***Практическое занятие 8*** **Скалярные и векторные поля**

8.1 Скалярные поля и их основные характеристики
8.2 Векторные поля и их основные характеристики
8.3 Потенциальное и соленоидальное векторные поля

## 8.1 Скалярные поля и их основные характеристики

*Стационарным скалярным полем* называется пространство $\mathbb{R}^n$ (или его часть – область $Q$), в каждой точке $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ которого определена скалярная функция

$$U(P) = U(x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (8.1)$$

Функция $U(P)$ независимо от ее физического смысла называется *потенциалом* скалярного поля.

Скалярными полями являются:
– поле температур тела;
– поле плотности заряда на поверхности или в среде,
– поле плотности масс тела.

Основными характеристиками скалярного поля являются: поверхности (линии) уровня, производная по направлению и градиент.

*Поверхностью уровня* скалярного поля называется множество точек, в каждой из которых его потенциал $U(P)$ сохраняет постоянное значение.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ уравнение поверхности уровня (*эквипотенциальной поверхности*) записывается в виде

$$U(x_1, x_2, x_3) = C, \qquad (8.2)$$

где постоянная величина $C$ принимает такие значения, при которых равенство (8.2) имеет геометрический смысл.

В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассматривают *линии уровня*, уравнения которых имеют вид

$$U(x_1, x_2) = C. \qquad (8.3)$$

Пусть в области $Q$ задано скалярное поле $U(P)$. Рассмотрим точку $P_0 \in Q$ и какое-либо фиксированное направление, определяемое единичным вектором $\vec{\tau}$. Через точку $P_0$



проведем прямую $l$, параллельную вектору $\vec{\tau}$, и выберем на ней точку $P$ (рисунок 8. 1).

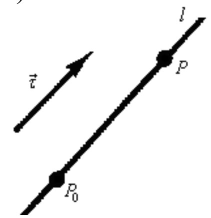


Рисунок 8. 1 – Изменение потенциального поля $U(P)$ в направлении $\vec{\tau}$

*Производной по направлению вектора* $\vec{\tau}$ функции $U(P)$ в точке $P_0$ называется предел (если он существует) отношения приращения функции $\Delta U = U(P) - U(P_0)$ к величине перемещения $|P_0P|$ при $|P_0P| \to 0$:

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial l} = \lim_{|P_0P| \to 0} \frac{\Delta U}{|P_0P|}. \qquad (8.4)$$

Величина $\dfrac{\partial U(P_0)}{\partial l}$ характеризует скорость изменения скалярного поля $U(P)$ в точке $P_0$ по выбранному направлению $\vec{\tau}$. Если $\dfrac{\partial U(P_0)}{\partial l} > 0$, то скалярное поле в точке $P_0$ возрастает, в противном случае – убывает.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ вектор $\vec{\tau}$ имеет координаты

$$\vec{\tau} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma),$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы (рисунок 8.2).

Тогда производная по направлению $\dfrac{\partial U(P_0)}{\partial l}$ выражается через декартовы координаты:

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial l} = \frac{\partial U(P_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U(P_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U(P_0)}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (8.5)$$

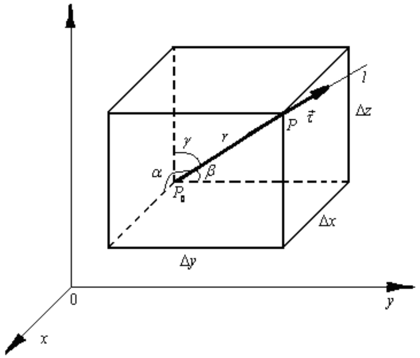


Рисунок 8. 2 – Единичный вектор $\vec{\tau}$
в пространстве $\mathbb{R}^3$

*Градиентом* скалярного поля $U(P)$ называется вектор $\operatorname{grad}U(P_0)$, проекциями которого на оси $Ox$, $Oy$, $Oz$ являются соответствующие частные производные функции $U(P)$:

$$\operatorname{grad}U(P_0)=\frac{\partial U(P_0)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U(P_0)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U(P_0)}{\partial z}\vec{k}. \quad (8.6)$$

Из равенства (8.5) следует, что

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\left|\operatorname{grad}U\right|\cdot\cos\left(\operatorname{grad}U;\vec{\tau}\right). \quad (8.7)$$

Из формулы (8.7) следует, что величина $\frac{\partial U}{\partial l}$ достигает наибольшего значения при $\cos\left(\operatorname{grad}U;\vec{\tau}\right)=1$. Поэтому направление градиента является направлением наибыстрейшего возрастания скалярного поля в точке.

Поскольку

$$\frac{\partial U}{\partial l_{\max}}=\left|\operatorname{grad}U\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}, \quad (8.8)$$

то модуль градиента равен наибольшей скорости возрастания потенциала скалярного поля $U(P)$ в точке.



