad a \in K_1 \cap P, \; b \in K_2 \cap P,$$

то $ab \in K_1K_2 \cap P$ и

$$(K_1 \cap P)(K_2 \cap P) \leq K_1K_2 \cap P.$$

Если $M \leq G$, то пусть $\mid M \mid_p$ означает наивысшую степень $p$, делящую порядок $M$. По следствию 7.4 $\mid M \mid_p$ — порядок силовской $p-$подгруппы из $M$. Из (1) следует, что

$$\mid K_i \cap P \mid = \mid K_i \mid_p,\ i = 1, 2; \quad \mid K_1K_2 \cap P \mid = \mid K_1K_2 \mid_p .$$

Поэтому

$$\mid (K_1 \cap P)(K_2 \cap P) \mid = \mid K_1 \mid_p \mid K_2 \mid_p / \mid K_1 \cap K_2 \mid_p =$$

$$= \mid K_1K_2 \mid_p = \mid K_1K_2 \cap P \mid$$

и

$$(K_1 \cap P)(K_2 \cap P) = K_1K_2 \cap P.$$

Если

$$ab \in (K_1 \cap K_2)P,\ a \in K_1 \cap K_2,\ b \in P,$$

то

$$ab \in (K_1 \cap P)(K_2 \cap P) \quad \text{и} \quad (K_1 \cap K_2)P \leq K_1P \cap K_2P.$$

Обратно, пусть

$$a_1b_1 = a_2b_2 \in K_1P \cap K_2P,$$

где $a_1 \in K_1, a_2 \in K_2$, $b_1$ и $b_2 \in P$. Тогда

$$a_2^{-1}a_1 = b_2b_1^{-1} \in K_1K_2 \cap P.$$





Поскольку уже доказано, что

$$K_1K_2 \cap P = K_2K_1 \cap P = (K_2 \cap P)(K_1 \cap P),$$

то $a_2^{-1}a_1 = c_2c_1$, где

$$c_2 \in K_2 \cap P, c_1 \in K_1 \cap P.$$

Теперь

$$a_1c_1^{-1} = a_2c_2 \in K_1 \cap K_2 \quad \text{и} \quad a_1b_1 = a_1c_1^{-1}c_1b_1 \in (K_1 \cap K_2)P.$$

Следовательно,

$$K_1P \cap K_2P = (K_1 \cap K_2)P.$$

(4) Пусть

$$H = \langle P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n \rangle.$$

Тогда $\mid P_i \mid$ делит $\mid H \mid$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ и поэтому

$$\mid G \mid = \mid P_1 \mid\mid P_2 \mid \ldots \mid P_n \mid$$

делит $\mid H \mid$, т.е. $H = G$. Для $n = 2$ по теореме 5.10 имеем $\mid G \mid = \mid P_1P_2 \mid$, откуда $G = P_1P_2$. □

**Лемма 7.6.** (Фраттини) *Если $K$ — нормальная подгруппа конечной группы $G$ и $P$ — силовская $p-$подгруппа из $K$, то $G = N_G(P)K$.*

*Доказательство.* Пусть $g$ — произвольный элемент из $G$. Так как $P \leq K \lhd G$, то $P^g \leq K^g = K$ и по следствию 7.4 подгруппы $P$ и $P^g$ сопряжены в $K$. Поэтому, существует элемент $k \in K$ такой, что $P = P^{gk}$, откуда

$$gk \in N_G(P) \quad \text{и} \quad g \in N_G(P)k^{-1} \subseteq N_G(P)K.$$

Таким образом, $G = N_G(P)K$. □

**Лемма 7.7.** *Каждая подгруппа конечной группы, содержащая нормализатор некоторой силовской подгруппы, самонормализуема.*

*Доказательство.* Пусть $P$ — силовская подгруппа группы $G$ и $H$ — подгруппа группы $G$, содержащая $N_G(P)$. Так как $H \lhd N_G(H)$, то по лемме Фраттини

$$N_G(H) = HN_G(P) = H.$$

□

**Лемма 7.8.** *Пусть $P$ — $p$−подгруппа конечной группы $G$, $N \lhd G$ и $p$ не делит $|\, N \,|$. Тогда*

$$N_{G/N}(PN/N) = N_G(P)N/N.$$

*Доказательство.* Ясно, что

$$N_G(P)N/N \leq N_{G/N}(PN/N).$$

По условию подгруппа $P$ является силовской подгруппой в $PN$. Пусть

$$N_{G/N}(PN/N) = A/N.$$

Тогда $PN \lhd A$ и по лемме Фраттини $A = N_G(P)N$. □

**Пример 7.9.** Симметрическая группа $S_6$ степени 6 имеет порядок $6! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. По теореме Силова $S_6$ содержит подгруппы порядков $2, 2^2, 2^3, 2^4, 3, 3^2, 5$. Силовская 2−подгруппа имеет порядок $2^4$, силовская 3−подгруппа имеет порядок $3^2$ и силовская 5−подгруппа имеет порядок 5.
□





**Пример 7.10.** Группа порядка 15 циклическая.

Пусть $G$ — группа порядка 15. В группе $G$ имеется подгруппа $P$ порядка 3 и подгруппа $Q$ порядка 5. По следствию 7.4 число силовских 3−подгрупп имеет вид $1 + 3k$ для некоторого неотрицательного целого $k$ и делит 5. Поэтому в группе имеется только одна подгруппа порядка 3. Так как любые две силовские 3−подгруппы сопряжены, то $P \lhd G$. Аналогично, число силовских 5−подгрупп равно $1 + 5t$ и делит 3. Поэтому $Q \lhd G$. Так как $P = \langle x \rangle$ и $Q = \langle y \rangle$ — циклические подгруппы простых порядков, то группа $G = \langle x \rangle \langle y \rangle$ по теореме 5.10. Теперь для любых $a \in P, b \in Q$ имеем:

$$aba^{-1}b^{-1} = (aba^{-1})b^{-1} \in Q^{a^{-1}}Q = Q,$$

$$aba^{-1}b^{-1} = a(ba^{-1}b^{-1}) \in PP^{b^{-1}} = P,$$

поэтому

$$aba^{-1}b^{-1} \in P \cap Q = 1, aba^{-1}b^{-1} = 1$$

и $ab = ba$. Следовательно, группа $G$ абелева. Теперь ясно, что $G = \langle xy \rangle$ — циклическая группа. □

# ГЛАВА 2. ГОМОМОРФИЗМЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП

## § 8. Гомоморфизмы групп

Пусть $G$ и $\Gamma$ — мультипликативные группы. Отображение $\varphi : G \to \Gamma$ называется *гомоморфизмом* группы $G$ в группу $\Gamma$, если

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \qquad < 1 >$$

для любых $x$ и $y \in G$.

Если $M$ — подмножество группы $G$, то

$$\varphi(M) = \{\varphi(m) \mid m \in M\}$$

— *образ* $M$ при гомоморфизме $\varphi$, а $\varphi(G)$ — *образ гомоморфизма* $\varphi$. Образ гомоморфизма $\varphi$ также обозначают через $\mathrm{Im}\varphi$.

*Ядром* гомоморфизма $\varphi$ называется множество

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{x \in G \mid \varphi(x) = \varepsilon\},$$

где $\varepsilon$ — единичный элемент группы $\Gamma$. Другими словами, в ядре собраны все элементы группы $G$, переходящие при отображении $\varphi$ в единичный элемент группы $\Gamma$.

**Лемма 8.1.** *Пусть $\varphi : G \to \Gamma$ — гомоморфизм группы $G$ в группу $\Gamma$. Тогда:*

*(1) единичный элемент $e$ группы $G$ переходит в единичный элемент $\varepsilon$ группы $\Gamma$, т.е. $\varphi(e) = \varepsilon$;*

*(2) обратный элемент переходит в обратный, т.е. $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ для всех $a \in G$;*

*(3) образ гомоморфизма является подгруппой группы $\Gamma$, т.е. $Im\varphi \le \Gamma$;*



*(4) ядро гомоморфизма является нормальной подгруппой группы $G$, т.е. $Ker\varphi \lhd G$;*

*(5) тогда и только тогда $\varphi(g) = \varphi(h)$, где $g, h \in G$, когда $gh^{-1} \in Ker\varphi$.*

*Доказательство.* (1) Предположим, что $\varphi(e) = \varepsilon_1 \in \Gamma$. Так как $\varepsilon$ — единица группы $\Gamma$, то $\varepsilon_1\varepsilon = \varepsilon_1$. Применяя <1> к равенству $ee = e$, получаем, $\varepsilon_1\varepsilon_1 = \varepsilon_1$. Теперь $\varepsilon_1\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_1$, откуда $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varphi(e)$ — единица группы $\Gamma$.

(2) Так как $e = aa^{-1} = a^{-1}a$, то

$$\varepsilon = \varphi(e) = \varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1})\varphi(a)$$

и $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

(3) Если $\alpha$ и $\beta \in \mathrm{Im}\varphi$, то существуют элементы $a$ и $b \in G$ такие, что $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$. Так как $G$ — группа, то $ab \in G$ и $a^{-1} \in G$. Отсюда

$$\alpha\beta = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \in \mathrm{Im}\varphi$$

и

$$\alpha^{-1} = \varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1}) \in \mathrm{Im}\varphi,$$

т.е. $\mathrm{Im}\varphi$ — подгруппа группы $\Gamma$.

(4) Если $a$ и $b \in \mathrm{Ker}\varphi$, то $\varphi(a) = \varepsilon = \varphi(b)$. Поэтому

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \varepsilon, \quad \text{т.е.} \quad ab \in \mathrm{Ker}\varphi.$$

Далее,

$$\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} = \varepsilon, \quad \text{т.е.} \quad a^{-1} \in \mathrm{Ker}\varphi.$$

Значит, $\mathrm{Ker}\varphi$ — подгруппа группы $G$.

Для произвольных элементов $g \in G$, $a \in \mathrm{Ker}\varphi$ имеем:

$$\varphi(g^{-1}ag) = \varphi(g)^{-1}\varphi(a)\varphi(g) = \varphi(g)^{-1}\varepsilon\varphi(g) = \varepsilon.$$

Поэтому $g^{-1}ag \in \mathrm{Ker}\varphi$ и по теореме 6.1, с. 61, подгруппа $\mathrm{Ker}\varphi$ нормальна в $G$.

(5) Пусть $g, h \in G$ и $\varphi(g) = \varphi(h)$. Тогда

$$\varphi(gh^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)^{-1} = \varepsilon \quad \text{и} \quad gh^{-1} \in \mathrm{Ker}\varphi.$$

Обратно, если $gh^{-1} \in \mathrm{Ker}\varphi$, то

$$\varphi(gh^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)^{-1} = \varepsilon$$

и $\varphi(g) = \varphi(h)$. □

Гомоморфизм $\varphi : G \to \Gamma$ называется *мономорфизмом*, если $\mathrm{Ker}\varphi = \{\varepsilon\}$. Из леммы 8.1 следует, что гомоморфизм $\varphi$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда отображение $\varphi$ — инъекция.

Если $\mathrm{Im}\varphi = \Gamma$, то гомоморфизм $\varphi : G \to \Gamma$ называется *эпиморфизмом*. Ясно, что в этом случае $\varphi$ — сюръекция.

Гомоморфизм, который одновременно является мономорфизмом и эпиморфизмом, будет *изоморфизмом*.

**Лемма 8.2.** *Пусть $\varphi : G \to \Gamma$ — гомоморфизм группы $G$ в группу $\Gamma$. Тогда:*

*(1) если $H \le G$, то $\varphi(H) \le \Gamma$;*

*(2) если $H \lhd G$, то $\varphi(H) \lhd Im\varphi$;*

*(3) если подмножества $T$ и $S$ сопряжены в $G$, то $\varphi(T)$ и $\varphi(S)$ сопряжены в $Im\varphi$.*

*Доказательство.* Элементарная проверка. □

**Теорема 8.3.** (Основная теорема о гомоморфизме) *При гомоморфизме групп факторгруппа по ядру изоморфна образу, т.е. если $\varphi : G \to \Gamma$ — гомоморфизм, то $G/Ker\varphi \simeq Im\varphi$.*





*Доказательство.* Так как $K = \mathrm{Ker}\varphi \lhd G$, то факторгруппа $G/K$ существует. Поставим в соответствие элементу $aK$ группы $G/K$ элемент $\varphi(a)$ из группы $\mathrm{Im}\varphi$, т.е. положим $f(aK) = \varphi(a)$. Если $aK = bK$, то $b^{-1}a \in K$ и $\varphi(b^{-1}a) = \varepsilon$. Поэтому $\varphi(a) = \varphi(b)$ и $f(aK) = f(bK)$. Таким образом, соответствие $f$ не зависит от выбора представителя смежного класса и каждому $aK$ ставится в соответствие единственный элемент $\varphi(a)$. Следовательно, $f : aK \mapsto \varphi(a)$ является отображением группы $G/K$ в группу $\mathrm{Im}\varphi$.

Так как

$$f((aK)(bK)) = f(abK) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = f(aK)f(bK),$$

то $f$ — гомоморфизм.

Если $\varphi(a)$ — произвольный элемент из $\mathrm{Im}\varphi$, то $\varphi(a) = f(aK)$, т.е. $f$ — сюръекция.

Если $f(aK) = f(bK)$, то $\varphi(a) = \varphi(b)$, поэтому $\varphi(a^{-1}b) = \varepsilon$ и $a^{-1}b \in \mathrm{Ker}\varphi = K$, т.е. $aK = bK$. Следовательно, $f$ — инъекция и $f$ — изоморфизм групп $G/K$ и $\mathrm{Im}\varphi$. □

**Теорема 8.4.** *Пусть $H$ — нормальная подгруппа группы $G$. Тогда для любой подгруппы $A$ пересечение $A \cap H$ является нормальной подгруппой в подгруппе $A$, а отображение*

$$\varphi : aH \mapsto a(A \cap H)$$

*является изоморфизмом групп $AH/H$ и $A/A \cap H$.*

*Доказательство.* Произведение $AH$ — подгруппа группы $G$ по лемме 6.4, с. 63. Так как единичный элемент $e$ группы $G$ содержится в $A$ и в $H$, то $AH$ содержит $H$ и $A$. Кроме того, $H$ будет нормальной подгруппой в

$AH$, и можно рассматривать факторгруппу $AH/H$. Пересечение $A \cap H$ является нормальной подгруппой в $A$ по лемме 6.4, с. 63. Поэтому можно рассматривать факторгруппу $A/A \cap H$.

Отображение

$$\varphi : aH \mapsto a(A \cap H)$$

будет взаимно однозначным отображением множества $AH/H$ на $A/A \cap H$, причем

$$\varphi((a_1H)(a_2H)) = \varphi(a_1a_2H) = a_1a_2(A \cap H) =$$

$$= a_1(A \cap H)a_2(A \cap H) = \varphi(a_1H)\varphi(a_2H).$$

Следовательно, $\varphi$ — изоморфизм. □

Теорему о соответствии, см. теорему 6.10, с. 67, дополняет следующая

**Теорема 8.5.** *Если $N$ и $H$ — нормальные подгруппы группы $G$, причем $H \leq N$, то $G/N$ изоморфна $G/H/N/H$.*

*Доказательство.* По теореме 6.10 подгруппа $N/H$ нормальна в $G/H$ и факторгруппа $G/H/N/H$ состоит из смежных классов $gH(N/H)$, где $gH$ — элемент из группы $G/H$. Рассмотрим отображение $\varphi : G/H \to G/N$, определяемое равенством $\varphi(gH) = gN$. Это отображение будет эпиморфизмом. Если $gH \in \mathrm{Ker}\varphi$, то $\varphi(gH) = gN = N$ и $g \in N$, поэтому $\mathrm{Ker}\varphi = N/H$. По теореме о гомоморфизме группы $G/H/N/H$ и $G/N$ изоморфны. □





**Пример 8.6.** Пусть $G$ — произвольная группа, а $K$ — её произвольная нормальная подгруппа. Отображение $\varphi : g \mapsto gK$ группы $G$ в факторгруппу $G/K$ будет эпиморфизмом с ядром $K$. □

**Пример 8.7.** Пусть $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел, $G$ — мультипликативная группа и $a$ — фиксированный элемент из $G$. Рассмотрим отображение $\varphi : k \mapsto a^k$ из группы $\mathbb{Z}$ в группу $G$. Так как

$$\varphi(k + l) = a^{k+l} = a^k a^l = \varphi(k)\varphi(l),$$

то $\varphi$ — гомоморфизм. Образ

$$\mathrm{Im}\varphi = \{\varphi(k) \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \langle a \rangle$$

совпадают с циклической подгруппой, порожденной элементом $a$. Ядро

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{k \mid \varphi(a) = e\} = \{a^k = e\}$$

состоит из тех целых чисел $k$, для которых $a^k = e$. По теореме 3.3, с. 30, все эти числа кратны порядку элемента $a$, т.е. $\mathrm{Ker}\varphi =\mid a \mid \mathbb{Z}$. По основной теореме о гомоморфизмах $\mathbb{Z}/ \mid a \mid \mathbb{Z} \simeq \langle a \rangle$. □

**Пример 8.8.** Пусть $S_n$ — симметрическая группа степени $n$, а $\varGamma = \{-1, 1\}$ — мультипликативная группа. Рассмотрим отображение $\mathrm{sgn} : \tau \mapsto \mathrm{sgn}\tau$. Четным перестановкам ставится в соответствие 1, а число $(-1)$ ставится в соответствии нечетным перестановкам. Поскольку знак произведения перестановок равен произведению знаков, т.е. $\mathrm{sgn}(\tau\delta) = \mathrm{sgn}\tau\mathrm{sgn}\delta$, то требование <1> выполняется, и sgn — гомоморфизм. Ядро этого гомоморфизма состоит из четных перестановок, поэтому $\mathrm{Ker}\mathrm{sgn} = A_n$ — знакопеременная группа. Так как sgn — сюръекция, то $\mathrm{Im}\mathrm{sgn} = \varGamma$ и $S_n/A_n \simeq \varGamma$. □

**Пример 8.9.** Зададим отображение $\det : A \mapsto \det A$, которое каждой невырожденной матрице $A \in GL(n, P)$, где $P$ — поле, ставит в соответствии её определитель. Так как определитель произведения двух матриц равен произведению определителей, т.е. $\det AB = \det A \det B$, то требование <1> выполняется, и отображение $\det$ — гомоморфизм группы $GL(n, P)$ в мультипликативную группу $P^{\#}$. Каждое число $a \in P^{\#}$ будет определителем матрицы

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому $\operatorname{Im} \det = P^{\#}$, т.е. $\det$ — эпиморфизм. Ядро

$$\operatorname{Ker} \det = \{A \in GL(n, P) \mid \det A = 1\}$$

состоит из матриц с единичным определителем, поэтому ядро $\operatorname{Ker} \det = SL(n, P)$ — специальная линейная группа, а по лемме 8.1 подгруппа $SL(n, P)$ нормальна в $GL(n, P)$. По теореме о гомоморфизме факторгруппа $GL(n, P)/SL(n, P)$ изоморфна мультипликативной группе $P^{\#}$. □

## § 9. Автоморфизмы

Напомним, что изоморфное отображение группы на себя называется *автоморфизмом* группы. Два автоморфизма $\varphi$ и $\psi$ группы $G$ считаются равными, если они одинаково действуют на элементах группы, т.е. если $\varphi(x) = \psi(x)$ для всех $x \in G$. Если автоморфизмы $\varphi$ и $\psi$ различны, то существует элемент $y \in G$ такой, что $\varphi(y) \neq \psi(y)$.





Совокупность $\operatorname{Aut} G$ всех автоморфизмов группы $G$ с операцией

$$(\varphi\psi)(x) = \varphi(\psi(x))$$

для всех $x \in G$ является группой, см. теорему 4.8, с. 43.

**Пример 9.1.** Пусть $G$ — абелева группа и $\alpha : x \mapsto x^{-1}$. Тогда $\alpha$ — автоморфизм группы $G$. □

**Пример 9.2.** Пусть $\mathbb{C}^{\#}$ — мультипликативная группа комплексных чисел. Тогда отображение $a + bi \mapsto \overline{a + bi} = a - bi$ является автоморфизмом группы $\mathbb{C}^{\#}$. □

**Пример 9.3.** Пусть $G$ — абелева группа порядка $n$ и $m$ — натуральное число. Если $m$ и $n$ взаимно просты, то отображение $\beta : g \mapsto g^m, \quad g \in G$, является автоморфизмом группы $G$. В частности, если $G$ — абелева группа нечетного порядка, то отображение $g \mapsto g^2$ — автоморфизм группы $G$.

Действительно, т.к. группа $G$ абелева, то $(ab)^m = a^m b^m$ для всех $a, b \in G$. Поэтому отображение $\beta : g \mapsto g^m$ — эндоморфизм группы $G$. Если $a^m = e$ для некоторого $a \in G$, то порядок элемента $a$ делит $m$ по теореме 3.3, с. 30. Но $\mid a \mid$ делит $n$ по теореме Лагранжа, а числа $m$ и $n$ взаимно просты. Следовательно, из равенства $a^m = e$ следует, что $a = e$ и $\beta$ — инъекция. Поэтому $\beta$ — автоморфизм группы $G$. □

При автоморфизмах сохраняются многие свойства групп. Отметим некоторые в следующей лемме. Если $H \subseteq G$ и $\varphi \in \operatorname{Aut} G$, то $\varphi(H) = \{\varphi(h) \mid h \in H\}$ — *образ подмножества* $H$ при автоморфизме $\varphi$.

**Лемма 9.4.** *Пусть $G$ — группа, $H$ и $K \leq G$, $x \in G$ и $\varphi \in AutG$. Тогда:*

*(1)* $\mid x \mid = \mid \varphi(x) \mid$;
*(2)* $C_G(\varphi(x)) = \varphi(C_G(x))$;
*(3)* $\varphi(H) \simeq H$;
*(4) если* $H \leq K$, *то* $\varphi(H) \leq \varphi(K)$ *и* $\mid K : H \mid = \mid \varphi(K) : \varphi(H) \mid$;
*(5) если* $H \triangleleft K$, *то* $\varphi(H) \triangleleft \varphi(K)$ *и* $K/H \simeq \varphi(K)/\varphi(H)$;
*(6)* $N_G(\varphi(H)) = \varphi(N_G(H))$; $\quad C_G(\varphi(H)) = \varphi(C_G(H))$.

*Доказательство.* Все утверждения леммы легко получаются из соответствующих определений. □

**Внутренние автоморфизмы.** Пусть $G$ — группа и $g \in G$. Зададим отображение

$$i_g : x \mapsto gxg^{-1} \qquad <1>$$

для всех $x \in G$. Если $gxg^{-1} = gyg^{-1}$, то $x = y$ и $i_g$ — инъекция. Так как для любого $h \in G$ имеем $i_g(g^{-1}hg) = h$, то $i_g$ — биекция. Кроме того,

$$i_g(xy) = g(xy)g^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1} = i_g(x)i_g(y)$$

и $i_g$ — автоморфизм группы $G$.

Автоморфизм $i_g$ группы $G$, определяемый формулой <1>, называется *внутренним автоморфизмом* группы $G$, порожденным элементом $g$. Совокупность всех внутренних автоморфизмов группы $G$ обозначается через $\mathrm{Inn}G$. Таким образом,

$$\mathrm{Inn}G = \{i_g : x \mapsto gxg^{-1} \ \mid \ g, x \in G\}.$$

**Теорема 9.5.** *(1)* $InnG \triangleleft AutG$;
*(2)* $InnG \simeq G/Z(G)$.





*Доказательство.* (1) Пусть $i_g$ и $i_h \in \mathrm{Inn}G$, $g, h \in G$. Тогда

$$i_g i_h(x) = i_g(i_h(x)) = i_g(hxh^{-1}) = g(hxh^{-1})g^{-1} =$$
$$= (gh)x(gh)^{-1} = i_{gh}(x).$$

Таким образом, $i_g i_h = i_{gh}$ и умножение определено на $\mathrm{Inn}G$. Для единичного элемента $e$ группы $G$ внутренний автоморфизм $i_e$ будет тождественным отображением, т.е. единичным элементом в $\mathrm{Inn}G$. Поэтому из равенства $i_g i_h = i_{gh} = i_e$ следует, что $h = g^{-1}$ и $(i_g)^{-1} = i_{g^{-1}} \in \mathrm{Inn}G$. Оба требования критерия подгруппы выполняются, следовательно, $\mathrm{Inn}G$ — подгруппа группы $\mathrm{Aut}G$.

Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}G$, $i_g \in \mathrm{Inn}G$. Тогда для любого $x \in G$ имеем:

$$(\varphi^{-1} i_g \varphi)(x) = (\varphi^{-1} i_g)(\varphi(x)) = \varphi^{-1}(g\varphi(x)g^{-1}) =$$
$$= \varphi^{-1}(g)\varphi^{-1}(\varphi(x))\varphi^{-1}(g^{-1}) = \varphi^{-1}(g)x(\varphi^{-1}(g))^{-1} =$$
$$= i_{\varphi^{-1}(g)}(x), \quad \text{т.е.} \quad \varphi^{-1} i_g \varphi = i_{\varphi^{-1}(g)} \in \mathrm{Inn}G$$

и $\mathrm{Inn}G$ — нормальная подгруппа группы $\mathrm{Aut}G$.

(2) Определим отображение $f : G \to \mathrm{Inn}G$ следующим образом: $f : g \mapsto i_g$, для всех $g \in G$. Тогда

$$f(gh) = i_{gh} = i_g i_h = f(g)f(h)$$

и $f$ — гомоморфизм группы $G$ в $\mathrm{Inn}G$. Ясно, что $f$ — сюръекция, то есть $\mathrm{Im}f = \mathrm{Inn}G$. Найдем ядро.

$$Kerf = \{g \in G \mid f(g) = i_e\} =$$
$$= \{g \in G \mid gxg^{-1} = x \ \text{ для } \ \text{ всех } \ x \in G\} = Z(G).$$

Применяя основную теорему о гомоморфизмах групп получаем, что $G/Z(G) \simeq \mathrm{Inn}G$.

□

**Теорема 9.6.** *Пусть $G$ — группа и $H$ — её подгруппа. Тогда $C_G(H) \lhd N_G(H)$ и $N_G(H)/C_G(H)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $H$.*

*Доказательство.* Для каждого $g \in N_G(H)$ ограничение $i_g^0$ внутреннего автоморфизма $i_g$ группы $G$ на подгруппе $H$ будет автоморфизмом группы $H$. Рассмотрим отображение $f : g \mapsto i_g^0$ для всех $g \in N_G(H)$. Это отображение $f$ является гомоморфизмом группы $N_G(H)$ в Aut$H$, ядро которого

$$Ker f = \{g \in N_G(H) \mid ghg^{-1} = h \text{ для всех } h \in H\} =$$

$$= C_{N_G(H)}(H) = C_G(H).$$

Теперь остается только применить основную теорему о гомоморфизмах групп. □

**Характеристические подгруппы.** Пусть $H$ — подгруппа группы $G$ и $\alpha$ — автоморфизм группы $G$. Если $\alpha(H) = H$ для всех $\alpha \in \mathrm{Aut}G$, то $H$ называют *характеристической* подгруппой группы $G$ и пишут $H$ *char* $G$. В каждой группе $G$ единичная подгруппа и вся группа являются характеристическими подгруппами. Если в группе $G$ нет других (отличной от единичной подгруппы и всей группы) характеристических подгрупп, то группа называется *характеристически простой*.

**Лемма 9.7.** *Каждая подгруппа конечной циклической группы характеристическая.*

*Доказательство.* В циклических группах подгруппа фиксированного порядка единственна, см. следствие 3.8, с. 33. Поэтому, если $G$ — циклическая группа и $H \leq G$, то из условия $\mid H \mid = \mid \alpha(H) \mid$ следует, что $\alpha(H) = H$ и $H$ *char* $G$. □





**Пример 9.8.** Простые группы являются характеристически простыми. □

**Лемма 9.9.** *Пусть $H \leq G$. Тогда:*

*(1) если $H$ char $G$, то $H \lhd G$;*

*(2) если $H$ char $G$, то $C_G(H)$ char $G$;*

*(3) если $H$ и $K$ char $G$, то $HK$ char $G$ и $H \cap K$ char $G$;*

*(4) если $H \leq K \leq G$, $H$ char $G$ и $K/H$ char $G/H$, то $K$ char $G$.*

*Доказательство.* (1) Пусть $H$ *char* $G$. Тогда $i_g(H) = H$ для всех $g \in G$. Так как $i_g(H) = gHg^{-1}$, то из равенства $gHg^{-1} = H$ для всех $g \in G$ следует, что $H \lhd G$.

(2) Пусть $H$ *char* $G$ и $\alpha \in \mathrm{Aut}G$. Если $g \in C_G(H)$, $h \in H$, то $gh = hg$ для всех $h \in H$, поэтому $\alpha(g)\alpha(h) = \alpha(h)\alpha(g)$, а т.к. $\alpha(H) = H$, то $\alpha(g) \in C_G(H)$ и $C_G(H)$ *char* $G$.

Доказательство утверждений (3) и (4) осуществляется непосредственной проверкой. □

**Лемма 9.10.** *Пусть $H \leq K \leq G$. Тогда:*

*(1) если $H$ char $K$, $K$ char $G$, то $H$ char $G$;*

*(2) если $H$ char $K$, $K \lhd G$, то $H \lhd G$.*

*Доказательство.* (1) Для любого $\alpha \in \mathrm{Aut}G$ из условия $K$ *char* $G$ следует, что $\alpha(K) = K$. Ограничение $\alpha\mid_K$ автоморфизма $\alpha$ на $K$ будет автоморфизмом $K$, а так как $H$ *char* $K$, то $\alpha\mid_K(H) = \alpha(H) = H$ и $H$ *char* $G$.

(2) Так как $K \lhd G$, то $i_g(K) = K$. Ограничение $i_g^0$ внутреннего автоморфизма $i_g$ группы $G$ на $K$ будет автоморфизмом $K$, а так как $H$ *char* $K$, то $i_g^0(H) = i_g(H) = H$ и $H \lhd G$. □

*Холловой* подгруппой конечной группы называют подгруппу, порядок и индекс которой взаимно просты. Силовская подгруппа всегда будет холловой.

**Лемма 9.11.** *Пусть $N$ — холлова нормальная подгруппа конечной группы $G$. Тогда $N$ — характеристическая подгруппа и если $M$ — подгруппа, порядок которой делит порядок $N$, то $M \le N$.*

*Доказательство.* Докажем вначале второе утверждение. Пусть $M \le G$ и порядок $M$ делит порядок $N$. Так как $MN$ — подгруппа группы $G$, то её порядок делит порядок группы $G$. Но

$$| MN |=| M || N | / | M \cap N |,$$

поэтому

$$| MN | / | N |=| M | / | M \cap N |$$

делит $| G/N |$. Так как $| M/M \cap N |$ делит $| N |$, а числа $| N |$ и $| G/N |$ взаимно просты, то $| M |=| M \cap N |$ и $M \le N$. Второе утверждение доказано.

Если $\alpha \in \mathrm{Aut}G$, то $\alpha(N)$ — подгруппа, порядок которой равен порядку $N$. По доказанному имеем $\alpha(N) = N$ и $N\ charG$. □

**Следствие 9.12.** *Нормальная силовская подгруппа конечной группы является характеристической подгруппой.* □

**Центральные автоморфизмы.** Автоморфизм $\alpha$ группы $G$ называется *центральным* автоморфизмом, если $\alpha$ перестановочен с каждым внутренним автоморфизмом группы $G$, т.е. если $\alpha i_g = i_g \alpha$ для всех $g \in G$.





**Теорема 9.13.** *Автоморфизм $\alpha$ является центральным тогда и только тогда, когда $g^{-1}\alpha(g) \in Z(G)$ для всех $g \in G$.*

*Доказательство.* Пусть $\alpha$ — центральный автоморфизм группы $G$. Тогда $\alpha i_g = i_g \alpha$ для всех $g \in G$. Если $x$ — произвольный элемент группы $G$, то

$$\alpha i_g(x) = \alpha(gxg^{-1}) = \alpha(g)\alpha(x)\alpha(g)^{-1} = i_g\alpha(x) = g\alpha(x)g^{-1}.$$

Поэтому

$$g^{-1}\alpha(g)\alpha(x) = \alpha(x)g^{-1}\alpha(g)$$

и $g^{-1}\alpha(g) \in Z(G)$.

Обратно, пусть $\alpha$ — автоморфизм группы $G$ и пусть $g^{-1}\alpha(g) \in Z(G)$ для всех $g \in G$. Тогда для любого $x \in G$ имеем:

$$g^{-1}\alpha(g)\alpha(x) = \alpha(x)g^{-1}\alpha(g),$$

$$\alpha(g)\alpha(x)\alpha(g)^{-1} = g\alpha(x)g^{-1},$$

$$\alpha i_g(x) = i_g\alpha(x),$$

т.е. $\alpha$ — центральный автоморфизм. □

**Следствие 9.14.** *Группа с единичным центром не имеет нетождественных центральных автоморфизмов.* □

**Следствие 9.15.** *Если $Z(G) = E$, то $C_{AutG}InnG = E$.*

*Доказательство.* Множество центральных автоморфизмов группы $G$ совпадает с $C_{\mathrm{Aut}G}\mathrm{Inn}G = E$. Теперь утверждение вытекает из предыдущего следствия. □

## § 10. Эндоморфизмы и операторы

Гомоморфное отображение группы в себя называется *эндоморфизмом* группы. Таким образом, эндоморфизм $\varphi$ группы $G$ переводит элемент $x \in G$ в некоторый элемент $\varphi(x) \in G$, причем $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ для любых $x, y \in G$. Множество всех эндоморфизмов группы $G$ обозначают через $\mathrm{End}G$. Два эндоморфизма $\varphi$ и $\psi$ группы $G$ считаются равными если они одинаково действуют на элементах группы, т.е. если $\varphi(x) = \psi(x)$ для всех $x \in G$. Если эндоморфизмы $\varphi$ и $\psi$ различны, то существует элемент $y \in G$ такой, что $\varphi(y) \neq \psi(y)$.

Отображение $x \mapsto e$ для любого $x \in G$ является эндоморфизмом, здесь $e$ — единичный элемент группы $G$. Этот эндоморфизм называется *нулевым*. Эндоморфизм $x \mapsto x$ называют *единичным* или *тождественным*.

**Лемма 10.1.** *Множество $EndG$ всех эндоморфизмов группы $G$ с операцией*

$$\varphi\psi(x) = \varphi(\psi(x)), \quad \textit{для всех} \quad x \in G,$$

*является полугруппой с единичным элементом*

$$\varepsilon : x \mapsto x.$$

*Доказательство.* Пусть $\varphi$ и $\psi \in \mathrm{End}G$. Так как

$$\varphi\psi(xy) = \varphi(\psi(xy)) = \varphi(\psi(x)\psi(y)) =$$
$$= \varphi(\psi(x))\varphi(\psi(y)) = (\varphi\psi)(x)(\varphi\psi)(y),$$

то $\varphi\psi$ — эндоморфизм группы $G$. Поскольку умножение отображений ассоциативно, то $\mathrm{End}G$ — полугруппа. Далее, $\varphi\varepsilon(x) = \varphi(x)$ и $\varepsilon\varphi(x) = \varphi(x)$, поэтому $\varphi\varepsilon = \varepsilon\varphi = \varphi$ для всех $\varphi \in \mathrm{End}G$ и $\varepsilon$ — единичный элемент в полугруппе $\mathrm{End}G$. □





Понятие гомоморфизма, введённое для групп, распространяется и на полугруппы. Отображение $\varphi : P_1 \to P_2$ (мультипликативной) полугруппы $P_1$ в (мультипликативную) полугруппу $P_2$ называется *гомоморфизмом,* если $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ для всех $x, y \in P_1$. Если гомоморфизм $\varphi : P_1 \to P_2$ является биекцией, то он называется *изоморфизмом* полугрупп $P_1$ и $P_2$. Факт изоморфизма полугрупп $P_1$ и $P_2$ обозначают так: $P_1 \simeq P_2$.

**Эндоморфизмы и автоморфизмы циклических групп.** Обозначим через $(\mathbb{Z}, \cdot)$ мультипликативную полугруппу целых чисел, а через $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ — мультипликативную полугруппу классов вычетов по модулю $n$.

**Теорема 10.2.** *(1) Если $\langle g\rangle$ — бесконечная циклическая группа, то $End\langle g\rangle \simeq (\mathbb{Z}, \cdot)$.*

*(2) Если $\langle g\rangle$ — конечная циклическая группа порядка $n$, то $End\langle g\rangle \simeq (\mathbb{Z}_n, \cdot)$.*

*Доказательство.* По теореме 3.1, с. 29, циклическая подгруппа $\langle g\rangle$, порожденная элементом $g$, состоит из всевозможных целых степеней элемента $g$, т.е.

$$\langle g\rangle = \{g^i \mid i \in \mathbb{Z}\}.$$

Обозначим через $\varphi_k$, $k \in \mathbb{Z}$, эндоморфизм группы $\langle g\rangle$, для которого $g^i \mapsto g^{ik}$. Пусть $\varphi$ — произвольный эндоморфизм группы $\langle g\rangle$. Тогда $\varphi(g) \in \langle g\rangle$, поэтому $\varphi(g) = g^m$ для некоторого целого $m$. Если $g^i$ — произвольный элемент из $\langle g\rangle$, то

$$\varphi(g^i) = (\varphi(g))^i = g^{mi} \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi_m.$$

Таким образом, каждый эндоморфизм группы $\langle g\rangle$ имеет вид $\varphi_k : g^i \mapsto g^{ik}$, где $k \in \mathbb{Z}$, поэтому

$$\mathrm{End}\langle g\rangle = \{\varphi_k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Так как

$$(\varphi_s\varphi_t)g^i = \varphi_s(\varphi_t(g^i)) = \varphi_s(g^{ti}) = g^{sti} = \varphi_{st}(g^i),$$

то $\varphi_s\varphi_t = \varphi_{st}$ и отображение $\alpha : k \mapsto \varphi_k$ будет эпиморфизмом полугруппы $(\mathbb{Z}, \cdot)$ на полугруппу $\mathrm{End}\langle g\rangle$.

(1) Пусть $\langle g\rangle$ — бесконечная группа. Тогда $g^s \neq g^t$ при $s \neq t$, поэтому $\varphi_s \neq \varphi_t$ и отображение $\alpha : k \mapsto \varphi_k$ будет изоморфизмом полугрупп $(\mathbb{Z}, \cdot)$ и $\mathrm{End}\langle g\rangle$.

(2) Пусть $\langle g\rangle$ — конечная группа порядка $n$. Тогда

$$\langle g\rangle = \{g^0 = e, g, g^2, \dots , g^{n-1}\}$$

по теореме 3.3, с. 30. Если $\varphi_s = \varphi_t$, то

$$\varphi_s(g) = g^s = \varphi_t(g) = g^t, \ \ g^{s-t} = e$$

и $s - t$ делится на $n$ по теореме 3.3, с. 30. Поэтому отображение

$$\beta : \overline{k} \mapsto \varphi_k, \quad \overline{k} = k + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_n,$$

будет изоморфизмом полугрупп $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ и $\mathrm{End}\langle g\rangle$. □

**Теорема 10.3.** *(1) Если $\langle g\rangle$ — бесконечная циклическая группа, то $Aut\langle g\rangle$ — группа порядка 2.*

*(2) Если $\langle g\rangle$ — конечная циклическая группа порядка $n$, то $Aut\langle g\rangle$ изоморфна группе всех обратимых элементов полугруппы $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$.*

*(3) Группа автоморфизмов циклической группы абелева.*

*(4) Группа автоморфизмов группы простого порядка $p$ является циклической группой порядка $p - 1$.*





*Доказательство.* (1) Из всех эндоморфизмов $\varphi_k$ бесконечной циклической группы $\langle g\rangle$ только два эндоморфизма

$$\varphi_1 : g \mapsto g; \quad \varphi_{-1} : g \mapsto g^{-1}$$

будут автоморфизмами.

(2) Пусть $X$ — множество всех обратимых элементов полугруппы $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$. Если $\varphi \in \mathrm{Aut}\langle g\rangle$, то $\varphi$ — обратимый элемент, поэтому $\varphi \in X$. Если $\psi \in X$, то $\psi$ — биекция, поэтому $\psi \in \mathrm{Aut}\langle g\rangle$ и $\mathrm{Aut}\langle g\rangle = X$.

(3) Так как $(\mathbb{Z}, \cdot)$ и $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ — абелевы полугруппы, то в обоих случаях группа $\mathrm{Aut}\langle g\rangle$ абелева.

(4) Если $p$ — простое число, то кольцо классов вычетов $\mathbb{Z}_p$ является полем, поэтому его мультипликативная группа $(\mathbb{Z}_p^{\#}, \cdot)$ циклическая порядка $(p - 1)$. По (2) $\mathrm{Aut}\langle g\rangle \simeq (\mathbb{Z}_p^{\#}, \cdot)$. □

**Операторы.** Пусть даны группа $G$, множество $\Omega$ и отображение $f : \Omega \to \mathrm{End}G$, переводящее элемент $\alpha \in \Omega$ в элемент $f(\alpha) \in \mathrm{End}G$. Так как $f(\alpha)$ — эндоморфизм группы $G$, то каждый элемент $x \in G$ под действием эндоморфизма $f(\alpha)$ перейдет в элемент $f(\alpha)(x) \in G$. Условимся вместо $f(\alpha)(x)$ писать $\alpha(x)$. Ясно, что $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ для всех $x, y \in G$.

В этой ситуации множество $\Omega$ называют *областью операторов* группы $G$, элементы из $\Omega$ — *операторами* группы $G$, а саму группу $G$ — $\Omega-$*группой* или *группой с областью операторов* $\Omega$. Операторы действуют на группе $G$ также, как и соответствующие им эндоморфизмы. Заметим, что различные операторы могут не отличаться по действию на группе $G$, поскольку им может соответствовать один и тот же эндоморфизм.

Если $H$ — подмножество группы $G$ и $\alpha \in \Omega$, то

$$\alpha(H) = \{\alpha(h) \mid h \in H\}$$

— *образ* множества $H$ под действием оператора $\alpha$. Очевидно, что если $H$ — подгруппа группы $G$, то и $\alpha(H)$ — подгруппа.

Подгруппа $H$ называется $\Omega-$*допустимой* или просто $\Omega-$*подгруппой,* если $\alpha(H) \subseteq H$ для всех $\alpha \in \Omega$. Ясно, что пересечение $\Omega-$подгрупп $\Omega-$группы вновь является $\Omega-$подгруппой. Если $H$ — $\Omega-$подгруппа и $\alpha \in \Omega$, то ограничение $f(\alpha)|_H$ эндоморфизма $f(\alpha)$ на подгруппе $H$ является эндоморфизмом подгруппы $H$, т.е. $f(\alpha)|_H \in \mathrm{End}H$. Это позволяет считать $\Omega$ областью операторов любой $\Omega-$подгруппы группы $G$.

**Пример 10.4.** Пусть $\Omega$ — непустое множество и отображение $f : \Omega \to \mathrm{End}G$ действует так: $f(\alpha) = \varepsilon$, где $\varepsilon : g \mapsto g$ — тождественный эндоморфизм группы $G$. В этой ситуации $f(\Omega) = \langle\varepsilon\rangle$ — единичная подгруппа в $\mathrm{Aut}G \leq \mathrm{End}G$ и $\alpha(g) = f(\alpha)(g) = \varepsilon(g) = g$. Поэтому каждая подгруппа группы $G$ будет $\Omega-$допустимой. □

**Пример 10.5.** Пусть $A$ — непустое подмножество группы $G$. Превратим $A$ в область операторов группы $G$ с помощью отображения $f : a \mapsto i_a,\ a \in A$. Здесь $i_a : g \mapsto aga^{-1}$ — внутренний автоморфизм группы $G$, порожденный элементом $a$. Таким образом, $f(A) \subseteq \mathrm{Inn}G \leq \mathrm{End}G$. Если $H$ — $A-$допустимая подгруппа из группы $G$, то $aHa^{-1} \subseteq H$ для всех $a \in A$, т.е. $a \in N_G(H)$. Таким образом, $A-$допустимыми подгруппами будут те подгруппы $X$ из группы $G$, для которых $A \subseteq N_G(X)$. При $A = Z(G)$ все подгруппы будут $Z(G)-$допустимыми. □





**Пример 10.6.** Положим в предыдущем примере $A = G$. Тогда $f(G) = \mathrm{Inn}G \leq \mathrm{End}G$. Поэтому $G-$допустимыми подгруппами будут нормальные подгруппы и только они. □

**Пример 10.7.** Если в качестве $\Omega$ взять группу $\mathrm{Aut}G$ всех автоморфизмов группы $G$, то $\mathrm{Aut}G-$допустимыми подгруппами будут характеристические подгруппы и только они. □

Если $H$ — $\Omega-$подгруппа группы $G$ и $H \lhd G$, то факторгруппа $G/H$ становится $\Omega-$группой, если положить $\alpha(gH) = \alpha(g)H$ для $g \in G$ и $\alpha \in \Omega$. $\Omega-$аналогом теоремы 6.10, с. 67, является следующая

**Теорема 10.8.** *Пусть $H$ — нормальная $\Omega-$подгруппа $\Omega-$группы $G$. Тогда:*

*(1) если $U$ — $\Omega-$подгруппа и $H \leq U$, то $U/H$ — $\Omega-$подгруппа факторгруппы $G/H$;*

*(2) каждая $\Omega-$подгруппа факторгруппы $G/H$ имеет вид $V/H$, где $V$ — $\Omega-$подгруппа группы $G$ и $H \leq V$.*
□

Пусть $G$ — неединичная группа с областью операторов $\Omega$. Если в группе $G$ нет $\Omega-$допустимых нетривиальных нормальных подгрупп (т.е. отличных от единичной подгруппы и всей группы), то группа $G$ называется $\Omega-$простой. $\Omega-$аналогом теоремы 6.12, с. 70, является следующая

**Теорема 10.9.** *(1) Если $H$ — максимальная нормальная $\Omega-$подгруппа неединичной $\Omega-$группы $G$, то факторгруппа $G/H$ является $\Omega-$простой группой.*

*(2) Если $H$ — нормальная $\Omega-$подгруппа $\Omega-$группы $G$ и факторгруппа $G/H$ $\Omega-$простая, то $H$ — максимальная нормальная $\Omega-$подгруппа $\Omega-$группы $G$.* □

Пусть $G$ и $\Gamma$ — группы с одной и той же областью операторов $\Omega$. Гомоморфизм $\varphi : G \to \Gamma$ называется $\Omega-$*гомоморфизмом*, если

$$\alpha(\varphi(g)) = \varphi(\alpha(g)) \qquad <1>$$

для всех $g \in G,\ \alpha \in \Omega$.

**Лемма 10.10.** *Пусть $G$ и $\Gamma$ — группы с одной и той же областью операторов $\Omega$ и $\varphi : G \to \Gamma$ $\Omega-$гомоморфизм. Тогда:*

*(1) ядро*

$$Ker\varphi = \{x \in G \mid \varphi(x) = \varepsilon\},$$

*где $\varepsilon$ — единица группы $\Gamma$, является нормальной $\Omega-$подгруппой группы $G$;*

*(2) образ $\varphi(H)$ любой $\Omega-$подгруппы $H$ из $G$ является $\Omega-$подгруппой группы $\Gamma$;*

*(3) образ*

$$Im\varphi = \varphi(G) = \{\varphi(g) \mid g \in G,\}$$

*$\Omega-$гомоморфизма $\varphi$ является $\Omega-$подгруппой группы $\Gamma$.*

*Доказательство.* Элементарная проверка. □

$\Omega-$гомоморфизм $\varphi : G \to \Gamma$ называется:

$\Omega-$*эпиморфизмом*, если $\mathrm{Im}\varphi = \Gamma$;

$\Omega-$*мономорфизмом*, если $\mathrm{Ker}\varphi = E$;

$\Omega-$*изоморфизмом*, если $\varphi$ является одновременно $\Omega-$эпиморфизмом и $\Omega-$мономорфизмом. В этом случае говорят, что группы $G$ и $\Gamma$ $\Omega-$изоморфны и пишут $G \simeq_\Omega \Gamma$. Обратим внимание на то, что если $\varphi : G \to \Gamma$ есть $\Omega-$мономорфизм, то $\varphi : G \to \mathrm{Im}\varphi$ $\Omega-$изоморфизм.





**Теорема 10.11.** *При любом $\Omega-$гомоморфизме $\varphi : G \to \Gamma$ группы $G/Ker\varphi$ и $Im\varphi$ $\Omega-$изоморфны.*

*Доказательство.* По теореме 8.3, с. 87, отображение

$$f : g\mathrm{Ker}\varphi \mapsto \varphi(g)$$

является изоморфизмом группы $G/\mathrm{Ker}\varphi$ и группы $\mathrm{Im}\varphi$. Надо только проверить выполнимость равенства <1> для отображения $f$. Если $\alpha \in \Omega$, то

$$f(\alpha(g\mathrm{Ker}\varphi)) = f(\alpha(g)\mathrm{Ker}\varphi) =$$

$$= \varphi(\alpha(g)) = \alpha(\varphi(g)) = \alpha(f(g\mathrm{Ker}\varphi)).$$

□

**Теорема 10.12.** *Если $N$ и $H$ — нормальные $\Omega-$подгруппы $\Omega-$группы $G$, причем $H \le N$, то $N/H$ — нормальная $\Omega-$подгруппа факторгруппы $G/H$ и имеет место $\Omega-$изоморфизм*

$$(G/H)/(N/H) \simeq_\Omega G/N.$$

*Доказательство.* Из теоремы 10.8 вытекает, что $N/H$ — нормальная $\Omega-$подгруппа $\Omega-$факторгруппы $G/H$. По теореме 8.5, с. 89, отображение $\varphi : G/H \to G/N$, определяемое равенством $\varphi(gH) = gN$, является эпиморфизмом. Так как

$$\varphi(\alpha(gH)) = \varphi(\alpha(g)H) = \alpha(g)N = \alpha(gN) = \alpha(\varphi(gH)),$$

то $\varphi$ — $\Omega-$эпиморфизм. Если $gH \in \mathrm{Ker}\varphi$, то $\varphi(gH) = gN = N$ и $g \in N$, поэтому $\mathrm{Ker}\varphi = N/H$. По теореме 10.11 группы $G/H/N/H$ и $G/N$ $\Omega-$изоморфны. □

**Теорема 10.13.** *Пусть $H$ — нормальная $\Omega-$подгруппа $\Omega-$группы $G$. Тогда для любой $\Omega-$подгруппы $A$ пересечение $A \cap H$ является нормальной $\Omega-$подгруппой в подгруппе $A$, а отображение*

$$\varphi : aH \mapsto a(A \cap H)$$

*является $\Omega-$изоморфизмом $\Omega-$групп $AH/H$ и $A/A \cap H$.*

*Доказательство.* Ввиду теоремы 8.4, с. 88, надо только проверить выполнимость равенства <1> для отображения $\varphi$. Если $\alpha \in \Omega$, то

$$\alpha(\varphi(aH)) = \alpha(a(A \cap H)) =$$

$$(\alpha(a))(A \cap H) = \varphi(\alpha(a)H) = \varphi(\alpha(aH)).$$

$\square$

## § 11. Композиционные ряды

Цепочка подгрупп

$$E = A_0 < A_1 < \ldots < A_{i-1} < A_i \ldots < A_{a-1} < A_a = G$$

называется *рядом* длины $a$ неединичной группы $G$ и обозначается через $(A_i)_{i=0,\ldots,a}$.

Ряд $(A_i)_{i=0,\ldots,a}$ называется

*нормальным*, если $A_i \lhd G$ для всех $i$;

*субнормальным*, если $A_{i-1} \lhd A_i$ для всех $i$.

Ясно, что каждый нормальный ряд является субнормальным.

Пусть $(A_i)_{i=0,\ldots,a}$ — субнормальный ряд конечной группы $G$. Факторгруппы $A_i/A_{i-1},\ i = 1,\ldots,a$ называются *факторами* ряда, числа $|A_i/A_{i-1}|$ — индексами ряда.





Нормальный ряд $(A_i)_{i=0,\ldots,a}$ конечной группы $G$ называется *главным*, если подгруппа $A_{i-1}$ является максимальной нормальной подгруппой группы $G$, содержащейся в $A_i,\ i = 1,\ldots,a$. Ясно, что в этом случае *главный* фактор $A_i/A_{i-1}$ является минимальной нормальной подгруппой группы $G/A_{i-1}$ для каждого $i = 1,\ldots,a$.

