Практическое занятие 6 **Поверхностные интегралы**

6.1 Определение, свойства, вычисление и приложения поверхностного интеграла 1-го рода
6.2 Определение, свойства и вычисление поверхностного интеграла 2-го рода

6.1 Определение, свойства, вычисление и приложения поверхностного интеграла 1-го рода

Определение поверхностного интеграла 1 го рода. Пусть в точках кусочно-гладкой поверхности $\Omega \in \mathbb{R}^3$, с площадью S определена непрерывная ограниченная функция $f(x;y;z)$. Разобьем поверхность Ω на n частичных поверхностей Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n без общих внутренних точек с площадями ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n и диаметрами d_1, d_2, ..., d_n. В каждой частичной поверхности Ω_i, $i = 1,2,...,n$, возьмем произвольную точку $M_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$ (рисунок 6. 1).

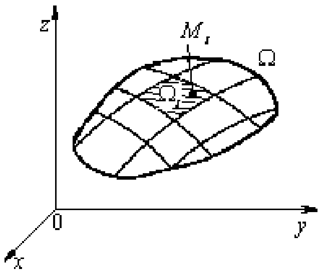

Рисунок 6. 1 – Разбиение поверхности Ω.

Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta S_i \qquad (6.1)$$

называется *интегральной суммой* для функции $f(x;y;z)$ по поверхности Ω.

Поверхностным интегралом 1-го рода от функции $f(x;y;z)$ называется предел (если он существует) интегральной суммы (6.1) при $\lambda \to 0$:

$$\iint_{\Omega} f(x;y;z)\,dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta S_i\,, \qquad (6.2)$$

функция $f(x;y;z)$ называется *интегрируемой по поверхности* Ω, поверхность Ω – *поверхностью интегрирования*, dS – *элемент поверхности*.

Свойства поверхностного интеграла 1-го рода. Основными *свойствами* поверхностного интеграла 1 го рода являются:

– $\iint_{\Omega} dS = ½$, где S – площадь поверхности Ω;

– *(линейность)* если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f(x;y;z)$ и $g(x;y;z)$ интегрируемы на поверхности Ω, то функция $\alpha\cdot f(x;y;z)+\beta\cdot g(x;y;z)$ также интегрируема на поверхности Ω и справедливо равенство

$$\iint_{\Omega}(\alpha f+\beta g)\,dS = \alpha\iint_{\Omega} f\,dS + \beta\iint_{\Omega} g\,dS\,;$$

– *(аддитивность)* если поверхность Ω состоит из двух частей Ω_1 и Ω_2, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, а пересечение Ω_1 и Ω_2 состоит лишь из границы, их разделяющей, и функция $f(x;y;z)$ интегрируема на Ω_1 и Ω_2, то функция $f(x;y;z)$ также интегрируема на поверхности Ω и справедлива формула:

$$\iint_{\Omega} f(x;y;z)\,dS = \iint_{\Omega_1} f(x;y;z)\,dS + \iint_{\Omega_2} f(x;y;z)\,dS\,;$$

– *(монотонность)* если на поверхности Ω выполнено неравенство $f(x;y;z) \le g(x;y;z)$, то

$$\iint_{\Omega} f(x;y;z)\,dS \le \iint_{\Omega} g(x;y;z)\,dS\,;$$

– *(оценка интеграла)* $\left|\iint_{\Omega} f(x;y;z)\,dS\right| \le \iint_{\Omega}\left|f(x;y;z)\right|dS\,;$

– *(теорема о среднем)* если $f(x;y;z)$ непрерывна на поверхности Ω, то на этой поверхности существует такая точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, что

$$\iint_{\Omega} f(x;y;z)\,dS = f(x_0;y_0;z_0)\cdot S,$$

где S – площадь поверхности Ω.

Вычисление поверхностного интеграла 1 го рода. Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода сводится к вычислению двойного интеграла по области G, являющейся проекцией поверхности Ω на плоскость Oxy.