## 8.2 Векторные поля и их основные характеристики

*Стационарным векторным полем* называется пространство $\mathbb{R}^n$ (или его часть – область $Q$), в каждой точке $M$ которого определена векторная функция

$$\vec{a}=\vec{a}(M).$$

В пространстве $\mathbb{R}^3$ векторная функция $\vec{a}(M)$, $M(x;y;z)$, определяется проекциями $X(M)$, $Y(M)$, $Z(M)$ вектора $\vec{a}(M)$ соответственно на координатные оси $Ox$, $Oy$, $Oz$:

$$\vec{a}(M)=X(M)\vec{i}+Y(M)\vec{j}+Z(M)\vec{k}. \quad (8.9)$$

Будем считать, что $X(M)$, $Y(M)$, $Z(M)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями координат точки $M$. Тогда векторная функция $\vec{a}(M)$ называется *непрерывно дифференцируемой в области $Q$*.

Векторными полями являются:

– электрическое поле системы электрических зарядов, характеризующееся в каждой точке вектором напряженности;

– магнитное поле, создаваемое электрическим током и характеризующееся в каждой точке вектором магнитной индукции;

– поле тяготения, создаваемое системой масс, характеризующееся в каждой точке вектором силы тяготения;

– поле скоростей потока жидкостей, описываемое в каждой точке вектором скорости.

Основными характеристиками векторного поля являются: векторные линии, поток, дивергенция, циркуляция и вихрь.

В е к т о р н ы е  л и н и и. *Векторной (силовой) линией* $\Gamma$ векторного поля $\vec{a}(M)$ называется линия, для которой в каждой ее точке $M$ вектор $\vec{a}(M)$ направлен по касательной к данной линии.

Векторными линиями в движущейся жидкости являются линии скоростей, в электростатическом поле – силовые линии, в магнитном поле – линии, соединяющие северный и южный полюсы, в поле $\operatorname{grad}U$ – линии, ортогональные к эквипотенциальным поверхностям скалярного поля $U(M)$.

Пусть векторная линия $\Gamma$ задана уравнением

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}.$$

Тогда вектор $d\vec{r}=dx\cdot\vec{i}+dy\cdot\vec{j}+dz\cdot\vec{k}$ в каждой точке направлен по касательной к линии $\Gamma$ и потому коллинеарен вектору $\vec{a}(M)$. Следовательно, координаты векторов $d\vec{r}$ и $\vec{a}(M)$ пропорциональны:

$$\frac{dx}{X(x;y;z)}=\frac{dx}{Y(x,y,z)}=\frac{dx}{Z(x,y,z)}. \qquad (8.10)$$

Система дифференциальных уравнений (8.10) определяет векторные линии поля $\vec{a}(M)$. Общий интеграл системы (8.10) имеет вид

$$\begin{cases}\varphi_1(x,y,z)=c_1,\\ \varphi_2(x,y,z)=c_2.\end{cases}$$

С *геометрической* точки зрения данная система задает два семейства поверхностей, которые в совокупности определяют искомые векторные линии.

Если в некоторой области $Q$ для системы уравнений (8.10) выполнены условия теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, то через каждую точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ проходит единственная векторная линия

$$\begin{cases}\varphi_1(x,y,z)=\varphi_1(x_0,y_0,z_0),\\ \varphi_2(x,y,z)=\varphi_2(x_0,y_0,z_0).\end{cases}$$

Поток векторного поля. Пусть $\vec{a}(M)$ векторное поле в некоторой области $Q$ и $\Omega\subset Q$ – двусторонняя гладкая незамкнутая ориентированная поверхность.

*Потоком* $\Pi$ векторного поля $\vec{a}(M)$ через ориентированную поверхность $\Omega$ называется число, равное значению поверхностного интеграла 2-го рода:

$$\Pi=\iint_{\Omega}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS. \qquad (8.11)$$

Поток $\Pi$ зависит от выбора стороны поверхности (направления вектора $\vec{n}$) и обладает всеми свойствами поверхностного интеграла 2-го рода.



Поток $\Pi$ векторного поля $\vec{a}(M)$ через замкнутую поверхность $\Omega$ равен сумме потоков по внешней и внутренней сторонам этой поверхности:

$$\Pi=\oiint_{\Omega}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\Omega^+}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{\Omega^-}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS.$$

Термин «поток» для введенной скалярной характеристики векторного поля употребляется независимо от физического смысла $\vec{a}(M)$. В частности, он определяет поле линейных скоростей стационарно движущейся несжимаемой жидкости через область $Q$, ограниченную поверхностью $\Omega$. Если $\Pi>0$, то жидкости вытекает больше, чем поступает, следовательно, внутри области $Q$ имеются *источники*. Если $\Pi<0$, то внутри области $Q$ имеются *стоки*, так как вытекает меньше жидкости, чем поступает.

Дивергенция векторного поля. *Дивергенцией* (*расходимостью*) $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке $M$ называется скалярная функция, равная

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\frac{\partial X(M)}{\partial x}+\frac{\partial Y(M)}{\partial y}+\frac{\partial Z(M)}{\partial z}. \qquad (8.12)$$

Дивергенция характеризует мощность находящегося в точке $M$ источника при $\operatorname{div}\vec{a}(M)>0$ или стока при $\operatorname{div}\vec{a}(M)<0$. Если $\operatorname{div}\vec{a}(M)=0$, то в точке $M$ нет ни источника, ни стока.