Субнормальный ряд $(A_i)_{i=0,\ldots,a}$ конечной группы $G$ называется *композиционным*, если подгруппа $A_{i-1}$ является максимальной нормальной подгруппой в $A_i,\ i = 1,\ldots,a$. *Композиционные* факторы $A_i/A_{i-1}$ по теореме 6.12, с. 70, являются простыми группами.

Ряд $E = E$ считается композиционным и главным рядом единичной группы $E$, а число 0 — длиной этого ряда.

**Пример 11.1.** Пусть $G$ — группа порядка $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_k^{a_k}$ и $(A_i)_{i=0,\ldots,a}$ — ее композиционный ряд. Предположим, что все композиционные факторы $A_i/A_{i-1}$ абелевы. Тогда по теореме 5.6, с. 48, все композиционные факторы имеют простые порядки. Поэтому число композиционных факторов порядка $p_i$ равно $a_i$, $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ и $|G| = \prod_{i=1}^{a} |A_i/A_{i-1}|$. $\square$

Пусть $G$ — конечная группа с областью операторов $\Omega$. Ряд $(A_i)_{i=0,\ldots,a}$, состоящий из $\Omega-$подгрупп, называется $\Omega-$*рядом*. Субнормальный $\Omega-$ряд $(A_i)_{i=0,\ldots,a}$ называется $\Omega-$*композиционным*, если $A_{i-1}$ является максимальной нормальной $\Omega-$допустимой подгруппой в $A_i,\ i = 1,\ldots,a$. Ясно, что $\Omega-$композиционные факторы $A_i/A_{i-1}$ по теореме 10.9 являются $\Omega-$простыми группами.

**Пример 11.2.** Пусть $\Omega = \langle\varepsilon\rangle$ — единичная подгруппа в $\mathrm{Aut}G$, см. пример 10.4. Тогда $\Omega-$композиционный ряд является композиционным рядом конечной группы $G$. $\square$

**Пример 11.3.** Если $\Omega = G$, то $G$−допустимые подгруппы группы $G$ — это в точности её нормальные подгруппы, см. пример 10.6. Поэтому $G$−композиционный ряд будет главным рядом группы $G$. □

**Пример 11.4.** Если $\Omega = \mathrm{Aut}G$, то $\mathrm{Aut}G$−допустимые подгруппы группы $G$ — это в точности её характеристические подгруппы, см. пример 10.7. Поэтому $\mathrm{Aut}G$−композиционный ряд состоит из характеристических подгрупп и $\mathrm{Aut}G$−композиционные факторы являются $\mathrm{Aut}G$−простыми группами. □

Пусть $G$ — конечная $\Omega$−группа. Будем говорить, что *два $\Omega$−композиционных ряда* $(A_i)_{i=0,1,...,a}$ и $(B_i)_{i=0,1,...,b}$ *группы $G$ изоморфны*, если $a = b$ и существует биекция

$$\tau : \{A_i/A_{i-1} \mid i = 1, ..., a\} \ \to \ \{B_i/B_{i-1} \mid i = 1, ..., b\}$$

такая, что $\tau(A_i/A_{i-1}) \simeq_\Omega A_i/A_{i-1}$.

**Теорема 11.5.** (Жордан, Гельдер) *Любые два $\Omega$−композиционных ряда конечной $\Omega$−группы $G$ изоморфны.*

*Доказательство.* Применим индукцию к порядку группы. Пусть $(A_i)_{i=0,1,...,a}$ и $(B_i)_{i=0,1,...,b}$ — два $\Omega$−композиционных ряда $\Omega$−группы $G$. Ясно, что $G \neq 1$. Тогда $N = B_{b-1}$ — максимальная нормальная $\Omega$−подгруппа $\Omega$−группы $G$, поэтому $A_i \leq N$ или $A_iN = G$ для всех $i = 0, ..., a$. Положим $A_i^* = A_i \cap N$ и зафиксируем наибольшее $j$ для которого $A_j \leq N$. Тогда

$$A_j^* = A_j \lhd A_{j+1}^* < A_{j+1}.$$

Поскольку $A_{j+1}/A_j$ — $\Omega$−простая группа, то $A_j^* = A_j = A_{j+1}^*$ и

$$G/N = A_{j+1}N/N \simeq_\Omega A_{j+1}/A_{j+1} \cap N = A_{j+1}/A_j. \quad <1>$$





Для $k \geq j+2$ имеем

$$A_k^* \cap A_{k-1} = A_k \cap N \cap A_{k-1} = A_{k-1}^* \text{ и}$$

$$A_k^*/A_{k-1}^* \simeq_\Omega A_k^*A_{k-1}/A_{k-1} \lhd A_k/A_{k-1}.$$

Поскольку $A_k/A_{k-1}$ — $\Omega$−простая группа, то

$$A_k^*/A_{k-1}^* \simeq_\Omega A_k/A_{k-1} \text{ или } A_k^*/A_{k-1}^* = 1.$$

Если $A_k^*/A_{k-1}^* = 1$, то из равенств $NA_k = NA_{k-1} = G$ получаем:

$$G/N = NA_k/N \simeq_\Omega A_k/A_k \cap N = A_k/A_k^*;$$

$$G/N = NA_{k-1}/N \simeq_\Omega A_{k-1}/A_{k-1} \cap N = A_{k-1}/A_{k-1}^*,$$

что приводит к равенству $A_k = A_{k-1}$, противоречие. Поэтому

$$A_k^*/A_{k-1}^* \simeq_\Omega A_k/A_{k-1} \text{ при } k \geq j+2. \qquad <2>$$

Теперь

$$1 = A_0^* < ... < A_j^* < A_{j+2}^* < ... < A_k^* = N,$$

$$1 = B_0 < ... < B_{b-1} = N$$

— два $\Omega$−композиционных ряда $\Omega$−группы $N$. По индукции $a-1 = b-1$ и существует биекция

$$\tau^* : \{A_i^*/A_{i-1}^* \mid i = 1, ..., j, j+2, ..., a\} \to \{B_i/B_{i-1} \mid i = 1, ..., b-1\}$$

такая, что

$$\tau^*(A_i^*/A_{i-1}^*) \simeq_\Omega B_i/B_{i-1}.$$

Ввиду <2>

$$\tau^*(A_i/A_{i-1}) \simeq_\Omega B_i/B_{i-1}, \ i \neq j+1,$$

а из <1> следует, что

$$G/N = G/B_{b-1} \simeq_\Omega A_{j+1}/A_j.$$

□

В случае, когда $\Omega = \langle\varepsilon\rangle$ — единичная подгруппа в Aut$G$, см. пример 11.2, получаем

**Следствие 11.6.** *Любые два композиционных ряда конечной группы $G$ изоморфны.* □

В случае, когда $\Omega = G$, см. пример 11.3, получаем

**Следствие 11.7.** *Любые два главных ряда конечной группы $G$ изоморфны.* □

**Лемма 11.8.** *Пусть $H$ и $K \lhd G$ и $K \leq H$. Тогда*

$$C_G(H/K) = \langle g \in G \mid g^{-1}h^{-1}gh \in K,\ h \in H\rangle$$

*является нормальной подгруппой группы $G$ и факторгруппа $G/C_G(H/K)$ изоморфна подгруппе группы $Aut(H/K)$.*

*Доказательство.* Для каждого $g \in G$ зададим отображение

$$\gamma_g : Kh \mapsto Kghg^{-1}.$$

Если $Kghg^{-1} = Kgfg^{-1}$ для некоторых $h$ и $f \in H$, то $gh(gf)^{-1} \in K$, а так как $K \lhd G$, то $hf^{-1} \in K$, поэтому $Kh = Kf$. Значит $\gamma_g$ — биекция $H/K$ на себя. Так как для любых $a, b \in G$

$$\gamma_a\gamma_b(Kh) = \gamma_a(Kbhb^{-1}) = Kabhb^{-1}a^{-1} = \gamma_{ab}(Kh),$$





то $\gamma_{ab} = \gamma_a\gamma_b$ и $\gamma_g \in \mathrm{Aut}(H/K)$. Рассмотрим отображение $\delta : G \to \mathrm{Aut}(H/K)$, при котором $\delta(g) = \gamma_g$. Поскольку

$$\delta(ab) = \gamma_{ab} = \gamma_a\gamma_b = \delta(a)\delta(b),$$

то $\delta$ — гомоморфизм группы $G$ в $\mathrm{Aut}(H/K)$ с ядром

$$\mathrm{Ker}\delta = \{g \in G \mid \gamma_g : Kh \mapsto Kghg^{-1} = Kh\} =$$

$$= \{g \in G \mid ghg^{-1}h^{-1} \in K\} = C_G(H/K).$$

По основной теореме о гомоморфизмах $G/C_G(H/K)$ изоморфна подгруппе из $\mathrm{Aut}(H/K)$. □

Введем обозначение:

$$\mathrm{Aut}_G(H/K) = \{\gamma_g \mid g \in G\},$$

где $\gamma_g : Kh \mapsto Kghg^{-1}$. Тогда $\mathrm{Aut}_G(H/K) = \mathrm{Im}\delta$ и лемма 11.8 утверждает, что

$$G/C_G(H/K) \simeq \mathrm{Aut}_G(H/K).$$

Если $K \lhd G$, $H \lhd G$, $K \leq H$ и $H/K$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G/K$, то $H/K$ называют *главным фактором* конечной группы $G$. Ясно, что в этом случае имеется главный ряд конечной группы $G$, членами которого будут подгруппы $K$ и $H$. Если $|H/K|$ есть степень простого числа $p$, то фактор $H/K$ называют *$p$—главным фактором* группы $G$.

**Следствие 11.9.** *(1) Если $H/K$ — главный фактор конечной группы $G$, то $C_G(H/K) \lhd G$ и $G/C_G(H/K) \simeq Aut_G(H/K)$.*

*(2) Если $H/K$ — главный фактор порядка $p$ конечной группы $G$, то $G/C_G(H/K)$ — циклическая группа порядка, делящего $(p-1)$.*

*Доказательство.* (1) следует из леммы 11.8.

(2) По теоремы 10.3, с. 101, группа автоморфизмов группы простого порядка $p$ является циклической группой порядка $(p-1)$. Поэтому, если $H/K$ — $p$−главный фактор группы $G$ порядка $p$, то $G/C_G(H/K)$ — циклическая группа порядка, делящего $(p-1)$. □

## § 12. Прямые произведения

Пусть $G$ — группа, $A$ и $B$ — ее подгруппы. Напомним, что произведение $AB$ определяется как множество элементов $ab$, где $a \in A$, $b \in B$. Если $AB = G$, то говорят, что группа $G$ является *произведением* своих подгрупп $A$ и $B$. В этом случае каждый элемент $g \in G$ представим в виде $g = ab$, где $a \in A$, $b \in B$.

Произведение $G = AB$ называется *прямым*, если подгруппы $A$ и $B$ нормальны в $G$ и $A \cap B = E$. Прямое произведение обозначают так: $G = A \times B$. Итак, группа $G$ является *прямым произведением* своих подгрупп, если выполняются следующие требования:

$$G = AB; \quad A \cap B = E; \quad A \lhd G, \ B \lhd G.$$

**Теорема 12.1.** *Пусть группа $G$ является прямым произведением своих подгрупп $A$ и $B$. Тогда:*

*(1) каждый элемент $g \in G$ единственным образом представим в виде $g = ab$, где $a \in A$, $b \in B$;*

*(2) каждый элемент подгруппы $A$ перестановочен с каждым элементом подгруппы $B$.*

*Обратно, если выполняются требования (1) и (2), то $A \cap B = E$, подгруппы $A$ и $B$ нормальны в $G$, и $G = A \times B$.*





*Доказательство.* (1) Из равенства $G = AB$ следует, что каждый элемент $g \in G$ записывается в виде $g = ab$, где $a \in A$, $b \in B$. Если имеет место другая запись $g = a_1b_1$, $a_1 \in A$, $b_1 \in B$, то $ab = a_1b_1$, откуда $a^{-1}a_1 = bb_1^{-1} \in A \cap B = E$. Поэтому $a = a_1$, $b = b_1$ и каждый элемент $g \in G$ однозначно записывается в виде $g = ab$.

(2) Рассмотрим произведение $g = a^{-1}b^{-1}ab$. Так как $A \lhd G$, то $b^{-1}ab \in A$ и $g \in A$. Так как $B \lhd G$, то $a^{-1}b^{-1}a \in B$ и $g \in B$. Но $A \cap B = E$, поэтому $a^{-1}b^{-1}ab = e$ и $ab = ba$. Итак, каждый элемент из $A$ перестановочен с каждым элементом из $B$.

Пусть теперь выполняются требования (1) и (2). Из (1) следует, что $G = AB$. Элемент $d \in A \cap B$ можно записать в виде $d = ed$, где $e \in A$, $d \in B$, и в виде $d = de$, где $d \in A$, $e \in B$. Из однозначности представления элементов следует, что $d = e$, т.е. $A \cap B = E$.

Из (2) вытекает, что $A$ и $B$ — нормальные подгруппы. Итак, все требования прямого произведения выполняются, поэтому $G = A \times B$. □

Теорема 12.1 позволяет дать следующее определение прямого произведения, эквивалентное начальному.

Группа $G$ является *прямым произведением* своих подгрупп $A$ и $B$, если:

— каждый элемент $g \in G$ единственным образом представим в виде $g = ab$, где $a \in A$, $b \in B$;

— каждый элемент подгруппы $A$ перестановочен с каждым элементом подгруппы $B$.

Определение прямого произведения сформулировано для двух подгрупп. Для большего числа сомножителей определение выглядит так.

Группа $G$ является *прямым произведением* своих подгрупп $A_1, A_2, \dots, A_n$, если выполняются следующие требования:

$$G = A_1A_2 \dots A_n; \quad A_i \cap A_1 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_n = E;$$

$$A_i \lhd G; \quad i = 1, \dots, n.$$

В этом случае пишут

$$G = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \bigotimes_{i=1}^{n} A_i.$$

Это определение можно заменить следующим, ему эквивалентным. Группа $G$ является *прямым произведением* своих подгрупп $A_1, A_2, \dots, A_n$, если:

— каждый элемент $g \in G$ единственным образом представим в виде $g = a_1a_2 \dots a_n$, где $a_i \in A_i$, $i = 1, 2, \dots, n$;

— элементы из любых двух подгрупп $A_i$ и $A_j$, $i \neq j$, перестановочны между собой.

Приведем свойства прямых произведений. Утверждения следующей леммы непосредственно вытекают из определений прямых произведений.

**Лемма 12.2.** *(1) Если $G = A \times B$,*

$$A = A_1 \times \dots \times A_k, \ B = A_{k+1} \times \dots \times A_n,$$

$$\textit{то} \quad G = A \times \dots \times A_k \times A_{k+1} \times \dots \times A_n.$$

*(2) Если $G = A_1 \times \dots \times A_n$, то $G = A \times B$, где*

$$A = A_1 \times \dots \times A_l, \ B = A_{l+1} \times \dots \times A_n$$

*для любого $l = 1, 2, \dots, n-1$.* □





**Лемма 12.3.** *(1) Если*

$$G = A \times B, \quad A_1 \leq A, \quad B_1 \leq B,$$

*то $A_1B_1 = A_1 \times B_1$.*

*(2) Если $G = A \times B$ и $A \leq H \leq G$, то $H = A \times (H \cap B)$.*

*(3) Если $G = A \times B$, $X \subseteq A$, то*

$$C_G(X) = C_A(X) \times B, \quad N_G(X) = N_A(X) \times B.$$

*(4) Если $G = A \times B$ и $A_1 \lhd A$, то $A_1 \lhd G$.*

*(5) Если $G = A \times B$, то $Z(G) = Z(A) \times Z(B)$.*

*Доказательство.* (1) Из теоремы 12.1 следует, что подгруппы $A_1$ и $B_1$ перестановочны, поэтому $A_1B_1$ — подгруппа группы $G$ по теореме 5.9, с. 52. Ясно, что $A_1 \cap B_1 \leq A \cap B = E$. Кроме того, $A_1$ и $B_1$ нормальны в $A_1B_1$, следовательно, $A_1B_1 = A_1 \times B_1$.

(2) По тождеству Дедекинда имеем, что $H = A(H \cap B)$. Остается применить (1).

(3) Из теоремы 12.1 следует, что элементы из $A$ перестановочны с элементами из $B$, поэтому $B \leq C_G(X)$ и

$$C_G(X) = (C_G(X) \cap A) \times B = C_A(X) \times B$$

по (2). Аналогично, $B \leq N_G(X)$ и

$$N_G(X) = (N_G(X) \cap A) \times B = N_A(X) \times B.$$

(4) Если $G = A \times B$ и $A_1 \lhd A$, то $N_G(A_1) \geq A$ и $A_1 \lhd G$ по (3).

(5) Ясно, что

$$Z(A)Z(B) = Z(A) \times Z(B) \leq Z(G).$$

Пусть $z = ab$ — произвольный элемент из $Z(G)$, $a \in A, b \in B$. Если $x \in A$, то

$$xa = xzb^{-1} = zb^{-1}x = ax$$

и $a \in Z(A)$. Если $y \in B$, то

$$yb = ya^{-1}z = a^{-1}zy = by$$

и $b \in Z(B)$. Таким образом, $z \in Z(A)Z(B)$ и $Z(G) \leq Z(A)Z(B)$. Поэтому, $Z(G) = Z(A) \times Z(B)$. □

**Лемма 12.4.** *Если $G = A \times B$, то $G/A \simeq B$.*

*Доказательство.* По теореме 12.1 каждый элемент группы $G$ однозначно представим в виде $ab$, $a \in A$, $b \in B$. Поэтому $\varphi : ab \mapsto b$ будет отображением группы $G$ в группу $B$. Так как

$$\varphi(a_1b_1a_2b_2) = \varphi(a_1a_2b_1b_2) = b_1b_2 = \varphi(a_1b_1)\varphi(a_2b_2),$$

то $\varphi$ — гомоморфизм. Ясно, что $\varphi$ — сюръекция, поэтому $\mathrm{Im}\varphi = B$. Если $ab \in \mathrm{Ker}\varphi$, то $e = \varphi(ab) = b$ и $\mathrm{Ker}\varphi = A$. По основной теореме о гомоморфизме $G/A$ изоморфна $B$. □

**Теорема 12.5.** *Если $G = A \times B_1 = A \times B_2$, то существует центральный автоморфизм $f$ группы $G$ такой, что $f(B_1) = B_2$.*

*Доказательство.* По теореме об изоморфизме, см. теорему 8.4, с. 88, отображение

$$\alpha_i : b_i \mapsto b_iA, \quad b_i \in B_i, \ i = 1, 2,$$

является изоморфизмом группы $B_i$ на факторгруппу $G/A$. Поэтому произведение $\alpha = \alpha_2^{-1}\alpha_1$ является изоморфизмом группы $B_1$ на $B_2$. Для каждого $b \in B_1$ по построению





изоморфизмов имеем: $bA = \alpha(b)A$, поэтому $b^{-1}\alpha(b) \in A$. Если $a$ — произвольный элемент группы $A$, то $B_1$ и $B_2$ централизует $a$, поэтому

$$b^{-1}\alpha(b) \in Z(A) \leq Z(G).$$

Таким образом, $b^{-1}\alpha(b) \in Z(G)$ для всех $b \in B_1$. Так как каждый элемент $x \in G$ единственным образом представим в виде $x = ab$, где $a \in A$, $b \in B_1$, то соответствие $f : x \mapsto a\alpha(b)$ будет автоморфизмом группы $G$. Кроме того,

$$x^{-1}f(x) = b^{-1}a^{-1}a\alpha(b) = b^{-1}\alpha(b) \in Z(G),$$

т.е. $f$ — центральный автоморфизм группы $G$ по теореме 9.13, с. 98. Но действие $f$ на $B_1$ совпадает с изоморфизмом $\alpha$ группы $B_1$ на группу $B_2$, поэтому $f(B_1) = B_2$. □

С учетом следствия 9.14, с. 98, получаем

**Следствие 12.6.** *Если $G = A \times B_1 = A \times B_2$ и $Z(G) = 1$, то $B_1 = B_2$.* □

**Следствие 12.7.** *Если $G = A \times B$, $A$ и $B$ — простые неабелевы подгруппы, то $E$, $A$, $B$ и $G$ — все нормальные подгруппы группы $G$.*

*Доказательство.* Пусть $C$ — нормальная подгруппа группы $G$ и $C \notin \{E, A, B, G\}$. Так как $A$ и $B$ — простые группы, то $A \cap C = B \cap C = 1$. Теперь $CA/A \simeq C$ и изоморфна нормальной подгруппе факторгруппы $G/A \simeq B$. Поэтому, $C \simeq B$ и $G = A \times C$. Применяя следствие 12.6, получаем, что $C = B$. Противоречие. □

**Теорема 12.8.** *Пусть*

$$G = \bigotimes_{i=1}^{n} G_i,$$

*$G_i$ — неабелева простая группа для всех $i$ и $E \neq N \lhd G$. Тогда существует подмножество $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ такое, что*

$$N = \bigotimes_{j \in J} G_j.$$

*Доказательство.* Применим индукцию по $n$. Предположим, что $N \cap G_i = E$ для всех $i$. Тогда $NG_i = N \times G_i$ и $N \leq Z(G)$ по теореме 12.1. По лемме 12.3

$$Z(G) = \bigotimes_{i=1}^{n} Z(G_i),$$

а поскольку подгруппы $G_i$ простые неабелевы, то $Z(G) = E$ и $N = E$, противоречие. Следовательно, без ущерба для доказательства можно считать, что $N \cap G_1 \neq E$. Так как $N \cap G_1 \lhd G_1$, то $G_1 \leq N$ и по лемме 12.3

$$N = G_1 \times (N \cap \bigotimes_{i=2}^{n} G_i).$$

Применим индукцию к группе $\bigotimes_{i=2}^{n} G_i$ и ее нормальной подгруппе

$$K = N \cap \bigotimes_{i=2}^{n} G_i.$$

По индукции существует подмножество $J_1 \subseteq \{2, \dots, n\}$ такое, что

$$K = \bigotimes_{j \in J_1} G_j.$$





Теперь

$$N = G_1 \times K = \bigotimes_{j \in J} G_j,$$

где $J = J_1 \cup \{1\}$. □

**Внешнее прямое произведение.** Пусть теперь $G_1$ и $G_2$ — произвольные группы. На множестве

$$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) \mid g_1 \in G_1,\ g_2 \in G_2\}$$

определим операцию (умножение) следующим образом:

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2),$$

где $g_i, h_i \in G_i$. Множество $G_1 \times G_2$ превращается в группу с единичным элементом $(e_1, e_2)$, где $e_i$ — единичный элемент группы $G_i$, и обратным элементом

$$(g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1}).$$

Группу $G_1 \times G_2$ называют *внешним прямым произведением групп* $G_1$, $G_2$.

В группе $G = G_1 \times G_2$ имеются две подгруппы

$$G_1' = \{(g_1, e_2) \mid g_1 \in G_1\}, \quad G_2' = \{(e_1, g_2) \mid g_2 \in G_2\},$$

причем $G_1'$ изоморфна $G_1$, а $G_2'$ изоморфна $G_2$. Кроме того,

$$G_1' \lhd G, \quad G_2' \lhd G, \quad G_1' \cap G_2' = E$$

и $G = G_1' \times G_2'$, т.е. группа $G$ совпадает с прямым произведением своих подгрупп $G_1'$ и $G_2'$.

**Теорема 12.9.** *Если $G_1$ и $G_2$ — группы взаимно простых порядков, то*

$$Aut(G_1 \times G_2) = Aut G_1 \times Aut G_2.$$

*Доказательство.* Пусть $f \in Aut(G_1 \times G_2)$. Так как $G_1$ и $G_2$ — характеристические подгруппы группы $G_1 \times G_2$ по лемме 9.11, с. 97, то ограничение $f_i = f|_{G_i}$ автоморфизма $f$ на подгруппе $G_i$ будет автоморфизмом группы $G_i$. Отображение $\alpha : f \mapsto (f_1, f_2)$ группы $Aut(G_1 \times G_2)$ во внешнее прямое произведение $AutG_1 \times AutG_2$ будет мономорфизмом.

Обратно, каждый элемент

$$(\varphi_1, \varphi_2) \in AutG_1 \times AutG_2$$

является образом при отображении $\alpha$ следующего автоморфизма группы $G$ :

$$(g_1, g_2) \mapsto (\varphi_1(g_1), \varphi_2(g_2)).$$

Поэтому,

$$Aut(G_1 \times G_2) = AutG_1 \times AutG_2.$$

□

**Теорема 12.10.** *Пусть группа $G = A \times B$ является прямым произведением своих подгрупп $A$ и $B$, и пусть $A_1 \lhd A$, $B_1 \lhd B$. Тогда*

$$A_1B_1 = A_1 \times B_1 \lhd G \quad \textit{и}$$

$$G/(A_1 \times B_1) \simeq A/A_1 \times B/B_1.$$

*Доказательство.* Обратим внимание на то, что $A/A_1 \times B/B_1$ — внешнее произведение групп $A/A_1$ и $B/B_1$. Из леммы 12.3 следует, что $A_1$ и $B_1$ — нормальные подгруппы группы $G$, поэтому $A_1B_1$ — нормальная подгруппа.





Далее, $A_1B_1 = A_1 \times B_1$ по лемме 12.3. Зададим отображение

$$\varphi : ab \mapsto (aA_1, bB_1)$$

из группы $G$ во внешнее прямое произведение $A/A_1 \times B/B_1$. Так как

$$\varphi(a_1b_1a_2b_2) = \varphi(a_1a_2b_1b_2) = (a_1a_2A_1, b_1b_2B_1) =$$

$$(a_1A_1, b_1B_1)(a_2A_1, b_2B_1) = \varphi(a_1b_1)\varphi(a_2b_2)$$

для всех $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, то $\varphi$ — гомоморфизм. Каждый элемент $(cA_1, dB_1)$, $c \in A$, $d \in B$ группы $A/A_1 \times B/B_1$ будет образом при отображении $\varphi$ элемента $cd \in A \times B = G$, т.е. $\varphi$ — эпиморфизм. Если $ab \in \mathrm{Ker}\varphi$, то $e = \varphi(ab) = (aA_1, bB_1)$ и $a \in A_1$, $b \in B_1$. Таким образом,

$$\mathrm{Ker}\varphi = A_1B_1 = A_1 \times B_1.$$

Теперь остается применить основную теорему о гомоморфизме. □

Конструкция внешнего прямого произведения групп без труда переносится на случай любого конечного числа сомножителей.

**Подпрямое произведение.** Пусть группа $G = A_1 \times A_2$ является прямым произведением своих подгрупп $A_i$, $i = 1, 2$. По теореме 12.1 каждый элемент группы $G$ единственным образом представим в виде

$$g = a_1a_2,\ a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2.$$

Поэтому отображение $\varphi_i : g \mapsto a_i$ с учетом теоремы 12.1 будет эпиморфизмом группы $G$ на подгруппу $A_i$.

Эпиморфизм $\varphi_i : G \to A_i$ называют *проектированием* группы $G$ на $i$-ю компоненту $A_i$. Ясно, что если $H$ — подгруппа группы $G$, то $\varphi_i(H)$ — подгруппа группы $A_i$.

Подгруппу $\varphi_i(H)$ называют *проекцией* подгруппы $H$ на $A_i$. Если подгруппа $H$ такова, что $\varphi_i(H) = A_i,\ i = 1, 2$, то подгруппу $H$ называют *подпрямым произведением* прямого произведения $G = A_1 \times A_2$.

**Лемма 12.11.** (Ремак) *Если $N_1$ и $N_2$ — нормальные подгруппы группы $G$, то факторгруппа $G/(N_1 \cap N_2)$ изоморфна подгруппе, являющейся подпрямым произведением прямого произведения* $(G/N_1) \times (G/N_2)$.

*Доказательство.* Внешнее прямое произведение

$$(G/N_1) \times (G/N_2)$$

состоит из множества всех пар $(aN_1, bN_2)$ с умножением

$$(aN_1, bN_2)(cN_1, dN_2) = (acN_1, bdN_2),$$

где $a, b, c, d \in G$. Зададим отображение

$$\varphi : g \mapsto (gN_1, gN_2)$$

для всех $g \in G$. Это отображение будет гомоморфизмом, т.к.

$$\varphi(gh) = (ghN_1, ghN_2) = (gN_1, gN_2)(hN_1, hN_2) = \varphi(g)\varphi(h),$$

$g, h \in G$. Ясно, что

$$Im\varphi = \{(gN_1, gN_2) \mid g \in G\}$$

и $Im\varphi$ есть подгруппа группы $(G/N_1) \times (G/N_2)$, которая является подпрямым произведением. Найдем ядро отображения $\varphi$.

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = e\},$$





где $e$ — единичный элемент прямого произведения $(G/N_1) \times (G/N_2)$. Но единичным элементом является пара $(N_1, N_2)$, поэтому

$$\varphi(g) = (gN_1, gN_2) = (N_1, N_2)$$

тогда и только тогда, когда $g \in N_1 \cap N_2$. Итак,

$$\mathrm{Ker}\varphi = N_1 \cap N_2.$$

По основной теореме о гомоморфизмах

$$G/(N_1 \cap N_2) \simeq Im\varphi \le (G/N_1) \times (G/N_2).$$

□

**Разложение циклической группы в прямое произведение подгрупп.** Группа, которая не может быть разложена в прямое произведение своих собственных подгрупп, называется *неразложимой*. Очевидно, неразложимыми будут все простые группы.

**Пример 12.12.** Симметрическая группа $S_3$ степени 3 содержит единственную нетривиальную нормальную подгруппу $\langle(123)\rangle$, поэтому $S_3$ неразложима. □

**Теорема 12.13.** *Множество всех подгрупп циклической примарной группы с бинарным отношением $\le$ является линейно упорядоченным множеством. В частности, циклическая примарная группа является неразложимой группой.*

*Доказательство.* Пусть $\langle g\rangle$ — циклическая группа порядка $p^n$, где $p$ — простое число. По теореме 3.7, с. 32, все её подгруппы исчерпываются циклическими подгруппами $\langle g^t \rangle$ порядка $p^n/t$ для каждого натурального $t$, делящего $p^n$. Отсюда следует, что $t = p^m$, где $m = 0, 1, \dots, n$ и

$$\langle g^{p^0} \rangle = \langle g \rangle,\ \langle g^{p} \rangle,\ \langle g^{p^2} \rangle,\ \dots,\ \langle g^{p^{n-1}} \rangle,\ \langle g^{p^n} \rangle = E$$

— все подгруппы группы $\langle g \rangle$.

Пусть $\langle g^{p^k} \rangle$ и $\langle g^{p^l} \rangle$ — две произвольные подгруппы. Считаем, для определенности, что $k \leq l$. Тогда $l - k \geq 0$ и

$$(g^{p^k})^{p^{l-k}} = g^{p^l},$$

т.е. элемент $g^{p^l}$ является степенью элемента $g^{p^k}$ и

$$\langle g^{p^l} \rangle \leq \langle g^{p^k} \rangle.$$

Значит, в группе $\langle g \rangle$ из любых двух подгрупп всегда одна содержится в другой. Поэтому множество $\mathbf{S}(\langle g \rangle)$ всех подгрупп группы $\langle g \rangle$ с бинарным отношением $\leq$ является линейно упорядоченным множеством. В частности, в циклической примарной группе нет двух неединичных подгрупп, имеющих единичное пересечение. □

Следующая теорема показывает, что каждая циклическая группа составного порядка разложима в прямое произведение своих подгрупп.

**Теорема 12.14.** *Если $\langle g \rangle$ — циклическая группа порядка $nm$, где $n, m$ — взаимно простые числа, то*

$$\langle g \rangle = \langle g^m \rangle \times \langle g^n \rangle.$$





*Доказательство.* Так как $n$ и $m$ взаимно простые числа, то существуют целые числа $s$ и $t$ такие, что $ns + mt = 1$. Теперь

$$g = g^{ns+mt} = (g^n)^s (g^m)^t,$$

т.е. $g \in \langle g^n \rangle \langle g^m \rangle$. Отсюда следует, что

$$\langle g \rangle = \langle g^m \rangle \langle g^n \rangle.$$

Ясно, что подгруппы $\langle g^m \rangle$ и $\langle g^n \rangle$ нормальны в $\langle g \rangle$. Пусть

$$g^k \in \langle g^m \rangle \cap \langle g^n \rangle, \quad \text{т.е.} \quad g^k = g^{mk_1} = g^{nk_2}.$$

Тогда $g^{mk_1 - nk_2} = e$ и $mn$ делит $mk_1 - nk_2$ по теореме 3.3, с. 30. Но $m$ и $n$ взаимно просты, поэтому $m$ делит $k_2$, а $n$ делит $k_1$ и $g^k = g^{mk_1} = e$. Это означает, что подгруппы $\langle g^n \rangle$ и $\langle g^m \rangle$ имеют единичное пересечение. Итак, все требования прямого произведения выполняются, значит

$$\langle g \rangle = \langle g^m \rangle \times \langle g^n \rangle.$$

□

**Следствие 12.15.** *Всякая конечная циклическая группа является прямым произведением своих примарных неразложимых циклических подгрупп. Более точно, если $\langle g \rangle$ — циклическая группа порядка*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

*где $p_i$ — простые числа, $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$, то*

$$\langle g \rangle = \langle g_1 \rangle \times \langle g_2 \rangle \times \dots \times \langle g_k \rangle, \quad \textit{где} \quad \langle g_i \rangle = \langle g^{n/p_i^{\alpha_i}} \rangle$$

*— циклическая подгруппа порядка $p_i^{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.*

*Доказательство.* Воспользуемся индукцией по $k$. По теореме 12.14 имеем

$$\langle g\rangle = \langle g^{p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}}\rangle \times \langle g^{p_1^{\alpha_1}}\rangle. \qquad <1>$$

Подгруппа $\langle g^{p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}}\rangle$ имеет порядок $p_1^{\alpha_1}$ и по теореме 12.13 неразложима. Группа $\langle g^{p_1^{\alpha_1}}\rangle$ имеет порядок $n_1 = p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ и к ней применима индукция. По индукции

$$\langle g^{p_1^{\alpha_1}}\rangle = \langle g_2\rangle \times \ldots \times \langle g_k\rangle, \qquad <2>$$

где $g_i = g^{p_1^{\alpha_1}(n_1/p_i^{\alpha_i})} = g^{n/p_i^{\alpha_i}}$ — циклическая подгруппа порядка $p_i^{\alpha_i}$, $i = 2, 3, \ldots, k$. Теперь из разложений <1> и <2> в силу леммы 12.2 получаем, что

$$\langle g\rangle = \langle g_1\rangle \times \langle g_2\rangle \times \ldots \times \langle g_k\rangle,$$

где

$$g_1 = g^{p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}} = g^{n/p_1^{\alpha_1}}.$$

□

**Пример 12.16.** Пусть $G = \langle g\rangle$ — циклическая группа порядка 100. Так как $100 = 2^2 5^2$, то по теореме 12.14 группа $\langle g\rangle = \langle g^{5^2}\rangle \times \langle g^{2^2}\rangle$ является прямым произведением своих примарных подгрупп: $\langle g^{5^2}\rangle$ порядка $2^2$ и $\langle g^{2^2}\rangle$ порядка $5^2$. По теореме 12.13 подгруппы $\langle g^{25}\rangle$ и $\langle g^4\rangle$ неразложимы.

□

## § 13. Минимальные нормальные подгруппы

*Минимальной нормальной подгруппой* группы $G$ называют такую нормальную подгруппу $N$ группы $G$, что $N \neq E$ и в $N$ нет нетривиальных нормальных подгрупп группы $G$.





Запись $N \cdot\!\lhd G$ означает, что $N$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$. Таким образом, если $N \cdot\!\lhd G$, то $N \neq E$ и из условий $X \le N$, $X \lhd G$ следует, что $X = E$ или $X = N$. Очевидно, что в каждой неединичной конечной группе имеется минимальная нормальная подгруппа.

*Цоколем* группы $G$ называется подгруппа, являющаяся произведением всех минимальных нормальных подгрупп группы $G$. Цоколь группы $G$ обозначают через $\mathrm{Soc}G$. Таким образом,

$$\mathrm{Soc}G = \prod_{N \cdot\lhd G} N.$$

**Лемма 13.1.** *Пусть $N \cdot\!\lhd G$. Тогда:*

*(1) если $K \lhd G$, то либо $N \le K$, либо $N \cap K = E$ и $NK = N \times K$;*

*(2) если $N$ абелева и $NH = G$ для некоторой собственной подгруппы $H$ группы $G$, то $N \cap H = E$;*

*(3) если $K \lhd G$ и $N \not\subseteq K$, то $NK/K \cdot\!\lhd G/K$.*

*Доказательство.* (1) Пусть $N \not\subseteq K$. Тогда $N \cap K \lhd G$ по лемме 6.4, с. 63, и $N \cap K$ — собственная подгруппа в $N$. Поэтому $N \cap K = E$ и $NK = N \times K$.

(2) Поскольку $N \cap H \lhd H$ и $N \cap H \lhd N$, то $N \cap H \lhd G$ и $N \cap H = E$.

(3) Так как $N \not\subseteq K$, то $NK/K$ — неединичная нормальная подгруппа группы $G/K$. Если $X/K$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G/K$ из $NK/K$, то $X \neq K$, $X \lhd G$ и $X = (X \cap N)K$ по тождеству Дедекинда. Теперь $X \cap N \lhd G$, а из (1) следует, что $X \cap N = N$ и $X = NK$. Поэтому $X/K = NK/K \cdot\!\lhd G/K$ □

**Лемма 13.2.** *Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое множество минимальных нормальных подгрупп группы $G$ и*

$$M = \prod_{N \in \mathcal{M}} N.$$

*Тогда:*

*(1) если $K \lhd G$, то существуют подгруппы*

$$N_1, N_2, \ldots, N_k \in \mathcal{M}$$

*такие, что*

$$KM = K \times N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k;$$

*(2) существуют подгруппы*

$$N_1, N_2, \ldots, N_m \in \mathcal{M}$$

*такие, что*

$$M = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_m;$$

*(3) если $\mathcal{M}$ — множество всех минимальных нормальных подгрупп группы $G$, то существуют подгруппы*

$$N_1, N_2, \ldots, N_s \in \mathcal{M}$$

*такие, что*

$$SocG = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_s.$$

*Доказательство.* (1) Если $N \in \mathcal{M}$ и $N \not\subseteq K$, то $NK = N \times K$ по лемме 13.1. Пусть $\{N_1, \ldots, N_k\}$ — подмножество из $\mathcal{M}$ с наибольшим $k$, для которого

$$K(\prod_{i=1}^{k} N_i) = K \times N_1 \times \ldots \times N_k.$$





Обозначим через

$$X = K \times N_1 \times \ldots \times N_k.$$

Ясно, что $K \leq X \leq KM$. Если $X \neq KM$, то существует подгруппа $N \in \mathcal{M}$, для которой $N \not\subseteq X$. Но тогда по лемме 13.1 $XN = X \times N$ и

$$XN = K \times N_1 \times \ldots \times N_k \times N,$$

что противоречит максимальности $k$. Поэтому допущение неверно и $X = KM$.

(2) Утверждение следует из (1) при $K = E$.

(3) В случае, когда $\mathcal{M}$ — множество всех минимальных нормальных подгрупп группы $G$ подгруппа $M = \prod_{N \in \mathcal{M}} N$ совпадает с цоколем группы $G$. Поэтому требуемое утверждение вытекает из (2). $\square$

**Теорема 13.3.** *(1) В каждой группе минимальная нормальная подгруппа характеристически простая.*

*(2) Характеристически простая группа является прямым произведением изоморфных простых групп.*

*Доказательство.* (1) Пусть $N \cdot\lhd G$ и $K\ char\ N$. По лемме 9.10, с. 96, подгруппа $K \lhd G$. Из минимальности $N$ следует, что $K = E$ или $K = N$. Поэтому $N$ — характеристически простая группа.

(2) Пусть $G$ — характеристически простая группа и $N \cdot\lhd G$. Ясно, что $\alpha(N)$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$ для любого $\alpha \in \mathrm{Aut}G$. Пусть $\mathcal{M} = \{\alpha(N) \mid \alpha \in \mathrm{Aut}G\}$ и

$$M = \prod_{K \in \mathcal{M}} K.$$

Так как

$$\beta(M) = \beta(\prod_{K \in \mathcal{M}} K) = \prod_{K \in \mathcal{M}} \beta(K) = M$$

для любого $\beta \in \mathrm{Aut}G$, то $M$ — характеристическая подгруппа группы $G$, поэтому $M = G$. По лемме 13.2 получаем, что

$$G = N_1 \times \ldots \times N_m$$

для $\{N_1, \ldots, N_m\} \subseteq \mathcal{M}$. Итак группа $G$ является прямым произведением изоморфных подгрупп $N_1, \ldots, N_m$. По свойствам прямых произведений каждая нормальная в $N_1$ подгруппа будет нормальной подгруппой группы $G$. Из того, что $N_1$ — минимальная нормальная подгруппа в группе $G = N_1 \times \ldots \times N_m$ следует по лемме 12.4, с. 117, что $N_1$ простая. □

*Элементарной абелевой* $p-$группой называют группу, являющуюся прямым произведением подгрупп порядка $p$.

**Теорема 13.4.** *Пусть $N \cdot\!\lhd G$ и $K \cdot\!\lhd N$. Тогда $K$ — простая подгруппа и существуют элементы $g_1, \ldots, g_m \in G$ такие, что $N = K^{g_1} \times \ldots \times K^{g_m}$. Кроме того:*

*(1) если $N$ абелева, то $\mid K \mid = p$ для некоторого простого $p$ и $N$ — элементарная абелева $p-$группа;*

*(2) если $N$ неабелева, то каждая минимальная нормальная в $N$ подгруппа принадлежит множеству $\{K^{g_1}, \ldots, K^{g_m}\}$.*

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{M} = \{K^g \mid g \in G\}$ и

$$L = \prod_{X \in \mathcal{M}} X.$$





Ясно, что $L$ является нормальной подгруппой группы $G$. Так как $K^g \leq N$ для всех $g \in G$, то $L \leq N$, поэтому $L = N$. Поскольку $K^g$ — минимальная нормальная подгруппа в $N$, то по лемме 13.2 существуют элементы $g_1, \ldots, g_m \in G$ такие, что $N = K^{g_1} \times \ldots \times K^{g_m}$. Из леммы 12.3, с. 116, следует что подгруппа $K$ простая.

(1) Пусть $N$ абелева. По теореме 6.5, с. 63, подгруппа $K$ имеет простой порядок. Пусть $\mid K \mid = p$. Тогда $N$ — элементарная абелева $p-$группа порядка $p^m$.

(2) Пусть $N$ неабелева. По теореме 12.8, с. 119, каждая минимальная нормальная в $N$ подгруппа принадлежит множеству $\{K^{g_1}, \ldots, K^{g_m}\}$. □

**Следствие 13.5.** *Минимальная нормальная подгруппа группы либо элементарная абелева $p-$группа для некоторого простого $p$, либо является прямым произведением изоморфных простых неабелевых групп.* □

**Лемма 13.6.** *Пусть $N \cdot\!\lhd G$, $N \leq H \lhd G$. Если $K \cdot\!\lhd H$, $K \leq N$, то существуют элементы $g_1, \ldots, g_n \in G$ такие, что*

$$N = K^{g_1} \times \ldots \times K^{g_n}.$$

*Доказательство.* Так как $K^g \leq N^g = N$ для любого $g \in G$, то $N = \langle K^g \mid g \in G \rangle$. Полагая $\mathcal{M} = \{K^g \mid g \in G\}$ из леммы 13.2(2) для группы $H$ и ее нормальной подгруппы $N$ получаем, что существуют элементы $g_1, \ldots, g_n$ такие, что

$$N = K^{g_1} \times \ldots \times K^{g_n}.$$

□

Подгруппа $U$ называется *субнормальной* подгруппой группы $G$, если существуют подгруппы $U_0, U_1, \dots, U_s$ такие, что

$$U = U_0 \lhd U_1 \lhd \dots \lhd U_{s-1} \lhd U_s = G.$$

Запись $U \lhd \lhd G$ означает, что $U$ — субнормальная подгруппа группы $G$. Очевидно, что каждая субнормальная подгруппа является членом некоторого субнормального ряда группы $G$.

**Лемма 13.7.** *Пусть $U \lhd \lhd G$. Тогда:*
*(1) если $T \lhd \lhd U$, то $T \lhd \lhd G$;*
*(2) если $V \leq G$, то $V \cap U \lhd \lhd V$;*
*(3) если $V \lhd \lhd G$, то $U \cap V \lhd \lhd G$;*
*(4) если $N \lhd G$, то $UN/N \lhd \lhd G/N$.*

*Доказательство.* (1) Очевидно.
(2) Пусть

$$U = U_0 \lhd U_1 \lhd \dots \lhd U_{s-1} \lhd U_s = G.$$

Так как $U_i \lhd U_{i+1}$, то

$$(V \cap U_{i+1}) \cap U_i = V \cap U_i \lhd V \cap U_{i+1}.$$

Поэтому

$$U \cap V = U_0 \cap V \lhd U_1 \cap V \lhd \dots \lhd U_{s-1} \cap V \lhd U_s \cap V = V$$

и $U \cap V \lhd \lhd V$.
(3) По (2) $U \cap V \lhd \lhd V$, а т.к. $V \lhd \lhd G$, то $U \cap V \lhd \lhd G$ по (1).
(4) Так как

$$UN/N = U_0N/N \lhd U_1N/N \lhd \dots \lhd U_{s-1}N/N \lhd U_sN/N = G/N,$$

то $UN/N \lhd \lhd G/N$. $\square$





**Лемма 13.8.** *Если $U \lhd \lhd G$, то $SocG \leq N_G(U)$.*

*Доказательство.* Пусть

$$U = U_0 \lhd U_1 \lhd \dots \lhd U_{n-1} \lhd U_n = G.$$

Воспользуемся индукцией по $n$. Если $n = 1$, то $U \lhd G$ и $\mathrm{Soc}G \leq N_G(U) = G$. По индукции $\mathrm{Soc}U_{n-1} \leq N_{U_{n-1}}(U) \leq N_G(U)$. Пусть $N$ — произвольная минимальная нормальная подгруппа группы $G$. Если $N \leq U_{n-1}$, то $N \leq \mathrm{Soc}U_{n-1}$ по лемме 13.6 и подгруппа $N \leq N_G(U)$. Если $N \not\leq U_{n-1}$, то $NU_{n-1} = N \times U_{n-1}$ по лемме 13.1 и опять $N \leq C_G(U) \leq N_G(U)$. Таким образом, в любом случае $N \leq N_G(U)$ и $\mathrm{Soc}G \leq N_G(U)$ по определению цоколя. $\square$

**Теорема 13.9.** *Если $\{U_i \mid i \in I\}$ — некоторое множество субнормальных подгрупп группы $G$, то*

$$U = \langle U_i \mid i \in I \rangle \lhd \lhd G.$$

*Доказательство.* Воспользуемся индукцией по порядку группы $G$. Пусть $N \cdot\!\lhd G$. Тогда $U_iN/N \lhd\lhd G/N$ по лемме 13.7 и по индукции $UN/N \lhd \lhd G/N$. Согласно лемме 13.8 подгруппа $N \subseteq \cap_{i \in I} N_G(U_i)$ поэтому $U \lhd UN \lhd \lhd G$ и $U \lhd \lhd G$. $\square$

Из леммы 13.7(3) и теоремы 13.9 получаем

**Следствие 13.10.** *Совокупность всех субнормальных подгрупп группы $G$ образует решетку.* $\square$

**Лемма 13.11.** *Пусть*

$$G = \bigotimes_{i=1}^{m} G_i,$$

*$G_i$ — неабелева простая группа для всех $i$ и $E \neq N \lhd \lhd G$. Тогда существует подмножество $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ такое, что*

$$N = \bigotimes_{j \in J} G_j.$$

*Доказательство.* Пусть

$$N = N_0 \lhd N_1 \lhd \dots \lhd N_{n-1} \lhd N_n = G.$$

Воспользуемся индукцией по $n$. По теореме 12.8, с. 119, существует подмножество $J_1 \subseteq \{1, \dots, m\}$ такое, что

$$N_{n-1} = \bigotimes_{j \in J_1} G_j.$$

Теперь по индукции существует подмножество $J \subseteq J_1$ такое, что

$$N = \bigotimes_{j \in J} G_j.$$

□

**Теорема 13.12.** *Пусть $H \lhd \lhd G$, $K \lhd \lhd G$ и $H \cap K = E$. Если $H$ — неабелева простая подгруппа, то $\langle H \cup K \rangle = H \times K$.*

*Доказательство.* Пусть $U = \langle H \cup K \rangle$ и пусть

$$H = H_0 \lhd H_1 \lhd \dots \lhd H_{n-1} \lhd H_n = U;$$

$$K = K_0 \lhd K_1 \lhd \dots \lhd K_{m-1} \lhd K_m = U.$$

Воспользуемся индукцией по $n$. Если $n = 1$, то $H \lhd U$ и $U = [H]K$. Если $K \lhd U$, то $U = H \times K$. Пусть $K$ не является нормальной подгруппой группы $U$. Тогда $m \geq 2$





и $K$ — собственная подгруппа в $K_1$. Так как $K_1 \lhd \lhd U$, то $E \neq K_1 \cap H \lhd \lhd H$. Из того, что $H$ — простая неабелева группа следует, что $H \leq K_1$ и $HK = H \times K$.

Пусть теперь $n \geq 2$. Тогда $H \neq H^{k_1}$ для некоторого $k_1 \in K$ и $H \cap H^{k_1} = E$. Так как $H_{n-1} \lhd U$, то $\langle H \cup H^{k_1} \rangle \subseteq H_{n-1}$ и по индукции $\langle H \cup H^{k_1} \rangle = H \times H^{k_1}$.

Пусть

$$V = H \times H^{k_1} \times \dots \times H^{k_t},\ k_1, ..., k_t \in K,$$

с наибольшим номером $t$. Ясно, что $V \lhd \lhd H_{n-1}$. Если $H^k \not\subseteq V$ для некоторого $k \in K$, то $V \cap H^k = E$ и $\langle V \cup H^k \rangle = V \times H^k$ по индукции. Противоречие с выбором $t$. Поэтому $H^k \subseteq V$ для всех $k \in K$ и $K \leq N_G(V)$. Следовательно, $U = VK$.

Если $V \cap K \neq E$, то по лемме 13.11

$$V \cap K = \bigotimes_{i \in I} H^{k_i}$$

для некоторого множества $I$, поэтому существует номер $j \in I$ такой, что $H^{k_j} \leq K$. Теперь $H \leq K$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $V \cap K = E$ и $U = [V]K$. Если $K \lhd U$, то $U = H \times K$. Пусть $K$ не является нормальной подгруппой в группе $U$. Тогда $K$ — собственная подгруппа в подгруппе $K_1$, поэтому $K_1 \cap V \neq E$ и по лемме 13.11 существует множество $J$ такое, что

$$V \cap K_1 = \bigotimes_{j \in J} H^{k_j}.$$

Так как $V \cap K_1 \lhd K_1$, то $(V \cap K_1)K = (V \cap K_1) \times K$ и для некоторого $H^{k_l} \leq V \cap K_1$ имеем $H^{k_l}K = H^{k_l} \times K$. Но $k_l \in K$, значит $H^{k_l} \times K = H \times K$. □

**Теорема 13.13.** *Пусть $H$ — неабелева простая подгруппа группы $G$ и $H \lhd \lhd G$. Тогда $H^G \cdot\lhd G$ и существуют элементы $g_1, \dots g_n$ такие, что*

$$H^G = \bigotimes_{i=1}^{n} H^{g_i}.$$

*Доказательство.* Если $H \lhd G$, то теорема очевидна. Пусть $H$ не является нормальной подгруппой группы $G$. Тогда существует элемент $g \in G$ такой, что $H \neq H^g$. По теореме 13.12 получаем, что $\langle H \cup H^g \rangle = H \times H^g$. Пусть

$$V = H^{g_1} \times H^{g_2} \times \ldots \times H^{g_t}$$

с наибольшим номером $t$. Если $H^x \not\subseteq V$ для некоторого $x \in G$, то $V \cap H^x \lhd \lhd H^x$, а поскольку подгруппа $H^x$ простая неабелева, то $V \cap H^x = E$ и $\langle V \cup H^x \rangle = V \times H^x$ по теореме 13.12. Противоречие с выбором $t$. Поэтому $H^x \subseteq V$ для всех $x \in G$ и $V = H^G \lhd G$. Предположим, что $V_1 \cdot\lhd G$, $V_1 \leq V$. Тогда по лемме 13.11

$$V_1 = \bigotimes_{i \in I} H^{g_i}$$

и $V = H^G \subseteq V_1$. Поэтому $V = V_1 \cdot\lhd G$. □

**Следствие 13.14.** *Если $H$ — неабелева простая подгруппа группы $G$ и $H \lhd \lhd G$, то $H \leq SocG$.* □

Аналогичное утверждение для абелевых простых субнормальных подгрупп неверно. Примером служит диэдральная группа порядка 8, см. теорему 14.6.