Параметрическое задание поверхности. Поверхность Ω задана параметрическими уравнениями

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),\ (u,v)\in W.$$

Тогда поверхностный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле

$$\iint_{\Omega} f(x,y,z)\,dS = \iint_{W} f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\sqrt{EG-F^2}\,dudv, \quad (6.3)$$

где $E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2$; $G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2$; $F = x_u'x_v' + y_u'y_v' + z_u'z_v'$.

Явное задание поверхности Ω. Пусть Ω поверхность, заданная уравнением $z = z(x;y)$. Здесь функция $z(x;y)$ непрерывна вместе со своими частными производными z_x' и z_y' в замкнутой области G. И пусть функция $f(x;y;z)$ непрерывна на поверхности Ω, и, следовательно, интегрируема на ней. Учитывая, что элемент поверхности есть $dS = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$, имеем

$$\iint_{\Omega} f(x;y;z)\,dS = \iint_{G} f\big(x;y;z(x;y)\big)\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy. \quad (6.4)$$

Неявное задание поверхности. Поверхность Ω задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0$, где $F_z'\neq 0$, $\forall(x,y,z)\in\Omega$. Функция $F(x,y,z)$ удовлетворяет условиям теоремы о существовании неявной функции. Поэтому уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет функцию $z = z(x,y)$, для которой $z_x' = -\dfrac{F_x'}{F_z'}$; $z_y' = -\dfrac{F_y'}{F_z'}$.

Тогда из (6.4) имеем

$$\iint_{\Omega} f(x,y,z)\,dS = \iint_{G} f(x,y,z)\frac{1}{|F_z'|}\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}\,dxdy, \quad (6.5)$$

где G – проекция поверхности на плоскость Oxy $(z=0)$. Для вычисления интеграла z выражается из уравнения поверхности.

Приложения поверхностных интегралов 1 го рода. Поверхностные интегралы 1-го рода применяются для вычисления:

– *площади поверхности* Ω

$$\iint_{\Omega} dS = \mathrm{S}; \quad (6.6)$$

– *массы материальной поверхности* Ω с непрерывно распределенным веществом известной плотности $\rho(x;y;z)$

$$m = \iint_{\Omega} \rho(x;y;z)\,dS; \quad (6.7)$$

– *статических моментов* S_{xy}, S_{yz}, S_{zx} материальной поверхности Ω относительно координатных плоскостей Oxy, Oyz, Ozx соответственно:

$$S_{xy} = \iint_{\Omega} z\cdot\rho(x;y;z)\,dS;$$
$$S_{yz} = \iint_{\Omega} x\cdot\rho(x;y;z)\,dS; \quad (6.8)$$
$$S_{zx} = \iint_{\Omega} y\cdot\rho(x;y;z)\,dS;$$

– *координат центра тяжести* $(x_c;y_c;z_c)$ материальной поверхности Ω

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m},\ y_c = \frac{S_{zx}}{m},\quad z_c = \frac{S_{xy}}{m}; \quad (6.9)$$

– *моментов инерции* M_x, M_y, M_z, M_0 материальной поверхности Ω относительно координатных осей Ox, Oy, Oz и начала координат $O(0;0)$ соответственно:

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_{\Omega} \left(y^2+z^2\right)\cdot \rho(x;y;z)\,dS; \\ M_y &= \iint_{\Omega} \left(x^2+z^2\right)\cdot \rho(x;y;z)\,dS; \\ M_z &= \iint_{\Omega} \left(x^2+y^2\right)\cdot \rho(x;y;z)\,dS; \\ M_0 &= \iint_{\Omega} \left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot \rho(x;y;z)\,dS. \end{aligned} \qquad (6.10)$$

6.2 Определение, свойства и вычисление поверхностного интеграла 2-го рода

О п р е д е л е н и е п о в е р х н о с т н о г о и н т е г р а л а 2 г о р о д а. Пусть двусторонняя поверхность Ω с выбранным направлением единичного вектора нормали $\vec{n}$ задана явно непрерывно-дифференцируемой функцией $z(x;y)$ в области $G \subset Oxy$. И пусть в точках поверхности Ω определена непрерывная функция $R(x;y;z)$. Выбранную сторону поверхности Ω разобьем на n частичных поверхностей Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n. Обозначим σ_1, σ_2, ..., σ_n проекции этих частей на плоскость Oxy. При этом площадь проекции $\Delta\sigma_i$, $\Delta\sigma_i = (\Omega_i)_{xy}$, берется со знаком «$+$», если выбрана внешняя сторона Ω^+ поверхности (нормаль $\vec{n}$ к выбранной стороне составляет с осью Oz острый угол), со знаком «–», если выбрана внутренняя сторона Ω^- поверхности.

Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta\sigma_i \qquad (6.11)$$

называется *интегральной суммой* для функции $R(x;y;z)$ по выбранной стороне поверхности.

Обозначим через λ наибольший из диаметров разбиения: $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d(\Omega_i)$.

Поверхностным интегралом 2-го рода от функции $R(x;y;z)$ по выбранной стороне поверхности называется предел (если он существует) интегральной суммы (6.11) при $\lambda \to 0$:

$$\iint_{\Omega} R(x;y;z)\,dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta\sigma_i, \qquad (6.12)$$

функция $R(x;y;z)$ называется *интегрируемой по поверхности* Ω по переменным x и y.

Аналогично определяются поверхностные интегралы 2-го рода по выбранной стороне поверхности Ω по переменным y и z, z и x от непрерывных функций $P(x;y;z)$ и $Q(x;y;z)$, определенных в точках двухсторонней поверхности Ω, соответственно:

$$\iint_{\Omega} P(x;y;z)\,dydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot(\Omega_i)_{yz}; \qquad (6.13)$$

$$\iint_{\Omega} Q(x;y;z)\,dzdx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot(\Omega_i)_{zx}. \qquad (6.14)$$

Общим поверхностным интегралом 2-го рода называется интеграл вида

$$\iint_{\Omega} P(x;y;z)\,dydz + Q(x;y;z)\,dzdx + R(x;y;z)\,dxdz. \qquad (6.15)$$

Если Ω – замкнутая двусторонняя поверхность, то поверхностный интеграл 2-го рода по внешней стороне ее обозначается $\oiint\limits_{\Omega^+}$, по внутренней – $\oiint\limits_{\Omega^-}$.

С в о й с т в а п о в е р х н о с т н о г о и н т е г р а л а 2-г о р о д а. Поверхностный интеграл 2-го рода обладает следующими *свойствами*:

– для общего поверхностного интеграла 2-го рода справедливо равенство:

$$\iint_{\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdxdz = \iint_{\Omega} Pdydz + \iint_{\Omega} Qdzdx + \iint_{\Omega} Rdxdy ;$$

– *(линейность)* если α и β — произвольные постоянные числа, функции $P_1(x;y;z)$ и $P_2(x;y;z)$ интегрируемы по выбранной стороне поверхности Ω, то функция $\alpha \cdot P_1(x;y;z) \pm \beta \cdot P_2(x;y;z)$ также интегрируема по выбранной стороне поверхности Ω и справедливо равенство:

$$\iint_{\Omega} (\alpha P_1 \pm \beta P_2)dydz = \alpha \iint_{\Omega} P_1 dydz \pm \beta \iint_{\Omega} P_2\, dydz ;$$

– *(аддитивность)* если поверхность Ω, из двух частей Ω_1 и Ω_2, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, а пересечение Ω_1 и Ω_2 состоит лишь из границы, их разделяющей, и функция $P(x;y;z)$ интегрируема по выбранным сторонам Ω_1 и Ω_2, то функция $P(x;y;z)$ также интегрируема по выбранной стороне поверхности Ω и справедлива формула

$$\iint_{\Omega} P(x;y;z)dydz = \iint_{\Omega_1} P(x;y;z)dydz + \iint_{\Omega_2} P(x;y;z)dydz ;$$

– *(оценка интеграла)* если функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ интегрируемы по выбранной стороне двусторонней поверхности Ω и $\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \le M$ во всех точках поверхности, то

$$\left| \iint_{\Omega} P(x;y;z)dydz + Q(x;y;z)dzdx + R(x;y;z)dxdz \right| \le M \cdot ½ ,$$

где S – площадь поверхности;