*Теорема 1 (Остроградского - Гаусса) Если векторная функция $\vec{a}(M)$ непрерывно дифференцируема в области $Q$, ограниченной замкнутой поверхностью $\Omega$, то поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхность $\Omega$ в направлении внешней нормали равен тройному интегралу по области $Q$ от дивергенции этого векторного поля*:

$$\oiint_{\Omega}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_{Q}\operatorname{div}\vec{a}\,dxdydz. \qquad (8.13)$$

Данная теорема является аналитическим выражением *теоремы Остроградского - Гаусса в векторной форме.*

Циркуляция векторного поля и ее физический смысл. Рассмотрим область $Q \subset \mathbb{R}^3$, ориентированную линию $\Gamma$ и векторное поле $\vec{a}(M)$, определенное на $\Gamma$. И пусть $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к дуге $\Gamma$.

*Циркуляцией* $C$ векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль замкнутой ориентированной кривой $\Gamma$ называется число, равное значению криволинейного интеграла 1-го рода:

$$C = \oint_{\Gamma} (\vec{a} \cdot \vec{\tau})\, dl . \qquad (8.14)$$

Циркуляция обладает всеми свойствами криволинейного интеграла 1-го рода.

Поместим в поток круглую пластинку с лопастями, расположенными по ее ободу – окружности $\Gamma$ (рисунок 8. 5).

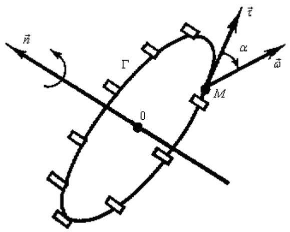


Рисунок 8. 3 – Физический смысл циркуляции

Абсолютная величина циркуляции определяет угловую скорость $\vec{\omega}$ вращения пластинки вокруг оси, проходящей через центр окружности $\Gamma$. Знак циркуляции показывает, в какую сторону осуществляется вращение относительно ориентации линии $\Gamma$.

Ротор векторного поля. Локальной векторной характеристикой векторного поля, связанной с его вращательной способностью, является ротор (вихрь).

*Ротором (вихрем)* векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке $M_0$ называется векторная функция

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \vec{k} \qquad (8.15)$$



Символическая форма записи $\operatorname{rot} \vec{a}$ имеет вид:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} . \qquad (8.16)$$

*Теорема 2 (Стокса) Циркуляция $C$ непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a}(M)$ по замкнутому положительно-ориентированному контуру $\Gamma$ равна потоку ротора этого поля через любую гладкую поверхность $\Omega$, опирающуюся на $\Gamma$:*

$$\oint_{\Gamma} (\vec{a} \cdot \vec{\tau})\, dl = \iint_{\Omega} (\operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{n})\, dS . \qquad (8.17)$$

**8.3 Потенциальное и соленоидальное векторные поля**

Потенциальное векторное поле. Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *потенциальным (безвихревым),* если существует такая непрерывно дифференцируемая скалярная функция $U(M)$, что

$$\vec{a} = \operatorname{grad} U(M) . \qquad (8.18)$$

Функция $U(M)$ называется в этом случае *потенциалом* векторного поля $\vec{a}(M)$.

Потенциальное поле является наиболее простым среди векторных полей, так как оно определяется одной скалярной функцией $U(M)$ независимо от размерности пространства, в котором задано векторное поле.

Например, в пространстве $\mathbb{R}^3$ для потенциального векторного поля

$$\vec{a}(M) = X(x,y,z) \cdot \vec{i} + Y(x,y,z) \cdot \vec{j} + Z(x,y,z) \cdot \vec{k} ,$$

выполняется равенство

$$\vec{a}(M) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} . \qquad (8.19)$$

Свойства потенциальных векторных полей:

– если векторное поле $\vec{a}(M)$, потенциально, то его потенциал $U(M)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого;

– если векторное поле $\vec{a}(M)$ задано в односвязной области $Q$, то необходимым и достаточным условием его потенциальности является обращение в нуль ротора поля в любой точке $M$:

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M)=0. \qquad (8.20)$$

Примером потенциального поля является поле тяготения.

Соленоидальное векторное поле. Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *соленоидальным (трубчатым),* если в любой точке $M$ дивергенция равна 0:

$$\operatorname{div}\vec{a}(\mathrm{M})=0. \qquad (8.21)$$

Свойства соленоидальных полей:

– соленоидальные поля не содержат ни источников, ни стоков;

– из формулы Остроградского – Гаусса следует, что если векторное поле $\vec{a}(M)$ соленоидальное, то поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую замкнутую поверхность $\Omega$ равен нулю;

– (*принцип сохранения интенсивности векторной трубки*) потоки соленоидального векторного поля через различные сечения векторной трубки равны между собой;

– в соленоидальном векторном поле векторные линии не могут ни начинаться, ни оканчиваться внутри поля. Они либо замкнуты, либо начинаются и оканчиваются на границе поля, либо имеют бесконечные ветви (в случае неограниченного поля);

– в односвязной области в случае соленоидального векторного поля поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую поверхность $\Omega$, опирающуюся на замкнутый контур $\Gamma$, зависит не от вида этой поверхности, а только от самого контура $\Gamma$.

