

1 События и операции над ними. Классическое определение вероятности

1. Игральная кость подбрасывается дважды. Наблюдаемый результат — пара чисел, соответствующая числу очков, выпавших первый и второй раз. Построить пространство элементарных исходов Ω , подмножества, соответствующие следующим событиям:

$$A = \{\text{оба раза выпало число очков кратное 3}\};$$

$$B = \{\text{ни разу не выпала шестерка}\};$$

$$C = \{\text{оба раза выпало число очков больше 3}\};$$

$$D = \{\text{оба раза выпало одинаковое число очков}\};$$

$$E = \{\text{хотя бы один раз выпало четное число очков}\};$$

$$AB, BC, AE, BE, A + B, B + C, A + E, A \setminus B, B \setminus C, D \setminus E, C \setminus B, \overline{B}, \overline{C}, \overline{E}.$$

Найти вероятности всех событий.

2. Производится один выстрел по плоской прямоугольной мишени ($-2 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1$). По условиям стрельбы непопадание исключено.

Наблюдаемый результат — пара чисел, соответствующая координатам точки попадания в мишень. Построить пространство элементарных исходов Ω , подмножества, соответствующие следующим событиям:

$$A = \{\text{произведение координат неотрицательно}\};$$

$$B = \{\text{абсцисса не меньше ординаты}\};$$

$$C = \{\text{сумма абсолютных величин превышает 1}\};$$

$$AB, BC, B + C, A \setminus B, B \setminus C, \overline{A}.$$

Найти вероятности всех событий.

3. Двое играют в шахматы. Событие $A = \{\text{выиграл первый игрок}\}$, $B = \{\text{выиграл второй игрок}\}$. Что означают события \overline{A} , $\overline{A} \cap \overline{B}$.

4. Мишень состоит из 10 концентрических кругов радиусов $r_k, k = \overline{1, 10}, r_1 < \dots < r_{10}$. Событие

$$A_k = \{\text{попадание в круг радиуса } r_k\}, k = \overline{1, 10}. \text{ Что означают события: } A = \sum_{k=1}^6 A_k, C = \prod_{k=5}^{10} A_k,$$

$$C = A_5 \setminus A_3?$$

Найти вероятности этих событий.

5. Произведено три выстрела по цели. Событие $A_k = \{\text{попадание в цель при } k\text{-ом выстреле}\}$, $k = 1, 2, 3$. Построить пространство элементарных исходов Ω , используя $A_k, k = 1, 2, 3$, подмножества, соответствующие следующим событиям:

$$A = \{\text{произошло ровно одно попадание в цель}\};$$

$$B = \{\text{произошло не менее двух попаданий в цель}\};$$

$$C = \{\text{произошло хотя бы одно попадание в цель}\};$$

$$D = \{\text{произошел хотя бы один промах}\};$$

$$E = \{\text{произошло попадание в цель, но не раньше третьего выстрела}\}.$$

6. Наудачу выбираются три изделия, каждое может оказаться качественным или бракованным. Построить пространство элементарных исходов Ω , подмножества, соответствующие следующим событиям:

$$A = \{\text{все три детали качественные}\};$$

$$B = \{\text{ровно одно изделие качественное}\};$$

$$C = \{\text{хотя бы одно изделие качественное}\};$$

$$AB, BC, A + C, B + C, A \setminus B, C \setminus B, \overline{A}, \overline{C}.$$

7. Из урны, содержащей 1 белый и 2 черных шара, извлекли 2 шара. Построить пространство элементарных исходов Ω , подмножества, соответствующие следующим событиям:

$$A = \{\text{только первый извлеченный шар черный}\};$$

$$B = \{\text{ровно один извлеченный шар черный}\};$$

$C = \{\text{хотя бы один извлеченный шар черный}\};$
 $D = \{\text{хотя бы один извлеченный шар белый}\};$
 $AB, BC, A + C, B + C, C + D, A \setminus C, C \setminus D, \bar{A}, \bar{C}, \bar{D}.$

8. Пусть A, B, C — три произвольных события. Найти выражения, соответствующие тому, что
 - а) произошли все три события;
 - б) произошло хотя бы одно событие;
 - в) ни одно событие не произошло;
 - г) произошло хотя бы два события;
 - д) произошло ровно одно событие;
 - е) произошло ровно два события.
9. Образуют ли полную группу следующие группы событий, являются ли они несовместными:
 - а) опыт — бросание монеты; события: $A_1 = \{\text{появление герба}\}; A_2 = \{\text{появление решки}\};$
 - б) опыт — бросание двух монет;
события: $B_1 = \{\text{появление двух гербов}\}; B_2 = \{\text{появление двух решек}\};$
 - в) опыт — бросание двух монет;
события: $C_1 = \{\text{появление герба на первой монете}\}; C_2 = \{\text{появление решки на второй монете}\};$
 - г) опыт — два выстрела по мишени;
события: $D_0 = \{\text{ни одного попадания}\}; D_1 = \{\text{одно попадание}\}; D_2 = \{\text{два попадания}\};$
 - д) опыт — два выстрела по мишени;
события: $E_1 = \{\text{хотя бы одно попадание}\}; E_2 = \{\text{хотя бы один промах}\}.$
10. Являются ли равновероятными следующие события:
 - а) опыт — бросание симметричной монеты; события: $A_1 = \{\text{появление герба}\}; A_2 = \{\text{появление решки}\};$
 - б) опыт — бросание погнутой монеты; события: $A_1 = \{\text{появление герба}\}; A_2 = \{\text{появление решки}\};$
 - в) опыт — бросание двух монет;
события: $B_1 = \{\text{появление двух гербов}\}; B_2 = \{\text{появление двух решек}\}; B_3 = \{\text{появление одного герба и одной решки}\};$
 - г) опыт — один выстрел по мишени; события: $C_1 = \{\text{попадание}\}; C_2 = \{\text{промах}\};$
 - д) опыт — бросание игральной кости;
события: $D_1 = \{\text{появление не менее трех очков}\}; D_2 = \{\text{появление не более четырех очков}\}.$
11. Куб, все грани которого окрашены распилили на 1000 кубиков одинакового размера. Найти вероятность, что наудачу выбранный кубик имеет: а) ровно одну окрашенную грань; б) ровно две окрашенные грани; в) ровно три окрашенные грани. г) хотя бы одну окрашенную грань.
12. На 9 карточках написаны цифры от 1 до 9. Определить вероятность того, что число, составленное из двух наугад взятых карточек, делится на 18.
13. На 8 карточках написаны числа: 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Из двух наугад взятых карточек составлена дробь. Какова вероятность того, что эта дробь сократима?
14. На 5 карточках написаны числа: 1, 2, 3, 4, 5. Две из них одна за другой вынимаются. Найти вероятность, что число на первой карточке будет больше, чем на второй. Найти эту же вероятность, если первая карточка после извлечения кладется обратно и перемешивается с остальными.
15. Датчик случайных чисел генерирует случайное целое число. Какова вероятность того, что сгенерированное число: а) делится на 5; б) при возведении в квадрат оканчивается на единицу; в) при умножении на 9 оканчивается единицей?