– *(ориентированность)* если Ω^- противоположная сторона к стороне Ω^+ поверхности Ω, то

$$\iint_{\Omega^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdz = -\iint_{\Omega^-} Pdydz + Qdzdx + Rdxdz .$$

В ы ч и с л е н и е   п о в е р х н о с т н о г о   и н т е г р а л а   2 г о   р о д а. Вычисление поверхностного интеграла 2-го

рода сводится к вычислению двойного интеграла, учитывая проекции поверхности на соответствующие плоскости:

$$\text{а) } \iint_{\Omega} R(x,y,z)dxdy = \pm \iint_{G_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy , \qquad (6.16)$$

где G_{xy} – проекция Ω на плоскость Oxy; знак “+” берется в случае, если $\gamma < \dfrac{\pi}{2}$ и “–”, если $\gamma > \dfrac{\pi}{2}$ (γ угол между вектором $\vec{n}$ и положительным направлением оси Oz);

$$\text{б) } \iint_{\Omega} R(x,y,z)dydz = \pm \iint_{G_{yz}} R(x(y,z),y,z)dydz , \qquad (6.17)$$

где G_{yz} – проекция Ω на плоскость Oyz; знак “+” берется в случае, если $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ и “–”, если $\alpha > \dfrac{\pi}{2}$ (α угол между вектором $\vec{n}$ и положительным направлением оси Ox);

$$\text{в) } \iint_{\Omega} R(x,y,z)dzdx = \pm \iint_{G_{xz}} R(x,y(x,z),z)dzdx , \qquad (6.18)$$

где G_{xz} – проекция G на плоскость Oxz; знак “+” берется в случае, если $\beta < \dfrac{\pi}{2}$ и “–”, если $\beta > \dfrac{\pi}{2}$ (β угол между вектором $\vec{n}$ и положительным направлением оси Oy).

Тогда

$$\iint_{\Omega} Pdxdz + Qdzdx + Rdxdy = \pm \iint_{G_{yz}} Pdydz \pm \iint_{G_{xz}} Qdzdx \pm \iint_{G_{xy}} Rdxdy \qquad (6.19)$$

Общий поверхностный интеграл 2-го рода и поверхностный интеграл 1-го рода связаны соотношением:

$$\iint_{\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdxdz = \iint_{\Omega} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS , \qquad (6.20)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ координаты единичного вектора $\vec{n}$ нормали к поверхности Ω.

Координаты вектора $\vec{n}$ определяются заданием поверхности Ω (таблица 6.1).

Таблица 6.1 – Координаты вектора $\vec{n}$ в зависимости от задания поверхности Ω

Вид задания поверхности Ω	Угол между вектором нормали $\vec{n}$ и соответствующей координатной осью	Координаты вектора нормали
$z = z(x;y)$	$\gamma < \frac{\pi}{2}$	$\vec{n} = \left(-\frac{z'_x}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}};-\frac{z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}};1\right)$
$x = x(y,z)$	$\alpha < \frac{\pi}{2}$	$\vec{n} = \left(1;-\frac{x'_y}{\sqrt{1+x'^2_y+x'^2_z}};-\frac{x'_z}{\sqrt{1+x'^2_y+x'^2_z}}\right)$
$y = y(x,z)$	$\beta < \frac{\pi}{2}$	$\vec{n} = \left(-\frac{y'_x}{\sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}};1;-\frac{z'_z}{\sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}}\right)$
$F(x,y,z)=0$, $F'_z \neq 0$	$\gamma < \frac{\pi}{2}$	$\vec{n} = \frac{1}{F'_z}\left(F'_x, F'_y, F'_z\right)$
$F(x,y,z)=0$, $F'_y \neq 0$	$\beta < \frac{\pi}{2}$	$\vec{n} = \frac{1}{F'_y}\left(F'_x, F'_y, F'_z\right)$
$F(x,y,z)=0$, $F'_x \neq 0$	$\alpha < \frac{\pi}{2}$	$\vec{n} = \frac{1}{F'_x}\left(F'_x, F'_y, F'_z\right)$
$x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$		$\vec{n} = \left(\left\lvert\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right\rvert;\left\lvert\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right\rvert;\left\lvert\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right\rvert\right)$

Замечание. Если угол $\gamma > \frac{\pi}{2}$ ($\alpha > \frac{\pi}{2}, \beta > \frac{\pi}{2}$), то вектор нормали равен ($-\vec{n}$).