Примером соленоидального поля является магнитное поле, создаваемое током в проводнике.



Гармоническое поле. Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *гармоническим (лапласовым),* если оно является как потенциальным, так и соленоидальным.

Гармоническое векторное поле описывается скалярной функцией $U(M)$, которая является решением уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0. \qquad (8.22)$$

Уравнение (8.22) получается из равенств (8.20) и (8.21). Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется *гармонической функцией.*

**Вопросы для самоконтроля**

1 Какое поле называется скалярным? Приведите примеры скалярных полей.

2 Что называется поверхностью уровня скалярного поля?

3 Что называется производной по направлению?

4 Что называется градиентом скалярного поля?

5 Какое поле называется стационарным векторным полем? Приведите примеры стационарных векторных полей.

6 Дайте определение векторной линии.

7 Что называется потоком векторного поля? В чем состоит его физический смысл?

8 Что называется дивергенцией векторного поля? В чем состоит физический смысл дивергенции?

9 Сформулируйте теорему Остроградского - Гаусса в векторной форме.

10 Что называется циркуляцией векторного поля и в чем состоит ее физический смысл?

11 Что называется ротором векторного поля?

12 Сформулируйте теорему Стокса в векторной форме.

13 Какое поле называется потенциальным? Перечислите свойства потенциальных полей.

14 Какое поле называется соленоидальным? Перечислите свойства соленоидальных полей.

15 Какое поле называется гармоническим?

**Решение типовых примеров**

**1** Найти линии и поверхности уровня скалярных полей:

а) $U(x,y)=x^2-2y$;

б) $U(x,y,z)=x^2+y^2$.

*Решение*. а) функция, задающая потенциал поля, зависит от двух переменных. Следовательно, уравнения линий уровня поля имеют вид $x^2-2y=C$. С геометрической точки зрения, это множество парабол (рисунок 8. 4, а), определенное на всей плоскости $Oxy$;

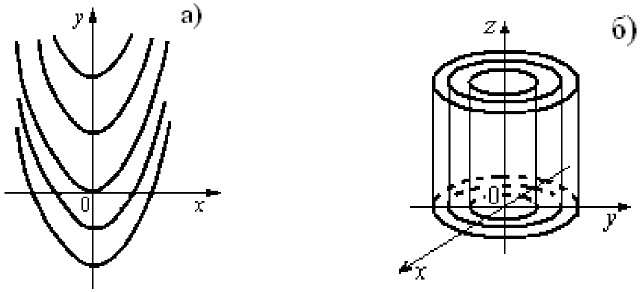


Рисунок 8.4 – Линии (а) и поверхности (б) уровня к типовому примеру 1

б) заданный потенциал определяет скалярное поле во всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Уравнения эквипотенциальных поверхностей имеют вид $x^2+y^2=C$, $C>0$. С геометрической точки зрения, это множество круговых цилиндров (рисунок 8. 4, б).

**2** Найти производную скалярного поля $u=xyz$ в точке $P_0(1;-1;1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{P_0P_1}$, где $P_1(2;3;1)$.

*Решение*. Найдем направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{P_0P_1}=(1;4;0)$, длина которого $\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|=\sqrt{17}$. Имеем

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}},\ \cos\beta=\frac{4}{\sqrt{17}},\ \cos\gamma=0.$$

Вычислим значения частных производных функции $U=xyz$ в точке $P_0(1;-1;1)$:



$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial x}=yz\big|_{P_0}=-1,\ \frac{\partial U(P_0)}{\partial y}=xz\big|_{P_0}=1,$$

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial z}=xy\big|_{P_0}=-1.$$

По формуле (8.5) получаем

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial l}=-\frac{1}{\sqrt{17}}+\frac{4}{\sqrt{17}}-1\cdot 0=\frac{3}{\sqrt{17}}.$$

**3** Найти градиент поля $U=x^2+xyz$ в точке $P_0(1;-1;2)$ и наибольшую скорость изменения потенциала в этой точке.

*Решение*. Определим значения частных производных функции $U=x^2+xyz$ в заданной точке:

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial x}=(2x+yz)\big|_{P_0}=0;$$

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial y}=xz\big|_{P_0}=2;$$

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial z}=xy\big|_{P_0}=-1.$$

Тогда по формулам (8.6) и (8.8) имеем

$$\mathrm{grad}\,U(P_0)=2j-k;$$

$$\frac{\partial U}{\partial l_{\max}}=\sqrt{5}.$$

**4** Найти векторные линии магнитного поля бесконечного проводника, по которому проходит ток силой $I$.

*Решение*. Выберем направление оси $Oz$, совпадающее с направлением тока $I$. В этом случае вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}=\frac{2}{\rho^2}\vec{I}\times\vec{r}$, где $\vec{I}=I\cdot\vec{k}$ – вектор тока; $\vec{r}$ – радиус-вектор точки $P(x;y;z)$; $\rho$ – расстояние от оси проводника до точки $M$. Найдем $\vec{I}\times\vec{r}$:

$$\vec{I}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}}\\ 0 & 0 & I\\ x & y & z\end{vmatrix}=-yI\cdot\vec{\mathrm{i}}+xI\cdot\vec{\mathrm{j}},$$

$$\vec{\mathrm{H}}=-\frac{2I}{\rho^2}y\cdot\vec{\mathrm{i}}+\frac{2I}{\rho^2}x\cdot\vec{\mathrm{j}}.$$