## § 14. Полупрямые произведения

**Теорема 14.1.** *Пусть $K$ и $H$ — группы и $\psi$ — гомоморфизм группы $K$ в $AutH$. Тогда существует группа $G$, обладающая следующими свойствами:*

*(1) группа $G$ содержит подгруппы $H^* \simeq H$ и $K^* \simeq K$;*

*(2) $G = H^*K^*$;*

*(3) $H^* \cap K^* = E$;*

*(4) $H^* \lhd G$.*

*Доказательство.* Условимся образ элемента $h \in H$ при автоморфизме $\psi(k) \in \mathrm{Aut}H$, $k \in K$, обозначать через $[\psi(k)h]$. Проверим, что множество $G = \{(k,h) \mid k \in K,\ h \in H\}$ с операцией

$$(k_1,h_1)(k_2,h_2) = (k_1k_2, [\psi(k_2^{-1})h_1]h_2) \qquad <1>$$

является искомой группой.

Так как $[\psi(k_2^{-1})h_1] \in H$, то операция <1> определена на $G$. Проверим, что операция ассоциативна.

$$\big((k_1,h_1)(k_2,h_2)\big)(k_3,h_3) = \big(k_1k_2, [\psi(k_2^{-1})h_1]h_2\big)(k_3,h_3) =$$
$$= \big(k_1k_2k_3, \big[\psi(k_3^{-1})([\psi(k_2^{-1})h_1]h_2)\big]h_3\big) =$$
$$= \big(k_1k_2k_3, \big[\big(\psi(k_2k_3)^{-1}\big)h_1\big]\big[\psi(k_3^{-1})h_2\big]h_3\big);$$
$$(k_1,h_1)\big((k_2,h_2)(k_3,h_3)\big) = (k_1,h_1)\big(k_2k_3, [\psi(k_3^{-1})h_2]h_3\big) =$$
$$= \big(k_1k_2k_3, \big[\psi((k_2k_3)^{-1})h_1\big]\big[\psi(k_3^{-1})h_2\big]h_3\big).$$

Таким образом операция <1> ассоциативна. Пусть $e_K$ — единичный элемент группы $K$, а $e_H$ — единичный элемент группы $H$. Так как

$$(k_1,h_1)(e_K,e_H) = \big(k_1e_K, \big[\psi(e_K^{-1})h_1\big]e_H\big) = (k_1,h_1);$$

$$(e_K, e_H)(k_1, h_1) = \big(e_K k_1, \big[\psi(k_1^{-1})e_H\big]h_1\big) = (k_1, h_1),$$

то $(e_K, e_H)$ — единичный элемент $G$.

Проверим, что $(k,h)^{-1} = \big(k^{-1}, [\psi(k)h^{-1}]\big)$.

$$(k,h)\big(k^{-1}, [\psi(k)h^{-1}]\big) = \big(kk^{-1}, [\psi(k)h][\psi(k)h^{-1}]\big) =$$

$$= \big(e_K, [\psi(k)(hh^{-1})]\big) = (e_K, e_H);$$

$$\big(k^{-1}, [\psi(k)h^{-1}]\big)(k,h) = (k^{-1}k, \big[\psi(k^{-1})[\psi(k)h^{-1}]\big]h\big) =$$

$$= \big(e_K, [\psi(k^{-1})\psi(k)(h^{-1})]h\big) = (e_K, e_H).$$

Итак, $G$ — группа. Рассмотрим два множества:

$$K^* = \{(k, e_H) \mid k \in K\};$$

$$H^* = \{(e_K, h) \mid h \in H\}.$$

Так как

$$(k_1, e_H)(k_2, e_H) = \big(k_1k_2, [\psi(k_2^{-1})e_H]e_H\big) = (k_1k_2, e_H) \in K^*;$$

$$(e_K, h_1)(e_K, h_2) = \big(e_Ke_K, [\psi(e_K^{-1})h_1]h_2\big) = (e_K, h_1h_2) \in H^*,$$

то $K^*$ и $H^*$ — подгруппы группы $G$. Ясно, что отображения

$$k \mapsto (k, e_H), \quad h \mapsto (e_K, h)$$

являются изоморфизмами $K \simeq K^*$, $H \simeq H^*$. Из построения получаем, что $K^* \cap H^* = E$ и $G = K^*H^*$. Так как

$$(k, e_H)^{-1}(e_K, h)(k, e_H) = (k^{-1}, e_H)(e_K, h)(k, e_H) =$$

$$= \big(k^{-1}, [\psi(e_K^{-1})e_H]h\big)(k, e_H) = \big(k^{-1}, h\big)\big(k, eH\big) =$$

$$= \big(k^{-1}k, [\psi(k^{-1})h]e_H\big) = \big(e_K, [\psi(k^{-1})h]\big) \in H^*,$$

то $H^* \lhd G$. □





Построенная в теореме 14.1 группа $G$ называется *внешним полупрямым произведением* группы $K$ и группы $H$ относительно гомоморфизма $\psi$ и обозначается через $G = K_\psi[H]$ или $G = [H]_\psi K$.

**Следствие 14.2.** *Внешнее полупрямое произведение $G = K_\psi[H]$ групп $K$ и $H$ относительно гомоморфизма $\psi : K \to AutH$ является прямым произведением тогда и только тогда, когда $\psi$ каждый элемент группы $K$ переводит в тождественный автоморфизм группы $H$.*

*Доказательство.* Если $G = K_\psi[H] = K \times H$, то операция <1> принимает вид:

$$(k_1, h_1)(k_2, h_2) = (k_1k_2, h_1h_2); \quad [\psi(k_2^{-1})h_1]h_2 = h_1h_2,$$

поэтому $\psi(k_2^{-1}) = \epsilon$ — тождественный автоморфизм группы $H$ для любого $k_2 \in K$.

Обратно, если $\psi$ каждый элемент группы $K$ переводит в тождественный автоморфизм группы $H$, то из <1> следует, что

$$(k_1, h_1)(k_2, h_2) = (k_1k_2, h_1h_2)$$

и произведение $G = K_\psi[H]$ будет прямым. □

**Пример 14.3.** Пусть

$$K = \langle k \rangle, \mid K \mid= m, \ H = \langle h \rangle, \ \mid H \mid= n$$

— циклические группы порядков $n$ и $m$. Выберем натуральное число $r$, для которого

$$r^m \equiv 1 \ (mod\ n) \quad \text{и} \quad r^l \not\equiv 1 \ (mod\ n)$$

при $0 < l < m$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$ зададим отображение

$$\varphi_i : h^t \mapsto h^{tr^i},\ t = 1, \ldots, n.$$

Так как

$$\varphi(h^{t_1}h^{t_2}) = \varphi_i(h^{t_1+t_2}) = h^{(t_1+t_2)r^i} =$$

$$= h^{t_1r^i}h^{t_2r^i} = \varphi_i(h^{t_1})\varphi_i(h^{t_2}),$$

то $\varphi_i$ — эндоморфизм группы $H$. Поскольку $\mathrm{Ker}\varphi_i = \{h^t \mid h^{tr^i} = e\} = \{h^t \mid n \text{ делит } tr^i\} = \{h^t \mid n \text{ делит } t\} = \{e\}$, то $\varphi_i$ — автоморфизм группы $H$. Заметим, что

$$(\varphi_i\varphi_j)(h^t) = \varphi_i(\varphi_j(h^t)) =$$

$$\varphi_i(h^{tr^j}) = h^{tr^jr^i} = h^{tr^{i+j}} = \varphi_{i+j}(h^t),$$

т.е. $\varphi_i\varphi_j = \varphi_{i+j}$. Здесь сложение $i + j$ происходит по модулю $n$.

Теперь отображение $\psi : k^i \mapsto \varphi_i$ будет гомоморфизмом группы $K$ в группу $\mathrm{Aut}H$. По теореме 14.1 существует группа $G$, являющаяся полупрямым произведением групп $K$ и $H$ относительно $\psi$, т.е. $G = K_\psi[H]$. □

**Пример 14.4.** Положим в предыдущем примере $m = 2$. Тогда $r = n - 1$ и

$$\varphi_1 : h^t \mapsto h^{(n-1)t} = h^{-t},\quad \varphi_2 : h^t \mapsto h^{t(n-1)^2} = h^t,$$

и $\varphi_2$ — тождественный автоморфизм. Группа

$$G = K_\psi[H] = \langle k\rangle_\psi[\langle h\rangle] = \langle k, h \ \mid\ k^2 = h^n = e,\ h^k = h^{-1}\rangle.$$

□





Говорят, что группа $G$ является *полупрямым произведением* своих подгрупп $A$ и $B$, если выполняются следующие требования:

$$G = AB;\ A \cap B = E;\ B \lhd G.$$

Полупрямое произведение обозначают так: $G = A[B]$ или $G = [B]A$. Построенная в теореме 14.1 группа $G$ является полупрямым произведением своих подгрупп $K^*$ и $H^*$, т.е. $G = K^*[H^*]$.

**Лемма 14.5.** *Если $G = A[B]$, то*

*(1) каждый элемент $g \in G$ единственным образом представим в виде произведения $g = ab$, где $a \in A$, $b \in B$;*

*(2) если $a_1, a_2 \in A$ и $b_1, b_2 \in B$, то*

$$(a_1b_1)(a_2b_2) = (a_1a_2)(b_1^{a_2}b_2).$$

*Доказательство.* (1) Из равенства $G = AB$ следует, что каждый элемент $g \in G$ записывается в виде $g = ab$, где $a \in A$, $b \in B$. Если имеет место другая запись $g = a_1b_1$, $a_1 \in A$, $b_1 \in B$, то $ab = a_1b_1$, откуда $a^{-1}a_1 = bb_1^{-1} \in A \cap B = E$. Поэтому $a = a_1$, $b = b_1$ и каждый элемент $g \in G$ однозначно записывается в виде $g = ab$.

(2) $(a_1b_1)(a_2b_2) = a_1a_2a_2^{-1}b_1a_2b_2 = (a_1a_2)(b_1^{a_2}b_2)$. □

Элемент порядка 2 называется *инволюцией*. *Диэдральной группой* называется группа, порожденная двумя различными инволюциями.

**Теорема 14.6.** *Пусть $G$ – группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

*(1) группа $G$ диэдральная;*

*(2) группа $G = [A]B$, где*

$$A = \langle a \rangle,\ B = \langle b \rangle,\ \mid B \mid = 2,\ a^b = a^{-1}.$$

*Доказательство.* Пусть группа $G$ диэдральная. Тогда существуют две инволюции $i$ и $j$ такие, что $G = \langle i, j \rangle$. Пусть $B = \langle j \rangle$, $a = ij$ и $A = \langle a \rangle$. Тогда

$$a^i = (ij)^i = iiji = ji = (ij)^{-1} = a^{-1} \in A,$$

$$a^j = (ij)^j = jijj = ji = (ij)^{-1} = a^{-1} \in A,$$

поэтому $A \lhd G$ и $AB \leq G$. Так как $j \in B \leq AB$ и $aj = ijj = i \in AB$, то $G = \langle i, j \rangle = AB$. Если $E \neq A \cap B$, то $B \leq A$ и $i = j$ по следствию 3.8, с. 33, что противоречит определению диэдральной группы. Поэтому $A \cap B = E$ и $G = [A]B$.

Обратно, пусть группа $G = [A]B$, где

$$A = \langle a \rangle,\ B = \langle b \rangle,\ \mid B \mid = 2,\ a^b = a^{-1}.$$

Тогда $abab = aa^{-1} = e$ и $ab$ — инволюция. Так как $B = \langle b \rangle \leq \langle ab, b \rangle$ и $a = abb \leq \langle ab, b \rangle$, то $G \leq \langle ab, b \rangle$, т.е. $G = \langle ab, b \rangle$ — диэдральная группа. □

Обычно диэдральную группу порядка $2n$ записывают так:

$$D_{2n} = \langle a, b \mid a^n = b^2 = e,\ a^b = a^{-1} \rangle.$$

Отметим, что группа из примера 14.4 является диэдральной группой порядка $2n$.

Говорят, что группа $G$ является *центральным произведением* своих подгрупп $A$ и $B$, если выполняются следующие требования:

$$G = AB;\ A \lhd G,\ B \lhd G;\ A \cap B \subseteq Z(G).$$





Очевидно, что прямое произведение двух подгрупп является центральным произведением. Кроме того, если $G = AB$ — центральное произведение, то

$$G/(A \cap B) = A/(A \cap B) \times B/(A \cap B)$$

будет прямым произведением.

**Пример 14.7.** Над полем $\mathbb{Z}_5$ рассмотрим матрицы :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};\ \ B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $detA = detB = 1$, то $A$ и $B \in SL(2, \mathbb{Z}_5)$. Вычислим порядки этих матриц. $A^2 = B^2 = 4E$; $A^4 = B^4 = E$;

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};\ \ B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, $A$ и $B$ — матрицы порядка 4 и

$$\langle A \rangle \cap \langle B \rangle = \langle 4E \rangle \subseteq Z(SL(2, \mathbb{Z}_5)).$$

Через $Q$ обозначим группу, порожденную этими матрицами. Несложно проверить, что $Q$ — группа порядка 8, являющаяся центральным произведением двух нормальных подгрупп $\langle A \rangle$ и $\langle B \rangle$. Так как

$$B^{-1}AB = B^3AB = A^3 = A^{-1},$$

то группу $Q$ можно записать так:

$$Q = \langle A, B \mid A^4 = B^4 = E, A^2 = B^2, B^{-1}AB = A^{-1} \rangle.$$

Легко проверяются следующие свойства группы $Q$: $Z(Q) = \langle 4E \rangle$; все элементы из разности $Q \setminus$

$Z(Q)$ имеют порядок 4; $Q$ содержит единственную подгруппу порядка 2; каждая подгруппа нормальна. Группу $Q$ называют *группой кватернионов*. Над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ матрицы

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

порождают подгруппу, изоморфную $Q$. □





## § 15. Линейные группы

В примере 1.11, с. 15, введены полная линейная $GL(n, P)$ и специальная линейная $SL(n, P)$ группы степени $n$ над полем $P$, а в примере 8.9, с. 91, показано, что $SL(n, P) \lhd GL(n, P)$ и факторгруппа $GL(n, P)/SL(n, P)$ изоморфна мультипликативной группе поля $P$.

Матрица, у которой ниже главной диагонали все элементы нули, а на диагонали все элементы единицы, называют *верхней унитреугольной* матрицей. Множество всех верхних унитреугольных матриц обозначают через $U(n, P)$. Очевидно, что $U(n, P)$ является группой.

Напомним, что характеристика конечного поля всегда простое число и если $P$ — конечное поле характеристики $p$, то число элементов в поле $P$ равно $p^m$, где $m$ — некоторое натуральное число, т.е. $\mid P \mid= p^m$. Известно, что любые два конечных поля равных порядков изоморфны между собой.

Пусть поле $P$ конечно и $|P| = p^m = q$. Если $Q$ — другое поле порядка $q$, то поле $Q$ изоморфно полю $P$. Этот факт доказывается в теории полей. Но отсюда следует, что группы $GL(n, P)$ и $GL(n, Q)$ изоморфны и вместо $GL(n, P)$ можно писать $GL(n, q)$. Аналогично, вместо $SL(n, P)$ будем писать $SL(n, q)$.

Заметим, что если $E_{p^n} =< a_1 > + \ldots + < a_n >$ — элементарная абелева $p-$группа порядка $p^n$, записанная аддитивно, то можно рассматривать векторное пространство $V(n, p)$ над полем $\mathbb{Z}_p$ классов вычетов по простому модулю $p$, в котором аддитивной группой является группа $E_{p^n}$, а умножение на элементы из поля $\mathbb{Z}_p$ определяется по правилу: $[k]a = ka$, для любых $a \in E_{p^n}$ и

$$[k] = k + p\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_p.$$

При этом, очевидно,

$$Aut(E_{p^n}) = AutV(n,p) = GL(n,p).$$

Таким образом, доказана

**Теорема 15.1.** *Элементарная абелева $p$−группа $E_{p^n}$ порядка $p^n$ изоморфна аддитивной группе векторного пространства $V(n,p)$ размерности $n$ над полем $\mathbb{Z}_p$ из $p$ элементов, а группа автоморфизмов $AutE_{p^n}$ изоморфна полной линейной группе $GL(n,p)$.* □

**Теорема 15.2.** *(1)* $\mid GL(n,q) \mid = \prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i)$;

*(2)* $\mid SL(n,q) \mid = q^{n-1}\prod_{i=0}^{n-2}(q^n - q^i)$.

*(3)* $\mid U(n,q) \mid = q^{n(n-1)/2}$.

*Доказательство.* (1) Пусть $P$ — конечное поле порядка $q = p^m$, где $p$ — простое число. Из элементов этого поля составляются строки невырожденных $n \times n$−матриц. В каждой строке $n$ элементов. Поэтому число всевозможных строк над полем $P$ равно $q^n$. Подсчитаем теперь число всевозможных невырожденных $n\times n$−матриц над полем $P$. Известно, что матрица является невырожденной тогда и только тогда, когда никакая строка этой матрицы не является линейной комбинацией остальных строк. Первая строка невырожденной матрицы может быть любой, кроме нулевой. Поэтому для первой строки существует $q^n - 1$ возможностей. Вторая строка может быть любой, непропорциональной первой строке. Коэффициентов пропорциональности столько, сколько элементов в поле $P$, т.е. $q$. Поэтому для второй строки существует $q^n - q$ возможностей. Третья строка невырожденной матрицы не должна





быть линейной комбинацией первых двух строк. Очевидно, что число строк, являющихся линейной комбинацией двух строк, равно $q^2$. Поэтому для третьей строки существует $q^n - q^2$ возможностей. И т.д. Наконец, последняя $n$−я строка не должна быть линейной комбинацией первых $(n-1)$ строк. Поэтому для последней строки существует $(q^n - q^{n-1})$ возможностей. Таким образом, число невырожденных матриц равно

$$(q^n - 1)(q^n - q)\dots(q^n - q^{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i).$$

Это число равно порядку группы $GL(n,q)$.

(2) Так как $GL(n,P)/SL(n,P) \simeq P^{\#}$ и $\mid P^{\#} \mid = q-1$, то

$$\mid SL(n,P) \mid = \mid GL(n,P) \mid /(q-1) = \prod_{i=0}^{n-2}(q^n - q^i)q^{n-1}.$$

(3) В верхней унитреугольной матрице выше главной диагонали $(n^2 - n)/2$ мест. Поэтому $\mid U(n,q) \mid = q^{(n^2-n)/2}$. □

**Теорема 15.3.** *Группа $U(n,p^m)$ является силовской $p$−подгруппой группы $GL(n,p^m)$ и группы $SL(n,p^m)$.*

*Доказательство.* Пусть $q = p^m$, где $p$ — простое число и $m \in \mathbb{N}$. Так как

$$\mid U(n,q) \mid = q^{n(n-1)/2}$$

и

$$\mid GL(n,q) \mid = \prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i) = q^{1+\dots+(n-1)}\prod_{i=0}^{n-1}(q^{n-i} - 1) =$$

$$= q^{n(n-1)/2} \prod_{i=0}^{n-1} (q^{n-i} - 1),$$

причем

$$\prod_{i=0}^{n-1} (q^{n-i} - 1)$$

не делится на $p$, то $U(n,q)$ — силовская $p$–подгруппа группы $GL(n,q)$.

Так как $U(n,q) \leq SL(n,q)$ и

$$| SL(n,q) | = | GL(n,q) | /(q-1),$$

то $U(n,q)$ — силовская $p$–подгруппа группы $SL(n,q)$. □

Обратим внимание, что в следующей теореме поле $P$ произвольное.

**Теорема 15.4.** *(1) Центр группы $GL(n,P)$ состоит из скалярных матриц.*

*(2) Центр группы $SL(n,P)$ состоит из скалярных матриц с единичным определителем.*

*Доказательство.* (1) Через $E_{ij}$ обозначим при $i = j$ единичную матрицу, а при $i \neq j$ — матрицу, которая получается из единичной добавлением единицы на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца. Так как $det E_{ij} = 1$, то $E_{ij} \in SL(n,P)$. Пусть $B = (b_{ij})$ — произвольная матрица, перестановочная с каждой матрицей $E_{ij}$. Так как

$$BE_{ij} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j-1} & b_{1j} + b_{1i} & b_{1j+1} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2j-1} & b_{2j} + b_{2i} & b_{2j+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj-1} & b_{nj} + b_{ni} & b_{nj+1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$





а

$$E_{ij}B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i-1\,1} & \dots & b_{i-1\,n} \\ b_{i1} + b_{j1} & \dots & b_{in} + b_{jn} \\ b_{i+1\,1} & \dots & b_{i+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

то из равенства $BE_{ij} = E_{ij}B$ получаем, что

$$\begin{cases} b_{1j} + b_{1i} = b_{1j} \\ b_{2j} + b_{2i} = b_{2j} \\ \dots \\ b_{i-1\,j} + b_{i-1\,i} = b_{i-1\,j} \\ b_{ij} + b_{ii} = b_{ij} + b_{jj} \\ b_{i+1\,j} + b_{i+1\,i} = b_{i+1\,j} \\ \dots \\ b_{nj} + b_{ni} = b_{nj} \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$b_{1i} = b_{2i} = \ldots = b_{(i-1)i} = b_{(i+1)i} = \ldots = b_{ni} = 0,$$

а $b_{ii} = b_{jj}$. Таким образом, при $i, j = 1, \ldots, n$ получаем, что $B$ — скалярная матрица. Таким образом, если матрица $B$ перестановочна с каждой матрицей $E_{ij}$, то $B$ — скалярная матрица.

Если $\alpha E$ — скалярная матрица, $\alpha \in P^{\#}$, то $\alpha E \cdot A = A\alpha E$ для любой матрицы $A \in GL(n,P)$, поэтому $\alpha E \in Z(GL(n,P))$.

Обратно, если матрица $B \in Z(GL(n,P))$, то она перестановочна с каждой матрицей из $GL(n,P)$, в частности, с каждой матрицей $E_{ij}$, $i, j = 1, ..., n$. Поэтому матрица $B$ будет скалярной. Таким образом, $Z(GL(n,P)) = \{\alpha E \mid \alpha \in P^{\#}\}$.

(2) Из определения центра получаем, что

$$Z(GL(n,P)) \cap SL(n,P) \subseteq Z(SL(n,P)).$$

Обратно, если $B \in Z(SL(n,P))$, то матрица $B$ перестановочна со всеми матрицами из $SL(n,P)$, в частности, с каждой матрицей $E_{ij}, i, j = 1, ..., n$. Поэтому $B$ — скалярная матрица и $B \in Z(GL(n,P))$. Отсюда следует, что

$$Z(SL(n,P)) \subseteq Z(GL(n,P)),$$

поэтому

$$Z(SL(n,P)) = Z(GL(n,P)) \cap SL(n,P).$$

□

**Следствие 15.5.** *(1)* $\mid Z(GL(n,q)) \mid = q-1$;

*(2)* $\mid Z(SL(n,q)) \mid = (n, q-1)$.

*Доказательство.* (1) Так как $Z(GL(n,q))$ состоит из скалярных матриц, то число таких матриц равно числу ненулевых элементов поля $P$, поэтому это число равно $q-1$.

(2) $Z(SL(n,q))$ состоит из скалярных матриц $\alpha E$, $\alpha \in P^{\#}$, для которых $\alpha^n = 1$. Так как мультипликативная группа поля $P$ циклическая, то число решений уравнения $\alpha^n = 1$ равно наибольшему общему делителю $n$ и $q-1$. □





Факторгруппу $GL(n,q)/Z(GL(n,q))$ называют *проективной полной (общей) линейной группой* и обозначают через $PGL(n,q)$. Факторгруппу $SL(n,q)/Z(SL(n,q))$ называют *проективной специальной линейной группой* и обозначают через $PSL(n,q)$.

**Следствие 15.6.** *(1)* $\mid PGL(n,q) \mid = \mid SL(n,q) \mid = q^{n-1}\prod_{i=0}^{n-2}(q^n - q^i)$;

*(2)* $\mid PSL(n,q) \mid = d^{-1} \mid SL(n,q) \mid =$

$= d^{-1}q^{n-1}\prod_{i=0}^{n-2}(q^n - q^i)$, *где* $d = (n, q-1)$.

*Доказательство.* Оба утверждения вытекают из теоремы 15.2 и следствия 15.5. □

Для $n = 2$ получаем

**Следствие 15.7.** *(1)* $\mid GL(2,q) \mid = (q^2-1)(q^2-q)$;

*(2)* $\mid SL(2,q) \mid = q(q^2-1)$;

*(3)* $\mid PGL(2,q) \mid = q(q^2-1)$;
*(4)* $\mid PSL(2,q) \mid =$

$$= \begin{cases} 2^m(2^m-1)(2^m+1), & \text{при } q = 2^m; \\ (1/2)p^m(p^m-1)(p^m+1), & \text{при } q = p^m, p > 2. \end{cases}$$

**Теорема 15.8.** *(1)* $GL(2,2^m) = Z(GL(2,2^m)) \times SL(2,2^m)$. *В частности,*

$$PGL(2,2^m) \simeq SL(2,2^m) = PSL(2,2^m).$$

*(2) При* $p > 2$ *группа* $PGL(2,p^m)$ *содержит нормальную подгруппу индекса 2, изоморфную* $PSL(2,p^m)$.

*Доказательство.* (1) Ясно, что обе подгруппы $Z(GL(2, 2^m))$ и $SL(2, 2^m)$ нормальны в $GL(2, 2^m)$. По теореме 15.4

$$Z(GL(2, 2^m)) \cap SL(2, 2^m) = Z(SL(2, 2^m)).$$

Но если $D \in Z(SL(2, 2^m))$, то $D$ — скалярная матрица с единичным определителем, т.е. $D = \gamma E, \gamma^2 = 1$. Так как $\gamma \in P^{\#}$ и $\mid P^{\#} \mid = 2^m - 1$ — нечетное число, то по теореме Лагранжа в мультипликативной группе поля $P$ нет элементов порядка 2. Поэтому $\gamma = e$ и $D$ — единичная матрица. Таким образом,

$$Z(SL(2, 2^m)) = Z(GL(2, 2^m)) \cap SL(2, 2^m) = E,$$

в частности, $SL(2, 2^m) = PSL(2, 2^m)$.

Так как

$$\mid Z(GL(2, 2^m)) \cdot SL(2, 2^m) \mid = \mid Z(GL(2, 2^m) \mid \times$$

$$\times \mid SL(2, 2^m) \mid = \mid GL(2, 2^m) \mid,$$

то все требования прямого произведения выполняются и

$$GL(2, 2^m) = Z(GL(2, 2^m)) \times SL(2, 2^m).$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$PGL(2, 2^m) = GL(2, 2^m)/Z(GL(2, 2^m)) \simeq SL(2, 2^m).$$

(2) Пусть $p > 2$ и $K = Z(GL(2, p^m)) \cdot SL(2, p^m)$. Ясно, что $K$ — нормальная подгруппа группы $GL(2, p^m)$. По следствию 15.5

$$\mid Z(GL(2, p^m)) \cap SL(2, p^m) \mid = \mid Z(SL(2, p^m) \mid = 2.$$





Поэтому,

$$\mid K \mid = \frac{\mid Z(GL(2, p^m)) \mid\mid SL(2, p^m) \mid}{\mid Z(GL(2, p^m)) \cap SL(2, p^m) \mid} =$$

$$= \frac{(p^m - 1)p^m(p^{2m} - 1)}{2} = \frac{\mid GL(2, p^m) \mid}{2},$$

т.е. индекс $K$ в группе $GL(2, p^m)$ равен 2. Кроме того, $PGL(2, p^m) = GL(2, p^m)/Z(GL(2, p^m))$ содержит подгруппу

$$K/Z(GL(2, p^m)) = Z(GL(2, p^m))SL(2, p^m)/Z(GL(2, p^m)) \simeq$$

$$\simeq SL(2, p^m)/Z(GL(2, p^m)) \cap SL(2, p^m) =$$

$$= SL(2, p^m)/Z(SL(2, p^m)) = PSL(2, p^m),$$

которая имеет индекс 2. □

Доказательство следующей теоремы можно найти в книге Хупперта [26], теорема II.8.27.

**Теорема 15.9.** *Группа $PSL(2, p^m)$ содержит только следующие подгруппы:*

*(1) элементарные абелевы $p$-группы порядков $p, p^2, ..., p^m$;*

*(2) циклические группы порядка $z$, где $z$ делит $(p^m \pm 1)/d$, $d = (2, p^m - 1)$;*

*(3) диэдральные группы порядка $2z$, где число $z$ как в (2);*

*(4) $A_4$ при $p > 2$ или $p = 2$ и $m$ четное;*

*(5) $S_4$ при $p^{2m} \equiv 1 \pmod{16}$;*

*(6) $A_5$ при $p = 5$ или $p^{2m} \equiv 1 \pmod{5}$;*

*(7) полупрямое произведение элементарной абелевой группы порядка $p^k$ с циклической группой порядка $t$, причем $t$ делит $p^k - 1$ и $t$ делит $(p^m - 1)/d$;*

*(8) группы $SL(2,p^k)$ при $k$, делящем $m$, и $PGL(2,p^k)$ при $2k$, делящем $m$.* □



# ГЛАВА 3.
# АБЕЛЕВЫ И НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ

В этой главе и в последующих главах рассматриваются только конечные группы.

## § 16. Строение конечных абелевых групп

В этом параграфе доказывается следующая

**Теорема 16.1.** *Конечная абелева группа является прямым произведением примарных циклических подгрупп. Любые два таких разложения имеют одинаковое число сомножителей каждого порядка.*

Вначале утверждение теоремы 16.1 докажем для примарных абелевых групп. Для этого потребуется следующая

**Лемма 16.2.** *Если $H$ — циклическая подгруппа наибольшего порядка примарной абелевой группы $P$, то существует подгруппа $K$ такая, что $P = H \times K$.*

*Доказательство.* Пусть $P$ — группа порядка $p^n$. Воспользуемся индукцией по $n$. Если $n = 1$, то $P$ — циклическая группа, $H = P$ и $P = H \times E$ — требуемое разложение, т.е. при $n = 1$ лемма справедлива. Предположим, что лемма верна для всех $p$−групп порядка $< \ p^n$.

По теореме Силова в группе $P$ имеются циклические подгруппы порядка $p$, поэтому $\mid H \mid \geq p$ и факторгруппа $P/H$ имеет порядок $< \ p^n$, т.е. к $P/H$ применима индукция. Предположим, что $P/H$ — нециклическая группа. Выберем в ней циклическую подгруппу $T/H$ наибольшего порядка. По индукции существует подгруппа $S/H$ такая, что

$$P/H = T/H \times S/H.$$

Так как $P/H$ нециклическая, а $T/H$ циклическая, то $P/H \neq T/H$ и подгруппы $T$ и $S$ собственные в $P$. К ним также применима индукция, по которой

$$T = H \times T_1, \quad S = H \times S_1.$$

Из того, что

$$T/H \cap S/H = H/H$$

следует, что $T \cap S = H$ и $T_1 \cap S_1 = E$. Теперь,

$$P = TS = (H \times T_1)(H \times S_1) = H \times (T_1 S_1)$$

и лемма справедлива.

Пусть теперь факторгруппа $P/H$ циклическая, $\langle gH \rangle = P/H$ и $\mid P/H \mid = p^a$. Тогда

$$(gH)^{p^a} = g^{p^a} H = H$$

и $p^a$ — наименьшая степень элемента $g$, при которой $g^{p^a} \in H$. Ясно, что $P = H\langle g \rangle$.

Если $g^{p^a} = e$, то $\langle g \rangle \cap H = E$ и произведение $P = H\langle g \rangle$ будет прямым. Значит, $P = H \times \langle g \rangle$.

Пусть $g^{p^a} \neq e$. По выбору $H = \langle h \rangle$ — циклическая подгруппа группы $P$ наибольшего порядка. Пусть $\mid H \mid = p^b$. Так как $g^{p^a} \in H$, то $g^{p^a} = h^t$, где $0 < t < p^b$. Пусть $t = mp^c$ и простое число $p$ не делит $m$. Элементы $h$ и $h^m$ имеют порядок $p^b$ по лемме 3.6, с. 32, поэтому $h^t$ имеет порядок $p^{b-c}$. Теперь

$$(g^{p^a})^{p^{b-c}} = (h^{p^c m})^{p^{b-c}} = (h^{p^{b-c}})^{mp^c} = e$$





и $g$ — элемент порядка $p^{a+b-c}$. По выбору подгруппы $H$ порядок элемента $g$ не должен превышать порядок элемента $h$, т.е. $a + b - c \leq b$ и $c - a \geq 0$. Теперь число $p^{c-a}$ натуральное и можно ввести элемент $f = gh^{-mp^{c-a}}$. Поскольку

$$f^{p^a} = (gh^{-mp^{c-a}})^{p^a} = g^{p^a} h^{-mp^c} = h^t h^{-t} = e,$$

то $f$ — элемент порядка $p^a$. Кроме того, $fH = gh^{-mp^{c-a}} H = gH$. Поэтому $P = \langle f \rangle H$, а так как

$$p^a = \mid f \mid = \mid P : H \mid,$$

то $\langle f \rangle \cap H = E$ и $P = \langle f \rangle \times H$. □

**Теорема 16.3.** *Конечная абелева примарная группа является прямым произведением своих циклических подгрупп. Если имеется два таких разложения*

$$P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_r = Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_s,$$

*то $r = s$ и при подходящей нумерации $\mid P_i \mid = \mid Q_i \mid$ для всех $i$.*

*Доказательство.* Воспользуемся индукцией по $\mid P \mid$. Пусть теорема верна для всех абелевых $p-$групп порядка меньше, чем $\mid P \mid$. Выберем в $P$ циклическую подгруппу $P_1$ наибольшего порядка $p^{a_1}$. Тогда $P = P_1 \times K$ по лемме 16.2. По индукции

$$K = P_2 \times \ldots \times P_r$$

и первое утверждение теоремы доказано.

Для получения второго утверждения удобно множители расположить так, чтобы их порядки не возрастали, т.е.

$$P = \langle g_1 \rangle \times \langle g_2 \rangle \times \ldots \times \langle g_r \rangle, \ P_i = \langle g_i \rangle, \ \mid g_i \mid = p^{a_i}, \quad <1>$$

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k \geq a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots = a_r = 1;$$

$$P = \langle h_1 \rangle \times \langle h_2 \rangle \times \ldots \times \langle h_s \rangle,\ Q_i = \langle h_i \rangle,\ \mid h_i \mid = p^{b_i},\ < 2 >$$

$$b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_l \geq b_{l+1} = b_{l+2} = \ldots = b_s = 1;$$

Рассмотрим множество

$$P^p = \{x^p \mid x \in P\}$$

всех $p-$х степеней элементов из $P$. Так как $P$ — абелева группа, то

$$x^p y^p = (xy)^p \in P^p,\ (x^p)^{-1} = (x^{-1})^p \in P^p$$

и $P^p$ — подгруппа. Кроме того, $P_i^p = \langle g_i^p \rangle$ — подгруппа индекса $p$ в группе $P_i$, т.е. $\mid P_i^p \mid = p^{a_i - 1}$.

В соответствии с разложениями <1> и <2> каждый элемент группы $P$ представим в виде

$$x = g_1^{t_1} \ldots g_r^{t_r} = h_1^{m_1} \ldots h_s^{m_s},$$

поэтому

$$x^p = g_1^{pt_1} \ldots g_k^{pt_k} = h_1^{pm_1} \ldots h_l^{pm_l}$$

и

$$P^p = P_1^p \times P_2^p \times \ldots \times P_k^p = Q_1^p \times Q_2^p \times \ldots \times Q_l^p \quad < 3 >$$

— два разложения подгруппы $P^p$ в прямые произведения циклических подгрупп. Так как $\mid P_i^p \mid = \mid P_i \mid /p$, то $\mid P^p \mid < \mid P \mid$ и к группе $P^p$ применима индукция. Из <3> заключаем, что $k = l$ и $\mid P_i^p \mid = \mid Q_i^p \mid$ для всех $i$. Теперь, $p^{a_i - 1} = p^{b_i - 1}$ и $a_i = b_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Таким образом, $\mid P_i \mid = \mid Q_i \mid$ для $i = 1, 2, \ldots, k$.

Пусть

$$p^d = \mid P_1 \times \ldots \times P_k \mid = \mid Q_1 \times \ldots \times Q_k \mid .$$





Тогда из <1> и <2> заключаем, что

$$\mid P \mid = p^d \mid P_{k+1} \times \ldots \times P_r \mid =$$

$$p^d p^{r-k} = p^d \mid Q_{k+1} \times \ldots \times Q_s \mid = p^d p^{s-k}.$$

Поэтому $r = s$ и теорема полностью доказана. □

**Теорема 16.4.** *Каждая конечная абелева группа является прямым произведением своих силовских подгрупп. Для каждого простого числа $p$ силовская $p-$подгруппа в абелевой группе единственна.*

*Доказательство.* Пусть $G$ — абелева группа порядка $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_t$ — попарно различные простые числа. По теореме Силова в группе $G$ существуют силовские подгруппы $G_{p_1}, G_{p_2}, \ldots, G_{p_t}$, соответствующие простым числам $p_1, p_2, \ldots, p_t$. Силовские подгруппы нормальны в $G$, поскольку группа $G$ абелева. Кроме того, порядки $G_{p_1}$ и $G_{p_2}$ взаимно просты, поэтому

$$G_{p_1} \cap G_{p_2} = E; \quad \mid G_{p_1} G_{p_2} \mid = \mid G_{p_1} \mid\mid G_{p_2} \mid .$$

Это означает, что $G_{p_1} G_{p_2} = G_{p_1} \times G_{p_2}$. Предположим, что для некоторого $k$ уже доказали, что

$$G_{p_1} G_{p_2} \ldots G_{p_k} = G_{p_1} \times G_{p_2} \times \ldots \times G_{p_k}.$$

Тогда подгруппа $H = G_{p_1} \times \ldots \times G_{p_k}$ имеет порядок $p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$, а пересечение $H \cap G_{p_{k+1}}$ — подгруппа порядка делящего $\mid H \mid$ и $\mid G_{p_{k+1}} \mid$. Отсюда следует, что $H \cap G_{p_{k+1}} = E$. Так как $H$ и $G_{p_{k+1}}$ — нормальные подгруппы, то $HG_{p_{k+1}} = H \times G_{p_{k+1}}$. Итак,

$$G_{p_1} \ldots G_{p_{k+1}} = G_{p_1} \times \ldots \times G_{p_{k+1}}.$$

Теперь согласно индукции, группа $G$ разложима в прямое произведение своих силовских подгрупп.

Так как силовские $p$–подгруппы конечной группы сопряжены между собой, то для каждого простого $p$ силовская $p$–подгруппа в абелевой группе единственна. □

**Доказательство** теоремы 16.1. Утверждение теоремы 16.1 является следствием теоремы 16.4 и теоремы 16.3. Действительно, по теореме 16.4 каждая конечная абелева группа разлагается в прямое произведение своих силовских подгрупп. По теореме 16.3 каждая силовская подгруппа является прямым произведением своих циклических подгрупп. Поэтому каждая конечная абелева группа разложима в прямое произведение своих циклических примарных подгрупп.

В конечной абелевой группе $G$ силовская $p$–подгруппа $G_p$ единственна для каждого простого $p$. По теореме 16.3 любые два разложения подгруппы $G_p$ в прямое произведение циклических подгрупп имеют одинаковое число множителей каждого порядка. Поэтому и любые два разложения группы $G$ в прямое произведение примарных циклических подгрупп имеют одинаковое число множителей каждого порядка. □

Вернемся к теореме 16.3. По теореме 4.3, с. 38, все циклические группы одного порядка изоморфны, поэтому циклическую группу можно задать её порядком.

Пусть абелева $p$–группа $P$ порядка $p^a$ разлагается в прямое произведение

$$P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_r \qquad < 4 >$$

циклических подгрупп $P_1, P_2, \ldots, P_r$ порядков





$p^{a_1}, p^{a_2}, \ldots, p^{a_r}$. Ясно, что

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_r.$$

Порядки $(p^{a_1}, p^{a_2}, \ldots, p^{a_r})$ циклических множителей прямого произведения <4> называют *инвариантами* абелевой $p$–группы $P$.

Если две абелевы группы $P$ и $Q$ имеют одинаковые инварианты $(p^{a_1}, p^{a_2}, \ldots, p^{a_r})$, то

$$P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_r, \; Q = Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_r$$

и $\mid P_i \mid = \mid Q_i \mid = p^{a_i}$ для $i = 1, 2, \ldots, r$. Поэтому существуют изоморфизмы $\varphi_i : P_i \to Q_i$, при которых элемент $g_i \in P_i$ отображается в элемент $\varphi_i(g_i) \in Q_i$. По свойствам прямых произведений любой элемент из $P$ однозначно представим в виде $g_1 g_2 \ldots g_r$, где $g_i \in P_i$. Поэтому отображение

$$\varphi(g_1 g_2 \ldots g_r) = \varphi_1(g_1)\varphi_2(g_2)\ldots\varphi_r(g_r)$$

будет изоморфизмом групп $P$ и $Q$. Тем самым доказана следующая теорема.

**Теорема 16.5.** *Примарная абелева группа однозначно определяется своими инвариантами.* □

Для построения произвольных, не обязательно примарных, абелевых групп порядка $n$ поступают следующим образом. Выписывают все возможные инварианты каждой силовской подгруппы, а затем, комбинируя инвариантами силовских подгрупп получают все возможные абелевы группы порядка $n$.

**Пример 16.6.** Перечислим все абелевы группы порядка 16.

Через $C_n$ условимся обозначать циклическую группу порядка $n$. Группа порядка $16 = 2^4$ может обладать следующими инвариантами:

$$(2^4),\ (2^3, 2),\ (2^2, 2^2),\ (2^2, 2, 2),\ (2, 2, 2, 2),$$

которым соответствуют следующие группы:
$C_{16},\ C_8 \times C_2,\ C_4 \times C_4,\ C_4 \times C_2 \times C_2,$
$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2.$

Таким образом, абелевы группы порядка 16 могут быть одного из пяти указанных видов. □

**Пример 16.7.** Перечислим все абелевы группы порядка 1000.

Так как $1000 = 2^3 5^3$, то для силовских подгрупп возможны следующие ситуации. Силовская 2−подгруппа имеет порядок $2^3$, и она либо $C_8$, либо $C_4 \times C_2$, либо $C_2 \times C_2 \times C_2$. Силовская 5−подгруппа имеет порядок $5^3$, и она либо $C_{125}$, либо $C_{25} \times C_5$, либо $C_5 \times C_5 \times C_5$. Таким образом, абелева группа порядка 1000 может быть только одной из следующих групп:
$C_8 \times C_{125},\ C_8 \times C_{25} \times C_5,\ C_8 \times C_5 \times C_5 \times C_5,$
$C_4 \times C_2 \times C_{125},\ C_4 \times C_2 \times C_{25} \times C_5,\ C_4 \times C_2 \times C_5 \times C_5,$
$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_{125},\ C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_{25} \times C_5,$
$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_5 \times C_5 \times C_5.$ □

## § 17. Примарные группы

Напомним, что $p$−*группой* называют группу, порядок которой есть степень простого числа $p$. Ясно, что подгруппы и факторгруппы любой $p$−группы также являются $p$−





группами. *Примарной* называют группу, которая является $p$−группой для некоторого простого $p$.

**Теорема 17.1.** *Центр неединичной примарной группы отличен от единицы.*

*Доказательство.* Пусть $P$ — $p$−группа порядка $p^n$ и

$$K_1, K_2, \ldots, K_t$$

— все различные классы сопряженных элементов группы $P$, $K_i = \{g_i^x \mid x \in P\}$. По следствию 5.19, с. 59, число элементов в классе сопряженных с $g_i$ элементов равно индексу централизатора элемента $g_i$, т.е.

$$\mid K_i \mid = \mid P : C_P(g_i) \mid = p^{a_i}.$$

Поэтому каждый элемент центра группы составляет отдельный класс и наоборот, если $\mid K_j \mid = 1$, то $g_j \in Z(P)$, где $Z(P)$ — центр группы $P$. Итак,

$$P = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_t,$$

где $K_i \cap K_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Пусть $K_1 = \{e\}$. Тогда

$$p^n = 1 + p^{a_2} + \ldots + p^{a_t}.$$

Отсюда следует, что существует $l > 1$ такое, что $a_l = 0$. Но тогда

$$1 = p^{a_l} = \mid P : C_P(g_l) \mid$$

и $g_l \in Z(P)$. □

**Теорема 17.2.** *В примарной группе каждая собственная подгруппа отлична от своего нормализатора.*

*Доказательство.* Пусть $P$ — $p$–группа и $A$ — собственная подгруппа в $P$. Рассмотрим разложение группы $P$ в двойные смежные классы по подгруппе $A$.

$$P = Ax_1A \cup Ax_2A \cup \ldots \cup Ax_tA = A \cup (\cup_{i=2}^{t} Ax_iA). \quad <1>$$

Здесь $x_1 = e$. Используя теорему 5.10, с. 52, получаем

$$| Ax_iA | = | A^{x_i}A | = | A^{x_i} || A | / | A^{x_i} \cap A | .$$

Из <1> получаем

$$| P | = | A | + \sum_{i=2}^{t} | A^{x_i} || A | / | A^{x_i} \cap A | . \qquad <2>$$

Введем обозначения: $| P | = p^n$, $| A | = p^a$. Тогда из <2> следует, что

$$p^{n-a} = 1 + \sum_{i=2}^{t} | A | / | A^{x_i} \cap A | .$$

Так как $p^{n-a} > 1$, то в правой части равенства под знаком суммы существуют слагаемые равные единице, т.е. существует номер $j \geq 2$ такой, что $| A | = | A^{x_j} \cap A |$. Это означает, что $A^{x_j} = A$ и $x_j \in N_P(A)$. Ввиду того, что $j \geq 2$ элемент $x_j$ не принадлежит $A$ и $A$ — собственная подгруппа в $N_P(A)$. □

**Следствие 17.3.** *В примарной группе все максимальные подгруппы нормальны и имеют простые индексы.*

*Доказательство.* Пусть $P$ — $p$–группа и $M < \cdot\, P$. По теореме 17.2 подгруппа $M$ — собственная подгруппа в





своем нормализаторе $N_P(M)$. Из максимальности $M$ следует, что $N_P(M) = P$ и $M \triangleleft P$. По теореме о соответствии в факторгруппе $P/M$ нет нетривиальных подгрупп (т.е. подгрупп отличных от единичной подгруппы и всей группы), поэтому по теореме Силова группа $P/M$ имеет простой порядок. □

**Теорема 17.4.** *В примарной группе пересечение неединичной нормальной подгруппы с центром группы отлично от единицы.*

*Доказательство.* Пусть $P$ — $p$–группа и $A \triangleleft P$, $A \neq 1$. Требуется доказать, что $A \cap Z(P) \neq 1$. Если $a$ — произвольный элемент из $A$, то $a^x \in A^x = A$ для любого элемента $x \in P$. Поэтому $A$ состоит из классов сопряженных элементов группы $P$, т.е.

$$A = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_t,$$

где $K_i = {a_i}^P$. Можно положить, что $K_1 = \{e\}$. Поскольку

$$| K_i | = | P : C_P(a_i) |,$$

то считая $| A | = p^n$, $| K_i | = p^{n_i}$ получаем

$$p^n = 1 + \sum_{i=2}^{t} p^{n_i}.$$

Теперь ясно, что существует $j \geq 2$ такое, что $p^{n_j} = | K_j | = 1$ и $a_j \in Z(P)$. □

**Следствие 17.5.** *Нормальная подгруппа простого порядка примарной группы содержится в центре группы.*

□

**Следствие 17.6.** *Минимальная нормальная подгруппа примарной группы имеет простой порядок и содержится в центре группы.*

*Доказательство.* Пусть $P$ — $p$-группа и $N \cdot\!\lhd P$. Так как $N \neq E$, то $N \cap Z(P) \neq E$, а поскольку $N \cap Z(P) \lhd P$, то $N \leq Z(P)$. В $N$ существует элемент $a$ простого порядка по теореме Силова. Поэтому $< a > \lhd P$ и из условия $N \cdot \lhd P$ следует, что $N =< a >$. □

## § 18. Нильпотентные группы

Группа называется *нильпотентной*, если все ее силовские подгруппы нормальны. В абелевой группе все подгруппы нормальны, поэтому каждая абелева группа нильпотентна. Примарная группа совпадает со своей силовской подгруппой, поэтому каждая примарная группа нильпотентна. В симметрической группе $S_3$ силовская 2−подгруппа $\langle(12)\rangle$ ненормальна, поэтому группа $S_3$ ненильпотентна.

**Лемма 18.1.** *Нильпотентная группа является прямым произведением своих силовских подгрупп.*

*Доказательство.* Пусть $G$ — нильпотентная группа и

$$| G |= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n},$$

где все простые числа $p_i$ различны, и пусть $P_i$ — силовская $p_i$−подгруппа группы $G$. Так как $P_1$ и $P_2 \lhd G$, то $P_1P_2 \lhd G$, а поскольку $P_1 \cap P_2 = E$, то $P_1P_2 = P_1 \times P_2$. Далее

$$(P_1P_2)P_3 \lhd G, \quad P_1P_2 \cap P_3 = E,$$





поэтому

$$(P_1P_2)P_3 = P_1 \times P_2 \times P_3,$$

и т.д. Через $n$ шагов с учетом теоремы 7.5, с. 79, получаем, что

$$G = P_1P_2 \dots P_n = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n.$$

□

**Лемма 18.2.** *(1) Подгруппа и факторгруппа нильпотентной группы нильпотентны.*

*(2) Прямое произведение нильпотентных групп является нильпотентной группой.*

*Доказательство.* (1) Пусть $G$ — нильпотентная группа, $H \leq G$ и $P_1$ — силовская $p$−подгруппа группы $H$. Так как в любой группе силовские $p$−подгруппы сопряжены между собой, то в нильпотентной группе силовская $p$−подгруппа единственна для каждого простого $p$. Поэтому $P_1 \leq P \cap H$, где $P$ — силовская $p$−подгруппа группы $G$. Из того, что $P \cap H$ — $p$−группа и $| H : P_1 |$ не делится на $p$ получаем, что $P_1 = P \cap H$. Но $P \lhd G$, поэтому $P_1 \lhd H$ и $H$ нильпотентна.

Пусть $N \lhd G$. По теореме 7.5, с. 79, подгруппа $PN/N$ — силовская в $G/N$ и $PN/N \lhd G/N$ по теореме о соответствии. Поэтому $G/N$ нильпотентна.

(2) Пусть

$$G = G_1 \times \dots \times G_n$$

и группа $G_i$ нильпотентна для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Пусть $p$ — простое число и $P_i$ — силовская $p$−подгруппа группы $G_i$. Так как $P_i \lhd G_i$ и в прямом произведении элементы из различных множителей перестановочны, то $P_i \lhd G$ и

$$P = P_1 \times \ldots \times P_n \ \lhd \ G.$$

Кроме того, $| \, P \, |= \prod_{i=1}^{n} | \, P_i \, |$ и $P$ — $p$−группа. Ясно, что

$$| \, G : P \, |= \prod_{i=1}^{n} | \, G_i : P_i \, |,$$

поэтому $| \, G : P \, |$ не делится на $p$ и $P$ — силовская $p$−подгруппа группы $G$. □

Напомним, что $\pi(X)$ — множество всех простых делителей порядка группы $X$.