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение поверхностного интеграла 1-го рода.

2 Перечислите свойства поверхностного интеграла 1-го рода.

3 Как вычисляется поверхностный интеграл 1-го рода в случаях: а) параметрического, б) явного, в) неявного заданий поверхности?

4 Для вычисления каких величин используется поверхностный интеграл 1-го рода?

5 Дайте определение поверхностного интеграла 2-го рода.

6 Перечислите свойства поверхностного интеграла 2-го рода.

7 Как вычисляется поверхностный интеграл 2-го рода?

8 Какой формулой выражается связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода?

Решение типовых примеров

1 Вычислить $\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dS$, где поверхность Ω – верхняя половина сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$

Р е ш е н и е. Параметрические уравнения верхней полусферы имеют вид

$$x = a\sin\theta\cos\varphi,\ y = a\sin\theta\sin\varphi,\ z = a\cos\theta,$$

где $0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Частные производные по переменным θ и φ равны:

$$x'_\theta = a\cos\theta\cos\varphi,\ y'_\theta = a\cos\theta\sin\varphi,\ z'_\theta = -a\sin\theta;$$

$$x'_\varphi = -a\sin\theta\sin\varphi,\ y'_\varphi = a\sin\theta\cos\varphi,\ z'_\varphi = 0.$$

Тогда

$$E = a^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + a^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + a^2\sin^2\varphi =$$

$$= a^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = a^2;$$

$$G = a^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi = a^2\sin^2\theta;$$

$$F = -a^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi + a^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi = 0;$$

$$EG - F^2 = a^2\cdot a^2\sin^2\theta = a^4\sin^2\theta.$$

Подставляя в формулу (6.3), получим

$$\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dS=\iint\limits_{W}a^2\sin^2\theta\cdot\sqrt{a^4\sin^2\theta}\,d\varphi d\theta=\iint\limits_{W}a^4\sin^3\theta\,d\varphi d\theta=$$

$$=a^4\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta=-a^4\cdot 2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\theta\right)d\left(\cos\theta\right)=$$

$$=-2a^4\pi\left(\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-2a^4\pi\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}a^4\pi\,.$$

2 Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega}\left(x-3y+2z\right)ds$, где

$$\Omega=\left\{\left(x;y;z\right)\middle|\,4x+3y+2z-4=0,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\right\}.$$

Решение. Данная поверхность Ω представляет собой часть плоскости $4x+3y+2z-4=0$, расположенную в первом октанте (рисунок 6. 2).

Запишем уравнение плоскости в виде $z=2-2x-\frac{3}{2}y$. Тогда $z'_x=-2$, $z'_y=-\frac{3}{2}$.

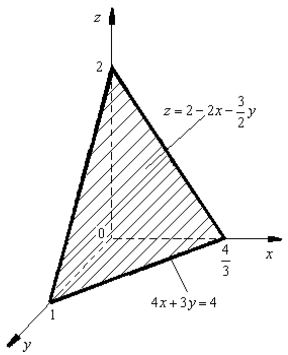

Рисунок 6. 2 – Поверхность интегрирования к типовому примеру 2

Используя формулу (6.4), имеем

$$\iint\limits_{\Omega}\left(x-3y+2z\right)dS=$$

$$=\iint\limits_{G}\left(x-3y+2\left(2-2x-\frac{3}{2}y\right)\right)\sqrt{1+4+\frac{9}{4}}dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\iint\limits_{G}\left(4-3x-6y\right)dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\int\limits_0^1dx\int\limits_0^{\frac{4}{3}(1-x)}\left(4-3x-6y\right)dy=\frac{\sqrt{29}}{2}\int\limits_0^1\left(4y-3xy-3y^2\right)\Big|_0^{\frac{4}{3}(1-x)}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\int\limits_0^1\left(\frac{16}{3}(1-x)-4x(1-x)-\frac{16}{3}(1-x)^2\right)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\left(-\frac{16}{3}\cdot\frac{(1-x)^2}{2}-2x^2+4\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{16}{3}\cdot\frac{(1-x)^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\sqrt{29}}{9}.$$

3 Вычислить площадь поверхности Ω, заданной уравнением $z=x^2+y^2$ и расположенной между плоскостями $z=0$ и $z=1$.