Система дифференциальных уравнений векторных линий (8.10) имеет вид

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0}.$$

Отсюда

$$\begin{cases}xdx+ydy=0,\\ dz=0,\end{cases}\text{ и }\begin{cases}x^2+y^2=c_1,\\ z=c_1,\end{cases}$$

где $c_1\ge 0$. Таким образом, векторными линиями магнитного поля бесконечного проводника являются окружности с центрами на оси $Oz$.

**5** Вычислить поток вектора $\vec{a}=y^2\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности $\Omega$, представляющую собой часть параболоида $z=x^2+y^2$, отсеченного плоскостью $z=2$ (рисунок 8. 5).

*Решение*. Рассмотрим функцию $U(x,y,z)=z-x^2-y^2$.

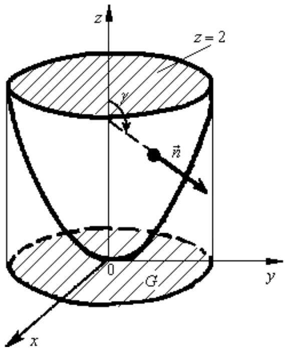


Рисунок 8. 5 – Поверхность к типовому примеру 5

Единичный нормальный вектор к внешней стороне поверхности $\Omega$ равен



$$\vec{n}=\left(\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}};\frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}};\frac{-1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\right),$$

так как $\frac{\pi}{2}\le\gamma\le\pi$ (см. практическое занятие 6).

Тогда по формуле (8.11) поток равен

$$\Pi=\iint\limits_{\Omega}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS=\iint\limits_{\Omega}\frac{2y^3-z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}dS=\left[\begin{array}{l}\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\\ dS=\frac{dxdy}{|\cos\gamma|}=\\ =\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy,\end{array}\right]=$$

$$=\iint\limits_{\Omega}\frac{2y^3-z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\cdot\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_{\Omega}\left(2y^3-z\right)dxdy==\left[z=x^2+y^2\right]=\iint\limits_{G_{xy}}\left(2y^3-x^2-y^2\right)dxdy=$$

$$=\left[\begin{array}{l}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\ J=r,\\ 0\le r\le\sqrt{2},\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{array}\right]=\iint\limits_{G^*}\left(2r^3\sin^3\gamma-r^2\right)rdrd\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(2r^4\sin^3\varphi-r^3\right)dr=-2\pi.$$

**6** Найти дивергенцию векторного поля

$$\vec{a}=y^2\cdot\vec{i}-\left(x^2+y^2\right)\cdot\vec{j}++z\left(3y^2+x\right)\cdot\vec{k}$$

в точках $M_1(-2;1;-2)$, $M_2(7;0;1)$, $M_3(0;0;0)$.

*Решение*. Заданное поле определено на всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Найдем частные производные от функций

$$X=y^2,\ Y=\left(x^2+y^2\right);\ Z=z\left(3y^2+x\right)$$

являющихся координатами вектора $\vec{a}(M)$, и их значения в точках $M_1$, $M_2$ и $M_3$:

$$\frac{\partial X}{\partial x} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = -2y, \ \frac{\partial Z}{\partial z} = 3y^2 + x$$

$$\frac{\partial Y(M_1)}{\partial y} = -2, \ \frac{\partial Z(M_1)}{\partial z} = 1,$$

$$\frac{\partial Y(M_2)}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial Z(M_2)}{\partial z} = 7,$$

$$\frac{\partial Y(M_3)}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial Z(M_3)}{\partial z} = 0.$$

Тогда

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_1) = 0 - 2 + 1 = -1,$$

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_2) = 0 + 0 + 7 = 7,$$

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_3) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Таким образом, данное поле в точке $M_1$ имеет сток, в точке $M_2$ – источник, а в точке $M_3$ нет ни источника, ни стока.

**7** Используя теорему Остроградского - Гаусса, вычислить поток векторного поля

$$\vec{a} = \left(\frac{x^2 y}{1+y^2} + 6yz\right)\cdot\vec{i} + 2x\cdot\operatorname{arctg} y\cdot\vec{j} - \frac{2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\cdot\vec{k}$$

через внешнюю сторону поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, расположенную над плоскостью $Oxyz$.

*Решение*. Для того чтобы можно было применить теорему Остроградского - Гаусса, «замкнем» снизу данную поверхность частью плоскости $Oxy$, ограниченной окружностью $x^2 + y^2 = 1$.

Пусть $Q$ – пространственная область, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой поверхностью $\Omega$, состоящей из параболоида вращения $\Omega_1 = \left\{(x;y;z)\middle| z = 1 - x^2 - y^2\right\}$ и круга $\Omega_2$ на плоскости $Oxy$ (рисунок 8. 6).