**Теорема 18.3.** *(1) Центр $Z(G)$ неединичной нильпотентной группы $G$ отличен от единицы и $\pi(Z(G)) = \pi(G)$.*

*(2) В нильпотентной группе каждая собственная подгруппа отлична от своего нормализатора.*

*(3) В нильпотентной группе $G$ пересечение неединичной нормальной подгруппы $N$ с центром группы отлично от единицы и $\pi(N) = \pi(N \cap Z(G))$.*

*Доказательство.* (1) Пусть $G$ — неединичная нильпотентная группа. По лемме 18.1 группа $G$ есть прямое произведение своих силовских подгрупп. Но центр каждой силовской подгруппы отличен от $E$ по теореме 17.1. Так как по лемме 12.3, с. 116, центр прямого произведения равен прямому произведению центров сомножителей, то $Z(G) \neq E$. Если $p \in \pi(G)$ и $P$ — силовская $p$−подгруппа группы $G$, то $E \neq Z(P) \leq Z(G)$ и $p \in \pi(Z(G))$. Поэтому $\pi(Z(G)) = \pi(G)$.





(2) Пусть теперь $G$ — нильпотентная группа и $H < G$. По лемме 18.1 группа

$$G = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n,$$

где $P_i$ — силовская $p_i$−подгруппа, а по лемме 18.2 подгруппа

$$H = (H \cap P_1) \times (H \cap P_2) \times \ldots \times (H \cap P_n),$$

где $H \cap P_i$ — силовская $p_i$−подгруппа из $H$. Так как $H$ — собственная подгруппа в $G$, то существует номер $j$ такой, что $H \cap P_j$ — собственная подгруппа в $P_j$. По теореме 17.2 подгруппа $N_{P_j}(H \cap P_j)$ содержит элемент $x_j$, не принадлежащий $H \cap P_j$. Теперь $x_j$ не принадлежит $H$, но $x_j \in N_G(H)$.

(3) Пусть опять $G$ — нильпотентная группа и $E \neq N \lhd G$. Пусть $p \in \pi(N)$ и $P_1$ — силовская $p$−подгруппа в $N$, а $P$ — силовская подгруппа в $G$, содержащая $P_1$. Так как $G$ и $N$ нильпотентны, то $P_1 \lhd N$, а $P \lhd G$. По лемме Фраттини

$$G = N N_G(P_1) = N_G(P_1),$$

т.е. $P_1 \lhd G$. Теперь $P_1 \lhd P$ и по теореме 17.4 пересечение $P_1 \cap Z(P) \neq E$. Так как центр группы $G$ совпадает с прямым произведением центров силовских подгрупп, то

$$E \neq P_1 \cap Z(P) \leq N \cap Z(G)$$

и $p \in \pi(N \cap Z(G))$. Поэтому $\pi(N) \subseteq \pi(N \cap Z(G))$. Поскольку $N \cap Z(G) \leq Z(N)$, то

$$\pi(N \cap Z(G)) \subseteq \pi(Z(N)) = \pi(N).$$

Следовательно, $\pi(N) = \pi(N \cap Z(G))$. □

**Следствие 18.4.** *В нильпотентной группе все максимальные подгруппы нормальны и имеют простые индексы.*

*Доказательство.* Пусть $G$ — нильпотентная группа и $M <\cdot G$. По тереме 18.3(2) подгруппа $M$ — собственная подгруппа в своем нормализаторе $N_G(M)$. Из максимальности $M$ следует, что $N_G(M) = G$ и $M \lhd G$. По теореме о соответствии в факторгруппе $G/M$ нет нетривиальных подгрупп (т.е. подгрупп отличных от единичной подгруппы и всей группы), поэтому по теореме Силова группа $G/M$ имеет простой порядок. □

**Следствие 18.5.** *Минимальная нормальная подгруппа нильпотентной группы имеет простой порядок и содержится в центре группы.*

*Доказательство.* Пусть $N$ — минимальная нормальная подгруппа нильпотентной группы $G$. Так как $N \neq E$, то $N \cap Z(G) \neq E$ по теореме 18.3(3). Поскольку $N \cap Z(G) \lhd G$ и $N \cdot\lhd G$, то $N \leq Z(G)$. Теперь все подгруппы из $N$ нормальны в $G$. По теореме Силова в $N$ существует подгруппа $N_1$ простого порядка. Так как $N_1 \lhd G$, то $N_1 = N$. □

**Теорема 18.6.** *Для группы $G$ следующие требования эквивалентны:*

*(1) $G$ — нильпотентная группа;*

*(2) $G$ — прямое произведение своих силовских подгрупп;*

*(3) каждая собственная подгруппа отлична от своего нормализатора;*

*(4) все максимальные подгруппы нормальны;*

*(5) все подгруппы группы $G$ субнормальны.*





*Доказательство.* Из (1) следует (2), (3) и (4) в силу леммы 18.1 и теоремы 18.3 Из (2) следует (1) по определению прямого произведения. Из (3) следует (4). Пусть выполняется (4), т.е. в группе $G$ все максимальные подгруппы нормальны. Предположим, что группа $G$ ненильпотентна. Тогда в $G$ существует ненормальная силовская подгруппа $P$. Пусть $M$ — максимальная подгруппа группы $G$, содержащая $N_G(P)$. По условию $M \lhd G$, а по лемме Фраттини $G = MN_G(P) = M$, противоречие. Значит допущение неверно и из (4) следует (1). Из (3) следует (5), а из (5) следует (3). □

**Лемма 18.7.** *Если $N$ — максимальная абелева нормальная подгруппа нильпотентной группы $G$, то $C_G(N) = N$.*

*Доказательство.* Пусть $C = C_G(N)$ и предположим, что $N \neq C$. Тогда $N < C$ и $C/N$ — неединичная нормальная по лемме 6.4, с. 63, подгруппа нильпотентной группы $G/N$. По теореме 18.3 $C/N \cap Z(G/N) \neq E$. Пусть $N < H \leq G$ и $H/N$ — подгруппа простого порядка из $C/N \cap Z(G/N)$. Тогда $H \lhd G$ и по лемме 6.7, с. 66, подгруппа $H$ абелева. Получили противоречие условию $N$ — максимальная абелева нормальная подгруппа. □

**Лемма 18.8.** *Пусть $Z \leq Z(G)$. Тогда и только тогда группа $G$ нильпотентна, когда факторгруппа $G/Z$ нильпотентна.*

*Доказательство.* Если группа нильпотентна, то по лемме 18.2 факторгруппа $G/Z$ нильпотентна. Обратно, пусть фактогруппа $G/Z$ нильпотентна и $P$ — силовская подгруппа группы $G$. Тогда $PZ/Z$ — силовская подгруппа группы $G/Z$ по лемме 7.5, с. 79, поэтому $PZ/Z \lhd G/Z$

и $PZ \lhd G$. По лемме Фраттини $G = N_G(P)Z$, а так как $Z \leq Z(G)$, то $P \lhd G$ и группа $G$ нильпотентна. □

Пусть $G$ — неединичная группа. Введем следующие обозначения:

$Z_0(G) = E$,
$Z_1(G) = Z(G)$,
$Z_2(G)/Z_1(G) = Z(G/Z_1(G)), \ldots$ ,
$Z_i(G)/Z_{i-1}(G) = Z(G/Z_{i-1}(G)), \ldots$ .

Ясно, что

$$E = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \ldots \leq Z_{i-1}(G) \leq Z_i(G) \leq \ldots .$$

**Теорема 18.9.** *Тогда и только тогда неединичная группа $G$ нильпотентна, когда существует натуральное число $c$ такое, что $Z_c(G) = G$.*

*Доказательство.* У неединичной нильпотентной группы $G$ центр $Z(G) = Z_1(G)$ отличен от единицы. Поэтому $E = Z_0(G) < Z_1(G)$. Группа $G/Z_1(G)$ нильпотентна по лемме 18.2. Если $G/Z_1(G) = E$, то $c = 1$. Если $G/Z_1(G) \neq E$, то

$$Z_2(G)/Z_1(G) = Z(G/Z_1(G)) \neq E$$

и $E = Z_0(G) < Z_1(G) < Z_2(G)$. Таким образом, получаем цепочку подгрупп

$$E = Z_0(G) < Z_1(G) < \ldots < Z_{i-1}(G) < Z_i(G) < \ldots .$$

Поэтому существует натуральное $c$, для которого $Z_c(G) = G$.

Обратно, пусть $G$ — неединичная группа и $Z_c(G) = G$ для некоторого натурального $c$. Воспользуемся индукцией по $c$. Если $c = 1$, то

$$Z(G) = Z_1(G) = G$$





и группа $G$ абелева. Пусть

$$Z(G) = Z_1(G) \neq G.$$

Для факторгруппы $G/Z_1(G)$ получаем, что

$$Z_{c-1}(G/Z_1(G)) = G/Z_1(G),$$

поэтому группа $G/Z_1(G)$ нильпотентна по индукции. Теперь группа $G$ нильпотентна по лемме 18.8. □

Итак, каждая неединичная нильпотентная группа обладает *возрастающим центральным рядом*

$$E = Z_0(G) < Z_1(G) < \ldots < Z_{i-1}(G) < Z_i(G) < \ldots$$

$$< Z_{c-1}(G) < Z_c(G) = G,$$

где

$$Z_0(G) = E,\ Z_1(G) = Z(G), \ldots ,$$

$$Z_i(G)/Z_{i-1}(G) = Z(G/Z_{i-1}(G)),\ i = 1, \ldots , c.$$

Число $c$ называется *ступенью нильпотентности* группы $G$ и обозначается через $c(G)$. Для единичной группы полагают $c(E) = 0$.

Очевидно, что $c(G) = 1$, когда группа $G \neq E$ и $G$ абелева, а $c(G) = 2$, когда группа $G$ неабелева, но факторгруппа $G/Z(G)$ абелева.

## § 19. Подгруппа Фраттини

В единичной группе $E$ нет собственных подгрупп. В неединичной группе всегда существует собственная подгруппа, например подгруппа $E$. Собственная подгруппа

$M$ неединичной группы $G$ называется *максимальной* подгруппой, если $M$ не содержится ни в какой другой подгруппе, отличной от всей группы $G$, т.е. если из условия $M \leq H \leq G$ следует, что $M = H$ или $H = G$. Для максимальной подгруппы $M$ неединичной группы $G$ используется запись $M <\cdot G$.

**Лемма 19.1.** *Пусть $M <\cdot G$ и $K \triangleleft G$. Тогда:*

*(1) если $\alpha \in AutG$, то $\alpha(M) <\cdot G$;*

*(2) если $K \leq M$, то $M/K <\cdot G/K$;*

*(3) если $K$ не содержится в $M$, то $MK = G$;*

*(4) если $\overline{U}$ — максимальная подгруппа фактор-группы $\overline{G} = G/K$, то существует $U <\cdot G$ такая, что $K \leq U$ и $\overline{U} = U/K$ ;*

*(5) если $M \triangleleft G$, то индекс подгруппы $M$ в группе $G$ является простым числом.*

*Доказательство.* Все утверждения проверяются непосредственно с привлечением теоремы о соответствии. □

*Подгруппой Фраттини* неединичной группы называется пересечение всех её максимальных подгрупп. Подгруппа Фраттини неединичной группы $G$ обозначается через $\Phi(G)$. Таким образом,

$$\Phi(G) = \cap_{M <\cdot G} M.$$

Для единичной группы $E$ полагают $\Phi(E) = E$.

Если $H \leq G$, то пересечение всех подгрупп, сопряженных с $H$, называется *ядром подгруппы* $H$ в группе $G$ и обозначается через $Core_G(H)$.

**Лемма 19.2.** *Пусть $H \leq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*





*(1) $Core_G(H)$ — наибольшая нормальная подгруппа группы $G$, содержащаяся в подгруппе $H$;*

*(2) $\Phi(G) = \cap_{M <\cdot G} Core_G(M)$;*

*(3) $\Phi(G)$ char $G$, в частности, $\Phi(G) \triangleleft G$.*

*Доказательство.* (1) По определению

$$Core_G(H) = \cap_{x \in G} H^x.$$

Поэтому $Core_G(H) \triangleleft G$. Если $K \triangleleft G$ и $K \leq H$, то $K^x = K \leq H^x$ для любого $x \in G$ и $K \leq Core_G(H)$. Поэтому, $Core_G(H)$ — наибольшая нормальная подгруппа группы $G$, содержащаяся в $H$.

(2) Так как подгруппа, сопряжённая максимальной подгруппе, будет также максимальной подгруппой, то

$$\Phi(G) = \cap_{M <\cdot G} M = \cap_{M <\cdot G}(\cap_{x \in G} M^x) =$$
$$= \cap_{M <\cdot G} Core_G(M).$$

(3) Из леммы 19.1(1) следует, что $\Phi(G)$ *char* $G$, поэтому $\Phi(G) \triangleleft G$. □

**Теорема 19.3.** *Подгруппа Фраттини является нормальной нильпотентной подгруппой.*

*Доказательство.* Из леммы 19.2(3) следует, что $\Phi(G) \triangleleft G$. Пусть $P$ — силовская подгруппа в $\Phi(G)$. Предположим, что $P$ ненормальна в $G$. Тогда $N_G(P)$ — собственная в $G$ подгруппа и можно выбрать максимальную подгруппу $M$ группы $G$, содержащую $N_G(P)$. Теперь $P \leq N_G(P) \leq M$, а по лемме Фраттини

$$G = \Phi(G)N_G(P) \leq M.$$

Противоречие. Значит допущение неверно и $P \triangleleft G$. Итак, все силовские подгруппы из $\Phi(G)$ нормальны в $G$. Поэтому $\Phi(G)$ нильпотентна. □

Элемент $x \in G$ называется *необразующим элементом группы* $G$, если для любого подмножества $T$ группы $G$ из условия $\langle T, x\rangle = G$ следует, что $\langle T\rangle = G$.

**Теорема 19.4.** *Подгруппа Фраттини группы $G$ состоит из всех необразующих элементов группы $G$. В частности, если факторгруппа $G/\Phi(G)$ циклическая, то группа $G$ циклическая.*

*Доказательство.* Обозначим через $X$ — множество всех необразующих элементов группы $G$. Пусть $x \in X$ и предположим, что $x$ не содержится в $\Phi(G)$. Тогда существует максимальная подгруппа $M$ группы $G$, не содержащая элемент $x$. Теперь $M \neq G$, а $\langle M, x\rangle = G$, что противоречит тому, что $x$ — необразующий элемент. Поэтому, допущение неверно, и $X \subset \Phi(G)$.

Пусть теперь $y \in \Phi(G)$ и допустим, что существует такое подмножество $T \subset G$, что $\langle T\rangle \neq G$, а $\langle T, y\rangle = G$. Пусть $H$ — максимальная подгруппа группы $G$, содержащая подгруппу $\langle T\rangle$. Так как $y \in \Phi(G) \leq H$, то $G = \langle T, y\rangle \leq H$, противоречие. Поэтому допущение неверно и $y$ — необразующий элемент группы $G$.

Пусть факторгруппа $G/\Phi(G)$ циклическая. Тогда $G/\Phi(G) = \langle g\Phi(G)\rangle$ для некоторого элемента $g \in G$. Поскольку $G = \langle g, \Phi(G)\rangle$, то $G = \langle g\rangle$ и группа $G$ циклическая. □

**Следствие 19.5.** *Если $H \leq G$ и $H\Phi(G) = G$, то $H = G$.* □

**Следствие 19.6.** *Пусть $K \lhd G$. Тогда и только тогда в группе $G$ существует собственная подгруппа $H$ такая, что $G = KH$, когда подгруппа $K$ не содержится в подгруппе Фраттини $\Phi(G)$.*





*Доказательство.* Если в группе $G$ существует собственная подгруппа $H$ такая, что $G = KH$ и $K \subseteq \Phi(G)$, то по теореме 19.4

$$G = \langle K, H\rangle = \langle H\rangle = H,$$

противоречие. Обратно, если $K \not\subseteq \Phi(G)$, то существует максимальная подгруппа $M$, не содержащая $K$. Поэтому $KM = G$. □

Пусть $K$ — подгруппа группы $G$. Подгруппа $H$ называется *добавлением* к подгруппе $K$, если $KH = G$ и $KH_1 \neq G$ для любой подгруппы $H_1$ из $H$, отличной от $H$. Понятно, что любая нормальная подгруппа обладает по крайней мере одним добавлением.

**Лемма 19.7.** *Тогда и только тогда подгруппа $H$ является добавлением к нормальной подгруппе $K$ в группе $G$, когда $HK = G$ и $H \cap K \subseteq \Phi(H)$.*

*Доказательство.* Пусть $H$ — добавление к подгруппе $K$. Допустим, что $H \cap K$ не содержится в подгруппе Фраттини $\Phi(H)$. Тогда существует максимальная подгруппа $H_1$ группы $H$ такая, что $H \cap K$ не содержится в $H_1$. Так как $H \cap K \lhd H$, то

$$H_1(H \cap K) = H;\; G = HK = H_1(H \cap K)K = H_1K,$$

противоречие с определением добавления. Поэтому допущение неверно и $H \cap K \leq \Phi(H)$.

Обратно, пусть

$$HK = G; \quad H \cap K \leq \Phi(H).$$

Предположим, что $H$ не является добавлением к подгруппе $K$. Тогда существует максимальная подгруппа $H_1$ в группе $H$ такая, что $H_1K = G$. По тождеству Дедекинда

$$H = H_1(H \cap K) \leq H_1\Phi(H) = H_1,$$

противоречие. Поэтому допущение неверно и подгруппа $H$ является добавлением к подгруппе $K$. □

**Теорема 19.8.** *Пусть $K \lhd G$. Тогда:*

*(1) $\Phi(K) \leq \Phi(G)$;*

*(2) $\Phi(G)K/K \leq \Phi(G/K)$;*

*(3) если $K \leq \Phi(G)$, то $\Phi(G)/K = \Phi(G/K)$;*

*(4) если $A \leq G$ и $K \leq \Phi(A)$, то $K \leq \Phi(G)$.*

*Доказательство.* (1) Так как $\Phi(K)$ *char* $K$, то $\Phi(K) \lhd G$. Предположим, что $\Phi(K) \not\subseteq \Phi(G)$. Тогда существует максимальная подгруппа $M$ такая, что $\Phi(K)M = G$. По тождеству Дедекинда

$$K = \Phi(K)(K \cap M),$$

а по следствию 19.5 $K = K \cap M$, т.е. $K \leq M$. Теперь $\Phi(K) \leq M$, противоречие. Поэтому допущение неверно и $\Phi(K) \leq \Phi(G)$.

(2) Утверждение вытекает из леммы 19.1(4).

(3) Пусть $K \leq \Phi(G)$. Тогда $K$ содержится в каждой максимальной подгруппе группы $G$ и из леммы 19.1(4) вытекает это утверждение.

(4) Пусть $A \leq G$ и $K \leq \Phi(A)$. Предположим, что $K$ не содержится в $\Phi(G)$. Тогда существует максимальная подгруппа $M$ группы $G$, не содержащая $K$. По тождеству Дедекинда

$$A = A \cap G = A \cap MK = (A \cap M)K.$$





Так как $K \leq \Phi(A)$, то по следствию 19.5 $A = A \cap M$, т.е. $A \leq M$. Теперь $K \leq M$, что противоречит предположению. Поэтому предположение неверно и $K \leq \Phi(G)$. □

**Теорема 19.9.** $\Phi(G_1 \times G_2) = \Phi(G_1) \times \Phi(G_2)$.

*Доказательство.* Пусть $G = G_1 \times G_2$. Так как $G_1 \lhd G$ и $G_2 \lhd G$, то по теореме 19.8(1)

$$\Phi(G_1) \times \Phi(G_2) \subseteq \Phi(G).$$

Пусть

$$G/(\Phi(G_1) \times \Phi(G_2)) = G^*.$$

По теореме 19.8(3)

$$\Phi(G)/(\Phi(G_1) \times \Phi(G_2)) = \Phi(G^*).$$

Ясно, что $G^* = G_1^* \times G_2^*$, где

$$G_1^* \simeq G_1/\Phi(G_1);\ G_2^* \simeq G_2/\Phi(G_2).$$

Опять по теореме 19.8(3) $\Phi(G_1^*) = \Phi(G_2^*) = E$. Так как пересечение максимальных подгрупп группы $G^*$, содержащих подгруппу $G_1^*$ (или подгруппу $G_2^*$) равно 1 и $G_1^* \cap G_2^* = E$, то $\Phi(G^*) = E$. Поэтому

$$\Phi(G) = \Phi(G_1) \times \Phi(G_2).$$

□

**Теорема 19.10.** *Пусть $D \lhd K \lhd G$, $D \leq \Phi(G)$ и $D \lhd G$. Если $K/D$ нильпотентна, то $K$ нильпотентна.*

*Доказательство*. Пусть $P$ — силовская $p$–подгруппа группы $K$. По теореме 7.5, с. 79, $PD/D$ — силовская $p$–подгруппа факторгруппы $K/D$, а т.к. $K/D$ нильпотентна, то $PD/D \lhd K/D$. Поскольку $PD/D$ *char* $K/D$, то

$$PD/D \lhd G/D;\ PD \lhd G.$$

По лемме Фраттини $G = N_G(P)D$, а из следствия 19.5 вытекает, что $G = N_G(P)$ и $P \lhd G$. Теперь $P \lhd K$ и $K$ нильпотентна. □

**Следствие 19.11.** *Если $G/\Phi(G)$ нильпотентна, то $G$ нильпотентна.*

*Доказательство*. Утверждение вытекает из теоремы 19.10 при $D = \Phi(G)$ и $K = G$. □

Теперь рассмотрим подгруппу Фраттини примарной группы.

**Лемма 19.12.** *Пусть $G$ — $p$–группа. Тогда:*

*(1) факторгруппа $G/\Phi(G)$ — элементарная абелева $p$–группа;*

*(2) если $K \lhd G$ и $G/K$ — элементарная абелева группа, то $\Phi(G) \subseteq K$;*

*(3) $\Phi(G)$ является наименьшей нормальной подгруппой группы $G$, факторгруппа по которой элементарная абелева $p$–группа;*

*(4) если $\mid G/\Phi(G) \mid = p^n$, то существуют элементы $x_1, \dots, x_n \in G$ такие, что $G = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.*

*Доказательство*. (1) В $p$–группах максимальные подгруппы нормальны и имеют индекс $p$, см. следствие 17.3,





с. 165. Пусть $\{M_i \mid i = 1, \dots, m\}$ — множество всех максимальных подгрупп группы $G$. Так как факторгруппа

$$G/\Phi(G) = G/\cap_{i=1}^m M_i$$

по лемме 12.11, с. 123, изоморфна подгруппе прямого произведения $\prod_{i=1}^m G/M_i$ групп $G/M_i$ порядка $p$, то $G/\Phi(G)$ элементарная абелева.

(2) Пусть

$$\{H_i/K \mid i = 1, \dots, k\}$$

— множество всех максимальных подгрупп факторгруппы $G/K$. По условию факторгруппа $G/K$ элементарная абелева, поэтому

$$\cap_{i=1}^k (H_i/K) = E;\ K = \cap_{i=1}^k H_i.$$

Теперь

$$\Phi(G) = \cap_{X <\cdot G} X \subseteq \cap_{i=1}^k H_i = K.$$

(3) Утверждение вытекает из (1) и (2).

(4) Так как $G/\Phi(G)$ — элементарная абелева $p$–группа порядка $p^n$, то

$$G/\Phi(G) = \langle x_1\Phi(G)\rangle \times \dots \times \langle x_n\Phi(G)\rangle$$

для некоторых $x_1, \dots, x_n \in G$. Теперь $G = \langle x_1, \dots, x_n, \Phi(G)\rangle$ и $G = \langle x_1, \dots, x_n\rangle$ по теореме 19.4. □

# ГЛАВА 4.
# РАЗРЕШИМЫЕ И СВЕРХРАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ

Напомним, что в этой главе рассматриваются только конечные группы.

## § 20. Коммутант

В абелевой группе любые два элемента перестановочны. Если группа неабелева, то в ней существуют неперестановочные элементы, т.е. такие элементы $a$ и $b$, что $ab \neq ba$. Поэтому естественно рассмотреть элемент $x$, для которого $ab = bax$. Отсюда $x = a^{-1}b^{-1}ab$.

*Коммутатором* элементов $a$ и $b$ называют элемент $a^{-1}b^{-1}ab$, который обозначают через $[a,b]$. Ясно, что $ab = ba[a,b]$.

Подгруппа, порожденная коммутаторами всех элементов группы $G$, называется *коммутантом* группы $G$ и обозначается через $G'$. Таким образом,

$$G' = \langle [a,b] \mid a,b \in G \rangle.$$

**Лемма 20.1.** *Пусть $G$ — группа, $a,b,c \in G$. Тогда:*

*(1)* $[a,b]^{-1} = [b,a]$;

*(2)* $[ab,c] = [a,c]^b[b,c]$;

*(3)* $[a,bc] = [a,c][a,b]^c$;

*(4) если коммутатор $[a,b]$ перестановочен с элементами $a$ и $b$, то $[a^i,b^j] = [a,b]^{ij}$ для любых $i,j \in \mathbb{N}$.*

*Доказательство.* (1)

$$[a,b]^{-1} = (a^{-1}b^{-1}ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}ba = [b,a].$$





(2) $$[a,c]^b[b,c] = b^{-1}a^{-1}c^{-1}acbb^{-1}c^{-1}bc =$$
$$= (ab)^{-1}c^{-1}abc = [ab,c].$$

(3) $$[a,c][a,b]^c = a^{-1}c^{-1}acc^{-1}a^{-1}b^{-1}abc =$$
$$= a^{-1}(bc)^{-1}abc = [a,bc].$$

(4) Пусть $d = [a,b]$. По условию $da = ad$, $db = bd$. Поскольку $d = a^{-1}b^{-1}ab$, то $ad = b^{-1}ab$, а т.к. $da = ad$, то

$$b^{-1}a^ib = (b^{-1}ab)^i = (ad)^i = a^id^i;$$

$$b^{-2}a^ib^2 = b^{-1}(b^{-1}a^ib)b =$$
$$= b^{-1}(a^id^i)b = b^{-1}a^ibd^i = a^id^{2i.}$$

Используя индукцию по $j$ получаем:

$$b^{-j}a^ib^j = b^{-1}(b^{-(j-1)}a^ib^{j-1})b =$$
$$= b^{-1}(a^id^{(j-1)i})b = b^{-1}a^ibd^{(j-1)i} = a^id^{ji}.$$

Поэтому $[a^i,b^j] = d^{ij} = [a,b]^{ij}$. □

**Лемма 20.2.** *(1) Если $H \leq G$, то $H' \leq G'$.*

*(2) $G'$ char $G$, в частности, $G' \lhd G$.*

*(3) Если $H \lhd G$, то $H' \lhd G$.*

*(4) Если $G = A \times B$, то $G' = A' \times B'$.*

*Доказательство.* (1) Очевидно.

(2) Пусть $a,b$ — произвольные элементы группы $G$ и $\psi$ — произвольный автоморфизм группы $G$. Тогда

$$\psi([a,b]) = \psi(a)^{-1}\psi(b)^{-1}\psi(a)\psi(b) = [\psi(a),\psi(b)].$$

Итак, образ коммутатора вновь является коммутатором. Поэтому $G'$ *char* $G$.

(3) Если $H \lhd G$, то $H' char H \lhd G$ и $H' \lhd G$ по лемме 14.4(1).

(4) Из (1) следует, что $A' \times B' \leq G'$. Если $[a_1b_1, a_2b_2]$ — произвольный коммутатор, $a_1, a_2 \in A,\ b_1, b_2 \in B$, то

$$[a_1b_1, a_2b_2] = [a_1, a_2][b_1, b_2]$$

и $G' \leq A' \times B'$. □

**Теорема 20.3.** (Миллер) *(1) Факторгруппа $G/G'$ абелева;*

*(2) если $N \lhd G$ и $G/N$ абелева, то $G' \leq N$;*

*(3) если $H \leq G$, $G' \leq H$, то $H \lhd G$ и $G/H$ абелева.*

*Доказательство.* (1) Для любых двух элементов $aG', bG'$ факторгруппы $G/G'$ имеем:

$$aG'bG' = abG' = ba[a,b]G' = baG' = bG'aG'.$$

Поэтому $G/G'$ абелева.

(2) Пусть $a$ и $b$ — произвольные элементы группы $G$. По условию факторгруппа $G/N$ абелева, поэтому

$$aNbN = bNaN; \quad abN = baN.$$

По свойствам смежных классов $(ba)^{-1}ab \in N$, поэтому $[a, b] \in N$ и $G' \leq N$.

(3) Пусть $H \leq G$ и $G' \leq H$. По теореме о соответствии $H/G' \leq G/G'$. Но $G/G'$ абелева, поэтому

$$H/G' \lhd G/G'; \ H \lhd G.$$

У абелевой группы все факторгруппы абелевы. Следовательно,

$$G/H \simeq G/G'/H/G'$$

абелева. □





**Теорема 20.4.** *Группа нильпотентна тогда и только тогда, когда её коммутант содержится в подгруппе Фраттини.*

*Доказательство.* Пусть $G$ — нильпотентная группа. По следствию 18.4, с. 171, все максимальные подгруппы в группе $G$ нормальны и имеют простые индексы. Поэтому, если $M <\cdot\ G$, то $G/M$ абелева и $G' \leq M$ по теореме 20.3(2). Теперь

$$G' \leq \cap_{M <\cdot\ G} M = \Phi(G).$$

Обратно, пусть $G' \leq \Phi(G)$. Тогда $G/\Phi(G)$ абелева и по следствию 19.11, с. 181, группа $G$ нильпотентна. □

**Теорема 20.5.** $G' \cap Z(G) \leq \Phi(G)$.

*Доказательство.* Положим $D = G' \cap Z(G)$. Допустим, что $D$ не содержится в $\Phi(G)$. Тогда существует максимальная подгруппа $M$ в группе $G$ такая, что $DM = G$. Если $g = dm$ — произвольный элемент группы $G$, где $d \in D$, $m \in M$, то $M^g = M^m = M$. Поэтому $M \lhd G$ и $G' \subseteq M$. Теперь $G = M$, противоречие. □

Подгруппа $G'' = (G')'$ называется *вторым коммутантом* группы $G$, а $G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$ — *$i$−м коммутантом.*

**Лемма 20.6.** *Пусть $N \lhd G$. Тогда*

$$(G/N)^{(i)} = G^{(i)}N/N$$

*для любого $i \in \mathbb{N}$.*

*Доказательство.* Обозначим $(G/N)' = K/N$. По теореме 20.3(1) факторгруппа

$$G/N/K/N \simeq G/K$$

абелева, а по теореме 20.3(2) $G' \leq K$. Итак, $K \geq G'N$. Обратно,

$$(G/N)\big/(G'N/N) \simeq G/G'N$$

абелева по теореме 20.3(3). По теореме 20.3(2) $K/N \leq G'N/N$ и $K \leq G'N$. Следовательно, $K = G'N$ и $(G/N)' = G'N/N$. Для $i = 1$ утверждение верно.

Предположим, что утверждение верно для $t$, т.е.

$$(G/N)^{(t)} = G^{(t)}N/N,$$

и докажем его справедливость для $t+1$. Ясно, что

$$(G/N)^{(t+1)} = ((G/N)^{(t)})' = (G^{(t)}N/N)' =$$
$$= (G^{(t)}N)'N/N \geq G^{(t+1)}N/N.$$

С другой стороны,

$$G^{(t)}N/N\big/G^{(t+1)}N/N \simeq G^{(t)}N\big/G^{(t+1)}N \simeq$$
$$\simeq G^{(t)}\big/G^{(t)} \cap G^{(t+1)}N$$

является абелевой группой поскольку

$$(G^{(t)})' = G^{(t+1)} \leq G^{(t)} \cap G^{(t+1)}.$$

Следовательно,

$$(G/N)^{(t+1)} = (G^{(t)}N/N)' \leq G^{(t+1)}N/N.$$

□

Для двух подгрупп $A$ и $B$ группы $G$ положим

$$\big[A,B\big] = \langle [a,b] \mid a \in A, b \in B\rangle.$$

Подгруппу $\big[A,B\big]$ называют *взаимным коммутантом подгрупп* $A$ и $B$. Таким образом, $\big[A,B\big]$ — это подгруппа группы $G$, порождённая всеми коммутаторами $[a,b]$, где $a \in A,\ b \in B$. Ясно, что $G' = \big[G,G\big]$.





**Лемма 20.7.** *Пусть $A$ и $B$ — подгруппы группы $G$. Тогда:*

*(1) $\big[A,B\big] = \big[B,A\big]$;*

*(2) $\big[A,B\big] \lhd \langle A \cup B\rangle$;*

*(3) если $A_1 \leq A,\ B_1 \leq B$, то $\big[A_1,B_1\big] \leq \big[A,B\big]$;*

*(4) $\big[A,B\big] \leq A$ тогда и только тогда, когда $B \leq N_G(A)$;*

*(5) если $A$ и $B \lhd G$, то $\big[A,B\big] \leq A \cap B$.*

*Доказательство.* (1) Так как $[b,a] = [a,b]^{-1} \in \big[A,B\big]$, то $\big[B,A\big] \leq \big[A,B\big]$. Аналогично, $[a,b] = [b,a]^{-1} \in \big[B,A\big]$ и $\big[A,B\big] \leq \big[B,A\big]$.

(2) Пусть $a_1, a_2 \in A,\ \ b_1, b_2 \in B$. Тогда из леммы 20.1(2,3) получаем:

$$[a_1,b_1]^{a_2} = [a_1a_2,b_1][a_2,b_1]^{-1} \in \big[A,B\big];$$

$$[a_1,b_1]^{b_2} = [a_1,b_2]^{-1}[a_1,b_1b_2] \in \big[A,B\big].$$

Поэтому, $\big[A,B\big] \lhd \langle A \cup B\rangle$.

(3) Очевидно.

(4) $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab \in A$ равносильно тому, что $b^{-1}ab \in A$, т.е. $B \leq N_G(A)$.

(5) Пусть $A$ и $B$ — нормальные подгруппы группы $G$. Тогда

$$[a,b] = a^{-1}(b^{-1}ab) \in A,\ \ [a,b] = (a^{-1}b^{-1}a)b \in B$$

и $\big[A,B\big] \leq A \cap B$. □

**Лемма 20.8.** *Пусть группа $G = AB$. Тогда:*

*(1) смежные классы $a\big[A,B\big]$ и $b\big[A,B\big]$ перестановочны для любых $a \in A,\ b \in B$;*

*(2) если $A_1 \lhd A$, то $A_1\big[A,B\big] \lhd G$;*

*(3) $G' = A'B'\big[A,B\big]$.*

*Доказательство.* (1) Так как $\big[A,B\big] \lhd G$, то

$$a\big[A,B\big]b\big[A,B\big] = ab\big[A,B\big] =$$

$$= ba[a,b]\big[A,B\big] = ba\big[A,B\big] = b\big[A,B\big]a\big[A,B\big].$$

(2) Пусть $A_1 \lhd A$. Тогда $A_1\big[A,B\big]/\big[A,B\big]$ — нормальная подгруппа группы $A\big[A,B\big]/\big[A,B\big]$, а из (1) следует, что $A_1\big[A,B\big]/\big[A,B\big]$ нормальна в $G/\big[A,B\big]$. Итак, $A_1\big[A,B\big] \lhd G$.

(3) Ясно, что $A'B'\big[A,B\big] \leq G'$. Так как подгруппа

$$A'\big[A,B\big] \lhd G,\ \ B'\big[A,B\big] \lhd G$$

и $G/A'B'\big[A,B\big]$ абелева по (1) и теореме Миллера, то $G' \leq A'B'\big[A,B\big]$. □

**Теорема 20.9.** (Ито) *Если группа $G = AB$, подгруппы $A$ и $B$ абелевы, то коммутант $G'$ абелев.*

*Доказательство.* По лемме 20.8(3) коммутант $G' = \big[A,B\big]$. Пусть $a_1, a_2$ — произвольные элементы подгруппы $A$, $b_1, b_2$ — произвольные элементы подгруппы $B$. Введем обозначения:

$$a_1^{b_2} = a_3b_3,\ b_1^{a_2} = b_4a_4,\ a_3, a_4 \in A,\ b_3, b_4 \in B.$$

Учитывая абелевость подгрупп $A$ и $B$ получаем:

$$[a_1, b_1]^{a_2b_2} = [a_1, b_1^{a_2}]^{b_2} = [a_1, b_4a_4]^{b_2} =$$

$$= [a_1, b_4]^{b_2} = [a_1^{b_2}, b_4] = [a_3b_3, b_4] = [a_3, b_4];$$

$$[a_1, b_1]^{b_2a_2} = [a_1^{b_2}, b_1]^{a_2} = [a_3b_3, b_1]^{a_2} =$$

$$= [a_3, b_1]^{a_2} = [a_3, b_1^{a_2}] = [a_3, b_4a_4] = [a_3, b_4].$$





Поэтому

$$[a_1, b_1]^{a_2b_2} = [a_1, b_1]^{b_2a_2}$$

и

$$[b_2^{-1}, a_2^{-1}][a_1, b_1] = [a_1, b_1][b_2^{-1}, a_2^{-1}].$$

Отсюда следует, что коммутант группы $G$ абелев. □

Для группы $G$ положим $K_0(G) = G$. Определим для каждого $i \in \mathbb{N}$ подгруппу $K_i(G) = \big[K_{i-1}(G), G\big]$. Ясно, что $K_1(G) = \big[K_0(G), G\big] = G'$.

**Лемма 20.10.** *(1) $K_i(G)$ — характеристическая подгруппа группы $G$ для любого $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;*

*(2) $K_i(G) \leq K_{i-1}(G)$ для всех $i \in \mathbb{N}$;*

*(3) $K_i(G)/K_{i+1}(G) \leq Z(G/K_{i+1}(G))$ для всех $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

*Доказательство.* (1) Применим индукцию по $i$. Для $i = 1$ подгруппа $K_1(G) = G'$ является характеристической подгруппой группы $G$. Пусть уже доказано, что $K_i(G)$ *char* $G$ и пусть $f \in \mathrm{Aut}G$, $a \in K_i(G)$, $g \in G$. Тогда

$$f([a,g]) = [f(a), f(g)] \in \big[K_i(G), G\big] = K_{i+1}(G)$$

и $K_{i+1}(G)$ *char* $G$.

(2) Следует из леммы 20.7(4).

(3) Если $a \in K_i(G)$, $g \in G$, то

$$aK_{i+1}(G)gK_{i+1}(G) = agK_{i+1}(G) = ga[a,g]K_{i+1}(G) =$$

$$= gaK_{i+1}(G) = gK_{i+1}(G)aK_{i+1}(G)$$

и

$$K_i(G)/K_{i+1}(G) \leq Z(G/K_{i+1}(G)),\ \ i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

□

Таким образом, для группы $G$ построена цепочка подгрупп:

$$G = K_0(G) \geq K_1(G) \geq \ldots \geq K_i(G) \geq \ldots$$

с центральными факторами

$$K_{i-1}(G)/K_i(G) \leq Z(G/K_i(G)), \ i \in \mathbb{N}.$$

**Теорема 20.11.** *(1) Если существует натуральное число $m$ такое, что $K_m(G) = E$, то группа $G$ нильпотентна.*

*(2) Ступень нильпотентности нильпотентной группы $G$ есть наименьшее натуральное число $n$, для которого $K_n(G) = E$.*

*Доказательство.* (1) Применим индукцию по $m$. Если $m = 1$, то $K_1(G) = G' = E$ и группа $G$ абелева. Пусть $m > 1$ и $K_m(G) = E, \ K_{m-1}(G) \neq E$. Тогда подгруппа $K_{m-1}(G) \leq Z(G)$, а факторгруппа $G/K_{m-1}(G)$ нильпотентна по индукции. По лемме 18.8, с. 172, группа $G$ нильпотентна.

(2) Пусть $G$ — нильпотентная группа ступени нильпотентности $n$. Тогда $n$ — наименьшее натуральное число, для которого $Z_n(G) = G$. Для сокращения записи положим $K_i = K_i(G), \ Z_i = Z_i(G)$. Проверим, используя индукцию по $n$, что

$K_i \leq Z_{n-i}$ для всех $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. <1>

При $i = 0$ утверждение тривиально: $K_0 = G \leq Z_n = G$. Пусть уже доказано, что $K_{i-1} \leq Z_{n-i+1}$. Так как

$$Z_{n-i+1}/Z_{n-i} = Z(G/Z_{n-i}),$$

то

$$K_i = \langle [a, g] \mid a \in K_{i-1}, \ g \in G \rangle \leq$$





$$\leq \langle [a, g] \mid a \in Z_{n-i+1}, \ g \in G \rangle \leq Z_{n-i}$$

и <1> доказано. В частности, при $i = n$ из <1> получаем: $K_n \leq Z_0 = E$.

Пусть $t$ — наименьшее натуральное число, для которого $K_t = E$. Ясно, что $t \leq n$. Проверим, используя индукцию по $t$, что

$$K_{t-i} \leq Z_i \ \text{ для всех } \ i \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \qquad < 2 >$$

При $i = 0$ утверждение тривиально: $K_t = E \leq Z_0 = E$. Пусть уже доказано, что $K_{t-i+1} \leq Z_{i-1}$. Поскольку

$$G/K_{t-i+1}/Z_{i-1}/K_{t-i+1} \simeq G/Z_{i-1},$$

то существует эпиморфизм группы $G/K_{t-i+1}$ на группу $G/Z_{i-1}$ с ядром $Ker f = Z_{i-1}/K_{t-i+1}$. Так как

$$K_{t-i}/K_{t-i+1} \leq Z(G/K_{t-i+1})$$

по лемме 20.10(3), то

$$f(K_{t-1}/K_{t-i+1}) \leq Z(G/Z_{i-1}) = Z_i/Z_{i-1}$$

и <2> доказано. В частности, при $i = t$ из <2> получаем: $G = Z_t$ и $t \geq n$. Теперь, $t = n$. □

**Пример 20.12.** В лемме 11.8, с. 111, для подгрупп $H$ и $K \lhd G, \ K \leq H$ введена подгруппа

$$C_G(H/K) = \langle g \in G \mid g^{-1}h^{-1}gh \in K, \ h \in H \rangle,$$

которая является нормальной подгруппой группы $G$ и факторгруппа $G/C_G(H/K)$ изоморфна группе $\mathrm{Aut}_G(H/K)$. Ясно, что

$$C_G(H/K) = \{g \in G \mid [g, H] \subseteq K\}.$$

□

## § 21. Разрешимые группы

Для любой неединичной группы $G$ можно построить цепочку коммутантов

$$G \geq G' \geq G'' \geq \ldots \geq G^{(i)} \geq G^{(i+1)} \geq \ldots .$$

Если существует номер $n$ такой, что $G^{(n)} = E$, то группа $G$ называется *разрешимой*.

Наименьшее натуральное $n$, для которого $G^{(n)} = E$, называется *ступенью разрешимости группы* $G$ или *производной длиной* и обозначается через $d(G)$. Для единичной группы полагают $d(E) = 0$. Группа, которая не является разрешимой, называется *неразрешимой*. Неединичная абелева группа $G$ имеет цепочку коммутантов $G > G' = E$. Поэтому абелевы группы разрешимы ступени разрешимости 1.

**Лемма 21.1.** *Нильпотентные группы разрешимы.*

*Доказательство.* Пусть $G$ — нильпотентная группа и $M_1 <\cdot\, G$. По следствию 18.4, с. 171, подгруппа $M_1$ нормальна и $|\, G : M_1 \,|$ — простое число. По теореме Миллера $G' \leq M_1$. Если теперь $M_2 <\cdot\, M_1$, то опять

$$M_2 \lhd M_1, \ |\, M_1 : M_2 \,| \text{ — простое число}$$

и $G'' \leq M_1' \leq M_2$. Пусть

$$|\, G \,| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$$

— каноническое разложение числа $|\, G \,|$ и

$$n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_t.$$

Тогда $G^{(n)} = E$ и $G$ — разрешимая группа ступени не выше $n$. □





**Лемма 21.2.** *(1) Подгруппы и факторгруппы разрешимой группы разрешимы.*

*(2) Если $N \lhd G$, $N$ и $G/N$ разрешимы, то $G$ разрешима.*

*(3) Прямое произведение разрешимых групп является разрешимой группой.*

*Доказательство.* (1) Пусть $G$ — разрешимая группа и $d(G) = n$. Если $H \leq G$, то

$$H' = \langle [h_1, h_2] \mid h_1, h_2 \in H \rangle \leq G'.$$

Аналогично, $H^{(i)} \leq G^{(i)}$ при любом $i = 1, 2, \ldots$ Поэтому $H^{(n)} \leq G^{(n)} = E$ и $H$ разрешима, причем ступень разрешимости $H$ не выше ступени разрешимости $G$.

Пусть $N \lhd G$. По лемме 20.6,

$$(G/N)^{(n)} = G^{(n)}N/N = E$$

и $G/N$ — разрешимая группа ступени не выше $n$.

(2) Пусть $N$ — разрешимая нормальная подгруппа группы $G$, $d(N) = n$, а факторгруппа $G/N$ разрешима ступени разрешимости $m$. Тогда

$$(G/N)^{(m)} = G^{(m)}N/N = N/N$$

и $G^{(m)} \subseteq N$. Теперь

$$G^{(m+n)} \leq N^{(n)} = E$$

и $G$ — разрешимая группа ступени не выше $n + m$.

(3) Пусть $G = G_1 \times G_2$, где $G_1$ и $G_2$ — разрешимые группы ступени разрешимости $n_1$ и $n_2$ соответственно. По теореме об изоморфизме $G/G_1 \simeq G_2$, поэтому по (2) получаем, что $G$ — разрешимая группа ступени не выше $n_1 + n_2$. □

**Теорема 21.3.** *(1) В разрешимой неединичной группе минимальная нормальная подгруппа является элементарной абелевой $p$−подгруппой для некоторого простого $p$.*

*(2) В разрешимой неединичной группе максимальные подгруппы имеют примарные индексы.*

*(3) Главные факторы разрешимой неединичной группы являются элементарными абелевыми примарными группами.*

*(4) Композиционные факторы разрешимой неединичной группы имеют простые порядки.*

*Доказательство.* (1) Пусть $N$ — минимальная нормальная подгруппа разрешимой группы $G$. Так как $N'$ — характеристическая подгруппа в $N$, то $N' \triangleleft G$ и из минимальности $N$ следует, что $N' = 1$, т.е. подгруппа $N$ абелева. Теперь $N$ — элементарная абелева $p$−подгруппа для некоторого простого $p$ по теореме 13.4, с. 131.

(2) Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть $M$ — максимальная подгруппа разрешимой группы $G$. Если $N$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, то $N$ — элементарная абелева $p$−группа для некоторого простого числа $p$. Если $N$ не содержится в $M$, то $MN$ является подгруппой группы $G$, содержащей подгруппу $M$ в качестве собственной подгруппы. Поэтому $NM = G$ и

$$| G : M |=| N : N \cap M |= p^i.$$

Пусть $N \leq M$. Тогда в факторгруппе $G/N$ по индукции подгруппа $M/N$ имеет примарный индекс, поэтому индекс

$$| G : M |=| G/N : M/N |$$

примарен.





(3) Пусть $H/K$ — главный фактор группы $G$. Тогда $H/K$ — минимальная нормальная подгруппа факторгруппы $G/K$, поэтому $H/K$ — элементарная абелева примарная группа по (1).

(4) Пусть $H/K$ — композиционный фактор группы $G$. Тогда $K$ — наибольшая нормальная подгруппа в $H$ и $H/K$ — простая группа по теореме 6.12, с. 70. Так как $H/K$ разрешима, то $H/K$ отлична от своего коммутанта, поэтому $H/K$ абелева и по теореме 6.5, с. 63, имеет простой порядок. □

Обратим внимание на то, что в простой группе $PSL(2,7)$ индексы максимальных подгрупп принадлежат множеству $\{7,8\}$. Поэтому группа с примарными индексами максимальных подгрупп может быть неразрешимой.

**Теорема 21.4.** *Для группы $G$ следующие утверждения эквивалентны:*

*(1) $G$ — разрешимая группа;*

*(2) каждая неединичная подгруппа группы $G$ отлична от своего коммутанта;*

*(3) группа $G$ обладает нормальным рядом с абелевыми факторами;*

*(4) группа $G$ обладает субнормальным рядом с абелевыми факторами.*

*Доказательство.* Пусть дано (1), т.е. $G$ — разрешимая группа. Пусть ступень разрешимости группы $G$ равна $n$. Тогда

$$G \ > \ G' \ > \ G'' \ > \ \ldots > \ G^{(n-1)} \ > \ G^{(n)} = E.$$

Факторы этого ряда по теореме Миллера абелевы. Поэтому этот ряд является нормальным рядом с абелевыми факторами. Так как каждый нормальный ряд является субнормальным рядом, то из (1) следует (3) и (4), а из (3) следует (4).

По лемме 21.2 в разрешимой группе каждая подгруппа разрешима. Поэтому из (1) следует (2).

Пусть дано (4), т.е. группа $G$ обладает субнормальным рядом

$$G = H_0 \geq H_1 \geq H_2 \geq \ldots \geq H_{t-1} \geq H_t = E$$

с абелевыми факторами $H_i/H_{i+1}$, $i = 0, \ldots, t-1$. По теореме Миллера получаем, что

$$G' \leq H_1,\ G'' = (G')' \leq (H_1)' \leq H_2, \ldots,$$

$$G^{(t)} = (G^{(t-1)})' \leq (H_{t-1})' \leq H_t = E$$

и группа $G$ разрешима. Таким образом из (4) следует (1).

Пусть дано (2), т.е. в группе $G$ каждая неединичная подгруппа отлична от своего коммутанта. Тогда $G > G'$. Если $G^{(i)} \neq E$, то $G^{(i)} > G^{(i+1)}$. Поэтому существует натуральное $k$ такое, что $G^{(k)} = E$. Следовательно, группа разрешима и из (2) следует (1). □

$p$*–Замкнутой* называют группу с нормальной силовской $p$–подгруппой.

**Лемма 21.5.** *Если $G$ — не $p$–замкнутая группа и $D = P_1 \cap P_2$ — пересечение двух различных силовских $p$–подгрупп $P_1$ и $P_2$ наибольшего порядка, то $N_G(D)$ — не $p$–замкнутая группа.*

*Доказательство.* Пусть $B_i = N_{P_i}(D)$. Так как в примарных группах собственные подгруппы отличны от своих нормализаторов, то $D$ — собственная в $B_i$ подгруппа. Предположим, что $N_G(D)$ — $p$–замкнутая группа, и





пусть $T$ — нормальная силовская $p$–подгруппа подгруппы $N_G(D)$. Через $P$ обозначим силовскую в $G$ подгруппу, содержащую $T$. Так как $D < B_i \leq T \leq P$ и $D$ — пересечение силовских $p$–подгрупп наибольшего порядка, то $P = P_1$ и $P = P_2$, противоречие. □

**Теорема 21.6.** *Пусть $G$ — группа порядка $p^n q$, где $p$ и $q$ — различные простые числа. Тогда:*

*(1) если $p > q$, то силовская $p$–подгруппа нормальна в $G$;*

*(2) если $q > p^n$, то силовская $q$–подгруппа нормальна в $G$;*

*(3) если $q < p^n$, но $p < q$, то в группе $G$ есть неединичная нормальная $p$–подгруппа.*

*Доказательство.* Пусть $P$ и $Q$ — силовские $p$–подгруппа и $q$–подгруппа группы $G$. Ясно, что $| G : N_G(P) | = 1$ или $q$, а по теореме Силова

$$| G : N_G(P) | = 1 + kp; \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Аналогично,

$$| G : N_G(Q) | = p^t = 1 + kq; \quad t,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

(1) Если $p > q$, то $| G : N_G(P) | = 1$ и $P$ — нормальная подгруппа группы $G$.

(2) Если $q > p^n$, то $| G : N_G(Q) | = 1$ и $Q$ — нормальная подгруппа группы $G$.