Решение. По условию $z=x^2+y^2$. Тогда

$$z'_x=2x,\ z'_y=2y.$$

По формуле (6.6) получаем

$$S=\iint\limits_{\Omega}dS=\iint\limits_{G}\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy=\iint\limits_{G}\sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}dxdy,$$

где G – проекция Ω на плоскость Oxy.

Для вычисления интеграла перейдем к полярным координатам

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi.$$

Так как область G есть круг $x^2+y^2\leq 1$, то $0\leq r\leq 1$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$.

Отсюда имеем

$$S=\iint\limits_{G^*}\sqrt{1+4r^2}\,r\,drd\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 r\sqrt{1+4r^2}dr=$$

$$=\frac{\pi}{4}\int\limits_0^1\sqrt{1+4r^2}d\left(1+4r^2\right)=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\left(1+4r^2\right)^3}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

4 Вычислить $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dS$, где Ω – часть конической поверхности $x^2+y^2-z^2=0$, заключенная между плоскостями $z=0$ и $z=1$.

Решение. Поверхность Ω задана неявно уравнением $x^2+y^2-z^2=0$. Проекция Ω на плоскость $z=0$ представляет собой круг $x^2+y^2\le 1$.

Так как $F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$, то

$$F'_x=2x;\; F'_y=2y;\; F'_z=2z,$$

$$dS=\frac{1}{2z}\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2}dxdy=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy.$$

По формуле (6.5) получим

$$\iint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dS=\iint\limits_{G_{xy}}\sqrt{x^2+y^2+\left(x^2+y^2\right)}dxdy=$$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_{G_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy\begin{bmatrix}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\\ 0\le r\le 1,\\ 0\le\varphi\le 2\pi, J=r\end{bmatrix}=\sqrt{2}\iint\limits_{G^*}r^2drd\varphi=$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 r^2dr=\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}.$$

5 Вычислить $\iint\limits_{\Omega}y^2zdxdy+xzdydz+x^2ydxdz$, где Ω – внешняя сторона поверхности $z=x^2+y^2$, отсекаемая плоскостью $z=2$.

Решение. Поверхность Ω представляет собой параболоид, заданный явно уравнением $z=x^2+y^2$. Поэтому вектор нормали равен

$$\vec{n}=(2x,2y,-1),$$

так как сторона внешняя и угол $\gamma>\frac{\pi}{2}$.

Линия пересечения параболоида с плоскостью $z=2$ есть окружность с центром в точке $O(0;0)$ радиуса $R=\sqrt{2}$:

$$x^2+y^2=2.$$

Тогда по формуле (6.16) получим

$$\iint\limits_{\Omega}y^2zdxdy+xzdydz+x^2ydxdz=$$

$$=\iint\limits_{G}\left(xz\cdot 2x+x^2y\cdot 2y+y^2z\cdot(-1)\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{G}\left(2x^2\left(x^2+y^2\right)+2x^2y^2-y^2\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{G}\left(2x^4+2x^2y^2+2x^2y^2-y^2x^2-y^4\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{G}\left(2x^4+3x^2y^2-y^4\right)dxdy.$$

Для вычисления интеграла перейдем к полярным координатам:

$$x=r\cos\varphi,\; y=r\sin\varphi,\; 0\le\varphi\le 2\pi,\; 0\le r\le\sqrt{2},$$

якобиан отображения равен $J=r$.