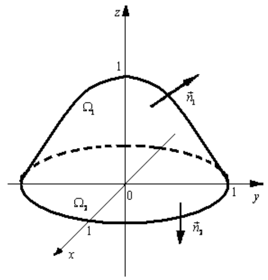


Рисунок 8. 6 – Поверхность к типовому примеру 7

Дивергенция $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ по формуле (8.12) равна:

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{2xy}{1+y^2} + \frac{2x}{1+y^2} - \frac{2x(1+y)}{1+y^2} \equiv 0.$$

На основании формулы Остроградского - Гаусса (8.13) поток $\Pi$ через замкнутую поверхность $\Omega$ равен нулю.

С другой стороны, обозначим через $\Pi_1$ и $\Pi_2$ потоки через поверхности параболоида ($\Omega_1$) и круга ($\Omega_2$) соответственно. По свойству аддитивности поверхностного интеграла 2-го рода получим

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \iint\limits_{\Omega_1} \vec{a}\cdot\vec{n}_1\, dS + \iint\limits_{\Omega_2} \vec{a}\cdot\vec{n}_2\, dS = 0.$$

Следовательно, искомый поток

$$\Pi_1 = \iint\limits_{\Omega_1} \vec{a}\cdot\vec{n}_1\, dS = -\iint\limits_{\Omega_2} \vec{a}\cdot\vec{n}_2\, dS.$$

Так как $z = 0$ на поверхности $\Omega_2$ и $\vec{n}_2 = -\vec{k}$, то

$$\vec{a} = \frac{x^2 y}{1+y^2}\cdot\vec{i} + 2x\cdot\operatorname{arctg} y\cdot\vec{j} - \vec{k},$$

$$\vec{a}\cdot\vec{n}_2 = 1.$$

Тогда поток через внешнюю сторону поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, расположенную над плоскостью $Oxyz$ равен

$$\Pi_1 = -\iint\limits_{\Omega_2} dS = -\pi\cdot 1^2 = -\pi.$$

**8** Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{a} = xy\cdot\vec{i} + yz\cdot\vec{j} + xz\cdot\vec{k}$$

вдоль линии $\Gamma$, являющейся пересечением цилиндра

$x^2+y^2=1$ и плоскости $x+y+z=1$.

*Решение*. Линия $\Gamma$ представляет собой эллипс. Параметрические уравнения $\Gamma$ можно получить с учетом того, что все точки $\Gamma$ проектируются на плоскость $Oxy$ в окружность $x^2+y^2=1$, параметрические уравнения которой есть

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ t\in[0;2\pi],$$

и те же точки линии $\Gamma$ лежат на плоскости $z=1-x-y$.

Следовательно, параметрические уравнения $\Gamma$ имеют вид:

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=1-\sin t-\cos t,$$

где $t\in[0;2\pi]$.

Тогда

$$dx=-\sin t dt,\quad dy=\cos t dt,\quad dz=(-\cos t+\sin t)dt.$$

Согласно формуле (8.14), циркуляция равна

$$C=\oint_\Gamma \vec{a}\cdot d\vec{r}=\oint_\Gamma Xdx+Ydy+Zdz=\oint_\Gamma xydx+yzdy+xzdz=$$

$$=\int_0^{2\pi}(-\sin^2 t\cos t+\sin t\cos t(1-\cos t-\sin t)+$$

$$+\cos t(1-\cos t-\sin t)(\sin t-\cos t))dt=-\pi.$$

**9** Найти ротор векторного поля

$$\vec{a}=(x^2+y^2)\vec{i}+(y^2+z^2)\vec{j}++(z^2+x^2)\vec{k}$$

в произвольной точке.

*Решение*. Заданное поле $\vec{a}(x;y;z)$ определено и непрерывно-дифференцируемо на всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Для координатных функций

$$X=x^2+y^2,\ Y=y^2+z^2,\ Z=z^2+x^2$$

по формуле (8.16) имеем

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2+y^2 & y^2+z^2 & x^2+z^2\end{vmatrix}=$$

$$=-2z\cdot\vec{i}-2x\cdot\vec{j}-2y\cdot\vec{k}=-2(z\cdot\vec{i}+x\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}).$$



**10** Вычислить с помощью формулы Стокса циркуляцию векторного поля $a=y\cdot\vec{i}+x^2\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ по линии $\Gamma$, являющейся пересечением поверхностей $x^2+y^2=4$ и $z=3$.

*Решение*. Линия $\Gamma$ представляет собой окружность радиусом 2 с центром в точке $(0;0;3)$, лежащую в плоскости (рисунок 8. 7).

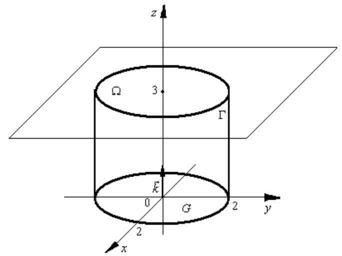


Рисунок 8. 7 – Поверхность к типовому примеру 10

Параметрические уравнения линии $\Gamma$ имеют вид

$$x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ z=3,\ t\in[0;2\pi].$$

Для вычисления циркуляции по формуле Стокса выберем какую-нибудь поверхность $\Omega$, «натянутую» на $\Gamma$. Возьмем в качестве $\Omega$ круг, границей которого является окружность $\Gamma$. Согласно выбранной ориентации контура, нормалью $\vec{n}$ к кругу $\Omega$ является единичный вектор $\vec{k}$ оси $Oz$.