(3) Теперь пусть $q > p$ и $q < p^n$. Если $P$ — нормальная подгруппа группы $G$, то утверждение (3) справедливо. Пусть $P$ не является нормальной подгруппой группы $G$ и пусть $P_1$ и $P_2$ — различные силовские $p$–подгруппы

группы $G$, для которых пересечение $D = P_1 \cap P_2$ имеет наибольший порядок. Так как

$$| P_1P_2 |=| P_1 || P_2 | / | D |= p^n p^n / | D |\leq p^n q,$$

то $D \neq E$. Если $D$ — нормальная подгруппа группы $G$, то теорема доказана. Пусть $D$ не является нормальной подгруппой группы $G$. По предыдущей лемме подгруппа $T = N_G(D)$ не является $p$-группой, поэтому некоторая силовская $q$−подгруппа $Q$ группы $G$ содержится в $T$. Так как $G = P_1Q$, то каждый элемент $g \in G$ представим в виде $g = ba$, где $a \in P_1,\ b \in Q$. Поэтому

$$D^g = D^{ba} = D^a \leq \langle D, P_1\rangle = P_1.$$

□

**Следствие 21.7.** *Группа порядка $p^n q$ разрешима для любого $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.*

*Доказательство.* По теореме 21.6 группа $G$ порядка $p^n q$ не простая и содержит неединичную примарную нормальную подгруппу $N$. Теперь подгруппа $N$ разрешима по лемме 21.1, а факторгруппа $G/N$ разрешима либо по индукции, либо по лемме 21.1. Из леммы 21.2 следует, что группа $G$ разрешима. □

Отметим, что приведенное доказательство теоремы 21.6 элементарное и основывается на теореме Силова. Более сложно доказывается следующая теорема.

**Теорема 21.8.** (Бернсайд) *Группа порядка $p^n q^m$ разрешима для любых $n, m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.*

Доказательство теоремы 21.7 имеется в монографиях [23], [28], [29].





**Теорема 21.9.** (Фейт, Томпсон) *Группы нечетного порядка разрешимы.*

Доказательство теоремы 21.8 опубликовано в работе Feit W., Thompson J. Solvability of groups of odd order // Pacif.J.Math. — 1963. – 13,№3. P.775–1029.

## § 22. Подгруппа Фиттинга

Произведение всех нормальных нильпотентных подгрупп группы $G$ называют *подгруппой Фиттинга* группы $G$ и обозначают через $F(G)$. Множество простых делителей порядка группы $G$ обозначается через $\pi(G)$, а наибольшую нормальную $p$−подгруппу группы $G$ — через $O_p(G)$.

**Лемма 22.1.** *(1) $F(G)$ — наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа группы $G$;*
*(2) $F(G) = \prod_{p\in\pi(G)} O_p(G)$;*
*(3) $F(G)$ char $G$.*

*Доказательство.* (1) Пусть $H$ и $K$ — нильпотентные нормальные подгруппы группы $G$ и пусть $H_p$ и $K_p$ — силовские $p$−подгруппы из $H$ и $K$. Так как $H_p$ *char* $H$, а $H \triangleleft G$, то $H_p \triangleleft G$ по лемме 9.10, с. 96. Аналогично, $K_p \triangleleft G$, поэтому $H_pK_p \triangleleft G$. Ясно, $H_pK_p$ — $p$−группа. Покажем, что она силовская в $HK$. Для этого вычислим ее индекс:

$$| HK : H_pK_p |= \frac{| H || K || H_p \cap K_P |}{| H \cap K || H_p || K_p |} =$$

$$= \frac{| H : H_p || K : K_p |}{| H \cap K : H_p \cap K_p |}.$$

Так как числитель не делится на $p$, то $H_pK_p$ — силовская $p$−подгруппа группы $HK$. Итак, произведение двух нормальных нильпотентных подгрупп есть нормальная нильпотентная подгруппа. Поэтому $F(G)$ — наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа группы $G$.

(2) Ясно, что $O_p(G) \leq F(G)$ для всех $p$, поэтому

$$\prod_{p\in\pi(G)} O_p(G) \subseteq F(G).$$

Обратно, если $P$ — силовская $p$–подгруппа группы $F(G)$, то $P$ *char* $F(G)$ и $P$ нормальна в $G$, поэтому $P \leq O_p(G)$ и

$$F(G) \subseteq \prod_{p\in\pi(G)} O_p(G).$$

(3) Если $\alpha \in \mathrm{Aut}G$, то $\alpha(F(G)) \triangleleft G$ и $\alpha(F(G))$ нильпотентна, поэтому $F(G)\alpha(F(G)) = F(G)$ по (1) и $F(G)$ *char* $G$. □

**Лемма 22.2.** *(1)* $\Phi(G) \leq F(G)$*; если* $G$ *разрешима и* $G \neq E$*, то* $\Phi(G) \neq F(G)$*;*

*(2)* $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$*;*

*(3) если* $N \cdot\triangleleft\, G$*, то* $F(G) \leq C_G(N)$*; если, кроме того,* $N$ *абелева, то* $N \leq Z(F(G))$.

*Доказательство.* (1) Поскольку подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ — нильпотентная нормальная подгруппа группы $G$, то $\Phi(G) \leq F(G)$. Пусть $G$ — разрешимая неединичная группа. Тогда $G/\Phi(G)$ разрешима и неединична. Пусть

$$A/\Phi(G) \cdot\triangleleft\, G/\Phi(G).$$

Так как $A/\Phi(G)$ — $p$–группа для некоторого простого $p$, то по следствию 19.11, с. 181, подгруппа $A$ нильпотентна и $A \leq F(G)$. Следовательно, $F(G) \neq \Phi(G)$.





(2) Если $F(G/\Phi(G)) = K/\Phi(G)$, то $K$ — нильпотентная нормальная в $G$ подгруппа по теореме 19.10, с. 180, поэтому $K \leq F(G)$ и

$$F(G/\Phi(G)) \leq F(G)/\Phi(G).$$

Обратное включение следует из определения подгруппы Фиттинга.

(3) Для минимальной нормальной подгруппы $N$ либо $N \cap F(G) = E$, либо $N \leq F(G)$. Если $N \cap F(G) = E$, то

$$NF(G) = N \times F(G);\ \ F(G) \leq C_G(N).$$

Если $N \leq F(G)$, то $N$ — элементарная абелева $p$–группа для некоторого простого $p$. Так как $Z = Z(F(G))$ *char* $F(G)$, то $Z \triangleleft G$. С другой стороны, $N \cap Z \neq E$ по теореме 18.3, с. 169, поэтому $N \leq Z$. □

**Теорема 22.3.** $O_p\big(C_G(F(G))F(G)/F(G)\big) = E$ *для любого* $p \in \pi(G)$*. В частности, если* $G$ *разрешима, то* $C_G(F(G)) \leq F(G)$.

*Доказательство.* Пусть $F = F(G)$, $C = C_G(F)$. Так как $C \triangleleft G$ по лемме 6.4, с. 63, то $CF/F \triangleleft G/F$. Предположим, что $O_p(CF/F) \neq E$ для некоторого $p \in \pi(G)$ и пусть

$$A/F \cdot\triangleleft\, G/F,\ \ A/F \leq O_p(CF/F).$$

Ясно, что $A = (C \cap A)F$ и $A \cap C \triangleleft G$. Пусть $P$ — силовская $p$–подгруппа группы $A \cap C$. Так как

$$A/F = (A\cap C)F/F \simeq A\cap C/C\cap F = A\cap C/Z(F)$$

— $p$–группа, то $A \cap C = PZ(F)$, а поскольку $P \leq C$, то $N_G(P) \geq F$ и $P \triangleleft A \cap C$. Теперь, $A \cap C$ — нильпотентная нормальная подгруппа группы $G$ и $A \cap C \leq F$. Таким образом, $A = (C \cap A)F = F$ и первое утверждение доказано. Если $G$ разрешима, то $CF/F$ разрешима, поэтому $CF/F = E$ и $C \leq F$. □

Говорят, что подгруппа $H$ группы $G$ *дополняема* в $G$, если существует такая подгруппа $K$, что $G = HK$ и $H \cap K = E$. В этом случае подгруппу $K$ называют *дополнением* к подгруппе $H$ в группе $G$.

**Теорема 22.4.** *Если $H$ — нильпотентная нормальная подгруппа группы $G$ и $H \cap \Phi(G) = E$, то $H$ дополняема в $G$.*

*Доказательство.* По условию $H \leq F(G)$, а по теореме 20.4, с. 186, коммутант $H' \leq \Phi(H)$. По теореме 19.8, с. 179, подгруппа Фраттини $\Phi(H) \leq \Phi(G)$, а по условию $H \cap \Phi(G) = E$. Поэтому $H' = E$ и $H$ абелева. Пусть $T$ — добавление к $H$ в $G$. По лемме 19.7, с. 178, $H \cap T \leq \Phi(T)$. Поскольку $H \cap T \lhd T$ и $\lhd H$, то $H \cap T \lhd G$ и по теореме 19.8, с. 179,

$$H \cap T \leq \Phi(G) \cap H = E.$$

Следовательно, $H \cap T = E$ и $T$ — дополнение к $H$ в $G$. □

**Теорема 22.5.** *Факторгруппа $F(G)/\Phi(G)$ есть прямое произведение абелевых минимальных нормальных подгрупп группы $G/\Phi(G)$.*

*Доказательство.* Предположим вначале, что $\Phi(G) = E$ и обозначим через $F$ подгруппу Фиттинга $F(G)$. По теореме 20.4 коммутант $F' \leq \Phi(F)$. Но $F \lhd G$, значит $\Phi(F) \leq \Phi(G) = E$ по теореме 19.8, с. 179. Поэтому $F' = E$ и $F$ абелева. Пусть $T$ — прямое произведение





абелевых минимальных нормальных подгрупп группы $G$ наибольшего порядка. Тогда $T \leq F$ и по теореме 22.4 существует подгруппа $S$ такая, что $G = [T]S$. По тождеству Дедекинда $F = [T](F \cap S)$. Но $F$ абелева, поэтому $F = T \times (F \cap S)$, а так как $F \cap S \lhd S$, то $F \cap S \lhd G$. По выбору $T$ пересечение $F \cap S = E$ и $F = T$.

Пусть теперь $\Phi(G) \neq E$ и $\overline{G} = G/\Phi(G)$. По лемме 22.2(2) $F(\overline{G}) = F(G)/\Phi(G)$. Так как $\Phi(\overline{G}) = E$, то для $\overline{G}$ утверждение уже доказано. □

**Следствие 22.6.** *В разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга есть прямое произведение минимальных нормальных подгрупп.* □

**Теорема 22.7.** *Подгруппа Фиттинга совпадает с пересечением централизаторов главных факторов группы.*

*Доказательство.* Пусть

$$D = \bigcap \{C_G(H/K) \mid H/K \text{— главный фактор } G\}.$$

По следствию 11.9, с. 112, подгруппа $D$ нормальна в $G$. Если

$$E = A_0 < A_1 < \ldots < A_{a-1} < A_a = G$$

— главный ряд группы $G$, то

$$E = D \cap A_0 \leq D \cap A_1 \leq \ldots \leq$$

$$\leq D \cap A_{a-1} \leq D \cap A_a = D$$

— нормальный ряд группы $D$. Так как подгруппа $D$ содержится в каждой подгруппе $C_G(A_i/A_{i-1})$, то

$$[D \cap A_i, D] \leq D \cap [A_i, D] \leq D \cap A_{i-1}$$

для $i = 1, \dots , a$. По теореме 20.11, с. 191, подгруппа $D$ нильпотентна, поэтому $D \leq F(G)$.

Проверим обратное включение. Пусть $H/K$ — главный фактор группы $G$. Так как

$$H/K \cdot \lhd G/K; \;\; F(G)K/K \lhd G/K,$$

то по лемме 13.1, с. 128, либо

$$(H/K) \cap (F(G)K/K) = E,$$

либо

$$H/K \leq F(G)K/K.$$

В первом случае $H \cap F(G) \leq K$, поэтому

$$[H, F(G)] \leq H \cap F(G) \leq K, \quad F(G) \leq C_G(H/K).$$

Во втором случае из нильпотентности подгруппы $F(G)K/K$ по лемме 22.2 получаем, что

$$(H/K) \leq Z(F(G)K/K).$$

Снова $F(G) \leq C_G(H/K)$. Таким образом, $F(G) \leq D$ и $F(G) = D$. □

**Лемма 22.8.** $F(G_1 \times G_2) = F(G_1) \times F(G_2)$.

*Доказательство.* Пусть $G = G_1 \times G_2$. Ясно, что $F(G_1) \times F(G_2) \leq F(G)$ и $F(G) \cap G_i = F(G_i)$, $i = 1, 2$. Так как

$$G_1F(G)/G_1 \lhd G/G_1 \simeq G_2,$$

то $G_1F(G)/G_1 \simeq F(G)/F(G_1)$ и $F(G)/F(G_1)$ изоморфна нормальной нильпотентной подгруппе группы $G_2$. Поэтому

$$| F(G)/F(G_1) | \leq | F(G_2) |$$

и $F(G_1 \times G_2) = F(G_1) \times F(G_2)$. □





Пусть $G$ — группа и пусть
$F_0(G) = E$,
$F_1(G) = F(G)$,
$F_2(G)/F_1(G) = F(G/F_1(G)), \dots ,$
$F_i(G)/F_{i-1}(G) = F(G/F_{i-1}(G)), \dots .$
Ясно, что

$$E = F_0(G) \leq F_1(G) \leq F_2(G) \leq \dots \leq F_i(G) \leq \dots .$$

В разрешимой неединичной группе подгруппа Фиттинга отлична от единичной подгруппы по лемме 22.2. Поэтому для разрешимой группы существует натуральное $n$ такое, что $F_n(G) = G$.

*Нильпотентной длиной* разрешимой группы $G$ называют наименьшее $n$, для которого $F_n(G) = G$. Нильпотентную длину разрешимой группы $G$ обозначают через $n(G)$. Таким образом, если группа $G$ разрешима и $n = n(G)$, то

$$E = F_0(G) \; < \; F_1(G) \; < \; \dots \; < \; F_{n-1}(G) \; < \; F_n(G) = G,$$

где

$$F_i(G)/F_{i-1}(G) = F(G/F_{i-1}(G)).$$

Поэтому построенный ряд нормальный и его факторы $F_i(G)/F_{i-1}(G)$ нильпотентны.

Ясно, что $n(G) = 1$ тогда и только тогда, когда группа $G$ нильпотентна.

**Пример 22.9.** $n(S_3) = 2; \;\; n(A_4) = 2; \;\; n(S_4) = 3.$ □

Непосредсвенно из определения нильпотентной длины вытекает

**Лемма 22.10.** *Пусть $G$ — разрешимая группа. Тогда:*

*(1)* $n(G/F(G)) = n(G) - 1$;

*(2)* $n(G/F_i(G)) = n(G) - i$. □

**Лемма 22.11.** *(1) Если $G$ — разрешимая группа, то длина любого нормального ряда группы $G$ с нильпотентными факторами не меньше, чем $n(G)$.*

*(2) Нильпотентная длина разрешимой группы совпадает с длиной самого короткого нормального ряда с нильпотентными факторами.*

*Доказательство.* (1) Применим индукцию по порядку группы $G$. Пусть

$$E = H_0 \ < \ H_1 \ < \ \ldots < \ H_{t-1} \ < \ H_t = G$$

— нормальный ряд группы $G$ с нильпотентными факторами. Так как $H_1$ — нормальная нильпотентная подгруппа группы $G$, то $H_1 \leq F(G) = F_1(G)$ и $n(G/F) = n(G) - 1$. Здесь $F = F(G)$. Факторгруппа $\overline{G} = G/F$ имеет порядок меньше, чем порядок группы $G$ и обладает рядом

$$E = \overline{H}_0 = \overline{H}_1 \leq \overline{H}_2 \leq \ldots \leq \overline{H}_{t-1} \leq \overline{H}_t = \overline{G},$$

где $\overline{H}_i = H_iF/F$. Ясно, что это нормальный ряд, его длина $f \leq t-1$ и его факторы

$$\overline{H}_i/\overline{H}_{i-1} = (H_iF/F)\big/(H_{i-1}F/F) \simeq H_iF/H_{i-1}F \simeq$$

$$\simeq H_i/H_{i-1}(H_i \cap F) \simeq (H_i/H_{i-1})\big/(H_{i-1}(H_i \cap F)/H_{i-1})$$

нильпотентны. По индукции $t-1 \geq f \geq n(G/F) = n(G)-1$ и $t \geq n(G)$.

(2) следует из (1). □





**Лемма 22.12.** *Пусть $G$ — разрешимая группа. Тогда:*

*(1) если $H \leq G$, то $n(H) \leq n(G)$;*

*(2) если $K \lhd G$, то $n(G/K) \leq n(G)$;*

*(3) если $N_1$ и $N_2 \lhd G$, то*

$$n(N_1N_2) = \max\{n(N_1), n(N_2)\};$$

*в частности, если $G_1$ и $G_2$ — разрешимые группы,то*

$$n(G_1 \times G_2) = \max\{n(G_1), n(G_2)\};$$

*(4)* $n(G) = n(G/\Phi(G))$.

*Доказательство.* Пусть $n = n(G)$ и $F_i = F_i(G)$. Тогда

$$E = F_0 \ < F_1 \ < \ \ldots \ < \ F_{n-1} \ < \ F_n = G.$$

(1) Пусть $H_i = H \cap F_i$. Тогда ряд

$$E = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_{n-1} \leq H_n = H$$

будет нормальным рядом подгруппы $H$ с нильпотентными факторами

$$H_i/H_{i-1} = H \cap F_i\big/H \cap F_{i-1} \simeq$$

$$\simeq (H \cap F_i)F_{i-1}\big/F_{i-1} \leq F_i/F_{i-1}.$$

По лемме 22.11 $n(H) \leq n = n(G)$.

(2) Пусть $K \lhd G$ и $\overline{F}_i = F_iK/K$. Тогда ряд

$$E = \overline{F}_0 \leq \overline{F}_i \leq \ldots \overline{F}_{n-1} \leq \overline{F}_n = G/K$$

будет нормальным рядом группы $G/K$ с нильпотентными факторами

$$\overline{F}_i/\overline{F}_{i-1} = (F_iK/K)\big/(F_{i-1}K/K) \simeq F_iK/F_{i-1}K \simeq$$

$$\simeq F_i/F_{i-1}(F_i \cap K) \simeq (F_i/F_{i-1})/(F_{i-1}(F_i \cap K)/F_{i-1}).$$

По лемме 22.10 $n(G/K) \leq n = n(G)$.

(3) Ясно, что $F(N_1)F(N_2) \leq F(N_1N_2)$. Обозначим $D = F(N_1N_2)$. Тогда $n(N_1N_2/D) = n(N_1N_2) - 1$ по лемме 22.10, а по индукции

$$n(N_1N_2/D) = \max\{n(N_1D/D), n(N_2D/D)\} \leq$$

$$\leq \max\{n(N_1) - 1, n(N_2) - 1\} = \max\{n(N_1), n(N_2)\} - 1.$$

Поэтому $n(N_1N_2) \leq \max\{n(N_1), n(N_2)\}$. Так как $\max\{n(N_1), n(N_2)\} \leq n(N_1N_2)$ по (1), то имеем

$$n(N_1N_2) = \max\{n(N_1), n(N_2)\}.$$

(4) Положим $\Phi = \Phi(G)$. По лемме 22.2 для неединичной разрешимой группы $G$ имеем $\Phi \neq F$ и

$$F(G/\Phi) = F_1(G/\Phi) = F/\Phi = F_1/\Phi.$$

Поэтому $n(G) = n(G/\Phi)$. □

Следующая теорема принадлежит К. Дёрку и опубликована в его работе: Doerk K., Uber die nilpotente Lange maximaler Untergruppen bei endlichen auflosbaren Gruppen // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1994. Vol. 91. P.19–21.

**Теорема 22.13.** *Если $U$ — максимальная подгруппа разрешимой группы $G$, то $n(U) = n(G) - i$, где $i \in \{0, 1, 2\}$.*

*Доказательство.* Воспользуемся индукцией по порядку группы $G$. Пусть $N$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$. Если $N \not\subseteq U$, то $U \simeq G/N$ и $n(U) = n(G) - i$,





где $i \in \{0, 1\}$. Поэтому можно предположить, что все минимальные нормальные подгруппы группы $G$ содержатся в $U$. Если группа $G$ содержит две различные минимальные нормальные подгруппы, то $n(G/N) = n(G)$ и по индукции

$$n(U/N) = n(G/N) - i = n(G) - i, \text{ где } i \in \{0, 1, 2\}.$$

Поскольку

$$n(G) \geq n(U) \geq n(U/N),$$

то теорема справедлива. Следовательно, можно считать, что группа $G$ содержит в точности одну минимальную нормальную подгруппу. Если $N \leq \Phi(G)$, то $n(G) = n(G/\Phi(G))$ по лемме 22.12 и опять

$$n(U/N) = n(G/N) - i = n(G) - i, \text{ где } i \in \{0, 1, 2\}.$$

Поскольку

$$n(G) \geq n(U) \geq n(U/N),$$

то опять теорема справедлива.

Итак, можно считать, что $\Phi(G) = E$ и $N = F(G)$ по следствию 22.6. По индукции

$$n(U/N) = n(G/N) - i = n(G) - 1 - i, \text{ для } i \in \{0, 1, 2\}.$$

Если $n(U) > n(U/N)$, то утверждение справедливо. Пусть $n(U) = n(U/N)$, т.е. $N \neq F(U)$. Считаем, что $N$ — $p$–группа. Тогда $F_2(G)/N$ — $p'$–группа. Пусть $L = F_2(G) \cap U$. Если $F_2(G) \not\subseteq U$, то $G = UF_2(G)$ и $n(U/L) = n(G) - 2$, поэтому

$$n(U) = n(U/N) = n(G) - 2 - i, \text{ для } i \in \{0, 1\}$$

и теорема справедлива.

Остается случай, когда $F_2(G) \le U$. Так как $F(U)$ — $p$–подгруппа, то

$$E \ne F(U)/N \le C_{G/N}(F_2(G)/N) \le F_2(G/N),$$

причем $F_2(G)/N$ — $p'$–группа. Противоречие. □

**Пример 22.14.** Все три значения $i \in \{0,1,2\}$ в теореме 22.13 имеют место. Значение $i=0$ выполняется на любой нильпотентной неединичной группе. Значение $i=1$ выполняется на группе $S_3$ с максимальной подгруппой $\langle(12)\rangle$. Значение $i=2$ выполняется на группе $S_4$, у которой силовская 2–подгруппа максимальна. □

Если факторгруппа $G/F(G)$ нильпотентна, то группу $G$ называют метанильпотентной.

**Теорема 22.15.** *(1) В разрешимой неединичной группе подгруппа Фраттини совпадает с пересечением максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга.*

*(2) В разрешимой ненильпотентной группе пересечение максимальных подгрупп, содержащих подгруппу Фиттинга, метанильпотентно.*

*Доказательство.* Обозначим через $\Phi_{\overline{F}}(G)$ пересечение всех максимальных подгрупп группы $G$, не содержащих $F(G)$, а через $\Phi_F(G)$ пересечение максимальных подгрупп группы $G$, содержащих $F(G)$. Ясно, что подгруппы $\Phi_{\overline{F}}(G)$ и $\Phi_F(G)$ характеристические в группе $G$ и

$$\Phi(G) = \Phi_F(G) \cap \Phi_{\overline{F}}(G).$$

(1) В факторгруппе $G/\Phi(G)$ подгруппа Фиттинга

$$F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$$





по лемме 22.2, поэтому

$$\Phi_{\overline{F}}(G/\Phi(G)) = \Phi_{\overline{F}}(G)/\Phi(G).$$

Предположим, что $\Phi_{\overline{F}}(G)/\Phi(G) \ne E$ и пусть $K/\Phi(G)$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G/\Phi(G)$, содержащаяся в $\Phi_{\overline{F}}(G)/\Phi(G)$. Так как подгруппа $K$ нормальна в группе $G$ и факторгруппа $K/\Phi(G)$ нильпотентна, то по теореме 19.10, с. 180, подгруппа $K$ нильпотентна и $K \le F(G)$. Но теперь

$$K \le \Phi_F(G) \cap \Phi_{\overline{F}}(G) = \Phi(G),$$

противоречие. Поэтому допущение неверно и $\Phi_{\overline{F}}(G)/\Phi(G) = E$, т.е. $\Phi_{\overline{F}}(G) = \Phi(G)$.

(2) Пусть $G$ — разрешимая ненильпотентная группа. Ясно, что $F(G) \le \Phi_F(G)$ $F(G)$ и

$$\Phi_F(G)/F(G) = \Phi(G/F(G)).$$

Поэтому подгруппа $\Phi_F(G)$ метанильпотентна. □

**Пример 22.16.** В неразрешимой группе $SL(2,5)$ центр, подгруппа Фраттини и подгруппа Фиттинга совпадают и имеют порядок 2. Поэтому в группе $SL(2,5)$ нет максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга. Следовательно, утверждение (1) теоремы 22.15 в неразрешимых группах нарушается. □

## § 23. Теорема Шура–Цассенхауза

В этом параграфе доказывается теорема Шура–Цассенхауза, которая как и теорема Силова относится к фундаментальным результатам теории конечных групп.

**Теорема 23.1.** (Шур, Цассенхауз) *Пусть $N$ — нормальная подгруппа группы $G$. Предположим, что $\mid N \mid = n$ и $\mid G : N \mid = m$ взаимно просты. Тогда в группе $G$ существует подгруппа порядка $m$ и любые две подгруппы порядка $m$ сопряжены между собой.*

*Доказательство.* Заметим, что если $m$ — примарное число, т.е. $m = p^i$ для некоторого простого $p$, то утверждение вытекает из теоремы Силова.

Вначале докажем теорему для абелевой подгруппы $N$.

*(1) Существование и сопряженность подгрупп порядка $m$ в группе $G$, когда $N$ — абелева подгруппа.*

Пусть $Q = G/N$. Тогда каждый элемент $x \in Q$ является в группе $G$ смежным классом по подгруппе $N$, поэтому $x = t_x N$, где $\{t_x \mid x \in Q\}$ — левая трансверсаль подгруппы $N$ в группе $G$. Так как

$$t_x t_y \in t_x t_y N = t_x N t_y N = xy = t_{xy} N,$$

то существует элемент $c(x,y) \in N$ такой, что

$$t_x t_y = t_{xy} c(x,y). \qquad < 1 >$$

Теперь, используя $< 1 >$, для любых $x, y, z \in Q$ имеем:

$$(t_x t_y) t_z = t_{xy} c(x,y) t_z = t_{xy} t_z c(x,y)^{t_z} =$$

$$= t_{(xy)z} c(xy, z) c(x,y)^{t_z};$$

$$t_x(t_y t_z) = t_x t_{yz} c(y,z) = t_{x(yz)} c(x, yz) c(y,z).$$

Поскольку $(t_x t_y) t_z = t_x (t_y t_z)$ и $t_{(xy)z} = t_{x(yz)}$, то

$$c(xy, z) c(x,y)^{t_z} = c(x, yz) c(y,z). \qquad < 2 >$$

Равенство $< 2 >$ справедливо для любых $x, y, z \in Q$.





Введем элемент

$$d(y) = \prod_{x \in Q} c(x,y).$$

Ясно, что $d(y) \in N$. Поскольку $\mid Q \mid = m$ и $N$ абелева, то из $< 2 >$ получаем

$$d(z) d(y)^{t_z} = d(yz) c(y,z)^m$$

или

$$d(yz) = d(y)^{t_z} d(z) c(y,z)^{-m}. \qquad < 3 >$$

Так как $(n,m) = 1$, то отображение $g \mapsto g^m$, $g \in G$ является автоморфизмом группы $G$, см. пример 9.3, с. 92. Поэтому существует элемент $e(y) \in N$ такой, что $e(y)^m = d(y)^{-1}$. Теперь равенство $< 3 >$ можно записать в виде:

$$e(yz)^{-m} = (e(y)^{-m})^{t_z} e(z)^{-m} c(y,z)^{-m} =$$

$$= (e(y)^{t_z} e(z) c(y,z))^{-m}.$$

Поэтому $e(yz) = e(y)^{t_z} e(z) c(y,z)$.

Введем элемент

$$s_x = t_x e(x) \in N$$

и, используя $< 1 >$, вычислим произведение:

$$s_y s_z = t_y e(y) t_z e(z) = t_y t_z e(y)^{t_z} e(z) =$$

$$= t_{yz} c(y,z) e(y)^{t_z} e(z) = t_{yz} e(yz) = s_{yz}.$$

Следовательно, отображение $\alpha : x \mapsto s_x$ является гомоморфизмом группы $Q$ в группу $G$. Если $s_x = 1$ — единичный элемент группы $G$, то $t_x e(x) = 1$ и $t_x \in N$. В этом случае $x = t_x N = N$ — единичный элемент группы $Q$.

Следовательно, $\alpha$ — инъекция и $Q \simeq \mathrm{Im}\alpha$ — подгруппа порядка $m$ в группе $G$.

Итак, в случае, когда $N$ — абелева подгруппа, существование подгруппы порядка $m$ в группе $G$ установлено.

Пусть теперь $T$ и $L$ — две подгруппы порядка $m$ в группе $G$. Тогда

$$G = [N]T = [N]L \quad \text{и} \quad Q = G/N \simeq T \simeq L.$$

При этих изоморфизмах $Q \to T$ и $Q \to L$ элемент $x \in Q$ переходит в элементы $t_x \in T$ и $l_x \in L$. Поэтому

$$T = \{t_x \mid x \in Q;\ t_x t_y = t_{xy}\};\ L = \{l_x \mid x \in Q;\ l_x l_y = l_{xy}\}.$$

Так как $x = t_x N = l_x N$, то существует элемент $a(x) \in N$ такой, что $l_x = t_x a(x)$. Поскольку $l_{xy} = t_{xy} a(xy)$ и

$$l_{xy} = l_x l_y = t_x a(x) t_y a(y) = t_{xy} a(x)^{t_y} a(y), \quad \text{то}$$

$$a(xy) = a(x)^{t_y} a(y). \qquad < 4 >$$

Введем элемент

$$b = \prod_{x \in Q} a(x).$$

Из $< 4 >$ получаем $b = b^{t_y} a(y)^m$. Так как $(n, m) = 1$, то существует элемент $c \in N$ такой, что $b = c^m$, см. пример 9.3, с. 92. Поэтому $c^m = c^{mt_y} a(y)^m$ или $c = c^{t_y} a(y)$ и $a(y) = cc^{-t_y}$. Теперь

$$l_y = t_y a(y) = t_y c^{-t_y} c = t_y t_y^{-1} c^{-1} t_y c = c^{-1} t_y c.$$

Отсюда

$$L = \{l_y \mid y \in Q\} = \{c^{-1} t_y c \mid y \in Q\} = c^{-1} T c.$$





Таким образом, если $N$ — абелева подгруппа, то подгруппы порядка $m$ существуют и сопряжены между собой.

*(2) Существование подгрупп порядка $m$ в группе $G$.*

Воспользуемся индукцией по порядку группы $G$. Пусть $p$ — простое число, делящее порядок подгруппы $N$, и $P$ — силовская $p$–подгруппа из $N$. Положим $L = N_G(P)$ и $Z = Z(P)$. Тогда $L \leq N_G(Z) = M$, т.к. $Z$ — характеристическая подгруппа в $P$. По лемме Фраттини $G = NL$ и $G = NM$. Поэтому для подгруппы $N_1 = N \cap M$ получаем, что

$$\mid M : N_1 \mid = \mid G : N \mid = m.$$

Поскольку $Z \neq E$, то можно применить индукцию к факторгруппе $M/Z$. Пусть $X/Z$ — подгруппа порядка $m$ в группе $M/Z$, тогда

$$M = XN_1, \quad X \cap N_1 = Z.$$

Так как $\mid X : Z \mid = m$ взаимно просто с $\mid Z \mid$ и $Z$ — абелева подгруппа, то $X$ имеет подгруппу порядка $m$ по (1).

Итак, в любом случае в группе $G$ существует подгруппа порядка $m$.

*(3) Сопряженность в группе $G$ подгрупп порядка $m$, когда факторгруппа $G/N$ разрешима.*

Обозначим через $\pi$ множество простых делителей числа $m$ и положим $R = O_\pi(G)$. Пусть $H$ и $K$ — две подгруппы из $G$ порядка $m$. Тогда $RH$ и $RK$ являются $\pi$–подгруппами группы $G$, поэтому $R \leq H \cap K$. Если $R \neq E$, то по индукции подгруппы $H/R$ и $K/R$ сопряжены в $G/R$, поэтому подгруппы $H$ и $K$ сопряжены в группе $G$.

Пусть $R = E$ и $L/N \cdot\!\lhd\, G/N$. По условию факторгруппа $G/N$ разрешима, поэтому $L/N$ является элементарной абелевой $p$–подгруппой для некоторого простого $p \in \pi$. Пересечение $L \cap H$ будет силовской $p$–подгруппой в $L$ поскольку

$$(L \cap H) \simeq (L \cap H)N/N \leq L/N$$

и $\mid L : L \cap H \mid = \mid HL : H \mid = \mid G : H \mid = n$ есть $p'$–число. Аналогично, $L \cap K$ будет силовская $p$–подгруппой в $L$, поэтому

$$L \cap H = (L \cap K)^g = L \cap K^g$$

для некоторого $g \in L$. Пусть $S = L \cap H$. Тогда $S \lhd \langle H, K^g \rangle = J$.

Если $J = G$, то $S$ — нормальная $\pi$–подгруппа группы $G$, что противоречит равенству $O_\pi(G) = E$. Поэтому $J$ — собственная подгруппа группы $G$. По индукции подгруппы $H$ и $K^g$ сопряжены в $J$. Следовательно, подгруппы $H$ и $K$ сопряжены в $G$.

*(4) Сопряженность в группе $G$ подгрупп порядка $m$, когда подгруппа $N$ разрешима.*

Так как $N/N'$ абелева и $N' \lhd G$, то подгруппы $HN'/N'$ и $KN'/N'$ сопряжены в группе $G/N'$ по (1). Поэтому $H^g \leq KN' < G$ для некоторого $g \in G$. Но теперь подгруппы $H^g$ и $K$ сопряжены в $KN'$ по индукции. Следовательно, подгруппы $H$ и $K$ сопряжены в $G$.

*(5) Сопряженность в группе $G$ подгрупп порядка $m$.*

Так как числа $n$ и $m$ взаимно просты, то одно из них нечетное и согласно теореме 21.9, с. 200, либо $N$, либо $G/N$ разрешима. Следовательно, любые две подгруппы порядка $m$ сопряжены в группе $G$.

□





**Следствие 23.2.** *Пусть выполняются условия теоремы 23.1. Если натуральное число $m_1$ делит $m$, то каждая подгруппа порядка $m_1$ содержится в некоторой подгруппе порядка $m$.*

*Доказательство.* Пусть $H$ и $H_1$ — подгруппы порядков $m$ и $m_1$ соответственно. Тогда $G = HN$ и

$$H_1N = (H_1N) \cap (HN) = ((H_1N) \cap H)N,$$

откуда следует, что

$$\mid (H_1N) \cap H \mid = \mid H_1N : N \mid = \mid H_1 \mid = m_1.$$

Теперь $H_1$ и $(H_1N) \cap H$ — две подгруппы порядка $m_1$ в группе $H_1N$ порядка $m_1n$. По теореме 23.1

$$H_1 = \big((H_1N) \cap H\big)^g \leq H^g$$

для некоторого $g \in G$. □

В качестве приложения теоремы 23.1 приведем новое свойство подгруппы Фраттини произвольной конечной группы.

**Теорема 23.3.** $\pi(G) = \pi(G/\Phi(G))$.

*Доказательство.* Ясно, что $\pi(G/\Phi(G)) \subseteq \pi(G)$. Предположим, что существует простое $p \in \pi(G)$ такое, что $p \notin \pi(G/\Phi(G))$. Пусть $P$ — силовская $p$–подгруппа группы $G$. Тогда $P \leq \Phi(G)$ и $P \lhd G$. По теореме 23.1 существует подгруппа $H$ такая, что $G = [P]H$. Имеем противоречие со следствием 19.6, с. 177. Поэтому допущение неверно и $\pi(G) = \pi(G/\Phi(G))$. □

**Следствие 23.4.** *Пусть $K \lhd G$. Если $H$ — добавление к подгруппе $K$, то $\pi(H) = \pi(G/K)$.*

*Доказательство.* По лемме 19.7, с. 178, $G = HK$ и $H \cap K \leq \Phi(H)$. Так как $G/K \simeq H/H \cap K$, то $\pi(G/K) = \pi(H)$ по теореме 23.3. □

## § 24. Холловы подгруппы разрешимых групп

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, а $\pi$ — некоторое множество простых чисел, т.е. $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Дополнение к $\pi$ во множестве $\mathbb{P}$ обозначим через $\pi'$, т.е. $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$.

Наряду с множеством $\pi$ будем использовать функцию $\pi(m)$ — множество всех простых чисел, делящих натуральное число $m$. Если $G$ — группа, то вместо $\pi(\mid G \mid)$ условимся писать $\pi(G)$. Например, $\pi(S_5) = \{2, 3, 5\}$.

Зафиксируем множество простых чисел $\pi$. Если $\pi(m) \subseteq \pi$, то число $m$ называется $\pi-$*числом*.

Подгруппа $H$ группы $G$ называется $\pi-$*подгруппой*, если $\mid H \mid$ есть $\pi-$число. Подгруппа $H$ называется $\pi-$*холловой* подгруппой, если $\mid H \mid$ есть $\pi-$число, а индекс $\mid G : H \mid$ есть $\pi'-$число. Таким образом, $\pi-$холлова подгруппа — это такая $\pi-$подгруппа, индекс которой не делится на простые числа из $\pi$.

Подгруппа $H$ группы $G$ называется *холловой* подгруппой, если $H$ — $\pi-$холлова подгруппа для некоторого множества $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Другими словами, $H$ — холлова подгруппа тогда и только тогда, когда $(\mid H \mid, \mid G : H \mid) = 1$.

Через $\mathrm{Hall}_\pi(G)$ обозначим совокупность $\pi-$холловых подгрупп группы $G$. Если $\pi = \{p\}$, то $\mathrm{Hall}_\pi(G) = \mathrm{Syl}_p(G)$ — совокупность силовских $p-$подгрупп группы $G$ и по теореме Силова множество $\mathrm{Syl}_p(G)$ непусто для любой неединичной группы $G$ и любого $p \in \pi(G)$.





$p'-$Холлову подгруппу, если она существует в группе $G$, называют $p-$*дополнением*.

**Лемма 24.1.** *Пусть $H \in Hall_\pi(G)$, $M$ и $N \lhd G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

*(1) $\alpha(H) \in Hall_\pi(G)$, для любого $\alpha \in AutG$; в частности, $H^g \in Hall_\pi(G)$, для любого $g \in G$;*

*(2) $HN/N \in Hall_\pi(G/N)$;*

*(3) $H \cap N \in Hall_\pi(N)$;*

*(4) $H \cap MN = (H \cap M)(H \cap N) \in Hall_\pi(MN)$.*

*Доказательство.* Утверждения (1) и (2) очевидны.

(3) Так как $H$ — $\pi-$подгруппа, то $H \cap N$ — $\pi-$подгруппа по теореме Лагранжа. Кроме того, $HN/N \simeq H/H \cap N$, откуда

$$\mid HN : H \mid = \mid N : H \cap N \mid = \mid G : H \mid / \mid G : HN \mid$$

— $\pi'-$число, т.е. $H \cap N$ — $\pi-$холлова подгруппа в $N$.

(4) $H \cap MN$, $H \cap M$, $H \cap N$ — $\pi-$холловы подгруппы в $MN$,$M$ и $N$, кроме того, $(H \cap M)(H \cap N) \leq H \cap MN$. Так как

$$\pi(H \cap M) \cup \pi(H \cap N) = \pi(H \cap MN),$$

то $(H \cap M)(H \cap N) = H \cap MN$. □

**Теорема 24.2.** (Ф.Холл) *Пусть $G$ — разрешимая группа и $\pi$ — множество простых чисел. Тогда справедливы следующие утверждения:*

*(1) $\pi-$холловы подгруппы в группе $G$ существуют;*

*(2) любые две $\pi-$холловы подгруппы группы $G$ сопряжены между собой;*

*(3) каждая $\pi-$подгруппа группы $G$ содержится в некоторой $\pi-$холловой подгруппе.*

*Доказательство.* Применим индукцию по порядку группы $G$. Если $G = E$, то теорема верна. Предположим, что $G \neq E$ и $N$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$. По теореме 21.3, с. 195, подгруппа $N$ — элементарная абелева $p$−группа для некоторого простого $p$.

(1) По индукции в группе $G/N$ существует $\pi$−холлова подгруппа $H/N$. Если $p \in \pi$, то $H$ — $\pi$−холлова подгруппа группы $G$. Пусть $p \notin \pi$. По теореме Шура−Цассенхауза в $H$ существует подгруппа $U$ такая, что $H = [N]U$. Легко проверить, что $U$ — $\pi$−холлова подгруппа группы $G$.

(2) Пусть $H_1$ и $H_2 \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$. По лемме 24.1 подгруппы $H_1N/N$ и $H_2N/N$ — $\pi$−холловы в $G/N$. По индукции они сопряжены в $G/N$, т.е. существует $gN \in G/N$ такой, что

$$(H_2N/N)^{gN} = H_1N/N,$$

откуда $H_2^gN = H_1N$. Если $p \in \pi$, то

$$H_2^gN = H_1N = H_1 = H_2^g.$$

Если $p \notin \pi$, то $[N]H_2^g = [N]H_1$ и подгруппы $H_1$ и $H_2^g$ сопряжены в $[N]H_1$ по теореме Шура−Цассенхауза.

(3) Пусть $U$ — $\pi$−подгруппа группы $G$ и $H$ $\pi$−холлова в $G$. Можно считать, что

$$UN/N \leq HN/N.$$

Если $p \in \pi$, то $UN \leq H$ и $U \leq H$. Пусть $p \notin \pi$. Тогда $[N]U \leq [N]H$. Положив $V = H \cap UN$ имеем

$$VN = HN \cap UN = UN.$$

Теперь $U$ и $V$ — $\pi$−холловы подгруппы $UN$, поэтому $U = V^x$, где $x \in UN$. Значит $U = V^x \leq H^x$. □





**Теорема 24.3.** *Если группа $G$ содержит три разрешимые подгруппы $H_1$,$H_2$ и $H_3$ попарно взаимно простых индексов, то $G$ разрешима*

*Доказательство.* Пусть $P$ — минимальная нормальная подгруппа группы $H_1$. Тогда $P$ — элементарная абелева $p$−подгруппа для некоторого простого $p$. Так как

$$(\mid G : H_2 \mid, \mid G : H_3 \mid) = 1,$$

то можно считать, что $p$ не делит $\mid G : H_2 \mid$ и силовская $p$−подгруппа $S$ из $H_2$ является силовской подгруппой группы $G$. По теореме Силова $P \subseteq S^g$ для некоторого $g \in G$. Теперь $G = H_1H_2^g$ и $P \subseteq H_1 \cap H_2$. Если $x$ — произвольный элемент группы $G$, то $x = ab$, где $a \in H_1$, $b \in H_2$ и $P^x = P^b \subseteq H_2^g$. Следовательно,

$$P^G = \langle P^x \mid x \in G \rangle \subseteq H_2^g.$$

Так как $P^G$ — разрешимая нормальная в $G$ подгруппа, то к факторгруппе $G/P^G$ применима индукция, по которой $G/P^G$ разрешима. Теперь $G$ разрешима. □

**Следствие 24.4.** *Если в группе $G$ существует $p$−дополнение для всех $p \in \pi(G)$, то группа $G$ разрешима.*

*Доказательство.* Если $\mid \pi(G) \mid > 2$, то группа $G$ разрешима по теореме 24.3. Если $\mid \pi(G) \mid = 2$, то группа $G$ разрешима по теореме 21.8, с. 199. Если $\mid \pi(G) \mid = 1$, то группа $G$ разрешима по лемме 21.1, с. 193. □

## § 25. Примитивные группы

Группа называется *примитивной* если она содержит максимальную подгруппу с единичным ядром. В примитивной группе максимальная подгруппа с единичным ядром называется *примитиватором*.

**Лемма 25.1.** *(1) Простая неабелева группа примитивна и любая ее максимальная подгруппа является примитиватором.*

*(2) Нильпотентная группа примитивна тогда и только тогда, когда она имеет простой порядок.*

*Доказательство.* (1) Очевидно.

(2) В нильпотентной группе все максимальные подгруппы нормальны. Если $G$ — примитивная нильпотентная группа, то только единичная подгруппа $E$ может быть примитиватором. Но если $E$ — максимальная подгруппа группы $G$, то по теореме Силова группа $G$ имеет простой порядок. Обратно, каждая группа простого порядка всегда примитивна. □

**Лемма 25.2.** *(1) Если $M < \cdot\, G$, то $G/Core_G M$ примитивна и $M/Core_G M$ — её примитиватор.*

*(2) Если $K \lhd G$ и $G/K$ примитивна, то в группе $G$ существует максимальная подгруппа $M$ такая, что $K = Core_G M$.*

*Доказательство.* (1) Подгруппа $\overline{M} = M/Core_G M$ максимальна в $\overline{G} = G/Core_G M$, а из того, что $Core_G M$ — наибольшая нормальная подгруппа группы $G$, содержащаяся в $M$, следует, что $Core_{\overline{G}} \overline{M} = E$ и $\overline{G}$ примитивна с примитиватором $\overline{M}$.

(2) Пусть $K \lhd G$ и $\overline{G} = G/K$ примитивна. Пусть $\overline{M}$ — примитиватор группы $\overline{G}$. По лемме 19.1, с. 175, существует максимальная подгруппа $M$ группы $G$ такая, что $\overline{M} = M/K$. Поскольку $Core_{\overline{G}} \overline{M} = E$, то $Core_G M = K$. □





**Лемма 25.3.** *Если $M$ — максимальная подгруппа группы $G$ и $N$ — неединичная нормальная подгруппа группы $G$ такая, что $M \cap N = E$, то $N$ — минимальная нормальная подгруппа.*

*Доказательство.* Произведение $MN$ является подгруппой группы $G$, отличной от $M$. Поэтому $MN = G$ и $|N| = |G : M|$. Если $N_1$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, содержащаяся в $N$, то опять $MN_1 = G$ и $|N_1| = |G : M|$. Теперь $|N_1| = |N|$ и $N_1 = N$. □

**Теорема 25.4.** *В примитивной группе подгруппа Фиттинга либо единична, либо минимальная нормальная подгруппа. В частности, в разрешимой примитивной неединичной группе подгруппа Фраттини единична, а подгруппа Фиттинга — минимальная нормальная подгруппа.*

*Доказательство.* Пусть $G$ — примитивная группа, $M$ — её примитиватор, $F = F(G) \neq E$ и $K = F \cap M$. Предположим, что $K \neq E$. Так как $Core_G M = E$, то $F$ не содержится в $M$, поэтому $K$ — собственная в $F$ подгруппа. По теореме 18.3, с. 169, $N_F(K) \neq K$, а так как $K \lhd M$ и $G = MK$, то $K \lhd G$. Но теперь $K \leq Core_G M = E$, противоречие. Поэтому $K = E$ и $F$ — минимальная нормальная подгруппа по лемме 25.3.

Если $G$ — разрешимая примитивная неединичная группа, то $\Phi(G)$ — собственная подгруппа в $F(G)$, поэтому $\Phi(G) = E$. □

**Следствие 25.5.** *В примитивной группе неединичная нильпотентная нормальная подгруппа совпадает с подгруппой Фиттинга и является минимальной нормальной подгруппой.* □

**Теорема 25.6.** *Пусть $G$ — примитивная группа и $M$ — её примитиватор. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

*(1) группа $G$ содержит единственную минимальную нормальную подгруппу $N$, причем $N = C_G(N)$ и $G = [N]M$;*

*(2) группа $G$ содержит единственную минимальную нормальную подгруппу $N$, причем $C_G(N) = E$ и $G = NM$;*

*(3) группа $G$ содержит точно две минимальные нормальные подгруппы $N_1$ и $N_2$, причем*

$$G = [N_1]M = [N_2]M, \quad N_i = C_G(N_{3-i}),\ i = 1, 2$$

*и $N_1 \simeq N_2 \simeq N_1N_2 \cap M$. Кроме того, если $V$ — собственная подгруппа группы $G$ такая, что $VN_1 = VN_2 = G$, то $V$ — максимальная подгруппа группы $G$, $Core_G V = E$ и $V \cap N_1 = V \cap N_2 = E$.*

*Доказательство.* Пусть $K$ — произвольная неединичная нормальная подгруппа примитивной группы $G$ с примитиватором $M$. Так как $Core_G M = E$, то $K$ не содержится в $M$ и $G = MK$. Поскольку $C = C_G(K) \lhd G$, то $C \cap M \lhd M$. Кроме того,

$$K \le C_G(C \cap M) \le N_G(C \cap M),$$

поэтому $C \cap M \lhd G$. Теперь $C \cap M \subseteq Core_G M = E$ и если $C \ne E$, то $G = [C]M$ и $C$ — минимальная нормальная в $G$ подгруппа по лемме 25.3. Таким образом, если $K$ — произвольная неединичная нормальная подгруппа группы $G$, то

$$G = MK, \qquad < 1 >$$

$$C = C_G(K) = E \text{ или } G = [C]M; \quad C \cdot \lhd G. \qquad < 2 >$$





Предположим вначале, что $F = F(G) \ne E$. По теореме 25.4 подгруппа $F$ — минимальная нормальная в $G$ подгруппа. Теперь $F$ абелева по теореме 13.4, с. 131, и $F = C_G(F)$ по <2>. Если $H$ — другая минимальная нормальная подгруппа группы $G$, то $H \cap F = E$ и $HF = H \times F$, т.е. $H \le C_G(F) = F$, противоречие. Поэтому, $F$ — единственная минимальная нормальная подгруппа и имеем случай (1) из заключения теоремы.

Пусть $F(G) = E$ и в $G$ единственная минимальная нормальная подгруппа $N$. По теореме 13.4, с. 131, подгруппа $N$ есть прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп, в частности, $Z(N) = E$. Теперь $C_G(N) \cap N = Z(N) = E$ и по свойству <2> подгруппа $C_G(N) = E$. По свойству <1> группа $G = MN$ и имеем случай (2) из заключения теоремы.

Пусть теперь $F(G) = E$ и в группе $G$ имеются две различные минимальные нормальные в $G$ подгруппы $N_1$ и $N_2$. Тогда

$$N_1 \cap N_2 = E, \quad N_1N_2 = N_1 \times N_2.$$

Поэтому $N_1 \le C_G(N_2)$ и по свойству <2> $N_1 = C_G(N_2)$. Аналогично, $N_2 = C_G(N_1)$. Из <2> также следует, что

$$G = [N_1]M = [N_2]M.$$

Если допустить, что существует третья минимальная нормальная подгруппа $N_3$, то

$$N_3 \le C_G(N_1) = N_2, \quad N_3 \le C_G(N_2) = N_1,$$

что противоречит друг другу. Значит в группе $G$ точно две минимальные нормальные подгруппы.

Пусть теперь $V$ — собственная подгруппа группы $G$ такая, что $VN_1 = VN_2 = G$. Предположим, что $H$

— максимальная в $G$ подгруппа, содержащая $V$. Если $K = Core_G H \neq E$, то либо $N_1 \leq K$, либо $N_2 \leq K$, что противоречит равенствам $HN_1 = HN_2 = G$. Значит, $Core_G H = E$ и к $H$ применимы свойства <1> и <2>. Поэтому

$$N_1 \cap H = N_2 \cap H = E,$$

значит $V \cap N_1 = V \cap N_2 = E$, а из равенств

$$|N_1| = |G : V| = |G : H|$$

следует, что $V = H$ — максимальная в $G$ подгруппа.

Далее,

$$N_1 N_2 = N_1 N_2 \cap N_i M = N_i(N_1 N_2 \cap M),$$

поэтому

$$N_{3-i} \simeq N_1 N_2 / N_i = N_i(N_1 N_2 \cap M)/N_i \simeq$$

$$\simeq N_1 N_2 \cap M / N_1 N_2 \cap M \cap N_i = N_1 N_2 \cap M,$$

следовательно, $N_1 \simeq N_2 \simeq N_1 N_2 \cap M$. □

**Следствие 25.7.** *В примитивной группе не более двух минимальных нормальных подгрупп.* □

Обозначим через $\mathcal{P}$ класс всех примитивных групп. Разобьем его на три подкласса:

$\mathcal{P}_1$ — класс примитивных групп с абелевой минимальной нормальной подгруппой;

$\mathcal{P}_2$ — класс примитивных групп с единственной неразрешимой минимальной нормальной подгруппой;

$\mathcal{P}_3$ — класс примитивных групп с двумя неразрешимыми минимальными нормальными подгруппами.