Тогда

$$\iint\limits_{G}\left(2x^4+3x^2y^2-y^4\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{G^*}\left(2r^4\cos^4\varphi+3r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi-r^4\sin^4\varphi\right)rdrd\varphi=$$

$$=\iint\limits_{G^*}r^5\left(2\cos^4\varphi+3\cos^2\varphi\sin^2\varphi-\sin^4\varphi\right)drd\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\sqrt{2}}r^5dr\int\limits_0^{2\pi}\left(2\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\sin^2 2\varphi-\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2\right)d\varphi=$$

$$=\frac{r^6}{6}\Bigg|_0^{\sqrt{2}}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi}{2}+\frac{3(1-\cos 4\varphi)}{8}-\frac{1-2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi}{4}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{4}+\frac{3}{8}-\frac{3\cos 4\varphi}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi-\frac{1+\cos 4\varphi}{8}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\cos 2\varphi-\frac{1}{4}\cos 4\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\varphi+\frac{3}{4}\sin 2\varphi-\frac{1}{16}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=2\pi .$$

6 Вычислить $\iint\limits_{\Omega} x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, где поверхность Ω есть внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=16$, лежащая в первом октанте.

Решение. Поверхность задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0$, $F'_z\neq 0$ $z\geq 0$. По условию, нормаль к внешней стороне образует угол $\gamma<\frac{\pi}{2}$:

$$\vec{n}=\frac{1}{F'_z}\left(F'_x,F'_y,F'_z\right)=\frac{1}{2z}(2x,2y,2z)=\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1\right);$$

при этом $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$.

Тогда получим

$$\iint\limits_{\Omega} x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy=\iint\limits_{G}\left(x^2\cdot\frac{x}{z}+y^2\cdot\frac{y}{z}+z^2\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{G}\left(\frac{1}{z}\left(x^3+y^3\right)+z^2\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{G}\left(\frac{x^3+y^3}{\sqrt{16-x^2-y^2}}+16-x^2-y^2\right)dxdy .$$

Область G – часть круга, лежащая в первой четверти: $x^2+y^2\leq 16$, так как по условию $x\geq 0$, $y\geq 0$. Перейдем к полярным координатам:

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ 0\leq r\leq 4,\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2},$$

якобиан отображения есть $J=r$.

Тогда

$$I=\iint\limits_{G^*} r\left(\frac{r^3\cos^3\varphi+r^3\sin^3\varphi}{\sqrt{16-r^2}}+16-r^2\right)drd\varphi=$$

$$=\iint\limits_{G^*}\left(\frac{r^4}{\sqrt{16-r^2}}\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)+16r-r^3\right)drd\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)d\varphi\int_0^4\frac{r^4}{\sqrt{16-r^2}}dr+\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^4 r\left(16-r^2\right)dr=$$

$$=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\varphi\right)d\sin\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\varphi\right)d\cos\varphi\right)\int_0^4\frac{r^4dr}{\sqrt{16-r^2}}+$$

$$+\frac{\pi}{2}\left(\frac{16r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^4=\left[\begin{array}{l}r=4\sin t\\ dr=4\cos t dt\\ 0\leq t\leq\frac{\pi}{2}\end{array}\right]=$$

$$=\left(\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\left(\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\times$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4^4\cdot\sin^4 t\cdot 4\cos t dt}{4\cos t}+\frac{\pi}{2}\cdot(2\cdot 64-64)=$$

$$=\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\cdot 64\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)^2\,dt+32\pi=\frac{4\cdot 64}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\cos 2t+\cos^2 2t\right)dt+$$

$$+32\pi=\frac{256}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\cos 2t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4t\right)dt+32\pi=$$

$$=\frac{256}{3}\left(\frac{3}{2}t-\sin 2t+\frac{1}{8}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+32\pi=$$

$$=\frac{256}{3}\cdot\frac{3\pi}{4}+32\pi=64\pi+32\pi=96\pi .$$

7 Вычислить $\iint\limits_{\Omega} xdydz+(y+z)dzdx+(z-y)dxdy$, где поверхность Ω есть внешняя сторона верхней полусферы $x^2+y^2+z^2=9$.