По формуле (8.16) ротор равен

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & x^2 & -z\end{vmatrix}=(2x-1)\cdot\vec{k}.$$

Тогда по формуле Стокса (8.17) циркуляция равна

$$C=\iint_\Omega(\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n})dS=\iint_\Omega(2x-1)\cos\gamma\, dS=\iint_{G_{xy}}(2x-1)dxdy=$$

$$=\left[\begin{aligned}&x=r\cos\varphi,\\ &y=r\sin\varphi,\ J=r,\\ &0\le r\le 2,\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{aligned}\right]=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 r(2r\cos\varphi-1)dr=-4\pi.$$

**11** Проверить, является ли потенциальным векторное поле

$$\vec{a} = 2xyz \cdot \vec{i} + +x^2 z \cdot \vec{j} + x^2 y \cdot \vec{k} .$$

*Решение*. По формуле (8.16) ротор равен

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz & x^2 z & x^2 y \end{vmatrix} =$$

$$= \left(x^2 - x^2\right)\vec{i} + \left(2xy - 2xy\right)\vec{j} + \left(2xz - 2xz\right)\vec{k} \equiv 0 .$$

Следовательно, заданное поле потенциально.

**12** Проверить, являются ли соленоидальными следующие поля:

а) $\vec{a}_1 = x\left(z^2 - y^2\right) \cdot \vec{i} + y\left(x^2 - z^2\right) \cdot \vec{j} + z\left(y^2 - x^2\right) \cdot \vec{k}$ ;

б) $\vec{a}_2 = y^2 \cdot \vec{i} - \left(x^2 + y^2\right) \cdot \vec{j} + z\left(3y^2 + 1\right) \cdot \vec{k}$ .

*Решение*. а) имеем

$$\operatorname{div} \vec{a}_1 = z^2 - y^2 + x^2 - z^2 + y^2 - x^2 \equiv 0 .$$

Значит, поле $\vec{a}_1(M)$ соленоидально;

б) имеем

$$\operatorname{div} \vec{a}_2 = -2y + 3y^2 + 1 \not\equiv 0 .$$

Значит, поле $\vec{a}_2(M)$ не является соленоидальным.

**Задания для аудиторной работы**

**1** Найти линии и поверхности уровня скалярных полей:

а) $U = xy$ ; в) $U = x - y - z$ ;

б) $U = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$ ; г) $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

**2** Найти производную в точке $M$ по заданному направлению $\overrightarrow{MM_1}$ скалярных полей:

а) $U = y^3 + 4xy^2 - 3x + 6y - 1$, $M(2;1;0)$, $M_1(-1;5;0)$ ;

б) $U = x^3 + y^3 + z^3 + xyz$ , $M(1;1;1)$, $M_1(-1;0;3)$ .

**3** Найти градиент и его модуль скалярных полей:



а) $U = x^2 - 6xy + y^2 - 10x - 2y + 9$ ; б) $U = xyze^{x+y+z}$ .

**4** Найти векторные линии векторных полей:

а) $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ ; б) $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .

**5** Найти поток векторного поля

$$\vec{a} = \left(y - x\right)\vec{i} + \left(x + y\right)\vec{j} + y\vec{k}$$

через сторону треугольника $\Omega$, вырезанного из плоскости $x + y + z - 1 = 0$ координатными плоскостями.

**6** Найти поток векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$ через поверхность части параболоида $1 - z = x^2 + y^2$, отсекаемой от него плоскостью $z = 0$ (нормаль внешняя).

**7** Вычислить поток для векторных полей $\vec{a}$ и положительно ориентированных замкнутых поверхностей $\Omega$:

а) $\vec{a} = z^2\vec{i} + \left(xy - 1\right)\vec{j} - \left(z - y\right)\vec{k}$ ,

$\Omega = \left\{ 3x + 2y + z = 6, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0 \right\}$ ;

б) $\vec{a} = \left(y^2 + xz\right)\vec{i} + \left(yx - z\right)\vec{j} + \left(yz + x\right)\vec{k}$ ,

$\Omega = \left\{ x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = \sqrt{2} \right\}$ .

**8** Найти поток векторного поля

$$\vec{a} = \left(x - y\right)\vec{i} + \left(x + y\right)\vec{j} + z^2\vec{k}$$

через поверхность цилиндра, заключенную между плоскостями $z = 0$ и $z = 2$ (нормаль внешняя).

**9** Найти дивергенцию векторных полей:

а) $\vec{a} = \left(x^2 - y^2\right)\vec{i} + \left(x^3 + y^3\right)\vec{j}$ ;

б) $\vec{a} = xyz\vec{i} + \left(2x + 3y + z\right)\vec{j} + \left(x^2 + z^2\right)\vec{k}$ .