Класс $\mathcal{P}_i$ состоит из всех групп, соответствующих заключению (i) теоремы 25.6. Эта теорема утверждает, что

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3.$$

Все три класса не пусты. Например,

$$S_3 \in \mathcal{P}_1; \quad A_5;\ S_5 \in \mathcal{P}_2; \quad [A_5 \times A_5]Z_2 \in \mathcal{P}_3.$$

Для разрешимых примитивных групп имеет место только случай (1) теоремы 25.6, т.е. каждая разрешимая примитивная группа принадлежит $\mathcal{P}_1$.

**Теорема 25.8.** *Пусть $G$ — разрешимая неединичная примитивная группа и $M$ — её примитиватор. Тогда:*

*(1) группа $G$ имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N$, причем $N = C_G(N)$ и $G = [N]M$;*

*(2) если $p$ делит $|N|$, то $O_p(M) = E$;*

*(3) все дополнения к подгруппе $N$ в группе $G$ сопряжены между собой.*

*Доказательство.* (1) Утверждение следует из теоремы 25.6. В частности, $N$ — $p$−группа для некоторого простого $p$.

(2) Пусть $K/N = O_p(G/N)$. Тогда $K$ — нормальная $p$−подгруппа группы $G$, поэтому

$$K \subseteq O_p(G) \leq F(G).$$

Но по теореме 25.4 подгруппа $F(G) = N$, поэтому $K/N = E$ и

$$O_p(G/N) \simeq O_p(M) = E.$$

(3) Пусть $M$ и $H$ — два дополнения к подгруппе $N$ в группе $G$. В $G/N$ выберем минимальную нормальную подгруппу $L/N$. По (2) подгруппа $L/N$ — $q$-группа, $q \neq p$, поэтому $L = [N]L_q$, где $L_q$ — силовская $q$−подгруппа группы $L$. Из того, что

$$G = [N]M = LM$$

следует, что $L \cap M$ — силовская $q$−подгруппа в $L$. Аналогично, $G = [N]H = LH$ и $L \cap H$ — силовская $q$−подгруппа в $L$. По теореме Силова

$$L \cap M = (L \cap H)^l,\ l \in L.$$

Но $L \cap M \triangleleft M$, поэтому $N_G(L \cap M) = M$. Аналогично, $N_G(L \cap H) = H$. Так как нормализаторы сопряженных подгрупп сопряжены, то

$$M = N_G(L \cap M) = N_G((L \cap H)^l) = H^l.$$

□

**Теорема 25.9.** *В разрешимой группе максимальные подгруппы сопряжены тогда и только тогда, когда их ядра равны.*

*Доказательство.* Пусть $G$ — разрешимая группа, $H$ и $M$ — максимальные подгруппы. Предположим, что $H = M^y$, $y \in G$. Тогда

$$Core_G H = \cap_{x \in G} H^x = \cap_{x \in G} M^{xy} = Core_G M.$$

Обратно, пусть

$$Core_G H = Core_G M.$$





Тогда $G/Core_G H$ — примитивная группа с примитиваторами

$$H/Core_G H,\quad M/Core_G M.$$

По теореме 25.8(3) эти подгруппы сопряжены в $G/Core_G H$, поэтому $H$ и $M$ сопряжены в группе $G$. □

**Теорема 25.10.** *(1) Группа $G \in \mathcal{P}_1$ тогда и только тогда, когда в $G$ существует единственная минимальная нормальная подгруппа $N$, причем $N$ абелева и $N$ не содержится в $\Phi(G)$.*

*(2) Разрешимая группа примитивна тогда и только тогда, когда она содержит самоцентрализуемую минимальную нормальную подгруппу.*

*Доказательство.* (1) Если $G \in \mathcal{P}_1$, то из теоремы 25.6(1) следует, что в группе $G$ существует единственная минимальная нормальная подгруппа $N$, причем $N = C_G(N)$ и $G = [N]M$, где $M$ — примитиватор группы $G$. Из того, что $N = C_G(N)$, следует, что $N$ абелева. Из того, что $G = [N]M$, следует, что $N$ не содержится в $\Phi(G)$.

Обратно, пусть $N$ — единственная минимальная нормальная подгруппа, причем $N$ абелева и $N$ не содержится в $\Phi(G)$. Тогда существует максимальная подгруппа $M$ такая, что $N$ не содержится в $M$. Теперь $MN = G$, а так как

$$M \cap N \triangleleft M,\quad M \cap N \triangleleft N,$$

то $M \cap N \triangleleft G$. Из минимальности $N$ следует, что $M \cap N = E$, а из того, что $N$ — единственная минимальная нормальная подгруппа заключаем, что $Core_G M = E$ и примитивна.

(2) Если $G$ — разрешимая примитивная группа, то $G \in \mathcal{P}_1$ и по теореме 25.6(1) группа $G$ содержит самоцентрализуемую минимальную нормальную подгруппу.

Обратно, пусть разрешимая группа $G$ содержит минимальную нормальную подгруппу $N$ и $N = C_G(N)$. По лемме 22.2, с. 201,

$$F(G) \leq C_G(N) = N,$$

теперь $\Phi(G) = E$ и $F(G) = N$ по следствию 22.6, с. 204. Поскольку $\Phi(G) = E$, то существует максимальная в $G$ подгруппа $M$ такая, что $N$ не содержится в $M$. Теперь $G = MN$, а так как

$$M \cap N \lhd M, \quad M \cap N \lhd N,$$

то $M \cap N \lhd G$ и из минимальности $N$ следует, что $M \cap N = E$. Поскольку $N = C_G(N)$, то $Core_G M = E$ и $G$ примитивна. □

## § 26. Сверхразрешимые группы

Группа называется *сверхразрешимой*, если она обладает нормальным рядом с циклическими факторами.

**Лемма 26.1.** *(1) Каждая подгруппа и каждая факторгруппа сверхразрешимой группы сверхразрешимы.*

*(2) Прямое произведение сверхразрешимых групп является сверхразрешимой группой.*

*(3) Сверхразрешимая группа разрешима.*

*Доказательство.* (1) Пусть группа $G$ сверхразрешима. Тогда группа $G$ обладает нормальным рядом с циклическими факторами:

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \ldots \geq G_{r-1} \geq G_r = E, \qquad < 1 >$$





$G_i \lhd G$ и факторгруппы $G_i/G_{i+1}$ циклические для всех $i$. Пусть $U \leq G$ и $U_i = U \cap G_i$. Тогда подгруппа $U$ имеет ряд

$$U = U_0 \geq U_1 \geq \ldots \geq U_{r-1} \geq G_r = E, \qquad < 2 >$$

причем $U_i = U \cap G_i \lhd U$, для всех $i$. Далее

$$U_{i-1}/U_i = U \cap G_{i-1}/U \cap G_i \simeq (U \cap G_{i-1})G_i/G_i \leq G_{i-1}/G_i$$

и факторгруппа $U_{i-1}/U_i$ циклическая. Итак, ряд <2> нормальный и его факторы циклические. Поэтому подгруппа $U$ сверхразрешима.

Пусть $N \lhd G$. Рассмотрим ряд

$$G/N = G_0/N \geq G_1N/N \geq \ldots$$

$$\ldots \geq G_{r-1}N/N \geq G_rN/N = E. \qquad < 3 >$$

Ясно, что $G_iN/N \lhd G/N$ для всех $i$, поэтому ряд <3> нормальный. Далее,

$$G_{i-1}N/N/G_iN/N \simeq G_{i-1}N/G_iN \simeq$$

$$\simeq G_{i-1}(G_iN)/G_iN \simeq G_{i-1}/G_{i-1} \cap G_iN =$$

$$= G_{i-1}/G_i(G_{i-1} \cap N) \simeq G_{i-1}/G_i/G_i(G_{i-1} \cap N)/G_i,$$

поэтому факторы ряда <3> циклические и факторгруппа $G/N$ сверхразрешима.

(2) Пусть $G$ и $H$ — сверхразрешимые группы. Тогда группы $G$ и $H$ обладают нормальными рядам с циклическими факторами:

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \ldots \geq G_{r-1} \geq G_r = E,$$

$$H = H_0 \geq H_1 \geq \ldots \geq H_{s-1} \geq H_s = E,$$

с циклическими факторами $G_{i-1}/G_i$, $H_{i-1}/H_i$. Рассмотрим прямое произведение $G \times H$ и построим ряд

$$G \times H = G_0 \times H \geq G_1 \times H \geq \ldots \geq$$

$$\geq G_{r-1} \times H \geq G_r \times H = H_0 \geq H_1 \ldots \geq H_{s-1} \geq H_s.$$

Этот ряд нормальный и его факторы циклические.

(3) Пусть группа $G$ сверхразрешима. Тогда группа $G$ обладает нормальным рядом <1> с циклическими факторами. Так как $G_{r-1}$ циклическая, то $G_{r-1}$ разрешима. Так как $G_{r-2}/G_{r-1}$ и $G_{r-1}$ циклические, то они разрешимы, поэтому $G_{r-2}$ разрешима по лемме 21.2, с. 194. Теперь $G_{r-3}/G_{r-2}$ и $G_{r-2}$ разрешимы, значит и $G_{r-3}$ разрешима по лемме 21.2, с. 194, и т.д. Через конечное число шагов получаем, что группа $G$ разрешима. □

**Лемма 26.2.** *(1) Если группа $G$ содержит нормальную циклическую подгруппу $K$ и факторгруппа $G/K$ сверхразрешима, то группа $G$ сверхразрешима.*

*(2) Если факторгруппа $G/Z(G)$ сверхразрешима, то группа $G$ сверхразрешима.*

*(3) Нильпотентная группа сверхразрешима.*

*Доказательство.* (1) Так как $G/K$ сверхразрешима, то имеется нормальный ряд

$$G/K = G_0/K \geq G_1/K \geq \ldots \geq G_r/K = E$$

с циклическими факторами $G_{i-1}/K/G_i/K$. Рассмотрим ряд

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \ldots \geq G_{r-1} \geq G_r \geq K \geq E. \qquad < 4 >$$





Так как $G_i/K \lhd G/K$, то $G_i \lhd G$ и ряд <4> нормальный. Кроме того, факторы

$$G_{i-1}/G_i \simeq G_{i-1}/K/G_i/K$$

циклические для $i = 1, \ldots, r$. Далее, $K$ — циклическая группа. Значит ряд <4> нормальный с циклическими факторами и группа $G$ сверхразрешима.

(2) Пусть $Z = Z(G)$. Так как $G/Z$ сверхразрешима, то имеется нормальный ряд

$$G/Z = G_0/Z \geq G_1/Z \geq \ldots \geq G_r/Z = E$$

с циклическими факторами $G_{i-1}/Z/G_i/Z$. Поскольку в абелевой группе максимальные подгруппы имеют простые индексы, то группа $Z$ обладает рядом

$$Z = Z_0 \geq Z_1 \geq \ldots \geq Z_m = E$$

с факторами $Z_j/Z_{j+1}$ простых порядков. Рассмотрим ряд

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \ldots \geq G_{r-1} \geq G_r \geq Z =$$

$$= Z_0 \geq Z_1 \geq \ldots \geq Z_m = E. \qquad < 5 >$$

Так как $G_i/Z \lhd G/Z$, то $G_i \lhd G$. Поскольку все подгруппы из центра группы нормальны в группе, то ряд <5> нормальный. Кроме того, факторы

$$G_{i-1}/G_i \simeq G_{i-1}/Z/G_i/Z$$

циклические для $i = 1, \ldots, r$, а факторы

$$Z_j/Z_{j+1},\ j = 0, \ldots, m-1$$

имеют простые порядки. Значит ряд <5> нормальный с циклическими факторами и группа $G$ сверхразрешима.

(3) Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть $G$ — нильпотентная группа и $K \cdot\triangleleft G$. Тогда $K$ имеет простой порядок. По индукции факторгруппа $G/K$ сверхразрешима. Теперь группа $G$ сверхразрешима по (1). $\square$

**Лемма 26.3.** *Группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда она обладает главным рядом с факторами простых порядков.*

*Доказательство.* Пусть $G$ сверхразрешима. Тогда она имеет нормальный ряд <1> с циклическими факторами $G_{i-1}/G_i$. Так как $G_{i-1}/G_i \triangleleft G/G_i$ и $G_{i-1}/G_i$ циклическая, то по лемме 9.7, с. 95, все подгруппы в $G_{i-1}/G_i$ характеристические. Пусть $G_{i-1}^{(1)}/G_i$ — подгруппа простого индекса в $G_{i-1}/G_i$. Тогда

$$G_{i-1}^{(1)}/G_i \; char \; G_{i-1}/G_i \triangleleft G/G_i,$$

следовательно $G_{i-1}^{(1)}/G_i \triangleleft G/G_i$ по лемме 9.10, с. 96, и ряд

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \ldots \geq G_{i-1} \geq G_{i-1}^{(1)} \geq G_i \geq \ldots \geq G_r = E$$

нормальный с циклическим фактором $G_{i-1}/G_{i-1}^{(1)}$ простого порядка. Повторяя эти действия, через конечное число шагов придем к главному ряду с факторами простых порядков.

Обратно, если группа $G$ имеет главный ряд с факторами простых порядков, то этот ряд будет нормальным, а его факторы циклическими. Значит группа $G$ будет сверхразрешимой. $\square$

**Теорема 26.4.** *(1) Максимальные подгруппы сверхразрешимой группы имеют простые индексы.*





*(2) В сверхразрешимой группе каждая минимальная нормальная подгруппа имеет простой порядок.*

*Доказательство.* (1) Пусть $G$ — сверхразрешимая группа и $M < \cdot\, G$. По лемме 26.3 группа $G$ имеет главный ряд

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \ldots \geq G_{r-1} \geq G_r = E \qquad < 6 >$$

с факторами простых порядков. Зафиксируем число $i$ такое, что $G_i \leq M$, но $G_{i-1} \not\leq M$. Поскольку $M < \cdot\, G$ и $G_{i-1} \triangleleft G$, то $G = MG_{i-1}$ и

$$| G : M | = | G_{i-1} : M \cap G_{i-1} |.$$

Но $G_i \leq M \cap G_{i-1}$ и $| G_{i-1} : G_i | = p$, поэтому либо $G_i = M \cap G_{i-1}$, либо $M \cap G_{i-1} = G_{i-1}$. Поскольку, $G_{i-1} \not\leq M$, то $G_i = M \cap G_{i-1}$ и $| G : M | = p$.

(2) Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть $N \cdot\triangleleft G$. По лемме 26.3 в группе $G$ существует минимальная нормальная подгруппа $K$ простого порядка. Если $N \cap K \neq E$, то $N = K$ и утверждение справедливо. Пусть $N \cap K = E$. По лемме 13.1, с. 128, подгруппа $NK/K$ — минимальная нормальная подгруппа факторгруппы $G/K$. По индукции $| N | = | NK/K |$ — простое число. $\square$

**Лемма 26.5.** *Если $G$ — сверхразрешимая группа и $p$ — наибольший простой делитель порядка $G$, то силовская $p$–подгруппа группы $G$ нормальна.*

*Доказательство.* Воспользуемся индукцией по порядку группы $G$. Пусть $N \cdot\triangleleft G$. Тогда $| N | = q$ — простое число по лемме 26.4. Факторгруппа $G/N$ сверхразрешима. По индукции, $G_pN/N \triangleleft G/N$, т.е. $G_pN \triangleleft G$. Если $p = q$, то $N \le G_p$ и $G_pN = G_p \triangleleft G$. Пусть $p \ne q$, тогда $p > q$. Так как фактогруппа $G/C_G(N)$ по теореме 9.6, с. 95, изоморфна подгруппе группы $\mathrm{Aut}N$, которая по теореме 10.3, с. 101, является циклической группой порядка $(q-1)$, то $G_p \le C_G(N)$ и $G_pN = G_p \times N$. Но теперь, $G_p$ *char* $G_pN \triangleleft G$, следовательно $G_p \triangleleft G$. □

Говорят, что группа $G$ *дисперсивна,* если она обладает нормальным рядом, факторы которого изоморфны силовским подгруппам. Более точно, пусть $\varphi$ — некоторое упорядочение множества простых чисел. Запись $p\varphi q$ означает, что $p$ предшествует $q$ в упорядочении $\varphi$, $p \ne q$. Группа $G$ порядка

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$$

называется $\varphi$*−дисперсивной*, если $p_1\varphi p_2\varphi \dots \varphi p_n$ и для любого $i$ группа $G$ имеет нормальную подгруппу порядка

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i},$$

т.е. группа $G$ имеет нормальный ряд

$$E < G_1 < G_2 < \dots < G_{n-1} < G, \qquad <7>$$

где

$$|\, G_1 \,| = p_1^{\alpha_1}, \quad |\, G_2 \,| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}, \dots ,$$
$$|\, G_i \,| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}, \dots , \quad |\, G_{n-1} \,| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{n-1}^{\alpha_{n-1}}.$$

В этом случае, у ряда <7> факторы изоморфны силовским подгруппам:

$$G_1/E \simeq G_{p_1},\ G_1/G_1 \simeq G_{p_1},\ \dots ,\ G_n/G_{n-1} \simeq G_{p_n}.$$

Если при этом упорядочение $\varphi$ таково, что $p\varphi q$ влечет $p > q$, то $\varphi$−дисперсивная группа называется *дисперсивной по Оре*.





*Дисперсивной* группой называют группу, являющуюся $\varphi$−дисперсивной для некоторого $\varphi$. Дисперсивная по Оре группа $G$ $p$−замкнута для наибольшего $p \in \pi(G)$ и $q$−нильпотентна для наименьшего $q \in \pi(G)$.

**Пример 26.6.** Нильпотентная группа $\varphi$−дисперсивна при любом $\varphi$.

$S_3$ дисперсивна по Оре.

$A_4$ $\varphi$−дисперсивна, где $p\varphi q$ тогда и только тогда, когда $p < q$, но $A_4$ не дисперсивна по Оре.

Прямое произведение $S_3 \times A_4$ является недисперсивной группой. □

**Лемма 26.7.** *(1) Подгруппа и факторгруппа $\varphi$−дисперсивной группы также $\varphi$−дисперсивна.*

*(2) Прямое произведение $\varphi$−дисперсивных групп является $\varphi$−дисперсивной группой.*

*(3) $\varphi$−Дисперсивные группы разрешимы.*

*(4) Если $G/\Phi(G)$ $\varphi$−дисперсивна, то группа $G$ $\varphi$−дисперсивна.*

*Доказательство.* Утверждения (1)−(3) проверяются непосредственно на основе соответствующих определений.

(4) Воспользуемся индукцией по порядку группы $G$. Пусть

$$|\, G \,| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}, \quad p_1\varphi p_2\varphi \dots \varphi p_n.$$

Через $P_i$ обозначим силовскую $p_i$−подгруппу группы $G$. По условию $P_1\Phi(G) \triangleleft G$, а по лемме Фраттини $G = N_G(P_1)\Phi(G)$. Теперь $P_1 \triangleleft G$ по 19.5, с. 177. Так как

$$\Phi(G)P_1/P_1 \subseteq \Phi(G/P_1),$$

то факторгруппа $G/P_1$ $\varphi$−дисперсивна по индукции, поэтому группа $G$ $\varphi$−дисперсивна. □

**Теорема 26.8.** *Сверхразрешимая группа дисперсивна по Оре.*

*Доказательство.* Пусть $G$ — сверхразрешимая группа,

$$| G |= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}, \quad p_1 > p_2 > \dots > p_n.$$

По лемме 26.5 силовская $p_1$–подгруппа $P_1 \lhd G$. Факторгруппа $G/P_1$ имеет порядок $p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ и по индукции факторгруппа $G/P_1$ дисперсивна по Оре. Значит, для любого $i$ в группе $G/P_1$ имеется нормальная подгруппа $H_i/P_1$ порядка

$$p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}, \ i = 2, \dots , n.$$

Пусть $H_1 = P_1$. В группе $G$ имеется нормальная подгруппа $H_i$ порядка $p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$ для любого $i = 2, \dots , n$. □

**Теорема 26.9.** *Коммутант сверхразрешимой группы нильпотентен.*

*Доказательство.* Воспользуемся индукцией по порядку группы $G$. Пусть $K \cdot\!\lhd G$. По индукции факторгруппа $(G/K)'$ нильпотентна. Но по лемме 20.6, с. 186,

$$(G/K)' = G'K/K.$$

Если $K$ не содержится в $G'$, то $G' \cap K = E$, т.к. $| K |= p$ — простое число и $G'K/K \simeq G'$ нильпотентна. Пусть $K \leq G'$. Поскольку $G/C_G(K)$ — циклическая группа порядка, делящего $p-1$, то $G' \leq C_G(K)$ и $K$ содержится в центре $G'$. Если $Q$ — произвольная силовская подгруппа из $G'$, то либо $Q \geq K$, либо $QK = Q \times K$. Так как $G'/K$ нильпотентна, то $QK/K \lhd G'/K$, откуда $Q \lhd G'$. □





*Экспонентой* группы называют наименьшее общее кратное порядков всех элементов этой группы.

Говорят, что группа $G$ линейных преобразований пространства $V$ действует *неприводимо* на $V$, если в пространстве $V$ нет $G$–допустимых нетривиальных подпространств, т.е. подпространств, отличных от нулевого и всего $V$.

**Лемма 26.10.** *Пусть $V$ — векторное пространство размерности $n \geq 1$ над полем $GF(p)$. Пусть $G$ — абелева группа линейных преобразований пространства $V$ экспоненты, делящей $(p-1)$. Если $G$ действует неприводимо на $V$, то $n = 1$ и $G$ циклическая.*

*Доказательство.* Пусть $g \in G$. Так как группа $G$ имеет экспоненту $(p-1)$, то $g$ является корнем многочлена $x^{p-1} - 1$. Этот многочлен над полем $GF(p)$ разлагается в произведение линейных многочленов, поэтому $g$ имеет характеристический корень $\lambda \neq 0$ в $GF(p)$ и подпространство $W = \{v \mid vg = \lambda v\}$ ненулевое. Пусть $x \in G$ и $v \in W$. Тогда $vxg = vgx = \lambda vx$ и $vx \in W$. Значит $W$ — ненулевое $G$–допустимое подпространство пространства $V$. Из неприводимости группы $G$ следует, что $V = W$. Поэтому каждый элемент группы $G$ индуцирует скалярное умножение на $V$, а из неприводимости $G$ следует, что $n = 1$. Но теперь группа $G$ изоморфна подгруппе мультипликативной группы поля $GF(p)$ и поэтому циклическая. □

Пусть $H$ и $K \lhd G$ и $K \leq H$. В лемме 11.8, с. 111, введена группа

$$C_G(H/K) = \langle g \in G \mid g^{-1}h^{-1}gh \in K, \ h \in H\rangle,$$

которая является нормальной подгруппой группы $G$ и факторгруппа $G/C_G(H/K)$ изоморфна группе

$\mathrm{Aut}_G(H/K)$. Ясно, что

$$C_G(H/K) = \langle g \in G \mid [g, H] \subseteq K \rangle.$$

**Теорема 26.11.** *Пусть $H/K$ — $p$–главный фактор группы $G$. Тогда и только тогда $\mid H/K \mid= p$, когда $Aut_G(H/K)$ — абелева группа экспоненты, делящей $p-1$.*

*Доказательство.* Если $H/K$ — $p$–главный фактор группы $G$ порядка $p$, то $\mathrm{Aut}_G(H/K)$ — абелева группа экспоненты, делящей $(p-1)$ по следствию 11.9, с. 112.

Обратно, пусть $\mathrm{Aut}_G(H/K)$ — абелева группа экспоненты, делящей $(p-1)$. По теореме 15.1, с. 147, элементарную абелеву $p$–группу $H/K$ порядка $p^n$ можно рассматривать как векторное пространство размерности $n$ над полем $GF(p)$, а группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}_G(H/K)$ как группу линейных преобразований. Из того, что $H/K$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G/K$ следует, что $\mathrm{Aut}_G(H/K)$ действует неприводимо на $H/K$. Теперь по лемме 26.10 получаем, что $n = 1$, т.е. $\mid H/K \mid= p$. □

**Следствие 26.12.** *Группа $G$ сверхразрешима тогда и только тогда, когда для каждого простого $p$ и каждого $p$–главного фактора $H/K$ группы $G$ группа $Aut_G(H/K)$ абелева экспоненты, делящей $(p-1)$.*

*Доказательство.* Если группа сверхразрешима, то все ее главные факторы имеют простые порядки. Это следует из леммы 26.3 и теоремы Жордана–Гельдера, см. теорему 11.5, с. 109. Теперь $\mathrm{Aut}_G(H/K)$ — абелева группа экспоненты, делящей $p-1$ по теореме 26.11.

Обратно, если для каждого $p$–главного фактора $H/K$ группы $G$ группа $\mathrm{Aut}_G(H/K)$ абелева экспоненты, делящей $(p-1)$, то по теореме 26.11 каждый главный фактор





имеет простой порядок и группа сверхразрешима по лемме 26.3. □

**Теорема 26.13.** (Хупперт) *Если в группе $G$ все максимальные подгруппы имеют простые индексы, то группа $G$ сверхразрешима.*

*Доказательство.* Воспользуемся индукцией по порядку группы $G$. Ясно, что условия теоремы наследуются всеми факторгруппами группы $G$. Если в группе $G$ имеются две различные минимальные нормальные подгруппы $N_1$ и $N_2$, то $G/N_i$ сверхразрешима по индукции. Так как $N_1 \cap N_2 = E$, то группа $G$ изоморфна подгруппе прямого произведения $(G/N_1) \times (G/N_2)$ по лемме Ремака. Теперь по лемме 26.1 группа $G$ сверхразрешима. Поэтому в дальнейшем считаем, что в группе единственная минимальная нормальная подгруппа.

Пусть $p$ — наибольший простой делитель порядка группы $G$ и $G_p$ — её силовская $p$–подгруппа. Предположим, что $G_p$ не нормальна в $G$. Тогда $N_G(G_p) \neq G$ и существует максимальная подгруппа $M$ группы $G$, содержащая $N_G(G_p)$. По теореме Силова

$$\mid G : N_G(G_p) \mid= 1 + kp; \quad \mid M : N_G(G_p) \mid= 1 + k_1 p.$$

Так как по условию теоремы $\mid G : M \mid= q$ — простое число, то из равенства

$$\mid G : N_G(G_p) \mid=\mid G : M \mid\mid M : N_G(G_p) \mid$$

следует, что

$$q =\mid G : M \mid= 1 + p(k - k_1 q),$$

что противоречит максимальности числа $p$. Поэтому допущение неверно, и $G_p \lhd G$. По индукции факторгруппа $G/G_p$ сверхразрешима, поэтому группа $G$ разрешима.

Пусть $N \cdot\!\lhd G$, $N \le G_p$. Из того, что $N$ — единственная минимальная нормальная подгруппа следует, что подгруппа Фиттинга $F(G)$ является $p-$группой. Если $N \not\subseteq \Phi(G)$, то существует максимальная подгруппа $M$ в группе $G$ такая, что $N \not\subseteq M$. Поэтому $G = NM$ и $N \cap M = E$ по лемме 13.1, с. 128. По условию $|\, G : M \,| = |\, N \,| = p$ и группа $G$ сверхразрешима по лемме 26.2.

Следовательно, $N \le \Phi(G)$. По лемме 22.2, с. 201, для фактогруппы $\overline{G}$ получаем, что

$$F(\overline{G}) = F(G)/N$$

— $p-$группа, а по теореме 26.9 $(\overline{G})' \le F(\overline{G})$. Отсюда следует, что $C_{\overline{G}}(\overline{A}/\overline{B}) = \overline{G}$ для каждого главного $p'-$фактора $\overline{A}/\overline{B}$ группы $\overline{G}$. Теперь по теореме 22.7, с. 204, подгруппа $F(\overline{G})$ совпадает с пересечением централизаторов главных факторов группы $\overline{G}$ порядка $p$. По лемме Ремака и теореме 10.3, с. 101, получаем, что $\overline{G}/F(\overline{G})$ — абелева группа экспоненты, делящей $(p-1)$. Поэтому $G/F(G)$ — абелева группа экспоненты, делящей $(p-1)$.

Так как $N \cdot\!\lhd G$ и $N \cap Z(F(G)) \ne E$, то $N \le Z(F(G))$ и $F(G) \le C_G(N)$. Теперь

$$G/C_G(N) \simeq (G/F(G))/(C_G(N)/F(G))$$

и $G/C_G(N)$ — абелева группа экспоненты, делящей $(p-1)$. По теореме 26.11 подгруппа $N$ имеет порядок $p$ и группа $G$ сверхразрешима по лемме 26.2 □

**Следствие 26.14.** *Если факторгруппа $G/\Phi(G)$ сверхразрешима, то и группа $G$ сверхразрешима.*





*Доказательство.* Пусть факторгруппа $G/\Phi(G)$ сверхразрешима. По теореме 26.4 все максимальные подгруппы в группе $G/\Phi(G)$ имеют простые индексы. Но теперь все максимальные подгруппы в группе $G$ имеют простые индексы и группа $G$ сверхразрешима по теореме 26.13. □

**Теорема 26.15.** *Пусть $G$ — разрешимая группа. Тогда и только тогда $G$ сверхразрешима, когда для каждой максимальной подгруппы $M$ группы $G$ либо $F(G) \le M$, либо $F(G) \cap M$ — максимальная подгруппа группы $F(G)$.*

*Доказательство.* Пусть $G$ сверхразрешима и $M <\cdot\, G$. Тогда $|\, G : M \,|$ — простое число. Если $F(G)$ не содержится в $M$, то $F(G)M = G$ и

$$|\, G : M \,| = |\, F(G) : F(G) \cap M \,|$$

— простое число. Поэтому $F(G) \cap M <\cdot\, F(G)$.

Обратно, пусть $G$ разрешима и для каждой максимальной подгруппы $M$ группы $G$ либо $F(G) \le M$, либо $F(G) \cap M <\cdot\, F(G)$. Так как

$$F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$$

по лемме 22.2, с. 201, то условия теоремы переносятся на факторгруппу $G/\Phi(G)$. Если $\Phi(G) \ne E$, то по индукции $G/\Phi(G)$ сверхразрешима, поэтому по следствию 26.14 группа $G$ сверхразрешима. Итак,

$$\Phi(G) = E, \quad F(G) = N_1 \times \ldots \times N_t$$

— прямое произведение минимальных нормальных подгрупп $N_i$ группы $G$, $i = 1, \ldots, t$. Для каждого $i$ существует максимальная подгруппа $M_i$ группы $G$, такая, что

$N_i \cap M_i = E$ и $G = [N_i]M_i$. По тождеству Дедекинда

$$F(G) = [N_i](F(G) \cap M_i),$$

а по условию теоремы

$$F(G) \cap M_i <\cdot\ F(G).$$

Из нильпотентности $F(G)$ следует, что

$$| N_i |=| F(G) : F(G) \cap M_i |= p_i$$

— простое число. Теперь факторгруппа $G/C_G(N_i)$ абелева порядка, делящего $p_i - 1$, поэтому

$$G' \subseteq \cap_{i=1}^{t} C_G(N_i) \subseteq C_G(F(G)) \leq F(G).$$

Пусть теперь $M <\cdot\ G$. Если $M \geq F(G)$, то $G/M$ абелева и $| G : M |$ — простое число. Если $F(G)$ не содержится в $M$, то $MF(G) = G$ и

$$| G : M |=| F(G) : F(G) \cap M |$$

— простое число. По теореме 26.13 группа $G$ сверхразрешима. □

**Следствие 26.16.** *Пусть $G$ — разрешимая группа. Тогда и только тогда группа $G$ сверхразрешима, когда для любой максимальной подгруппы $M$ группы $G$ и любой нормальной подгруппы $N$ группы $G$ либо $M \geq N$, либо $M \cap N <\cdot\ N$.*

*Доказательство.* Если $G$ сверхразрешима, то все максимальные подгруппы имеют простые индексы и если $M$ не содержит $N$, то $MN = G$ и

$$| G : M |=| N : N \cap M |$$





— простое число и $N \cap M <\cdot\ N$.

Обратно, если для любой максимальной подгруппы $M$ и любой нормальной подгруппы $N$ либо $N \leq M$, либо $N \cap M <\cdot\ N$, то это верно и для подгруппы Фиттинга $F(G)$. По теореме 26.15 группа $G$ сверхразрешима. □

**Следствие 26.17.** *Тогда и только тогда разрешимая группа сверхразрешима, когда индекс любой максимальной подгруппы, не содержащей подгруппу Фиттинга, является простым числом.*

*Доказательство.* Если группа сверхразрешима, то индекс каждой максимальной подгруппы есть простое число по теореме 26.4.

Обратно, пусть $G$ — разрешимая группа, у которой индекс любой максимальной подгруппы, не содержащей подгруппу Фиттинга, является простым числом. Если $M$ — максимальная подгруппа группы $G$ и $F(G) \not\subseteq M$, то $| G : M |= p$ — простое число. Теперь $G = MF(G)$ и

$$p =| G : M |=| F(G) : F(G) \cap M | .$$

Поэтому $F(G) \cap M$ — максимальная подгруппа в $F(G)$ и по теореме 26.15 группа $G$ сверхразрешима. □

**Пример 26.18.** Пусть

$$X = \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}_5\}$$

— аддитивная элементарная абелева группа порядка $5^2$. Группу $X$ можно рассматривать как двумерное векторное пространство над полем $\mathbb{Z}_5$, она разлагается в прямую сумму двух своих подгрупп порядка 5:

$$X = \langle(1, 0)\rangle \oplus \langle(0, 1)\rangle.$$

Пусть $Q$ — группа из примера 14.7, с. 144.

$$Q = \langle A, B \mid A^4 = B^4 = E, A^2 = B^2, B^{-1}AB = A^{-1}\rangle \subseteq$$

$$\subseteq SL(2, \mathbb{Z}_5),$$

где $A$ и $B$ — матрицы над полем $\mathbb{Z}_5$: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

В силу теоремы 15.1, с. 147, группа $Q$ является группой автоморфизмов группы $X$. По теореме 14.1, с. 138, существует группа $G = [X]Q$, она имеет порядок 200, а её подгруппы

$$H = [X]\langle A\rangle; \quad K = [X]\langle B\rangle$$

имеют индекс 2 в группе $G$. Поэтому $H$ и $K \lhd G$. Так как

$$(1,0)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = (2,0) = 2(1,0) \in \langle (1,0)\rangle,$$

то $\langle (1,0)\rangle \lhd H$. Таким образом, группа $H$ содержит нормальную подгруппу $H_1 = \langle (1,0)\rangle$, факторгруппа по которой $H/H_1$ является полупрямым произведением нормальной подгруппы $X/H_1$ порядка 5 и циклической подгруппы порядка 4. Поэтому подгруппа $H$ сверхразрешима. Аналогично,

$$(1,2)\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (2,4) = 2(1,2) \in \langle (1,2)\rangle,$$

т.е. группа $K$ содержит нормальную подгруппу $\langle (1,2)\rangle$, факторгруппа по которой является полупрямым произведением нормальной подгруппы порядка 5 и циклической подгруппы порядка 4. Поэтому подгруппа $K$ сверхразрешима. Следовательно, группа $G$ является произведением





нормальных сверхразрешимых подгрупп $H$ и $K$. Предположим, что группа $G$ сверхразрешима. Тогда по лемме 26.5, с. 236, и теореме 26.4, с. 235, в группе $G$ имеется нормальная подгруппа $\langle (x,y)\rangle$ порядка 5. Поэтому

$$(x,y)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = (2x, 3y) \in \langle (x,y)\rangle,$$

$$(x,y)\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (y, 4x) \in \langle (x,y)\rangle,$$

что возможно только при $x = y = 0$. Поэтому допущение неверно и группа $G$ несверхразрешима. □

Таким образом, существуют несверхразрешимые группы, являющиеся произведением нормальных сверхразрешимых подгрупп.

# ГЛАВА 5. ПРОЕКТОРЫ И ИНЪЕКТОРЫ

Все рассматриваемые в этой главе группы являются конечными.

## § 27. Формации и классы Шунка

Будем рассматривать множества групп, т.е. множества, элементами которого являются группы. *Класс групп* — это множество групп, которое вместе с каждой своей группой содержит все ей изоморфные группы. За некоторыми классами закреплены стандартные обозначения:

$\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп;

$\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп;

$\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп;

$\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп;

$\mathfrak{E}$ — класс всех (конечных) групп.

Если $\pi$ — некоторое множество простых чисел и $\mathfrak{X}$ — класс групп, то через $\mathfrak{X}_\pi$ обозначается класс всех $\pi-$групп из $\mathfrak{X}$. Ясно, что $\mathfrak{X}_\pi = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{E}_\pi$. Группы из класса $\mathfrak{X}$ называют также $\mathfrak{X}-$*группами*.

Класс $\mathfrak{X}$ называется *наследственным классом* или *классом, замкнутым относительно подгрупп*, если выполняется следующее требование:

(1) если $G \in \mathfrak{X}$ и $H \leq G$, то $H \in \mathfrak{X}$.

Класс $\mathfrak{X}$ называется *замкнутым относительно факторгрупп* или *гомоморфом*, если выполняется требование:

(2) если $G \in \mathfrak{X}$ и $N \lhd G$, то $G/N \in \mathfrak{X}$.

Класс $\mathfrak{X}$ называется *замкнутым относительно прямых произведений*, если выполняется требование:

(3) если $G_1 \in \mathfrak{X}$ и $G_2 \in \mathfrak{X}$, то $G_1 \times G_2 \in \mathfrak{X}$.





Класс $\mathfrak{X}$ называется *насыщенным*, если выполняется требование:

(4) если $G/N \in \mathfrak{X}$, $N \leq \Phi(G)$, то $G \in \mathfrak{X}$.

Класс $\mathfrak{X}$ называется *замкнутым относительно подпрямых произведений* если выполняется требование:

(5) если $G/N_1 \in \mathfrak{X}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{X}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{X}$.

*Формацией* называется класс групп, замкнутый относительно факторгрупп и подпрямых произведений. Таким образом, для формации выполняются требования (2) и (5).

Формация называется *насыщенной*, если она является насыщенным классом, т.е. если для неё выполняется требование (4). Ясно, что класс групп, замкнутый относительно подпрямых произведений, будет замкнут и относительно прямых произведений. В частности, каждая формация замкнута относительно прямых произведений.

**Теорема 27.1.** *Класс групп, замкнутый относительно подгрупп, факторгрупп и прямых произведений, является формацией.*

*Доказательство.* Пусть для класса $\mathfrak{F}$ выполняются требования (1),(2), (3). Необходимо проверить, что выполняется требование (5). Пусть $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$. По лемме Ремака (лемма 12.11, с. 123,) факторгруппа $G/N_1 \cap N_2$ изоморфна подгруппе прямого произведения $G/N_1 \times G/N_2$. Так как выполняется требование (3), то $G/N_1 \times G/N_2 \in \mathfrak{F}$. Поскольку выполняется требование (1), то каждая подгруппа из прямого произведения также принадлежит $\mathfrak{F}$. В частности, $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$. □

**Пример 27.2.** $\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп. Подгруппы и факторгруппы абелевых групп являются абелевыми группами. Прямые произведения абелевых групп, также являются абелевыми группами. Поэтому условия теоремы 27.1 для класса $\mathfrak{A}$ выполняются. Следовательно, $\mathfrak{A}$ — формация. Но эта формация не является насыщенной. Действительно, все группы порядка 4 абелевы, поэтому все они принадлежат $\mathfrak{A}$. В неабелевой группе $Q$ кватернионов порядка 8, см. пример 14.7, с. 144, подгруппа Фраттини $\Phi(Q)$ имеет порядок 2, поэтому $Q/\Phi(Q) \in \mathfrak{A}$, но $Q$ не содержится в $\mathfrak{A}$. □

**Пример 27.3.** Для класса $\mathfrak{N}$ выполняются требования теоремы 27.1. Следовательно, $\mathfrak{N}$ — формация. Если $G/N \in \mathfrak{N}$, $N \leq \Phi(G)$, то $G \in \mathfrak{N}$ по следствию 19.11, с. 181. Поэтому $\mathfrak{N}$ — насыщенная формация. □

**Пример 27.4.** Для класса $\mathfrak{U}$ выполняются требования теоремы 27.1, а по следствию 26.14, с. 243, $\mathfrak{U}$ — насыщенная формация. □

**Пример 27.5.** Для класса $\mathfrak{S}$ выполняются требования теоремы 27.1, а из леммы 21.2, с. 194, следует, что выполняется требование (4). Поэтому $\mathfrak{S}$ — насыщенная формация. □

**Пример 27.6.** Класс $\mathfrak{E}_\pi$ всех $\pi$−групп является насыщенной формацией.

Очевидно, что класс $\mathfrak{E}_\pi$ замкнут относительно подгрупп, факторгрупп и прямых произведений. По теореме 27.1 этот класс — формация. Если $G/\Phi(G) \in \mathfrak{E}_\pi$, то $\pi(G) = \pi(G/\Phi(G))$ по теореме 23.3, с. 218, поэтому $G \in \mathfrak{E}_\pi$ и $\mathfrak{E}_\pi$ — насыщенная формация. □

**Пример 27.7.** Поскольку пересечение насыщенных формаций является насыщенной формацией, то насыщенными формациями являются следующие классы групп:





$\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{E}_\pi$ — класс всех нильпотентных $\pi$−групп;
$\mathfrak{U}_\pi = \mathfrak{U} \cap \mathfrak{E}_\pi$ — класс всех сверхразрешимых $\pi$−групп;
$\mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{E}_\pi$ — класс всех разрешимых $\pi$−групп;. □

Класс $\mathfrak{X}$ называется *примитивно замкнутым классом*, если выполняется требование:

(6) если все примитивные факторгруппы группы $G$ принадлежат $\mathfrak{X}$, то $G \in \mathfrak{X}$.

В силу того, что примитивная факторгруппа может быть получена, как факторгруппа группы $G$ по ядру некоторой максимальной подгруппы, то требование (6) эквивалентно следующему требованию:

(6′) если $G/Core_G M \in \mathfrak{X}$ для всех $M < \cdot\, G$, то $G \in \mathfrak{X}$.

*Классом Шунка* называется класс групп, который одновременно замкнут относительно факторгрупп и является примитивно замкнутым классом. Таким образом, для класса Шунка выполняются требования (2) и (6).

**Теорема 27.8.** *Всякий класс Шунка является насыщенным классом.*

*Доказательство.* Предположим, что $\mathfrak{X}$ — класс Шунка и пусть $N$ — нормальная подгруппа группы $G$, $N \leq \Phi(G)$ и $G/N \in \mathfrak{X}$. Требуется проверить, что $G \in \mathfrak{X}$. По лемме 19.2, с. 175, подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ совпадает с пересечением ядер всех максимальных подгрупп, т.е.

$$\Phi(G) = \bigcap_{M < \cdot\, G} Core_G M.$$

Так как $N \leq \Phi(G)$, то $N \leq Core_G M$ для всех $M < \cdot\, G$. Следовательно,

$$G/N/Core_G M/N \simeq G/Core_G M \in \mathfrak{X}$$

ввиду того, что $G/N \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ — гомоморф. Теперь $G \in \mathfrak{X}$, поскольку класс $\mathfrak{X}$ примитивно замкнут. □

**Следствие 27.9.** *Если класс Шунка $\mathfrak{X}$ является формацией, то $\mathfrak{X}$ — насыщенная формация.* □

**Теорема 27.10.** *Насыщенная формация является классом Шунка.*

*Доказательство.* Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Тогда для $\mathfrak{F}$ выполняются требования (2), (4) и (5). Надо показать, что для $\mathfrak{F}$ выполняется требование (6′). Пусть $G/Core_G M \in \mathfrak{F}$ для всех $M < \cdot\, G$. По лемме 19.2, с. 175, подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ совпадает с пересечением ядер всех максимальных подгрупп, т.е.

$$\Phi(G) = \bigcap_{M<\cdot\, G} Core_G M.$$

Так как $\mathfrak{F}$ — формация, то

$$G/\Phi(G) = G/\bigcap_{M<\cdot\, G} Core_G M \in \mathfrak{F},$$

а т.к. $\mathfrak{F}$ насыщена, то $G \in \mathfrak{F}$. □

**Пример 27.11.** Классы $\mathfrak{N}$; $\mathfrak{N}_\pi$, $\mathfrak{U}$; $\mathfrak{U}_\pi$; $\mathfrak{S}$; $\mathfrak{S}_\pi$, $\mathfrak{E}$; $\mathfrak{E}_\pi$ являются насыщенными формациями, следовательно они являются классами Шунка. □

**Пример 27.12.** Формации абелевых групп не являются насыщенной формацией, следовательно формация абелевых групп не является классом Шунка. □

**Теорема 27.13.** *Класс всех разрешимых групп, у которых коммутанты имеют нечетные индексы, является классом Шунка и не является формацией.*





*Доказательство.* Вначале проверим, что класс

$$\mathfrak{X} = \{G \in \mathfrak{S} \mid 2 \text{ не делит } \mid G : G' \mid\}$$

является классом Шунка. Пусть $G \in \mathfrak{X}$ и $N \lhd G$. Так как $(G/N)' = G'N/N$, то

$$\mid G/N : G'N/N \mid=\mid G : G'N \mid=\mid G \mid\mid G' \cap N \mid / \mid G' \mid\mid N \mid=$$

$$=\mid G : G' \mid / \mid N : G' \cap N \mid$$

и 2 не делит $\mid G/N : (G/N)' \mid$, т.е. $G/N \in \mathfrak{X}$. Пусть $G \in \mathfrak{S}$ и $G/Core_G M \in \mathfrak{X}$ для всех $M < \cdot\, G$. Предположим, что 2 делит $\mid G/G' \mid$. Тогда в группе $G$ существует нормальная подгруппа $K$ индекса 2. Ясно, что $K = Core_G K < \cdot\, G$ и $G/K \notin \mathfrak{X}$, противоречие. Таким образом, $\mathfrak{X}$ — класс Шунка.

Пусть

$$G = \langle a \rangle \times SL(2,3),\ a^2 = e.$$

Группа $SL(2,3)$ имеет по следствию 15.7, с. 152, порядок 24, а ее центр имеет по следствию 15.5, с. 151, порядок 2. Поэтому в группе $SL(2,3)$ имеется нормальная подгруппа $\langle b \rangle = Z(SL(2,3))$ порядка 2 и $SL(2,3)/\langle b \rangle \simeq A_4$ по теореме 15.9, с. 154. Подгруппа $\langle ab \rangle \lhd G$ и

$$G/\langle ab \rangle \simeq SL(2,3) \in \mathfrak{X}.$$

Кроме того,

$$G/\langle a \rangle \simeq SL(2,3) \in \mathfrak{X},$$

но

$$G \simeq G/\langle a \rangle \cap \langle ab \rangle \notin \mathfrak{X}.$$

Поэтому $\mathfrak{X}$ не является формацией. □

**Теорема 27.14.** *Если класс Шунка $\mathfrak{X}$ содержит неединичную $p$-группу, то $\mathfrak{X}$ содержит все $p-$группы.*

*Доказательство.* Предположим, что неединичная $p-$группа $P \in \mathfrak{X}$. В $p-$группах максимальные подгруппы нормальны и имеют простые индексы, т.е. если $P_1 < \cdot\ P$, то $P_1 \lhd P$ и $\mid P : P_1 \mid = p$. Так как $\mathfrak{X}$ — гомоморф, то $P/P_1 \in \mathfrak{X}$. Следовательно в $\mathfrak{X}$ имеется группа порядка $p$. Допустим теперь, что $G$ — произвольная $p-$группа. Рассмотрим произвольную максимальную подгруппу $M$ группы $G$. Тогда для $M$ справедливо: $M \lhd G$ и $\mid G/M \mid = p$. В этом случае

$$M = Core_G M, \quad G/Core_G M \in \mathfrak{X}.$$

Так как $\mathfrak{X}$ — класс Шунка, то требование $(6')$ из его определения позволяет заключить, что $G \in \mathfrak{X}$. $\square$

*Характеристикой* класса $\mathfrak{X}$ называется множество простых чисел $p$, для которых в $\mathfrak{X}$ имеется неединичная $p$-группа. Характеристику класса $\mathfrak{X}$ обозначают через $\chi(\mathfrak{X})$.

**Теорема 27.15.** *Если $\mathfrak{X}$ — класс Шунка, то $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{\chi(\mathfrak{X})}$.*

*Доказательство.* Предположим, что $G \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}$ и $p \in \pi(G)$. Тогда в нильпотентной группе $G$ существует максимальная подгруппа $M$ индекса $p$. Поскольку пересечение классов Шунка $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{N}$ вновь является классом Шунка, то

$$G/M \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N} \quad \text{и} \quad p \in \chi(\mathfrak{X}).$$

Поэтому $\pi(G) \subseteq \chi(\mathfrak{X})$ и $G \in \mathfrak{N}_{\chi(\mathfrak{X})}$, т.е. $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}_{\chi(\mathfrak{X})}$.

Обратно, пусть $G \in \mathfrak{N}_{\chi(\mathfrak{X})}$. Рассмотрим произвольную максимальную подгруппу $M$ группы $G$. Так как $G$ нильпотентна, то $M$ нормальна в $G$ и $\mid G/M \mid = p$. Но $p \in \chi(\mathfrak{X})$,





поэтому $G/M \in \mathfrak{X}$, а т.к. $\mathfrak{X}$ — класс Шунка, то $G \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{N}_{\chi(\mathfrak{X})} \subseteq \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}$. $\square$

**Следствие 27.16.** *Если $\mathfrak{X}$ — насыщенная формация, то $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{\chi(\mathfrak{X})}$.* $\square$

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и $G$ — группа. Пересечение всех нормальных подгрупп группы $G$, факторгруппы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, обозначим через $G^{\mathfrak{F}}$ и назовем *$\mathfrak{F}$-корадикалом* группы $G$. Таким образом,

$$G^{\mathfrak{F}} = \bigcap_{N \lhd G,\ G/N \in \mathfrak{F}} N.$$

**Лемма 27.17.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и $G$ — группа. Тогда:*

*(1) если $N \lhd G$ и $G/N \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \leq N$;*

*(2) $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$;*

*(3) $G^{\mathfrak{F}}$ — наименьшая нормальная подгруппа группы $G$, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$;*

*(4) $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $G^{\mathfrak{F}} = E$.*

*Доказательство.* (1) Если $N \lhd G$ и $G/N \in \mathfrak{F}$, то по определению $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}} \leq N$.

(2) Из определения формации следует, что $G/G^{\mathfrak{F}} = G/(\bigcap_{N \lhd G,\ G/N \in \mathfrak{F}} N) \in \mathfrak{F}$.