**10** Найти ротор векторных полей:

а) $\vec{a} = xyz\vec{i} + \left(2x + 3y - z\right)\vec{j} + \left(x^2 + z^2\right)\vec{k}$ ;

б) $\vec{a} = \left(2x - y + 5z\right)\vec{i} + \left(x^2 + y^2 - 8z^2\right)\vec{j} + \left(x^3 - y^3 + 2z^3\right)\vec{k}$ .

**11** Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\vec{a} = \left(z^2 - y^2\right)\vec{i} + \left(x^2 - z^2\right)\vec{j} + \left(y^2 - x^2\right)\vec{k}$$

по контуру треугольника с вершинами $(1;0;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;1)$ по определению и с помощью формулы Стокса.

**12** Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\vec{a}=(x-y)\vec{i}+(y-z)\vec{j}+(z-x)\vec{k}$$

вдоль линии, состоящей из части винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=\frac{bt}{2\pi}$ от точки $A(a;0;0)$ до точки $B(a;0;b)$ и прямолинейного отрезка $BA$ по определению и с помощью формулы Стокса.

**13** Выяснить, являются ли соленоидальными и потенциальными векторные поля:

а) $\vec{a}=x^2z\vec{i}+y^2\vec{j}-xz^2\vec{k}$;

б) $\vec{a}=y^2z\vec{i}+xz^2\vec{j}+x^2y\vec{k}$;

в) $\vec{a}=(yz-2x)\vec{i}+(xz+zy)\vec{j}+xy\vec{k}$;

г) $\vec{a}=(2xy+z)\vec{i}+(x^2-2y)\vec{j}+x\vec{k}$.

В случае потенциальности найти потенциал.

**Задания для домашней работы**

**1** Найти линии и поверхности уровня скалярных полей:

а) $U=\sqrt{x^2+y^2}$; в) $U=x^2+y^2-z^2$;

б) $U=\frac{2x-y+1}{x^2}$; г) $U=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

**2** Найти производную в точке $M$ по заданному направлению $\overrightarrow{MM_1}$ скалярных полей:

а) $U=x^3y-3x^2y^2+2xy^3-5xy+7$, $M(1;2;0)$, $M_1(3;5;6)$;

б) $U=xy+xz+yz$, $M(2;3;4)$, $M_1(4;6;0)$.

**3** Найти градиент и его модуль скалярных полей:

а) $U=x^2+4xy+4y^2+6x-3y+2$;

б) $U=x^3+y^3+z^3-3xyz$.

**4** Найти векторные линии векторных полей:



а) $\vec{a}=2x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$;

б) $\vec{a}=(z-y)\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(y-x)\vec{k}$.

**5** Найти поток векторного поля $\vec{a}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ через нижнюю сторону треугольника с вершинами $(2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,2)$.

**6** Найти поток векторного поля $\vec{a}=y^2\vec{j}+z\vec{k}$ через внутреннюю часть поверхности $z=x^2+y^2$, отсеченной плоскостью $z=2$.

**7** Найти дивергенцию векторных полей:

а) $\vec{a}=x^2\vec{i}-xy\vec{j}+xyz\vec{k}$;

б) $\vec{a}=(x+y+z)\vec{i}+(x^2+y^2+z^2)\vec{j}+(x^3+y^3+z^3)\vec{k}$.

**8** Найти поток векторного поля $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z^2\vec{k}$ через верхнюю сторону круга, вырезаемого конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ на плоскости $z=2$.

**9** Найти поток векторного поля $\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$ по внешней стороне части сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, расположенной в первом октанте.

**10** Найти поток векторных полей:

а) $\vec{a}=3xy^2\vec{i}-(1+yz^2)\vec{j}+(2-zx^2)\vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности $\Omega=\{x^2+z^2=y^2, y=1, y\ge 0\}$;

б) $\vec{a}=(z^2-y^2)\vec{i}+(yx^2-z^2)\vec{j}+(zy^2-x^2)\vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности

$$\Omega=\left\{x^2+y^2+z^2=R^2, z=\sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

**11** Найти ротор векторных полей

а) $\vec{a}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$;

б) $\vec{a}=(x^3y-5y^2z^2+3x^2z)\vec{i}+(y^3z+4x^2z^2-7y^2xz)\vec{j}+$
$+(z^3x-2z^2x^2y+6z^4)\vec{k}$.

**12** Вычислить по определению и с помощью формулы Стокса циркуляцию векторных полей:

а) $\vec{a} = z\vec{i} + (x+y)\vec{j} + y\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $2x + y + 2z = 2$ с координатными плоскостями;

б) $\vec{a} = (2z^2 - y^3)\vec{i} + (x^3 - 2y^2z^2)\vec{j} + (2xyz - x^2y^2)\vec{k}$ по контуру $\Gamma = \left\{ x^2 + y^2 = 4, 2x + z = 4 \right\}$.

**13** Выяснить, являются ли соленоидальными и потенциальными векторные поля:

а) $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$;

б) $\vec{a} = x^2\vec{i} - xy\vec{j} + xyz\vec{k}$;

в) $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$;

г) $\vec{a} = (yz+1)\vec{i} + xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$.

В случае потенциальности найти потенциал.