(3) Из (1) и (2) следует, что $G^{\mathfrak{F}}$ — единственная нормальная подгруппа группы $G$, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

(4) Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} = E$. Если $G^{\mathfrak{F}} = E$, то $G \simeq G/E \in \mathfrak{F}$. $\square$

**Пример 27.18.** $G^{\mathfrak{A}} = G'$ — коммутант группы $G$. $\square$

**Пример 27.19.** Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех элементарных абелевых $p$−групп. По теореме 27.1 класс $\mathfrak{X}$ — формация. По лемме 19.2, с. 175, для каждой $p$−группы $P$ подгруппа $P^{\mathfrak{X}}$ совпадает с подгруппой Фраттини группы $P$. □

**Лемма 27.20.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, $G$ — группа и $K \lhd G$. Тогда:*

*(1) $(G/K)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}K/K$;*

*(2) если $\psi$ — эпиморфизм $G$, то $\psi(G)^{\mathfrak{F}} = \psi(G^{\mathfrak{F}})$;*

*(3) если $H \le G$ и $G = HK$, то $H^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}K$;*

*(4) если $H \le G$, $G = HK$ и $K \le G^{\mathfrak{F}}$, то $H^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}$.*

*Доказательство.* (1) Пусть $(G/K)^{\mathfrak{F}} = N/K$. Тогда

$$(G/K)/(N/K) \simeq G/N \in \mathfrak{F}$$

и $G^{\mathfrak{F}} \le N$ по лемме 27.17(1), поэтому $G^{\mathfrak{F}}K/K \le N/K$. С другой стороны,

$$(G/K)/(G^{\mathfrak{F}}K/K) \simeq G/G^{\mathfrak{F}}K \simeq (G/G^{\mathfrak{F}})/(G^{\mathfrak{F}}K/G^{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{F}$$

так как $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — гомоморф. По лемме 27.17(1) $N/K \le G^{\mathfrak{F}}K/K$, т.е.

$$G^{\mathfrak{F}}K/K = N/K = (G/K)^{\mathfrak{F}}.$$

(2) Пусть $\psi$ — эпиморфизм и $K = \mathrm{Ker}\psi$. Тогда $\psi(G) = G/K$ и

$$\psi(G)^{\mathfrak{F}} = (G/K)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}K/K = \psi(G^{\mathfrak{F}}).$$

(3) Пусть $H \le G$ и $\delta$ — естественный эпиморфизм группы $G$ на $G/K$, т.е. $\delta : g \mapsto gK$, для всех $g \in G$. Так как $\mathrm{Ker}\delta = K$, $\delta(G) = G/K$ и $G = HK$, то

$$\delta(H) = HK/K = G/K = \delta(G).$$





Поскольку $\delta(H^{\mathfrak{F}}) = H^{\mathfrak{F}}K/K$, то

$$\delta(G^{\mathfrak{F}}) = G^{\mathfrak{F}}K/K = (G/K)^{\mathfrak{F}} = \delta(G)^{\mathfrak{F}} =$$

$$= \delta(H)^{\mathfrak{F}} = \delta(H^{\mathfrak{F}}) = H^{\mathfrak{F}}K/K,$$

поэтому $G^{\mathfrak{F}}K/K = H^{\mathfrak{F}}K/K$ и $G^{\mathfrak{F}}K = H^{\mathfrak{F}}K$.

(4) Если $K \le G^{\mathfrak{F}}$, то $H^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}$. □

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп и $\mathfrak{F}$ — формация. *Корадикальным произведением* $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ называется класс

$$\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F} = \{\ G \in \mathfrak{E} \ \mid \ G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}\ \},$$

состоящий из всех групп, у которых $\mathfrak{F}$-корадикал принадлежит $\mathfrak{X}$.

**Лемма 27.21.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп, $\mathfrak{F}$ — формация. Тогда:*

*(1) если $\mathfrak{X}$ — нормально наследственный класс, то $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$;*

*(2) если $\mathfrak{X}$ содержит единичную группу (например, $\mathfrak{X}$ — непустой гомоморф), то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$;*

*(3) если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — формации, то группа $G \in \mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{X}} = E$.*

*Доказательство.* (1) Если $G \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ — нормально наследственный класс, то $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$ и

$$G \in \mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}, \quad \text{т.е.} \quad \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}.$$

(2) Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} = E \in \mathfrak{X}$ и $G \in \mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$, т.е. $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$.

(3) Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — формации. Допустим, что $G \in \mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$. Тогда

$$G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X} \quad \text{и} \quad (G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{X}} = E$$

по лемме 27.17(4). Обратно, если $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{X}} = E$, то $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$ и $G \in \mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$. □

**Теорема 27.22.** *(1) Если $\mathfrak{X}$ — гомоморф, а $\mathfrak{F}$ — формация, то $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ — гомоморф.*

*(2) Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — формации, то $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ — формация.*

*(3) Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственные формации, то $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ — наследственная формация.*

*(4) Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — нормально наследственные формации, то $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ — нормально наследственная формация.*

*Доказательство.* (1) Пусть $G \in \mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$. Тогда

$$(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}N/N \simeq G^{\mathfrak{F}}/(G^{\mathfrak{F}} \cap N) \in \mathfrak{X},$$

т.к. $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ — гомоморф. Поэтому $G/N \in \mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ — гомоморф.

(2) Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — формации. По (1) произведение $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ — гомоморф. Пусть

$$N_i \lhd G,\ G/N_i \in \mathfrak{X} \circ \mathfrak{F},\ i = 1, 2.$$

Тогда

$$(G/N_i)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}N_i/N_i \simeq G^{\mathfrak{F}}/(G^{\mathfrak{F}} \cap N_i) \in \mathfrak{X}.$$

Так как $\mathfrak{X}$ — формация, то

$$(G/N_1 \cap N_2)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}(N_1 \cap N_2)/N_1 \cap N_2 \simeq$$

$$\simeq G^{\mathfrak{F}}/(G^{\mathfrak{F}} \cap N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{X}$$

и $G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$. Итак, $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ — формация.





(3) Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — наследственные формации, $G \in \mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ и $H \leq G$. Тогда

$$HG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \leq G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F},$$

поэтому $HG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Так как

$$HG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \simeq H/(H \cap G^{\mathfrak{F}}),$$

то $H^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$. Но $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$, поэтому $H^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$ и $H \in \mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$.

(4) Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — нормально наследственные формации. Пусть $G \in \mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$. Тогда $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$. Рассмотрим подгруппу $K = NG^{\mathfrak{F}}$. Ясно, что $K \lhd G$. Поскольку,

$$K/G^{\mathfrak{F}} \lhd G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F},$$

то $K/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и

$$K/G^{\mathfrak{F}} = NG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \simeq N/(N \cap G^{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{F},$$

т.е. $N^{\mathfrak{F}} \leq N \cap G^{\mathfrak{F}}$. Так как

$$N \cap G^{\mathfrak{F}} \lhd G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$$

и $\mathfrak{X}$ — нормально наследственная формация, то $N \cap G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$. Но $N^{\mathfrak{F}}$ нормальна в $N \cap G^{\mathfrak{F}}$, поэтому $N^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$ и $N \in \mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$. □

**Теорема 27.23.** *Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Z}$ — формации. Тогда:*

*(1) $G^{(\mathfrak{X} \circ \mathfrak{Y})} = (G^{\mathfrak{Y}})^{\mathfrak{X}}$ для любой группы $G$;*

*(2) $(\mathfrak{X} \circ \mathfrak{Y}) \circ \mathfrak{Z} = \mathfrak{X} \circ (\mathfrak{Y} \circ \mathfrak{Z})$.*

*Доказательство.* (1) По теореме 27.22 произведение $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{Y}$ — формация. Пусть $N = G^{(\mathfrak{X} \circ \mathfrak{Y})}$ — $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{Y}$-корадикал группы $G$. Так как $G/N \in \mathfrak{X} \circ \mathfrak{Y}$, то

$$(G/N)^{\mathfrak{Y}} = G^{\mathfrak{Y}}N/N \simeq G^{\mathfrak{Y}}/(G^{\mathfrak{Y}} \cap N) \in \mathfrak{X},$$

поэтому
$$(G^{\mathfrak{Y}})^{\mathfrak{X}} \le N = G^{(\mathfrak{X}\circ\mathfrak{Y})}.$$

Рассмотрим факторгруппу $G/(G^{\mathfrak{Y}})^{\mathfrak{X}}$. Так как
$$(G/(G^{\mathfrak{Y}})^{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{Y}} = G^{\mathfrak{Y}}(G^{\mathfrak{Y}})^{\mathfrak{X}}/(G^{\mathfrak{Y}})^{\mathfrak{X}} \simeq$$
$$\simeq G^{\mathfrak{Y}}/((G^{\mathfrak{Y}})^{\mathfrak{X}} \cap G^{\mathfrak{Y}}) = G^{\mathfrak{Y}}/(G^{\mathfrak{Y}})^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X},$$
то
$$G/(G^{\mathfrak{Y}})^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}\circ\mathfrak{Y} \quad \text{и} \quad G^{(\mathfrak{X}\circ\mathfrak{Y})} \le (G^{\mathfrak{Y}})^{\mathfrak{X}}.$$
Таким образом, $(G^{\mathfrak{Y}})^{\mathfrak{X}} = G^{(\mathfrak{X}\circ\mathfrak{Y})}$.

(2) Из (1) следует, что
$$G^{(\mathfrak{X}\circ\mathfrak{Y})\circ\mathfrak{Z}} = (G^{\mathfrak{Z}})^{(\mathfrak{X}\circ\mathfrak{Y})} = ((G^{\mathfrak{Z}})^{\mathfrak{Y}})^{\mathfrak{X}} =$$
$$= (G^{(\mathfrak{Y}\circ\mathfrak{Z})})^{\mathfrak{X}} = G^{\mathfrak{X}\circ(\mathfrak{Y}\circ\mathfrak{Z})}$$
для любой группы $G$. Теперь, если $G \in (\mathfrak{X}\circ\mathfrak{Y})\circ\mathfrak{Z}$, то
$$G^{(\mathfrak{X}\circ\mathfrak{Y})\circ\mathfrak{Z}} = E = G^{\mathfrak{X}\circ(\mathfrak{Y}\circ\mathfrak{Z})}$$
и $G \in \mathfrak{X}\circ(\mathfrak{Y}\circ\mathfrak{Z})$, поэтому
$$(\mathfrak{X}\circ\mathfrak{Y})\circ\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{X}\circ(\mathfrak{Y}\circ\mathfrak{Z}).$$
Обратно, если $G \in \mathfrak{X}\circ(\mathfrak{Y}\circ\mathfrak{Z})$, то
$$G^{\mathfrak{X}\circ(\mathfrak{Y}\circ\mathfrak{Z})} = E = G^{(\mathfrak{X}\circ\mathfrak{Y})\circ\mathfrak{Z}}$$
и $G \in (\mathfrak{X}\circ\mathfrak{Y})\circ\mathfrak{Z}$. Поэтому
$$\mathfrak{X}\circ(\mathfrak{Y}\circ\mathfrak{Z}) \subseteq (\mathfrak{X}\circ\mathfrak{Y})\circ Z \quad \text{и} \quad \mathfrak{X}\circ(\mathfrak{Y}\circ\mathfrak{Z}) = (\mathfrak{X}\circ\mathfrak{Y})\circ Z.$$

□





## § 28. Проекторы

Пусть $G$ — группа и $\mathfrak{X}$ — класс групп. Если $H$ — подгруппа группы $G$ и $H \in \mathfrak{X}$, то $H$ называют $\mathfrak{X}$*–подгруппой*. $\mathfrak{X}$*–максимальной* подгруппой группы $G$ называется такая $\mathfrak{X}$–подгруппа $H$ из $G$, которая не содержится ни в какой большей $\mathfrak{X}$–подгруппе. Таким образом, подгруппа $H$ $\mathfrak{X}$–максимальна в $G$, если $H \in \mathfrak{X}$ и из условий
$$H \le K \le G, \quad K \in \mathfrak{X}$$
следует, что $H = K$.

Подгруппа $H$ группы $G$ называется $\mathfrak{X}$*–проектором* группы $G$, если $HN/N$ — $\mathfrak{X}$–максимальная подгруппа группы $G/N$ для любой нормальной подгруппы $N$ группы $G$.

**Пример 28.1.** Пусть $\mathfrak{N}_p$ — класс всех $p$–групп. Рассмотрим произвольную группу $G$ и пусть $G_p$ — силовская $p$–подгруппа в $G$. Так как $G_p \in \mathfrak{N}_p$ и индекс $G_p$ в группе $G$ не делится на $p$, то $G_p$ — $\mathfrak{N}_p$–максимальная подгруппа группы $G$. Для любой нормальной подгруппы $N$ группы $G$ по теореме 7.5, с. 79, факторгруппа $G_pN/N$ — силовская $p$–подгруппа в $G/N$, поэтому $G_pN/N$ $\mathfrak{N}_p$–максимальна в $G/N$ и $G_p$ — $\mathfrak{N}_p$–проектор группы $G$. Таким образом, $\mathfrak{N}_p$–проектор группы $G$ совпадает с силовской $p$–подгруппой группы $G$. □

**Лемма 28.2.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Если $H$ — $\mathfrak{X}$–проектор группы $G$ и $N \lhd G$, то $HN/N$ — $\mathfrak{X}$–проектор факторгруппы $G/N$.*

*Доказательство.* Пусть $K/N \lhd G/N$. Тогда
$$(HN/N \cdot K/N)/K/N = HK/N/K/N \simeq HK/K.$$

Так как $H$ — $\mathfrak{X}$-проектор группы $G$, то $HK/K$ $\mathfrak{X}$-максимальна в $G/K$. Поэтому

$$(HN/N \cdot K/N)/K/N$$

$\mathfrak{X}$-максимальна в

$$G/N/K/N \simeq G/K$$

и $HN/N$ — $\mathfrak{X}$-проектор группы $G/N$. □

**Лемма 28.3.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Подгруппа $H$ группы $G$ является $\mathfrak{X}$-проектором группы $G$ тогда и только тогда, когда $H$ $\mathfrak{X}$-максимальна в $G$ и для любой минимальной нормальной подгруппы $N$ группы $G$ подгруппа $HN/N$ — $\mathfrak{X}$-проектор группы $G/N$.*

*Доказательство.* Если $H$ — $\mathfrak{X}$-проектор группы $G$, то $H$ $\mathfrak{X}$-максимальна в $G$ и по лемме 28.2 подгруппа $HN/N$ — $\mathfrak{X}$-проектор группы $G/N$ для любой минимальной нормальной подгруппы $N$ группы $G$.

Обратно, пусть $H$ $\mathfrak{X}$-максимальна в $G$ и $HN/N$ — $\mathfrak{X}$-проектор группы $G/N$ для каждой минимальной нормальной подгруппы $N$ группы $G$. Пусть $K$ — произвольная нормальная неединичная подгруппа группы $G$ и пусть $K_1$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, содержащаяся в $K$. По условию леммы $HK_1/K_1$ — $\mathfrak{X}$-проектор группы $G/K_1$, поэтому

$$(HK_1/K_1 \cdot K/K_1)/K/K_1 \simeq HK/K$$

$\mathfrak{X}$-максимальна в

$$G/K_1/K/K_1 \simeq G/K.$$

Следовательно, $H$ — $\mathfrak{X}$-проектор группы $G$. □





**Лемма 28.4.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — гомоморф, $H \le G$, $N \lhd G$ и $N \le H$. Если $H/N$ — $\mathfrak{X}$-проектор факторгруппы $G/N$, то каждый $\mathfrak{X}$-проектор подгруппы $H$ является $\mathfrak{X}$-проектором группы $G$.*

*Доказательство.* Пусть $K$ — $\mathfrak{X}$-проектор подгруппы $H$. Тогда $KN/N$ $\mathfrak{X}$-максимальна в $H/N$, а так как $H/N$ — $\mathfrak{X}$-проектор группы $G/N$, то $KN = H$.

Пусть $K \le L \in \mathfrak{X}$, $L \le G$. Тогда

$$KN/N = H/N \le LN/N \simeq L/L \cap N.$$

Поскольку $\mathfrak{X}$ — гомоморф, то $L/L \cap N \in \mathfrak{X}$ и $KN = H = LN$, т.е. $L \le H$. Из $\mathfrak{X}$-максимальности подгруппы $K$ в $H$ следует, что $K = L$ и $K$ $\mathfrak{X}$-максимальна в $G$.

Предположим, что подгруппа $K$ не является $\mathfrak{X}$-проектором группы $G$. Это означает, что существует нормальная подгруппа $A$ в группе $G$ такая, что $AK/A$ не $\mathfrak{X}$-максимальна в $G/A$, т.е. существует подгруппа $S/A \in \mathfrak{X}$ и $AK/A < S/A$. Поскольку $H/N$ — $\mathfrak{X}$-проектор группы $G/N$ и $AN/N \lhd G/N$, то

$$(H/N \cdot AN/N)/(AN/N) = (HA/N)/(AN/N)$$

$\mathfrak{X}$-максимальна в $(G/N)/(AN/N)$ и $HA/AN$ $\mathfrak{X}$-максимальна в $G/AN$. Кроме того,

$$(S/A \cdot AN/A)/(AN/A) \simeq SN/AN \simeq$$

$$\simeq (S/A)/(S/A \cap AN/A) \in \mathfrak{X},$$

а так как

$$HA/AN = KNA/AN \le SN/AN,$$

то из $\mathfrak{X}$−максимальности $HA/AN$ в $G/AN$ получаем, что $HA = KNA = SN$. Теперь

$$S = AK(S \cap N) \le AH,$$

а так как $K$ — $\mathfrak{X}$−проектор подгруппы $H$, то

$$K/K \cap A \simeq K(A \cap H)/A \cap H$$

$\mathfrak{X}$−максимальна в $H/A \cap H$. Но

$$K/K \cap A \simeq KA/A \le S/A \le AH/A \simeq H/A \cap H,$$

где $K/K \cap A \in \mathfrak{X}$ и $S/A \in \mathfrak{X}$. Поэтому $KA = S$, что противоречит допущению. □

**Теорема 28.5.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп, а $\mathfrak{Y}$ — класс Шунка. Если в каждой $\mathfrak{Y}$−группе существует $\mathfrak{X}$−проектор, то $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$ — класс Шунка.*

*Доказательство.* Пусть $G \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$ и $N \lhd G$. Тогда $G/N \in \mathfrak{Y}$, т.к. $\mathfrak{Y}$ — гомоморф. Поскольку $G \in \mathfrak{X}$, то $G$ является своим $\mathfrak{X}$−проектором, значит $G/N \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$ — гомоморф.

Пусть

$$G/Core_G M \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$$

для всех $M < \cdot\, G$. Так как $\mathfrak{Y}$ — класс Шунка, то $G \in \mathfrak{Y}$. Пусть $H$ — $\mathfrak{X}$−проектор группы $G$, он существует по условию теоремы. Предположим, что $H \neq G$. Тогда существует в группе $G$ максимальная подгруппа $A$ такая, что $H \le A$. Так как $HCore_G A \le A$, то $HCore_G A \neq G$. Но

$$HCore_G A/Core_G A$$





$\mathfrak{X}$−максимальна в $G/Core_G A$ по определению $\mathfrak{X}$−проектора, поэтому $G/Core_G A$ не принадлежит $\mathfrak{X}$. Противоречие. Значит $H = G$, $G \in \mathfrak{X}$ и требование $(6)'$ для класса $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$ выполняется. Следовательно, $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$ — класс Шунка. □

**Следствие 28.6.** *(1) Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Если в каждой группе существует $\mathfrak{X}$−проектор, то $\mathfrak{X}$ — класс Шунка.*

*(2) Разрешимый класс $\mathfrak{X}$, для которого каждая разрешимая группа обладает $\mathfrak{X}$−проектором, является классом Шунка.*

*Доказательство.* (1) Утверждение следует из теоремы в случае, когда $\mathfrak{Y} = \mathfrak{E}$ — класс всех групп.

(2) Утверждение следует из теоремы в случае, когда $\mathfrak{Y} = \mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп. □

**Теорема 28.7.** *Если $\mathfrak{X}$ — класс Шунка, то в каждой группе существует $\mathfrak{X}$−проектор.*

*Доказательство.* Предположим, что существуют группы в которых нет $\mathfrak{X}$−проекторов. Среди таких групп выберем группу наименьшего порядка и обозначим ее через $G$. Итак, в группе $G$ нет $\mathfrak{X}$−проектора, но в каждой группе меньшего порядка существует $\mathfrak{X}$−проектор.

Если группа $G$ простая, то каждая $\mathfrak{X}$−максимальная подгруппа является $\mathfrak{X}$−проектором группы $G$. Значит группа $G$ непростая. Пусть $N \lhd G$, $N \neq E$. Тогда $|G/N| < |G|$ и в $G/N$ есть $\mathfrak{X}$−проектор. Обозначим его через $H/N$. Если $H$ — собственная подгруппа, то $|H| < |G|$ и в $H$ по индукции имеется $\mathfrak{X}$−проектор, который по лемме 28.4 будет $\mathfrak{X}$−проектором группы $G$. Получили противоречие.

Следовательно, $H = G$ и $G/N \in \mathfrak{X}$ для всех неединичных нормальных подгрупп $N$ группы $G$.

Если $G$ не примитивна, то все примитивные фактор-группы группы $G$ отличны от $G$ и принадлежат $\mathfrak{X}$. Но $\mathfrak{X}$ — класс Шунка, поэтому $G \in \mathfrak{X}$ и сама группа $G$ является $\mathfrak{X}$–проектором, противоречие.

Следовательно, $G$ примитивна. По теореме 25.6, с. 225, в группе $G$ не более двух минимальных нормальных подгрупп.

Случай 1. *В группе $G$ единственная минимальная нормальная подгруппа.*

Пусть $N \cdot\!\lhd G$. Если $N \leq \Phi(G)$, то $G/N \in \mathfrak{X}$ и по теореме 27.8 группа $G \in \mathfrak{X}$, противоречие. Следовательно, $N$ не содержится в $\Phi(G)$. Поэтому существует максимальная подгруппа $M$ группы $G$ такая, что $G = MN$. Пусть $K$ — $\mathfrak{X}$–проектор подгруппы $M$, он существует по индукции, и $A$ — $\mathfrak{X}$–максимальная подгруппа группы $G$, содержащая $K$. Так как

$$G/N = MN/N \simeq M/M \cap N \in \mathfrak{X},$$

то $K(M \cap N) = M$ и $G = K(M \cap N)N = KN = AN$.

Пусть теперь $L$ — произвольная неединичная нормальная подгруппа группы $G$. В нашем случае $N$ — единственная минимальная нормальная подгруппа, поэтому $N \leq L$ и $AL/L = G/L \in \mathfrak{X}$, т.е. $AL/L$ $\mathfrak{X}$–максимальна в $G/L$ и $A$ — $\mathfrak{X}$–проектор группы $G$.

Случай 2. *В группе $G$ две минимальные нормальные подгруппы $N_1$ и $N_2$.*

По теореме 25.6, с. 225,

$$G = [N_1]M = [N_2]M,$$





где $M < \cdot\, G$. Так как $G/N_1 \simeq M \in \mathfrak{X}$ и $M < \cdot\, G$, то $M$ $\mathfrak{X}$–максимальна в $G$. Пусть $L$ — произвольная неединичная нормальная подгруппа группы $G$. Тогда минимальная нормальная подгруппа в группе $G$ из $L$ совпадает с $N_1$ или $N_2$. Пусть $L \geq N_1$. Тогда $ML \geq MN_1 = G$ и $ML/L = G/L$ $\mathfrak{X}$–максимальна в $G/L$, т.е. $M$ — $\mathfrak{X}$–проектор группы $G$. □

Объединяя следствие 28.6 и теорему 28.7 получаем

**Следствие 28.8.** *Класс $\mathfrak{X}$ является классом Шунка тогда и только тогда, когда в каждой группе существует $\mathfrak{X}$–проектор.* □

**Следствие 28.9.** *Если $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, то каждая группа обладает $\mathfrak{F}$–проектором.*

*Доказательство.* По теореме 27.10 каждая насыщенная формация является классом Шунка. Теперь утверждение следует из теоремы 28.7. □

**Пример 28.10.** Класс $\mathfrak{A}$ не является классом Шунка и в диэдральной группе порядка 8 нет $\mathfrak{A}$–проекторов. □

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Подгруппа $H$ называется $\mathfrak{X}$–*покрывающей подгруппой* группы $G$, если $H$ является $\mathfrak{X}$–проектором каждой подгруппы группы $G$, в которой $H$ содержится.

**Пример 28.11.** В знакопеременной группе $A_5$ степени 5 силовская 2–подгруппа $P$ является $\mathfrak{N}$–проектором, но не является $\mathfrak{N}$–покрывающей подгруппой.

Действительно, в $A_5$ имеется подгруппа, изоморфная $A_4$. Пусть $H$ — подгруппа группы $A_5$, содержащая $P$, и изоморфная $A_4$. Тогда $P$ нормальна в $H$ и $H/P \in \mathfrak{N}$, т.е.

подгруппа $P$ не является $\mathfrak{N}$–проектором подгруппы $H$. Значит подгруппа $P$ не является $\mathfrak{N}$–покрывающей подгруппой группы $A_5$. Обратим внимание на то, что подгруппа $P$ является $\mathfrak{N}_2$–покрывающей подгруппой группы $A_5$. □

**Лемма 28.12.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — гомоморф. $H$ — $\mathfrak{X}$–покрывающая подгруппа группы $G$ тогда и только тогда, когда $H \in \mathfrak{X}$ и из условий:*

$$H \le U \le G, \quad U_0 \lhd U, \quad U/U_0 \in \mathfrak{X} \qquad <1>$$

*следует, что $HU_0 = U$.*

*Доказательство.* Пусть $H$ — $\mathfrak{X}$–покрывающая подгруппа группы $G$ и пусть выполняются условия <1>. Так как $H$ — $\mathfrak{X}$–проектор подгруппы $U$, то $HU_0/U_0$ $\mathfrak{X}$–максимальна в $U/U_0$. Но $U/U_0 \in \mathfrak{X}$, поэтому

$$HU_0/U_0 = U/U_0 \quad \text{и} \quad HU_0 = U.$$

Обратно, пусть $H \in \mathfrak{X}$ и для всех подгрупп $U$ и $U_0$, удовлетворяющих условиям <1> следует, что $HU_0 = U$. Предположим, что подгруппа $H$ не является $\mathfrak{X}$–покрывающей подгруппой группы $G$. Тогда подгруппа $H$ не является $\mathfrak{X}$–проектором некоторой подгруппы $X$. Это означает, что для некоторой нормальной подгруппы $X_0$ группы $X$ подгруппа $HX_0/X_0$ не $\mathfrak{X}$–максимальна в $X/X_0$. Пусть $U/X_0$ — $\mathfrak{X}$–максимальная подгруппа в $X/X_0$, содержащая $HX_0/X_0$. Тогда $HX_0 < U$, а так как $H \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ — гомоморф, то

$$HX_0/X_0 \simeq H/H \cap X_0 \in \mathfrak{X}.$$

Для подгруппы $U$ выполняются условие <1>, поэтому $HX_0 = U$, противоречие. Следовательно допущение





неверно, подгруппа $H$ — $\mathfrak{X}$–проектор подгруппы $X$, а так как $X$ — произвольная подгруппа группы $G$, содержащая $H$, то $H$ — $\mathfrak{X}$–покрывающая подгруппа группы $G$. □

Лемма 28.12 позволяет дать следующее определение $\mathfrak{X}$–покрывающей подгруппы, эквивалентное исходному.

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Подгруппа $H$ называется $\mathfrak{X}$–*покрывающей подгруппой* группы $G$, если выполняются следующие требования:

(1) $H \in \mathfrak{X}$;

(2) из условий

$$H \le U \le G, \quad U_0 \lhd U, \quad U/U_0 \in \mathfrak{X}$$

следует, что, $U = HU_0$.

**Лемма 28.13.** *Для любого гомоморфа $\mathfrak{X}$ и любой группы $G$ справедливы следующие утверждения:*

*(1) если $H$ — $\mathfrak{X}$–проектор группы $G$ и $H$ максимальна в $G$, то $H$ — $\mathfrak{X}$–покрывающая подгруппа группы $G$;*

*(2) если $H$ — $\mathfrak{X}$–покрывающая подгруппа группы $G$ и $H \le X \le G$, то $H$ — $\mathfrak{X}$–покрывающая подгруппа в $X$;*

*(3) если $H$ — $\mathfrak{X}$–покрывающая подгруппа группы $G$ и $N \lhd G$, то $HN/N$ — $\mathfrak{X}$–покрывающая подгруппа факторгруппы $G/N$;*

*(4) если $N \lhd G$ и $H/N$ — $\mathfrak{X}$–покрывающая подгруппа факторгруппы $G/N$, то каждая $\mathfrak{X}$–покрывающая подгруппа из $H$ является $\mathfrak{X}$–покрывающей подгруппой группы $G$.*

*Доказательство.* Утверждения (1) и (2) непосредственно вытекают из определения $\mathfrak{X}$–покрывающей подгруппы.

(3) По лемме 28.2 подгруппа $HN/N$ — $\mathfrak{X}$–проектор факторгруппы $G/N$. Пусть $X/N$ — произвольная подгруппа группы $G/N$, содержащая $HN/N$. Тогда $H \leq X$, а так как $H$ — $\mathfrak{X}$–проектор подгруппы $X$, то опять по лемме 28.2 подгруппа $HN/N$ — $\mathfrak{X}$–проектор $X/N$. Поэтому $HN/N$ — $\mathfrak{X}$–покрывающая подгруппа группы $G/N$.

(4) Пусть $B$ — $\mathfrak{X}$–покрывающая подгруппа в $H$. Тогда $BN/N$ $\mathfrak{X}$–максимальна в $H/N$. Но $H/N \in \mathfrak{X}$, значит $BN = H$. По лемме 28.4 подгруппа $B$ — $\mathfrak{X}$–проектор группы $G$. Пусть

$$B \leq U \leq G, \quad U_0 \triangleleft U, \quad U/U_0 \in \mathfrak{X}.$$

Докажем, что $U_0B = U$, тогда по лемме 28.12 подгруппа $B$ будет $\mathfrak{X}$–покрывающей подгруппой группы $G$.

Так как $H = BN \leq UN$ и $H/N$ — $\mathfrak{X}$–покрывающая подгруппа группы $G/N$, то $H/N$ — $\mathfrak{X}$–покрывающая подгруппа в $UN/N$. Но $U_0N/N \triangleleft UN/N$ и

$$UN/N/U_0N/N \simeq UN/U_0N \simeq U/U_0(U \cap N) \in \mathfrak{X},$$

поэтому $HU_0N = HU_0 = UN$, откуда получаем, что $BNU_0 = UN$. По тождеству Дедекинда $U = BU_0(U \cap N)$, а поскольку $B(U \cap N) = U \cap H$, то $U = U_0(U \cap H)$. Теперь

$$U/U_0 \simeq U \cap H/U_0 \cap H \in \mathfrak{X},$$

а так как $B$ — $\mathfrak{X}$–покрывающая подгруппа из $U \cap H$, то $U \cap H = B(U_0 \cap H)$ и

$$U = U_0(U \cap H) = U_0B(U_0 \cap H) = U_0B.$$

□





Напомним, что подгруппа $H$ группы $G$ называется *дополнением* к подгруппе $K$, если $HK = G$ и $H \cap K = E$.

Для класса $\mathfrak{X}$ введем следующие подмножества подгрупп группы $G$:

$Proj_{\mathfrak{X}}(G)$ — совокупность всех $\mathfrak{X}$–проекторов группы $G$;

$Cov_{\mathfrak{X}}(G)$ — совокупность всех $\mathfrak{X}$–покрывающих подгрупп группы $G$.

Ясно, что $Cov_{\mathfrak{X}}(G) \subseteq Proj_{\mathfrak{X}}(G)$. Если $A$ — нормальная подгруппа группы $G$, то через $Comp_G(A)$ обозначим совокупность всех дополнений к подгруппе $A$ в группе $G$.

**Теорема 28.14.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка, $A$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, причем $G \notin \mathfrak{X}$, а $G/A \in \mathfrak{X}$. Если $A$ абелева, то*

$$Comp_G(A) = Proj_{\mathfrak{X}}(G) = Cov_{\mathfrak{X}}(G).$$

*Доказательство.* Применим индукцию по порядку группы $G$. По теореме 28.7 в группе $G$ существуют $\mathfrak{X}$–проекторы, поэтому $Proj_{\mathfrak{X}}(G) \neq \emptyset$. Пусть $H$ — произвольный $\mathfrak{X}$–проектор группы $G$. По лемме 28.2 подгруппа $HA/A$ является $\mathfrak{X}$–проектором группы $G/A$. Так как $G/A \in \mathfrak{X}$, то $HA = G$. Из того, что $G \notin \mathfrak{X}$ получаем, что $H \neq G$. Поскольку $H \cap A \triangleleft H$ и $A$ абелева, то $H \cap A \triangleleft G$, и из минимальности подгруппы $A$ следует, что $H \cap A = E$ и $H$ — максимальная подгруппа группы $G$. Таким образом, доказано, что

$$Proj_{\mathfrak{X}}(G) = Cov_{\mathfrak{X}}(G) \subseteq Comp_G(A). \qquad < 2 >$$

Пусть теперь $B$ — произвольное дополнение к подгруппе $A$ в группе $G$. Тогда

$$G = [A]H = [A]B.$$

Предположим, что существует минимальная нормальная подгруппа $N$ группы $G$ такая, что $N \leq H \cap B$. Рассмотрим факторгруппу $G/N$. Так как $AN = A \times N$, то $AN/N$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G/N$. Подгруппа $H/N$ является $\mathfrak{X}$–проектором группы $G/N$, поэтому $G/N \notin \mathfrak{X}$, но

$$G/N/AN/N \in \mathfrak{X}.$$

Таким образом, все условия теоремы выполняются для факторгруппы $G/N$. По индукции $B/N$ — $\mathfrak{X}$–покрывающая подгруппа группы $G/N$, а по лемме 28.13(4) подгруппа $B$ — $\mathfrak{X}$–покрывающая подгруппа группы $G$.

Пусть теперь пересечение $H \cap B$ не содержит неединичных нормальных подгрупп группы $G$. Допустим, что $Core_G B \neq E$, и пусть $K$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, содержащаяся в $B$. Тогда

$$AK = A \times K \subseteq C_G(A),$$

поэтому $AK \cap H$ — нормальная подгруппа группы $G$. В нашем случае $AK \cap H$ не содержится в $B$, поэтому

$$(AK \cap H)B = G, \quad G/AK \cap H \simeq B/B \cap AK \cap H \in \mathfrak{X}.$$

Так как $H/AK \cap H$ — $\mathfrak{X}$–проектор группы $G/AK \cap H$, то пришли к противоречию. Поэтому $Core_G B = E$.

Теперь, если $L$ — произвольная нормальная подгруппа группы $G$, то $L$ не содержится в $B$ и $BL/L = G/L$ $\mathfrak{X}$–максимальна в $G/L$, т.е. $B$ является $\mathfrak{X}$–проектором группы $G$. Итак,

$$Comp_G(A) \subseteq Proj_{\mathfrak{X}}(G)$$

и из <2> следует, что

$$Proj_{\mathfrak{X}}(G) = Cov_{\mathfrak{X}}(G) = Comp_G(A).$$





□

**Лемма 28.15.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка и $N$ — нильпотентная нормальная подгруппа группы $G$. Если $H$ — $\mathfrak{X}$–подгруппа группы $G$, для которой $HN = G$, то $H$ содержится в некоторой $\mathfrak{X}$–покрывающей подгруппе группы $G$. В частности, если $H$ — $\mathfrak{X}$–максимальная подгруппа группы $G$, для которой $HN = G$, то $H$ — $\mathfrak{X}$–покрывающая подгруппа группы $G$.*

*Доказательство.* Воспользуемся индукцией по порядку группы $G$. Пусть $A$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, содержащаяся в $N$. Тогда для факторгруппы $G/A$ условия леммы выполнены. По индукции $\mathfrak{X}$–подгруппа $HA/A$ содержится в некоторой $\mathfrak{X}$–покрывающей подгруппе $F^*/A$ группы $G/A$.

Условию леммы удовлетворяет группа $F^*$ с нильпотентной нормальной подгруппой $F^* \cap N$ и $\mathfrak{X}$–подгруппой $H$. Если $F^* \neq G$, то по индукции подгруппа $H$ содержится в некоторой $\mathfrak{X}$–покрывающей подгруппе $F$ группы $F^*$, которая по лемме 28.13(4) будет $\mathfrak{X}$–покрывающей подгруппой группы $G$.

Поэтому следует считать, что $G/A \in \mathfrak{X}$. По теореме 28.14 подгруппа $A$ имеет дополнение $F$ в группе $G$ и $F$ является $\mathfrak{X}$–покрывающей подгруппой группы $G$. Ясно, что $F$ — максимальная подгруппа группы $G$. Так как $N \cap F \triangleleft F$ и $N$ нильпотентна, то $N \cap F \triangleleft G$.

Если $N \cap F \neq E$, то можно считать подгруппу $A$, содержащейся в $N \cap F$. Тогда $F = G$ и $H \leq F$.

Если $N \cap F = E$, то $A = N$ и из условия $HN = G$ следует, что $H$ — дополнение к $N$ в группе $G$ и по теореме 28.14 подгруппа $H$ будет $\mathfrak{X}$–покрывающей подгруппой группы $G$. □

**Теорема 28.16.** *Для любого класса Шунка $\mathfrak{X}$ в каждой разрешимой группе $G$ любой $\mathfrak{X}$−проектор является $\mathfrak{X}$−покрывающей подгруппой и любые две $\mathfrak{X}$−покрывающие подгруппы группы $G$ сопряжены между собой.*

*Доказательство.* Воспользуемся индукцией по порядку группы $G$. Заметим, что по теореме 28.7 в каждой группе существует $\mathfrak{X}$−проектор.

Пусть $G$ — разрешимая группа и $A$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$. Тогда $A$ абелева. Пусть $H$ — $\mathfrak{X}$−проектор группы $G$. По лемме 28.2 подгруппа $HA/A$ является $\mathfrak{X}$−проектором группы $G/A$. По индукции можно считать, что $HA/A$ — $\mathfrak{X}$−покрывающая подгруппа группы $G/A$.

Рассмотрим подгруппу $HA$ и применим к группе $HA$ лемму 28.15. По этой лемме подгруппа $H$ является $\mathfrak{X}$−покрывающей подгруппой группы $HA$. По лемме 28.13(4) подгруппа $H$ является $\mathfrak{X}$−покрывающей подгруппой группы $G$. Итак, каждый $\mathfrak{X}$−проектор группы $G$ является $\mathfrak{X}$−покрывающей подгруппой группы $G$.

Пусть теперь $H_1$ и $H_2$ — две $\mathfrak{X}$−покрывающие подгруппы группы $G$. Тогда $H_1A/A$ и $H_2A/A$ — $\mathfrak{X}$−покрывающие подгруппы факторгруппы $G/A$ и по индукции они сопряжены между собой, т.е. существует элемент $g \in G$ такой, что

$$H_1A/A = (H_2A/A)^{gA}.$$

Отсюда получаем, что $H_1A = H_2^gA$.

По лемме 28.13(2) подгруппы $H_1$ и $H_2^g$ — $\mathfrak{X}$−покрывающие подгруппы группы $H_1A$. Если $H_1A$ — собственная подгруппа группы $G$, то по индукции подгруппы $H_1$ и $H_2^g$ сопряжены в $H_1A$, т.е. существует элемент





$ha \in H_1a$, где $h \in H$, $a \in A$ такой, что $H_1 = H_2^{gha}$. Поэтому подгруппы $H_1$ и $H_2$ сопряжены в $G$.

Поэтому будем считать, что

$$H_1A = H_2^gA = G.$$

Подгруппа $A$ выбиралась произвольно. Если $Core_GH_1 \neq E$, то $A$ можно считать содержащейся в $H_1$ и $H_1 = G$. В этом случае теорема верна.

Пусть $Core_GH_1 = E$. Тогда $Core_GH_2 = E$. Но в разрешимой группе максимальные подгруппы с единичными ядрами сопряжены между собой по теореме 25.9, с. 229. Поэтому $H_1 = H_2^x$ для некоторого $x \in G$. □

По теореме 27.10 каждая насыщенная формация является классом Шунка. Поэтому справедливо

**Следствие 28.17.** *Для любой насыщенной формации $\mathfrak{F}$ в каждой разрешимой группе $G$ любой $\mathfrak{F}$−проектор является $\mathfrak{F}$—покрывающей подгруппой и любые две $\mathfrak{F}$−покрывающие подгруппы группы $G$ сопряжены между собой.* □

Поскольку в разрешимых группах понятия $\mathfrak{F}$−проектора и $\mathfrak{F}$−покрывающей подгруппы совпадают, то в дальнейшем для разрешимых групп будем использовать термин $\mathfrak{F}$−проектор.

**Теорема 28.18.** *Если $\mathfrak{X}$ — разрешимый класс Шунка, а $\mathfrak{F}$ — разрешимая насыщенная формация, то $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ — разрешимый класс Шунка.*

*Доказательство.* По теореме 27.22(1) произведение $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ — гомоморф. Ясно, что $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ — разрешимый класс. Пусть

$$G/N \in \mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$$

для всех примитивных факторгрупп $G/N$ группы $G$ и пусть $S$ — $\mathfrak{X}$-проектор группы $G^{\mathfrak{F}}$. Так как группа $G$ разрешима, то $\mathfrak{X}$-проекторы в $G^{\mathfrak{F}}$ существуют и сопряжены между собой. По лемме Фраттини $G = N_G(S)G^{\mathfrak{F}}$.

Предположим, что существует максимальная подгруппа $M$ в группе $G$ такая, что $S \leq M$ и $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq M$. Пусть $Core_G M$ — ядро подгруппы $M$ в группе $G$. Факторгруппа $G/Core_G M$ примитивна, поэтому

$$G/Core_G M \in \mathfrak{X} \circ \mathfrak{F} \quad \text{и}$$

$$(G/Core_G M)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}} Core_G M/Core_G M \simeq$$
$$\simeq G^{\mathfrak{F}}/(G^{\mathfrak{F}} \cap Core_G M) \in \mathfrak{X}.$$

Но теперь

$$G^{\mathfrak{F}} = S(G^{\mathfrak{F}} \cap Core_G M) \leq S Core_G M \leq M,$$

что противоречит выбору $M$.

Следовательно, для любой максимальной подгруппы $H$ группы $G$ такой, что $S \leq H$, выполняется включение $G^{\mathfrak{F}} \leq H$. Так как $G = N_G(S)G^{\mathfrak{F}}$, то

$$S \lhd G, \quad G^{\mathfrak{F}}/S \leq \Phi(G/S).$$

Поскольку формация $\mathfrak{F}$ насыщенна и

$$G/G^{\mathfrak{F}} \simeq (G/S)/(G^{\mathfrak{F}}/S) \in \mathfrak{F},$$

то $G/S \in \mathfrak{F}$ и $G^{\mathfrak{F}} = S \in \mathfrak{X}$, поэтому $G \in \mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$. □

**Следствие 28.19.** *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — разрешимые насыщенные формации, то $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ — разрешимая насыщенная формация.*





*Доказательство.* По теореме 27.22 произведение $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ — формация. Так как каждая насыщенная формация является классом Шунка, то по теореме 28.18 произведение $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ — класс Шунка. Но класс Шунка — насыщенный класс, поэтому $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ — насыщенная формация. □

В нильпотентных и сверхразрешимых группах $\mathfrak{X}$–проекторы допускают описание для любого класса Шунка $\mathfrak{X}$.

**Теорема 28.20.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка и $G$ — нильпотентная группа. Подгруппа $H$ группы $G$ тогда и только тогда $\mathfrak{X}$–максимальна, когда $H$ — $\chi(\mathfrak{X})$–холлова подгруппа.*

*Доказательство.* Согласно теореме 27.15, с. 255, пересечение $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{\chi(\mathfrak{X})}$. Пусть $H$ — $\mathfrak{X}$–максимальная подгруппа группы $G$. Ясно, что $H$ будет $\chi(\mathfrak{X})$–подгруппой. Если $K$ — $\chi(\mathfrak{X})$–холлова подгруппа группы $G$, то $H \leq K$. Так как

$$K \in \mathfrak{N}_{\chi(\mathfrak{X})} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N},$$

то $K$ — $\mathfrak{X}$–подгруппа и $H = K$.

Обратно, если $H$ — $\chi(\mathfrak{X})$–холлова подгруппа, то

$$H \in \mathfrak{N}_{\chi(\mathfrak{X})} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}.$$

Если $K$ $\mathfrak{X}$–максимальна в $G$ и $K \geq H$, то

$$K \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{\chi(\mathfrak{X})}$$

и $K$ — $\chi(\mathfrak{X})$–подгруппа. Поэтому $H = K$. □

Поскольку в каждой группе $\mathfrak{X}$–проектор является $\mathfrak{X}$–максимальной подгруппой, то имеем

**Следствие 28.21.** *(1) Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка и $G$ — нильпотентная группа. Подгруппа $H$ тогда и только тогда является $\mathfrak{X}$−проектором группы $G$, когда $H$ — $\chi(\mathfrak{X})$−холлова подгруппа.*

*(2) Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация и $G$ — нильпотентная группа. Подгруппа $H$ тогда и только тогда является $\mathfrak{X}$−проектором группы $G$, когда $H$ — $\chi(\mathfrak{X})$−холлова подгруппа.* □

**Теорема 28.22.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка и $G$ — метанильпотентная группа. Подгруппа $H$ тогда и только тогда является $\mathfrak{X}$−проектором группы $G$, когда $H$ $\mathfrak{X}$−максимальна в $G$ и $HF(G)/F(G)$ — $\chi(\mathfrak{X})$−холлова подгруппа факторгруппы $G/F(G)$.*

*Доказательство.* Пусть $H$ — $\mathfrak{X}$−проектор группы $G$. Тогда $H$ $\mathfrak{X}$−максимальна в группе $G$ и $HF(G)/F(G)$ — $\mathfrak{X}$−проектор факторгруппы $G/F(G)$ по лемме 28.13(3). Так как $G/F(G)$ по условию нильпотентна, то $HF(G)/F(G)$ — $\chi(\mathfrak{X})$−холлова подгруппа факторгруппы $G/F(G)$ по следствию 28.21.

Обратно, пусть $H$ $\mathfrak{X}$−максимальна в группе $G$ и $HF(G)/F(G)$ — $\mathfrak{X}$−холлова подгруппа факторгруппы $G/F(G)$. Пусть $K$ — $\mathfrak{X}$−проектор группы $G$. Тогда $KF(G)/F(G)$ — $\mathfrak{X}$−проектор факторгруппы $G/F(G)$. По следствию 28.21 подгруппа $KF(G)/F(G)$ является $\chi(\mathfrak{X})$−холловой подгруппой нильпотентной группы $G/F(G)$. Поэтому $HF(G) = KF(G)$. Поскольку подгруппа $H$ $\mathfrak{X}$−максимальна в $HF(G)$, то по лемме 28.15 подгруппа $H$ является $\mathfrak{X}$−проектором группы $HF(G)$. Так как подгруппа $K$ также является $\mathfrak{X}$−проектором группы $HF(G)$, то $H$ и $K$ сопряжены. Следовательно, подгруппа $H$ является $\mathfrak{X}$−проектором группы $G$. □





**Следствие 28.23.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — насыщенная формация и $G$ — метанильпотентная группа. Подгруппа $H$ тогда и только тогда является $\mathfrak{X}$−проектором группы $G$, когда $H$ $\mathfrak{X}$−максимальна в $G$ и $HF(G)/F(G)$ является $\chi(\mathfrak{X})$−холловой подгруппой факторгруппы $G/F(G)$.* □

Поскольку по теореме 26.9, с. 239, каждая сверхразрешимая группа имеют нильпотентный коммутант, то получаем

**Следствие 28.24.** *(1) Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка и $G$ — сверхразрешимая группа. Подгруппа $H$ тогда и только тогда является $\mathfrak{X}$−проектором группы $G$, когда $H$ $\mathfrak{X}$−максимальна в $G$ и $HG'/G'$ является $\chi(\mathfrak{X})$−холловой подгруппой факторгруппы $G/G'$.*

*(2) Пусть $\mathfrak{X}$ — насыщенная формация и $G$ — сверхразрешимая группа. Подгруппа $H$ тогда и только тогда является $\mathfrak{X}$−проектором группы $G$, когда $H$ $\mathfrak{X}$−максимальна в $G$ и $HG'/G'$ является $\chi(\mathfrak{X})$−холловой подгруппой факторгруппы $G/G'$.* □

## § 29. Картеровы и гащюцевы подгруппы разрешимых групп

**Лемма 29.1.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка характеристики $\pi$ и пусть $H$ — $\mathfrak{X}$−проектор группы $G$. Тогда $N_G(H)/H$ — $\pi'$−группа.*

*Доказательство.* Если $N_G(H)/H$ не является $\pi'$−группой, то существует простое число $p \in \pi$, которое делит порядок $N_G(H)/H$. По теореме Силова в группе $N_G(H)/H$ имеется подгруппа $K/H$ порядка $p$. Так как в $\mathfrak{X}$ имеется подгруппа порядка $p$, то $K/H \in \mathfrak{X}$ и $H$ не является $\mathfrak{X}$−проектором $K$, противоречие. □

**Лемма 29.2.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка. Тогда и только тогда в каждой разрешимой группе $\mathfrak{X}$−проектор самонормализуем, когда $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$.*

*Доказательство.* Пусть в каждой разрешимой группе $\mathfrak{X}$−проектор совпадает со своим нормализатором. Предположим, что $\mathfrak{N}$ не содержится в $\mathfrak{X}$. Тогда существует группа $G \in \mathfrak{N} \setminus \mathfrak{X}$. Пусть $H$ — $\mathfrak{X}$−проектор группы $G$. Так как $G \notin \mathfrak{X}$, то $H \neq G$. Но в нильпотентных группах собственные подгруппы отличны от своих нормализаторов, поэтому $N_G(H) \neq H$, получили противоречие. Значит допущение неверно и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$.

Обратно, пусть $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$ и допустим, что существует разрешимая группа $G$, в которой $\mathfrak{X}$−проектор $H$ — собственная подгруппа в своем нормализаторе. Пусть простое число $p$ делит порядок $N_G(H)/H$. Тогда в $N_G(H)/H$ существует подгруппа $K/H$ порядка $p$. Так как $K/H \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$, то $H$ не будет $\mathfrak{X}$−проектором подгруппы $K$, противоречие. □

*Картеровой* подгруппой называют нильпотентную самонормализуемую подгруппу группы.

**Теорема 29.3.** *В любой разрешимой группе множество $\mathfrak{N}$−проекторов совпадает с множеством картеровых подгрупп.*

*Доказательство.* Пусть $H$ — $\mathfrak{N}$−проектор группы $G$. Тогда $H$ нильпотентна и по лемме 29.2 совпадает со своим нормализатором, т.е. $H$ является картеровой подгруппой группы $G$.

Обратно, пусть $H$ — картерова подгруппа группы $G$. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Так как в нильпотентных группах собственные подгруппы отличны





от своих нормализаторов, то $H$ — $\mathfrak{N}$−максимальная подгруппа группы $G$. По лемме 28.15, с. 274, существует нильпотентная нормальная подгруппа $N$ группы $G$ такая, что $HN$ — собственная подгруппа. По индукции $H$ — $\mathfrak{N}$−проектор группы $HN$. Пусть

$$xN \in N_{G/N}(HN/N).$$

Тогда $H^x$ — картерова подгруппа группы $(HN)^x = HN$ и по индукции подгруппа $H^x$ — $\mathfrak{N}$−проектор группы $HN$. Поэтому подгруппы $H$ и $H^x$ сопряжены в $HN$, т.е. существует элемент $y \in HN$ такой, что $H^x = H^y$. Теперь

$$xy^{-1} \in N_G(H) = H, \ x \in Hy \subseteq HN.$$

Таким образом, $HN/N$ — самонормализуемая нильпотентная подгруппа группы $G/N$. По индукции подгруппа $HN/N$ — $\mathfrak{N}$−проектор группы $G/N$, а по лемме 28.13, с. 270, подгруппа $H$ — $\mathfrak{N}$−проектор группы $G$. □

**Следствие 29.4.** *В любой разрешимой группе картеровы подгруппы существуют и сопряжены между собой.*

□

**Лемма 29.5.** *Если в примитивной разрешимой группе $G$ примитиватор имеет простой индекс, то группа $G$ сверхразрешима.*

*Доказательство.* Пусть $G$ — примитивная группа, $M$ — её примитиватор и $|\, G : M \,| = p$ — простое число. Пусть $N \cdot\!\triangleleft\, G$. По теореме 25.8, с. 228, группа $G = [N]M$ и $N = C_G(N)$. Теперь $|\, N \,| = p$ и $G/N$ изоморфна группе автоморфизмов группы $N$, которая является циклической группой порядка, делящего $p-1$. Поэтому $M$ циклическая и группа $G$ сверхразрешима по лемме 26.2, с. 233. □

*Гащюцевой* подгруппой группы $G$ называется подгруппа $H$ группы $G$, удовлетворяющая следующим двум требованиям:

(1) $H$ сверхразрешима;

(2) если $H \leq H_1 < T \leq G$, то $\mid T : H_1 \mid$ — не простое число.

**Теорема 29.6.** *В любой разрешимой группе множество $\mathfrak{U}-$проекторов совпадает с множеством гащюцевых подгрупп.*

*Доказательство.* Пусть $H$ — $\mathfrak{U}-$проектор разрешимой группы $G$. Тогда $H$ сверхразрешима. Предположим, что существуют подгруппы $H_1$ и $T$ такие, что

$$H \leq H_1 < \cdot\, T, \quad \mid T : H_1 \mid = p$$

— простое число. Тогда $T/Core_T(H_1)$ — примитивная группа с примитиватором $H_1/Core_T(H_1)$ индекса $p$ в $T/Core_T(H_1)$. По лемме 29.5 группа $T/Core_T(H_1)$ сверхразрешима. Так как $H$ — $\mathfrak{U}-$проектор $T$, то

$$T = HCore_T(H_1) = H_1,$$

противоречие. Поэтому допущение неверно и если $H \leq H_1 < \cdot\, T$, то $\mid T : H_1 \mid$ — не простое число.

Обратно, пусть выполняются требования (1) и (2) из определения гащюцевой подгруппы. Если $H < \cdot\, T$ и $T \in \mathfrak{U}$, то $\mid T : H \mid$ — простое число по теореме 26.4, с. 235, что противоречит (2). Поэтому $H$ — $\mathfrak{U}-$максимальная подгруппа группы $G$. По лемме 28.15, с. 274, существует нильпотентная нормальная неединичная подгруппа $N$ группы $G$ такая, что $HN$ — собственная подгруппа. Рассмотрим факторгруппу $G/N$. Ясно, что





$HN/N$ сверхразрешима. Если

$$HN/N \leq H_1/N < \cdot\, T/N \leq G/N,$$

то

$$H \leq H_1 < \cdot\, T \leq G$$

и $\mid T : H_1 \mid$ не простое число. Таким образом, $HN/N$ — гащюцева подгруппа факторгруппы $G/N$. По индукции $HN/N$ является $\mathfrak{U}-$проектором факторгруппы $G/N$, а по лемме 28.13, с. 270, подгруппа $H$ — $\mathfrak{U}-$проектор группы $G$. □

**Следствие 29.7.** *В любой разрешимой группе гащюцевы подгруппы существуют и сопряжены между собой.* □

В § 24 для произвольного множества $\pi$ простых чисел в каждой разрешимой группе $G$ установлено существование и сопряженность $\pi-$холловых подгрупп. Эти утверждения являются частными случаями следствия 28.17, с. 276.

**Теорема 29.8.** *В любой разрешимой группе множество $\mathfrak{S}_\pi-$проекторов совпадает со множеством $\pi-$холловых подгрупп.*

*Доказательство.* Воспользуемся индукцией по порядку группы. Согласно примеру 27.7, с. 251, класс $\mathfrak{S}_\pi$ всех разрешимых $\pi-$групп является насыщенной формацией, поэтому $\mathfrak{S}_\pi-$проекторы существуют и сопряжены в каждой разрешимой группе в силу следствия 28.17, с. 276. Пусть $H$ — $\mathfrak{S}_\pi-$проектор разрешимой группы $G$ и пусть $N$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$. Тогда $H$ — $\pi-$подгруппа группы $G$. Так как $HN/N$ —

$\mathfrak{S}_\pi$–проектор группы $G/N$, то по индукции $HN/N$ — $\pi$–холлова подгруппа группы $G/N$. Если $HN \neq G$, то по индукции $H$ — $\pi$–холлова подгруппа группы $HN$, поэтому из равенства

$$| G : H |=| G : HN || HN : H |$$

следует, что $H$ — $\pi$–холлова подгруппа группы $G$. Если $HN = G$, то $H$ — максимальная подгруппа группы $G$ и $H \cap N = E$. Если $N$ — $p$–группа для $p \in \pi$, то $G$ — $\pi$–группа и $G = H \in \mathfrak{S}_\pi$. Если $p \notin \pi$, то $| G : H |=| N |$ — $\pi'$–число и $H$ — $\pi$–холлова подгруппа группы $G$. Итак, каждый $\mathfrak{S}_\pi$–проектор разрешимой группы $G$ является $\pi$–холловой подгруппой группы $G$.

Обратно, пусть $H$ — $\pi$–холлова подгруппа группы $G$. Тогда из леммы 24.1, с. 220, следует, что $H$ — $\mathfrak{S}_\pi$–проектор группы $G$. □

**Следствие 29.9.** *Для произвольного множества $\pi$ простых чисел в каждой разрешимой группе $G$ $\pi$–холловы подгруппы существуют и сопряженны между собой.* □

## § 30. Классы Фиттинга

Класс $\mathfrak{X}$ называется *нормально наследственным* или классом, *замкнутым относительно нормальных подгрупп*, если выполняется следующее требование:

(1) если $G \in \mathfrak{X}$ и $N \triangleleft G$, то $N \in \mathfrak{X}$.

Очевидно, что если класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно нормальных подгрупп, то $\mathfrak{X}$ замкнут относительно субнормальных подгрупп, т. е. если $G \in \mathfrak{X}$ и $N \triangleleft\triangleleft\, G$, то $N \in \mathfrak{X}$.





Класс $\mathfrak{X}$ называется *замкнутым относительно произведений нормальных $\mathfrak{X}$–подгрупп*, если выполняется следующее требование:

(2) если $N_1$ и $N_2 \triangleleft G$, $N_1$ и $N_2 \in \mathfrak{X}$, то $N_1N_2 \in \mathfrak{X}$.

*Классом Фиттинга* называется класс $\mathfrak{X}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{X}$–подгрупп. Класс Фиттинга называют также *радикальным* классом.

**Пример 30.1.** Классы $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{S}_\pi$, $\mathfrak{N}_\pi$ для любого множества простых чисел $\pi$ являются классами Фиттинга.

Действительно, для указанных классов выполняются требования (1) и (2) из определения класса Фиттинга, см. §§21, 28. □

**Пример 30.2.** Для каждого натурального $k$ класс $\mathfrak{N}^k$ всех разрешимых групп нильпотентной длины $\leq k$ будет согласно лемме 22.12, с. 208, классом Фиттинга. □

**Пример 30.3.** Классы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{U}$ не являются классами Фиттинга.

Действительно, для классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{U}$ требование (1) выполняется, а требование (2) нарушается. Например, неабелева диэдральная подгруппа $D_8$ порядка 8 является произведением двух абелевых подгрупп $A$ и $B$ порядка 4. Поэтому $D_8 = AB \notin \mathfrak{A}$, но $A$ и $B \in \mathfrak{A}$. Для класса сверхразрешимых групп $\mathfrak{U}$, см. пример 26.18, с. 246. □

**Теорема 30.4.** *Если класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно произведений нормальных $\mathfrak{X}$–подгрупп, то каждая субнормальная $\mathfrak{X}$–подгруппа группы $G$ содержится в некоторой нормальной $\mathfrak{X}$–подгруппе группы $G$.*

*Доказательство.* Пусть $H$ — субнормальная $\mathfrak{X}$–подгруппа группы $G$. Применим индукцию по индексу |

$G : H\,|$. Заметим, что $H \neq N_G(H)$ и $N_G(H) \neq G$. Выберем подгруппу $L$ в группе $G$, обладающую следующим свойством: подгруппа $L$ порождается всеми субнормальными подгруппами $X$ группы $G$ такими, что $H \leq X \leq N_G(H)$.

Ясно, что $H \leq L \leq N_G(H)$. Так как по теореме 13.9, с. 134, подгруппа, порожденная субнормальными подгруппами, является субнормальной подгруппой, то $L$ субнормальна и существует субнормальная подгруппа $M$ в группе $G$ такая, что $L \triangleleft M$ и $M \neq L$. По выбору $L$ подгруппа $M$ не содержится в $N_G(H)$. Поэтому существует элемент $x \in M \setminus N_G(H)$. Ясно, что

$$H \neq H^x, \quad H^x \in \mathfrak{X}$$

и $H^x$ — субнормальная подгруппа группы $G$. Поскольку $H \triangleleft L$, то $H^x \triangleleft L^x = L$. Теперь $HH^x$ — подгруппа группы $L$ и $HH^x \in \mathfrak{X}$ по требованию (2). Кроме того, $HH^x \neq H$, поэтому к подгруппе $HH^x$ применима индукция. По индукции существует нормальная подгруппа $N$ в группе $G$ такая, что $N \in \mathfrak{X}$ и $HH^x \leq N$. Теперь $H \leq N$. □

**Следствие 30.5.** *Пусть класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно произведений нормальных $\mathfrak{X}$−подгрупп. Если $H_1$ и $H_2$ — субнормальные $\mathfrak{X}$−подгруппы группы $G$, то $\langle H_1, H_2\rangle$ — субнормальная $\mathfrak{X}$−подгруппа.*

*Доказательство.* Пусть $M = \langle H_1, H_2\rangle$. По теореме 30.4 существуют в группе $M$ нормальные $\mathfrak{X}$−подгруппы $N_1$ и $N_2$ такие, что $H_1 \leq N_1$, $H_2 \leq N_2$. По требованию (2) произведение $N_1N_2 \in \mathfrak{X}$. Поэтому

$$M = \langle H_1, H_2\rangle \leq N_1N_2 \leq M$$

и $M = N_1N_2 \in \mathfrak{X}$. □





**Следствие 30.6.** *Пусть класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно произведений нормальных $\mathfrak{X}$−подгрупп. Если $H$ — субнормальная $\mathfrak{X}$−подгруппа группы $G$, то $H^G \in \mathfrak{X}$.*

*Доказательство.* Подгруппа $H^G$ порождается всеми сопряженными с $H$ подгруппами группы $G$, т.е.

$$H^G = \langle H^g \mid g \in G\rangle.$$

По следствию 30.5 получаем, что $H^G \in \mathfrak{X}$. □

Применяя следствие 30.6 к классам всех разрешимых и нильпотентных групп, получаем

**Следствие 30.7.** *Пусть $H$ — субнормальная подгруппа группы $G$. Тогда:*

*(1) если $H$ — разрешимая подгруппа, то $H^G$ разрешима;*

*(2) если $H$ — нильпотентная подгруппа, то $H^G$ нильпотентна.* □

Заметим, что для классов $\mathfrak{X}$ требование (2) эквивалентно требованию

(3) если $N_1$ и $N_2 \triangleleft\triangleleft\, G$, $N_1$ и $N_2 \in \mathfrak{X}$, то $\langle N_1, N_2\rangle \in \mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга. Произведение всех нормальных $\mathfrak{X}$−подгрупп группы $G$ называется $\mathfrak{X}$−*радикалом* группы $G$ и обозначается через $G_{\mathfrak{X}}$. Таким образом,

$$G_{\mathfrak{X}} = \prod_{N \triangleleft G, N \in \mathfrak{X}} N.$$

Ясно, что $\mathfrak{X}$−радикал $G_{\mathfrak{X}}$ является наибольшей нормальной подгруппой группы $G$, содержащейся в $\mathfrak{X}$.

**Пример 30.8.** Если $G$ — группа, то $\mathfrak{N}$−радикал $G_{\mathfrak{X}}$ совпадает с подгруппой Фиттинга $F(G)$ группы $G$. □

**Лемма 30.9.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга, $G$ — группа и $H \lhd\lhd G$. Тогда и только тогда $H \in \mathfrak{X}$, когда $H \leq G_{\mathfrak{X}}$.*

*Доказательство.* Пусть $H \lhd\lhd G$ и $H \in \mathfrak{X}$. По следствию 30.6 получаем, что $H \leq H^G \in \mathfrak{X}$ и $H^G \leq G_{\mathfrak{X}}$.

Обратно, пусть $H \lhd\lhd G$ и $H \leq G_{\mathfrak{X}}$. Так как $G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$ и выполняется требование (1), то $H \leq \mathfrak{X}$. □

**Лемма 30.10.** *Если $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга и $N \lhd\lhd G$, то $N_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}} \cap N$.*

*Доказательство.* Так как

$$G_{\mathfrak{X}} \cap N \lhd\lhd G_{\mathfrak{X}}$$

и $G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$, то $G_{\mathfrak{X}} \cap N \in \mathfrak{X}$. Поскольку $G_{\mathfrak{X}} \cap N \lhd N$, то

$$G_{\mathfrak{X}} \cap N \subseteq N_{\mathfrak{X}}.$$

Обратно,

$$N_{\mathfrak{X}} \lhd N \lhd\lhd G,$$

поэтому $N_{\mathfrak{X}} \lhd\lhd G$ и по лемме 30.9 подгруппа $N_{\mathfrak{X}} \subseteq G_{\mathfrak{X}}$. Итак

$$G_{\mathfrak{X}} \cap N = N_{\mathfrak{X}}.$$

□

**Лемма 30.11.** *Пусть группа $G$ содержит нормальную подгруппу $N$ индекса $p$, где $p$ — простое число. Если $Z$ — циклическая группа порядка $p$, то прямое произведение $G \times Z$ содержит нормальную подгруппу $K$, изоморфную $G$, и отличную от $G$.*





*Доказательство.* Так как

$$(G \times Z)/N \simeq E_{p^2},$$

где $E_{p^2}$ — элементарная абелева группа порядка $p^2$, то в $(G \times Z)/N$ существует $(p^2-1)$ элементов порядка $p$, которые распадаются на

$$(p^2-1)/(p-1) = (p+1)$$

подгрупп порядка $p$. Поэтому существует в $(G \times Z)/N$ подгруппа $K/N$ порядка $p$ такая, что

$$K/N \neq G/N \quad \text{и} \quad Z \nsubseteq K.$$

Подгруппа $K$ нормальна в группе $G \times Z$, $K \neq G$. Кроме того, $G \times Z = K \times Z$ и

$$(G \times Z)/Z \simeq G \simeq (K \times Z/Z \simeq K.$$

□

**Теорема 30.12.** *Если класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ содержит разрешимую группу $G$, то $\mathfrak{N}_{\pi(G)} \subseteq \mathfrak{X}$.*

*Доказательство.* Пусть $G \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}$ и $p \in \pi(G)$. У разрешимой группы факторы композиционного ряда имеют простые порядки. Поэтому существуют подгруппы $N \lhd H \lhd\lhd G$ такие, что $\mid H/N \mid= p$. Пусть $Z$ — циклическая группа порядка $p$. По лемме 30.11 существует группа $K$, изоморфная $H$ такая, что $K \lhd H \times Z$, $K \neq H$. Теперь

$$HK = H \times Z \in \mathfrak{X}.$$

Итак, класс $\mathfrak{X}$ содержит группу порядка $p$.

Пусть $P$ — произвольная $p$−группа. По индукции можно считать, что все собственные подгруппы группы $P$ содержатся в $\mathfrak{X}$. Если в группе $P$ имеются две различные подгруппы $P_1$ и $P_2$ индекса $p$, то $P_1$ и $P_2 \in \mathfrak{X}$ по индукции, а так как для $\mathfrak{X}$ выполняется требование (2), то $P = P_1P_2 \in \mathfrak{X}$. Пусть в $P$ только одна подгруппа индекса $p$. В этом случае группа $P$ циклическая. Пусть $| P |= p^n$, $| P_1 |= p^{n-1}$. Построим группу

$$B = A_1 \times \ldots \times A_p, \quad A_i \simeq P_1.$$

Пусть $A_i = \langle a_i \rangle$. Рассмотрим отображение $\gamma : B \mapsto B$ такое, что

$$\gamma(a_i) = a_{i+1},\ i = 1, \ldots, p-1,\ \gamma(a_p) = a_1.$$

Легко проверить, что $\gamma \in AutB,\ | \gamma |= p$. Поэтому существует группа

$$M = \langle a_1, \ldots, a_p, \gamma \rangle = B \times \langle \gamma \rangle.$$

Теперь $| M |= p^{(n-1)p+1}$, значит все подгруппы в $M$ субнормальны. Так как $B \in \mathfrak{X}$ и $\langle \gamma \rangle \in \mathfrak{X}$, то $M \in \mathfrak{X}$. Вычислим порядок элемента $a_1\gamma$. Так как

$$(a_1\gamma)^p = a_1\gamma a_1\gamma \ldots a_1\gamma =$$

$$= a_1(\gamma a_1 \gamma^{-1})(\gamma^2 a_1 \gamma^{-2}) \ldots (\gamma^{p-1} a_1 \gamma^{1-p}) = a_1 a_2 \ldots a_p$$

и $a_1a_2 \ldots a_p$ имеет порядок $p^{n-1}$, то элемент $a_1\gamma$ имеет порядок $p^n$. Таким образом, $P \in \mathfrak{X}$. Итак, $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{X}$ для всех $p \in \pi(G)$. Поэтому $\mathfrak{N}_{\pi(G)} \subseteq \mathfrak{X}$. □

**Следствие 30.13.** *Если $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга, то*

$$\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{\chi(\mathfrak{X})}.$$





*Доказательство.* По теореме 30.12 имеем включение $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{X}$ для всех $p \in \chi(\mathfrak{X})$. Поэтому

$$\mathfrak{N}_{\chi(\mathfrak{X})} \subseteq \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}.$$

Обратно, если $G \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{N}_{\pi(G)} \subseteq \mathfrak{X}$ по теореме 30.12. Поэтому

$$\pi(G) \subseteq \chi(\mathfrak{X}) \quad \text{и} \quad G \in \mathfrak{N}_{\chi(\mathfrak{X})}.$$

Итак, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{N}_{\chi(\mathfrak{X})}$. □

**Следствие 30.14.** *Если $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга, то*

$$\chi(\mathfrak{X}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}} \pi(G).$$

*Доказательство.* Пусть

$$\tau = \bigcup_{G \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}} \pi(G).$$

Если $p \in \chi(\mathfrak{X})$, то существует группа $Z_p$ простого порядка, принадлежащая $\mathfrak{X}$. Так как $Z_p \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}$, то $p \in \tau$. Обратно, если $p \in \tau$, то существует разрешимая группа $G \in \mathfrak{X}$ такая, что $p \in \pi(G)$. По теореме 30.12 получаем, что $\mathfrak{N}_{\pi(G)} \subseteq \mathfrak{X}$ и $p \in \chi(\mathfrak{X})$. Итак, $\chi(\mathfrak{X}) = \tau$. □

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга и $\mathfrak{Y}$ — класс групп. *Радикальным произведением* $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ называется класс

$$\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y} = \{G \in \mathfrak{E} \mid G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}\}.$$

**Теорема 30.15.** *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — классы Фиттинга, то $\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}$ — класс Фиттинга и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}$.*

*Доказательство.* Пусть $G \in \mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}$ и $H \lhd G$. Тогда $H_{\mathfrak{X}} = H \cap G_{\mathfrak{X}}$ и
$$H/H_{\mathfrak{X}} \simeq HG_{\mathfrak{X}}/G_{\mathfrak{X}} \lhd G/G_{\mathfrak{X}}.$$
Так как $G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Y}$ — класс Фиттинга, то $H/H_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$ и $H \in \mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}$.

Пусть $H_i \in \mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}$, $H_i \lhd G$, $i = 1, 2$, и $G = H_1H_2$. Тогда
$$H_iG_{\mathfrak{X}}/G_{\mathfrak{X}} \simeq H_i/H_i \cap G_{\mathfrak{X}} = H_i/(H_i)_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$$
и
$$G/G_{\mathfrak{X}} = H_1H_2/G_{\mathfrak{X}} = H_1G_{\mathfrak{X}}/G_{\mathfrak{X}})(H_2G_{\mathfrak{X}}/G_{\mathfrak{X}}) \in \mathfrak{Y}.$$
Поэтому $G \in \mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}$ — класс Фиттинга.

Если $G \in \mathfrak{X}$, то $G = G_{\mathfrak{X}}$ и $G/G_{\mathfrak{X}} = E \in \mathfrak{Y}$, т.е. $G \in \mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}$. Таким образом, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}$. □

**Теорема 30.16.** *Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Z}$ — классы Фиттинга. Тогда*

*(1)* $(G/G_{\mathfrak{X}})_{\mathfrak{Y}} = G_{\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}}/G_{\mathfrak{X}}$;

*(2)* $(\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}) \diamond \mathfrak{Z} = \mathfrak{X} \diamond (\mathfrak{Y} \diamond \mathfrak{Z})$.

*Доказательство.* (1) По теореме 30.15 произведение $\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}$ — класс Фиттинга и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}$. Поэтому $G_{\mathfrak{X}} \subseteq G_{\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}}$, а так как $G_{\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}} \in \mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}$, то $G_{\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}}/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$. Отсюда следует, что
$$G_{\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}}/G_{\mathfrak{X}} \subseteq (G/G_{\mathfrak{X}})_{\mathfrak{Y}}.$$

Проверим обратное включение. Обозначим
$$(G/G_{\mathfrak{X}})_{\mathfrak{Y}} = H/G_{\mathfrak{X}}.$$
Так как $H \lhd G$, то $H_{\mathfrak{X}} \subseteq G_{\mathfrak{X}}$, поэтому $H_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}$. Но $H/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$, значит $H \in \mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}$, т.е.
$$H/G_{\mathfrak{X}} \subseteq G_{\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}}/G_{\mathfrak{X}}.$$





Таким образом,
$$(G/G_{\mathfrak{X}})_{\mathfrak{Y}} = (G_{\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}})/G_{\mathfrak{X}}.$$

(2) Пусть
$$G \in (\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}) \diamond \mathfrak{Z}.$$
Это означает, что $G/G_{\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}} \in \mathfrak{Z}$. Но
$$G/G_{\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}} \simeq (G/G_{\mathfrak{X}})/(G_{\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}}/G_{\mathfrak{X}}) = (G/G_{\mathfrak{X}})/(G/G_{\mathfrak{X}})_{\mathfrak{Y}}.$$
Из того, что
$$(G/G_{\mathfrak{X}})/(G/G_{\mathfrak{X}})_{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{Z}$$
следует, что
$$G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y} \diamond \mathfrak{Z}, \; G \in \mathfrak{X} \diamond (\mathfrak{Y} \diamond \mathfrak{Z}).$$
Аналогично проверяется, что
$$\mathfrak{X} \diamond (\mathfrak{Y} \diamond \mathfrak{Z}) \subseteq (\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}) \diamond \mathfrak{Z}.$$
□

Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — произвольные классы групп. Через $Ext_{\mathfrak{X}}\mathfrak{Y}$ обозначим совокупность всех групп, в которых имеется нормальная $\mathfrak{X}$-подгруппа и факторгруппа по ней принадлежит $\mathfrak{Y}$, т.е.
$$Ext_{\mathfrak{X}}\mathfrak{Y} = \{G \in \mathfrak{E} \mid \exists N \lhd G, \; N \in \mathfrak{X}, \; G/N \in \mathfrak{Y}\}.$$

**Теорема 30.17.** *Если $\mathfrak{X}$ — класс групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп, и $\mathfrak{Y}$ — формация, то $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{Y} = Ext_{\mathfrak{X}}\mathfrak{Y}$.*

*Доказательство.* По определению корадикального произведения имеем

$$\mathfrak{X} \circ \mathfrak{Y} = \{G \in \mathfrak{E} \mid G^{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{X}\}.$$

Поэтому ясно, что $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{Y} \subseteq Ext_{\mathfrak{X}}\mathfrak{Y}$.

Обратно, пусть $G \in Ext_{\mathfrak{X}}\mathfrak{Y}$. Тогда существует нормальная подгруппа $N \in \mathfrak{X}$, для которой $G/N \in \mathfrak{Y}$. Поскольку $\mathfrak{Y}$ — формация, то $G^{\mathfrak{Y}} \subseteq N$, а так как $\mathfrak{X}$ замкнут относительно нормальных подгрупп, то $G^{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{X}$ и $G \in \mathfrak{X} \circ \mathfrak{Y}$. □

**Теорема 30.18.** *Если $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга и $\mathfrak{Y}$ — гомоморф, то $\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y} = Ext_{\mathfrak{X}}\mathfrak{Y}$.*

*Доказательство.* По определению радикального произведения имеем

$$\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y} = \{G \in \mathfrak{E} \mid G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}\}.$$

Поэтому ясно, что $\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y} \subseteq Ext_{\mathfrak{X}}\mathfrak{Y}$.

Обратно, пусть $G \in Ext_{\mathfrak{X}}\mathfrak{Y}$. Тогда существует нормальная подгруппа $N \in \mathfrak{X}$ такая, что $G/N \in \mathfrak{Y}$. Так как $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга, то $N \subseteq G_{\mathfrak{X}}$. Теперь

$$G/G_{\mathfrak{X}} \simeq (G/N)/(G_{\mathfrak{X}}/N),$$

а поскольку $\mathfrak{Y}$ — гомоморф и $G/N \in \mathfrak{Y}$, то $G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$ и $G \in \mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y}$. □

**Следствие 30.19.** *Если $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга, а $\mathfrak{Y}$ — формация, то $\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y} = \mathfrak{X} \circ \mathfrak{Y} = Ext_{\mathfrak{X}}\mathfrak{Y}$.* □

**Следствие 30.20.** *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — радикальные формации, то $\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y} = \mathfrak{X} \circ \mathfrak{Y} = Ext_{\mathfrak{X}}\mathfrak{Y}$.* □





## § 31. Инъекторы

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Подгруппа $H$ группы $G$ называется $\mathfrak{X}$*–инъектором*, если для каждой субнормальной подгруппы $K$ группы $G$ пересечение $H \cap K$ является $\mathfrak{X}$–максимальной подгруппой в $K$.

**Лемма 31.1.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Если $H$ — $\mathfrak{X}$–инъектор группы $G$ и $K \lhd\lhd G$, то $H \cap K$ — $\mathfrak{X}$–инъектор подгруппы $K$.*

*Доказательство.* Пусть $N \lhd\lhd K$. Тогда $N \lhd\lhd G$ и

$$(H \cap K) \cap N = H \cap N$$

$\mathfrak{X}$–максимальна в $N$. Это означает, что $H \cap K$ — $\mathfrak{X}$–инъектор подгруппы $K$. □

**Лемма 31.2.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Подгруппа $H$ является $\mathfrak{X}$–инъектором группы $G$ тогда и только тогда, когда $H$ $\mathfrak{X}$–максимальна в $G$ и $H \cap K$ — $\mathfrak{X}$–инъектор подгруппы $K$ для всех максимальных нормальных подгрупп $K$ группы $G$.*

*Доказательство.* Пусть $H$ — $\mathfrak{X}$–инъектор группы $G$. Тогда $H$ $\mathfrak{X}$–максимальна в $G$ и по лемме 31.1 подгруппа $H \cap K$ — $\mathfrak{X}$–инъектор подгруппы $K$.

Обратно, пусть $H$ — $\mathfrak{X}$–максимальная подгруппа группы $G$ и $H \cap K$ — $\mathfrak{X}$–инъектор подгруппы $K$ для всех максимальных нормальных подгрупп $K$ группы $G$. Пусть $N \lhd G$ и $N \leq L$, $L$ — максимальная нормальная подгруппа группы $G$. Так как $H \cap L$ — $\mathfrak{X}$–инъектор подгруппы $L$, то

$$H \cap L \cap N = H \cap N$$

$\mathfrak{X}$–максимальна в $N$ и $H$ — $\mathfrak{X}$–инъектор группы $G$. □

**Теорема 31.3.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп и $\mathfrak{Y}$ — класс Фиттинга. Если в каждой $\mathfrak{Y}$–группе существует $\mathfrak{X}$–инъектор, то $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$ — класс Фиттинга.*

*Доказательство.* Пусть

$$G \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}, \quad N \lhd\lhd G.$$

Тогда группа $G$ является своим $\mathfrak{X}$–инъектором. Из определения $\mathfrak{X}$–инъектора получаем, что $G \cap N = N$ — $\mathfrak{X}$–максимальная подгруппа группы $N$ для всех $N \lhd\lhd G$. Поэтому $N \in \mathfrak{X}$, а так как $\mathfrak{Y}$ — класс Фиттинга, то $N \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$ и первое требование определения класса Фиттинга для $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$ выполняется.

Пусть

$$N_1, N_2 \lhd G, \quad N_1, N_2 \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}.$$

Тогда $N_1 N_2 \in \mathfrak{Y}$ поскольку $\mathfrak{Y}$ — класс Фиттинга. По условию в группе $N_1 N_2$ существует $\mathfrak{X}$–инъектор, который обозначим через $H$. По определению $\mathfrak{X}$–инъектора подгруппа $N_i \cap H$ $\mathfrak{X}$–максимальна в $N_i$, поэтому $N_i \cap H = N_i$ и

$$N_1 N_2 = H \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}.$$

Значит для $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$ выполняется и второе требование определения класса Фиттинга. □

**Следствие 31.4.** *(1) Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Если в каждой группе существует $\mathfrak{X}$–инъектор, то $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга.*

*(2) Разрешимый класс $\mathfrak{X}$, для которого каждая разрешимая группа обладает $\mathfrak{X}$–инъектором, является классом Фиттинга.*





*Доказательство.* (1) Утверждение следует из теоремы в случае, когда $\mathfrak{Y}$ — класс всех групп.

(2) Утверждение следует из теоремы в случае, когда $\mathfrak{Y} = \mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп. □

**Лемма 31.5.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга и $H$ — $\mathfrak{X}$–максимальная подгруппа группы $G$. Если $L$ — подгруппа группы $G$ такая, что*

$$H \leq L \leq N_G(H),$$

*то $N_G(L) \leq N_G(H)$. В частности, нормализатор $\mathfrak{X}$–максимальной подгруппы группы $G$ самонормализуем.*

*Доказательство.* Если $x \in N_G(L)$, то $H^x \lhd L^x = L$ и $HH^x \in \mathfrak{X}$. Поскольку $H$ $\mathfrak{X}$–максимальна, то $H = H^x$ и $x \in N_G(H)$. □

**Лемма 31.6.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга, $G$ — разрешимая группа, $N$ — нормальная подгруппа группы $G$ с абелевой факторгруппой $G/N$. Пусть $W$ — $\mathfrak{X}$–максимальная подгруппа из $N$ и пусть $V_1$ и $V_2$ — $\mathfrak{X}$–максимальные подгруппы группы $G$, содержащие $W$. Тогда $V_1$ и $V_2$ сопряжены в $G$.*

*Доказательство.* Воспользуемся индукцией по порядку группы. Так как $N \cap V_i \in \mathfrak{X}$, то

$$W = N \cap V_i \quad \text{и} \quad V_i \leq N_G(W)$$

для каждого $i = 1, 2$. Если $N_G(W) \neq G$, то по индукции подгруппы $V_1$ и $V_2$ сопряжены в $N_G(W)$ и лемма справедлива. Поэтому следует считать, что подгруппа $W$ нормальна в $G$. Пусть $C_i/W$ — картерова подгруппа из

$$M_i/W = N_{G/W}(V_i/W) = N_G(V_i)/W.$$

По условию леммы факторгруппа $G/N$ абелева. Значит

$$G' = [G, G] \leq N \quad \text{и} \quad [V_i, M_i] \leq N \cap V_i = W.$$

Отсюда заключаем, что подгруппа $V_i/W$ содержится в центре $M_i/W$. Но $C_i/W$ самонормализуема в $M_i/W$, поэтому $V_i \leq C_i$. По лемме 31.5 нормализатор $N_G(C_i) \leq M_i$, поэтому

$$N_G(C_i)/W = N_{M_i}(C_i)/W = N_{M_i/W}(C_i/W) = C_i/W$$

и $C_i/W$ — подгруппа Картера группы $G/W$. Следовательно, $C_1^x = C_2$ для некоторого элемента $x \in G$. Теперь $V_1^x$ и $V_2$ — нормальные $\mathfrak{X}$−подгруппы из $C_2$, поэтому

$$V_1^x V_2 \in \mathfrak{X}, \quad V_1^x = V_2.$$

□

**Теорема 31.7.** *Если $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга, то в каждой разрешимой группе $G$ существует $\mathfrak{X}$−инъектор и любые два $\mathfrak{X}$−инъектора группы $G$ сопряжены.*

*Доказательство.* Воспользуемся индукцией по порядку группы $G$. Так как группу $G$ можно считать неединичной, то её коммутант $G'$ по индукции имеет $\mathfrak{X}$−инъектор, который обозначим через $W$. Через $V$ обозначим $\mathfrak{X}$−максимальную подгруппу группы $G$, содержащую $W$. Пусть $M$ — максимальная нормальная подгруппа группы $G$. Ясно, что $G' \leq M$. По индукции подгруппа $M$ содержит $\mathfrak{X}$−инъектор $U$. По лемме 31.1 подгруппа $U \cap G'$ — $\mathfrak{X}$−инъектор подгруппы $G'$. По индукции $U \cap G' = W^x$ для некоторого $x \in G'$. Пусть $T$ — $\mathfrak{X}$−максимальная подгруппа группы $G$, содержащая $U$. Теперь $U \leq T \cap M \in \mathfrak{X}$,





поэтому $U = T \cap M$. Подгруппы $T$ и $V^x$ содержат $\mathfrak{X}$−максимальную подгруппу $W^x$ коммутанта $G'$. По лемме 31.6 они сопряжены, т.е. $T^y = V^x$ для некоторого $y \in G$. Теперь

$$U^y = (T \cap M)^y = T^y \cap M = V^x \cap M.$$

Следовательно, $V^x \cap M$ — $\mathfrak{X}$−инъектор $M$ по лемме 31.2. Итак, существование $\mathfrak{X}$−инъектора в группе $G$ доказано.

Пусть $V_1$ и $V_2$ — $\mathfrak{X}$−инъекторы группы $G$. Тогда $V_1 \cap G'$ и $V_2 \cap G'$ — $\mathfrak{X}$−инъекторы подгруппы $G'$. По индукции

$$V_1 \cap G' = (V_2 \cap G')^g$$

для некоторого $g \in N$. Применяя лемму 31.6 для подгрупп

$$W = V_1 \cap G' \leq V_1 \cap V_2^g,$$

получаем, что $V_1$ и $V_2$ сопряжены в группе $G$. □

**Теорема 31.8.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга и $G$ — разрешимая группа. Подгруппа $H$ тогда и только тогда является $\mathfrak{X}$−инъектором группы $G$, когда $H$ $\mathfrak{X}$−максимальна в $G$ и $H \cap G'$ — $\mathfrak{X}$−инъектор коммутанта $G'$.*

*Доказательство.* Если $H$ — $\mathfrak{X}$−инъектор группы $G$, то $H$ $\mathfrak{X}$−максимальна в группе $G$ и $H \cap G'$ — $\mathfrak{X}$−инъектор подгруппы $G'$ по лемме 31.1.

Пусть $H$ — $\mathfrak{X}$−максимальная подгруппа группы $G$ и $H \cap G'$ — $\mathfrak{X}$−инъектор в $G'$. Пусть $K$ — $\mathfrak{X}$−инъектор группы $G$, он существует по теореме 31.7. По лемме 31.1 пересечение $K \cap G'$ — $\mathfrak{X}$−инъектор подгруппы $G'$. По теореме 31.7 подгруппы $K \cap G'$ и $H \cap G'$ сопряжены между собой, т.е. существует элемент $g \in G'$ такой, что

$$H \cap G' = (K \cap G')^g = K^g \cap G'.$$

Теперь подгруппы $H$ и $K^g$ $\mathfrak{X}$−максимальны в $G$ и содержат $\mathfrak{X}$−максимальную подгруппу $K^g \cap G'$. По лемме 31.6 подгруппы $H$ и $K^g$ сопряжены, поэтому $H$ — $\mathfrak{X}$−инъектор группы $G$. □

**Следствие 31.9.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга и пусть*

$$E = G_n \lhd G_{n-1} \lhd \ldots \lhd G_1 \lhd G_0 = G$$

*— ряд с абелевыми факторами $G_i/G_{i+1}$. Подгруппа $H$ тогда и только тогда является $\mathfrak{X}$−инъектором группы $G$, когда $H \cap G_i$ является $\mathfrak{X}$−максимальной подгруппой в $G_i$ для всех $i$.*

*Доказательство.* Если $H$ — $\mathfrak{X}$−инъектор группы $G$, то $H \cap G_i$ — $\mathfrak{X}$−инъектор подгруппы $G_i$ по лемме 31.1, поэтому $H \cap G_i$ является $\mathfrak{X}$−максимальной подгруппой в $G_i$ для всех $i$.

Обратно, пусть $H \cap G_i$ является $\mathfrak{X}$−максимальной подгруппой в $G_i$ для всех $i$. По индукции $H \cap G_1$ — $\mathfrak{X}$−инъектор в $G_1$. Так как $G/G_1$ абелева, то $G' \le G_1$ и подгруппа $H$ — $\mathfrak{X}$−инъектор группы $G$ по теореме 31.8. □

**Следствие 31.10.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга и $G$ — разрешимая группа. Подгруппа $H$ тогда и только тогда является $\mathfrak{X}$−инъектором группы $G$, когда для любой нормальной подгруппы $N$ группы $G$ пересечение $H \cap N$ является $\mathfrak{X}$−максимальной подгруппой в $N$.*

*Доказательство.* Если $H$ — $\mathfrak{X}$−инъектор группы $G$, то из определения $\mathfrak{X}$−инъектора следует, что пересечение $H \cap N$ $\mathfrak{X}$−максимальна в $N$ для всех нормальных подгрупп $N$ группы $G$.

Обратно, пусть для любой нормальной подгруппы $N$ группы $G$ пересечение $H \cap N$ является $\mathfrak{X}$−максимальной





подгруппой в $N$. Тогда, в частности, $H \cap G^{(i)}$ — $\mathfrak{X}$−максимальная подгруппа в $G^{(i)}$ для всех $i$, где $G^{(i)}$ — $i$−й коммутант группы $G$. Теперь для разрешимой группы $G$ и её производного ряда

$$E = G^{(n)} \lhd G^{(n-1)} \lhd \ldots \lhd G' \lhd G$$

выполняются условия следствия 31.9, поэтому подгруппа $H$ $\mathfrak{X}$−инъектор в $G$. □

**Следствие 31.11.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга и $G$ — разрешимая группа. Если $H$ — $\mathfrak{X}$−инъектор группы $G$ и $H \le K \le G$, то $H$ — $\mathfrak{X}$−инъектор в $K$.*

*Доказательство.* Пусть

$$E = G_n \lhd G_{n-1} \lhd \ldots \lhd G_1 \lhd G_0 = G$$

— ряд с абелевыми факторами $G_i/G_{i+1}$ и $K_i = K \cap G_i$. Тогда ряд

$$E = K_n \lhd K_{n-1} \lhd \ldots \lhd K_1 \lhd K_0 = K$$

имеет абелевы факторы $K_i/K_{i+1}$. Кроме того,

$$H \cap G_i \le K \cap G_i \le G_i$$

и $H \cap G_i$ $\mathfrak{X}$−максимальна в $G_i$. Поэтому

$$H \cap G_i = H \cap (K \cap G_i) = H \cap K_i$$

$\mathfrak{X}$−максимальна в $K \cap G_i = K_i$. Применяя следствие 31.9 получаем, что $H$ — $\mathfrak{X}$−инъектор в $K$. □

**Теорема 31.12.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга и $G$ — нильпотентная группа. Подгруппа $H$ группы $G$ $\mathfrak{X}$–максимальна тогда и только тогда, когда $H$ — $\chi(\mathfrak{X})$-холлова подгруппа.*

*Доказательство.* Пусть $H$ — $\mathfrak{X}$–максимальная подгруппа группы $G$. Так как

$$H \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{\chi(\mathfrak{X})},$$

то $H$ будет $\chi(\mathfrak{X})$–подгруппой. Если $K$ — $\chi(\mathfrak{X})$-холлова подгруппа, то

$$H \leq K \in \mathfrak{N}_{\chi(\mathfrak{X})} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}$$

и $K$ — $\mathfrak{X}$-подгруппа. Поэтому $H = K$.

Обратно, если $H$ — $\chi(\mathfrak{X})$–холлова подгруппа группы $G$, то

$$H \in \mathfrak{N}_{\chi(\mathfrak{X})} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}.$$

Если $K$ $\mathfrak{X}$–максимальна в $G$ и $K \geq H$, то

$$K \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{\chi(\mathfrak{X})}$$

и $K$ — $\chi(\mathfrak{X})$–подгруппа. Поэтому $H = K$. □

**Следствие 31.13.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга и $G$ — нильпотентная группа. Подгруппа $H$ группы $G$ является $\mathfrak{X}$–инъектором тогда и только тогда, когда $H$ — $\chi(\mathfrak{X})$-холлова подгруппа.* □

**Теорема 31.14.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга и $G$ — группа с нильпотентным коммутантом $G'$. Подгруппа $H$ тогда и только тогда является $\mathfrak{X}$–инъектором группы $G$, когда $H$ $\mathfrak{X}$–максимальна в $G$ и содержит $\chi(\mathfrak{X})$–холлову подгруппу из $G'$.*





*Доказательство.* Пусть $H$ — $\mathfrak{X}$–инъектор группы $G$. Тогда $H$ $\mathfrak{X}$–максимальна в группе $G$ и $H \cap G'$ — $\mathfrak{X}$–инъектор подгруппы $G'$. Так как подгруппа $G'$ по условию нильпотентна, то

$$H \cap G' = G'_{\chi(\mathfrak{X})}$$

— $\chi(\mathfrak{X})$–холлова подгруппа в $G'$ по следствию 31.13.

Обратно, пусть $H$ $\mathfrak{X}$–максимальная подгруппа группы $G$ и $H$ содержит $\chi(\mathfrak{X})$–холлову подгруппу группы $G'$. Пусть $K$ $\mathfrak{X}$–инъектор группы $G$, он существует по теореме 31.7. Тогда по лемме 31.1 пересечение $K \cap G'$ — $\mathfrak{X}$–инъектор подгруппы $G'$. По следствию 31.13 пересечение

$$K \cap G' = G'_{\chi(\mathfrak{X})}$$

является $\chi(\mathfrak{X})$–холловой подгруппой. Теперь $K$ и $H$ сопряжены по лемме 31.6. Значит $H$ — $\mathfrak{X}$–инъектор группы $G$. □

**Следствие 31.15.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга и $G$ — сверхразрешимая группа. Подгруппа $H$ тогда и только тогда является $\mathfrak{X}$–инъектором группы $G$, когда $H$ $\mathfrak{X}$–максимальна в группе $G$ и содержит $\chi(\mathfrak{X})$–холлову подгруппу коммутанта.* □

**Пример 31.16.** В группе $S_3 \times Z_2$ подгруппа $H = Z_3 \times Z_2$ является $\mathfrak{N}$–инъектором, где $Z_3$ — силовская 3–подгруппа из $S_3$. Но $H$ не является холловой подгруппой. □

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Подгруппа $H$ группы $G$ называется $\mathfrak{X}$–*биектором*, если $H \cap N$ $\mathfrak{X}$-максимальна в $N$, а $HN/N$ $\mathfrak{X}$-максимальна в $G/N$ для каждой нормальной подгруппы $N$. Ясно, что $\mathfrak{X}$–биектор одновременно является $\mathfrak{X}$–проектором и $\mathfrak{X}$–инъектором группы $G$. Примерами

$\mathfrak{X}$−биекторов служат силовские $p$−подгруппы групп для класса $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_p$ всех $p$−групп.

**Пример 31.17.** В группе $S_4$ силовская 2−подгруппа является $\mathfrak{N}$−биектором. □

Для класса Шунка $\mathfrak{F}$ каждая разрешимая группа $G$ обладает единственным классом сопряженных $\mathfrak{F}$-проекторов. Если $\mathfrak{F}$ — радикальный класс, т.е. класс Фиттинга, то каждая разрешимая группа содержит единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов. Но наиболее употребительные классы групп являются одновременно и классами Шунка и радикальными классами. Поэтому вполне естественно возникает вопрос о существовании $\mathfrak{F}$−биекторов в разрешимых группах для радикального класса Шунка $\mathfrak{F}$.

**Теорема 31.18.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — радикальный класс Шунка. Тогда в каждой нильпотентной группе $G$ существует $\mathfrak{F}$−биектор $H$ и подгруппа $H$ является $\chi(\mathfrak{F})$−холловой подгруппой.*

*Доказательство.* Утверждение вытекает из следствия 28.21, с. 279, и следствия 31.13. □

**Следствие 31.19.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — радикальная насыщенная формация. Тогда в каждой нильпотентной группе $G$ существует $\mathfrak{F}$−биектор $H$ и подгруппа $H$ является $\chi(\mathfrak{F})$−холловой подгруппой.* □

Обозначим через $Proj_{\mathfrak{F}}(G)$ совокупность всех $\mathfrak{F}$−проекторов группы $G$, а через $Inj_{\mathfrak{F}}(G)$ совокупность всех $\mathfrak{F}$−инъекторов.





**Теорема 31.20.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — радикальный класс Шунка. Если в метанильпотентной группе $G$ существует $\mathfrak{F}$−биектор $H$, то $H$ является $\chi(\mathfrak{F})$−холловой подгруппой группы $G$.*

*Доказательство.* Пусть

$$H \in Inj_{\mathfrak{F}}(G) \cap Proj_{\mathfrak{F}}(G).$$

Так как в разрешимой группе все $\mathfrak{F}$−проекторы и все $\mathfrak{F}$−инъекторы сопряжены между собой, то

$$Inj_{\mathfrak{F}}(G) = Proj_{\mathfrak{F}}(G).$$

Пусть $K = F(G)$ — подгруппа Фиттинга. Так как $K \cap H$ — $\mathfrak{F}$−инъектор в $K$, то по следствию 31.13 подгруппа $K \cap H$ является $\chi(\mathfrak{F})$−холловой подгруппой в $K$. Так как $G/K$ нильпотентна и $HK/K$ является $\mathfrak{F}$−проектром в $G/K$, то $HK/K$ будет $\chi(\mathfrak{F})$−холловой подгруппой в $G/K$ по следствию 28.21, с. 279. Поскольку

$$HK/K \simeq H/(H \cap K),$$

то $H$ — $\chi(\mathfrak{F})$−подгруппа. Кроме того,

$$| G : H |=| K : (H \cap K) || (G/K) : (HK/K) |$$

и $| G : H |$ есть $\chi(\mathfrak{F})'$−число. Значит, $H$ — $\chi(\mathfrak{F})$−холлова подгруппа. □

**Следствие 31.21.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — радикальная насыщенная формация. Если в метанильпотентной группе $G$ существует $\mathfrak{F}$−биектор $H$, то $H$ является $\chi(\mathfrak{F})$−холловой подгруппой.* □

**Пример 31.22.** Группа $S_4 \times Z_3$ не является метанильпотентной, но $\mathfrak{N}$–проекторы и $\mathfrak{N}$–инъекторы совпадают между собой и являются нехолловыми подгруппами порядка 24. $\square$

**Теорема 31.23.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — радикальный класс Шунка и $\mathfrak{M}$ — нормально наследственный гомоморф, состоящий из разрешимых групп. Если в каждой группе $G \in \mathfrak{M}$ существует $\mathfrak{F}$–биектор, то $\mathfrak{M}_{\chi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$.*

*Доказательство.* Предположим, что $\mathfrak{M}_{\chi(\mathfrak{F})}$ не содержится в $\mathfrak{F}$, и пусть $G$ — группа наименьшего порядка из разности $\mathfrak{M}_{\chi(\mathfrak{F})} \setminus \mathfrak{F}$. Если $G$ имеет простой порядок $p$, то $p \in \chi(\mathfrak{F})$ и $G \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$, противоречие. Значит, $G$ — группа непростого порядка и можно выбрать нетривиальную нормальную в $G$ подгруппу $N$. Так как $N \in \mathfrak{M}$ и $N$ — $\chi(\mathfrak{F})$–подгруппа в $G$, то $N \in \mathfrak{M}_{\chi(\mathfrak{F})}$ и $N \in \mathfrak{F}$.

Пусть $H$ — $\mathfrak{F}$–биектор в $G$. Тогда $H$ — $\mathfrak{F}$–инъектор в $G$ и $N \leq H$. Поскольку $H$ является $\mathfrak{F}$–проектором в $G$, то $H/N$ $\mathfrak{F}$–максимальна в $G/N$. Так как $\mathfrak{M}$ — гомоморф, то $G/N \in \mathfrak{M}_{\chi(\mathfrak{F})}$, а по выбору группы $G$ получаем, что $G/N \in \mathfrak{F}$, т.е. $H = G$ и $G \in \mathfrak{F}$, противоречие. Значит, допущение неверно и $\mathfrak{M}_{\chi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$. $\square$

**Следствие 31.24.** *Если $\mathfrak{F}$ — радикальный класс Шунка, для которого в каждой разрешимой группе существует $\mathfrak{F}$–биектор, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\chi(\mathfrak{F})}$.* $\square$

**Следствие 31.25.** *Если $\mathfrak{F}$ — радикальная насыщенная формация, для которой в каждой разрешимой группе существует $\mathfrak{F}$–биектор, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\chi(\mathfrak{F})}$.* $\square$





## Литература

1. Белоногов В.А. Задачник по теории групп. — М.: Наука, 2000. 239 с.

2. Богопольский О.В. Введение в теорию групп. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 148 с.

3. Ведерников В.А. Элементы теории классов групп. Учебное пособие по спецкурсу. — Смоленск: Смоленский гос. пед. ин–т, 1988. 95 с.

4. Горенстейн Д., Конечные простые группы: Введение в их классификацию. — М.: Мир, 1985. 352 с.

5. Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы в теории классов конечных групп. — Гомель: Гомельский гос. ун–т, 2001. 238 с.

6. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1982. 288 с.

7. Кондратьев А.С., Махнев А.А., Старостин А.И. Конечные группы. — В сб.: Алгебра. Топология. Геометрия. Т.24. ( Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР). М., 1986. С.3–120.

8. Кострикин А.И. Конечные группы. — В сб.: Алгебра. Топология. Геометрия, 1964. (Итоги науки. Серия: Математика. ВИНИТИ АН СССР). М., 1966. С.7–46.

9. Мазуров В.Д. Конечные группы. — В сб.: Алгебра. Топология. Геометрия. Т.14. (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР). М., 1976. С.5–56.

10. Монахов В.С. Введение в теорию групп. Тексты лекций по курсу "Алгебра и теория чисел". — Минск: Белорусский гос. ун–т, 1990. 72 с.

11. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун–т, 2002. 172 с.

12. Селькин М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. — Мн.: Беларуская навука, 1997. 144 с.

13. Скиба А.Н. Алгебра формаций. — Мн.: Беларуская навука, 1997. 240 с.

14. Скиба А.Н. Решетки и универсальные алгебры. Учебное пособие. — Гомель: Гомельский гос. ун–т, 2002. 255 с.

15. Холл Ф. Теория групп. — М.: ИЛ, 1962. 468 с.

16. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1964. 158 с.

17. Чунихин С.А. Краткий курс теории групп. — 1969. 276 с.

18. Чунихин С.А., Шеметков Л.А. Конечные группы. — В сб.: Алгебра. Топология. Геометрия. ( Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР). М., 1971. С.7–70.

19. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. — М.: Наука, 1978. 272 с.

20. Шеметков Л.А. Классические факторизации групп и колец. Учебное пособие. — Гомель: Гомельский гос. ун–т, 1979. 64 с.





21. Шеметков Л.А. Основы теории групп. Спецкурс для студентов математического факультета Гомельского госуниверситета. — 1979. 134 с.

22. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. — М.: Наука, 1989. 253 с.

23. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. — Walter de Gruyter. Berlin, New York, 1992. 889 p.

24. Gaschutz W. Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups. Notes on pure mathematics; № 11. — Canberra, Australian National University, 1979. 100 p.

25. Guo W. The Theory of Classes of Groups. — Science Press-Kluwer Academic Publishers, Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London, 2000. 258 p.

26. Huppert B. Endliche Gruppen I. — Berlin, Heidelberg, New York, 1967. 793 s.

27. Huppert B., Blackburn N. Finite groups, II. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1982. 531 p.

28. Huppert B., Blackburn N. Finite groups, III. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1982. 454 p.

29. Kurzweil H., Stellmacher B., Theorie der endlichen Gruppen. Eine Einfuhrung. — Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1998. 341 s.

30. Robinson D.J.S. A course in the theory of groups. — Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1982. 481 p.

31. Wehrfritz B.A.F. Finite groups. A second course on group theory. — World scientific: Singapore–New Yersey–London–Hong Kong, 1999. 123 p.



## Предметный указатель

# Содержание

Учебное издание

МОНАХОВ Виктор Степанович

Введение в теорию конечных групп и их классов. Учебное пособие

Подписано в печать 24.04.2003. Формат $60 \times 84$ 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. п. л. 18,6 Уч.-изд. л. 20. Тираж 250 экз. Заказ № 234.

Отпечатано на полиграфической технике УО "ГГУ им. Ф.Скорины"

Лицензия ЛВ № 357 от 12 февраля 1999.

246019 г.Гомель, ул.Советская 104