Решение. Зададим поверхность Ω параметрическими уравнениями

$$x = 3zin\theta\cos\varphi\ ,\ y = 3\sin\theta\sin\varphi\ ,\ z = 3\cos\theta\ ,$$

где $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Имеем:

$$\left|\frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)}\right| = 9\sin^2\theta\cos\varphi\ ;$$

$$\left|\frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)}\right| = 9\sin^2\theta\sin\varphi\ ;$$

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)}\right| = 9\cos\theta\sin\theta\ .$$

Тогда получим

$$\iint\limits_{\Omega} xdydz + (y+z)dzdx + (z-y)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \big(3\sin\theta\cos\varphi\cdot\sin^2\theta\cos\varphi +$$

$$+(3\sin\theta\sin\varphi + 3\cos\theta)9\sin^2\theta\sin\varphi +$$

$$+(3\cos\theta - 3\sin\theta\sin\varphi)9\cos\theta\sin\theta\big)d\theta =$$

$$= 27\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta\right)d\theta =$$

$$= 27\cdot 2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = 54\pi\left(1-\cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 54\pi\cdot 1 = 54\pi\ .$$

8 Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy$ по верхней стороне плоскости $x+z-1=0$, отсеченной плоскостями $y=0$ и $y=4$ и лежащей в первом октанте (рисунок 6. 3).

Решение. По определению

$$\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy = \pm\iint\limits_{G_{yz}} xdydz \pm \iint\limits_{G_{zx}} ydzdx \pm \iint\limits_{G_{xy}} zdxdy\ .$$

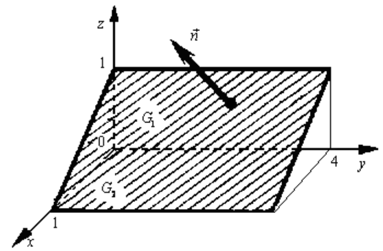

Рисунок 6. 3 – Поверхность интегрирования к типовому примеру 8

Найдем значения направляющих косинусов

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0\ ;$$

$$\cos\beta = \frac{0}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = 0\ ;$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0\ .$$

Интеграл $\iint\limits_{G_{zx}} ydzdx = 0$, так как плоскость Ω параллельна оси Oy (нормаль и ось Oy перпендикулярны), первый и третий интегралы нужно взять со знаком “+”.

Тогда находим

$$\iint\limits_{\Omega^+} zdxdy = \iint\limits_{G_{xy}} (1-x)dxdy = \int\limits_0^4 dy\int\limits_0^1 (1-x)dx = 2\ ,$$

$$\iint\limits_{\Omega^+} xdydz = \iint\limits_{G_{yz}} (1-z)dydz = \int\limits_0^4 dy\int\limits_0^1 (1-z)dz = 2\ .$$

Следовательно, $\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy = 4$.

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить поверхностные интегралы 1-го рода по поверхностям:

а) $\iint\limits_{\Omega}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)dS$, где Ω – часть плоскости $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$, лежащая в первом октанте;

б) $\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dS$, где Ω – сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$;

в) $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dS$, где Ω – боковая поверхность конуса $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{9}=0$ $(0\le z\le 3)$;

г) $\iint\limits_{\Omega}x(y+z)dS$, где Ω – часть цилиндрической поверхности $x=\sqrt{4-y^2}$, отсеченной плоскостями $z=0$, $z=1$;

д) $\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2-1\right)dS$, где Ω – поверхность $2y=9-x^2-z^2$, отсеченная плоскостью $y=0$;

е) $\iint\limits_{\Omega}\left(3x^2+3y^2+5z^2\right)dS$, где Ω – часть поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, отсеченная плоскостью $z=1$;

ж) $\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^3+z^2\right)dS$, где Ω – часть сферы $y=\sqrt{1-x^2-z^2}$.

2 Найти площадь поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=16$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

3 Вычислить площадь части поверхности цилиндра $x^2+y^2=2x$, вырезанную из него сферой $x^2+y^2+z^2=4$.

4 Вычислить площадь части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.

5 Вычислить поверхностные интегралы 2-го рода по поверхностям:

а) $\iint\limits_{\Omega}(y+2z)dxdy$, Ω – верхняя часть плоскости $6x+3y+2z=6$, расположенная в первом октанте;

б) $\iint\limits_{\Omega}zdxdy$, где Ω – внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=1$;

в) $\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+z^2+4y^2\right)dxdz$, где Ω – внешняя сторона поверхности $y=\sqrt{x^2+z^2}$, отсеченной плоскостями $y=0$, $y=3$;

г) $\iint\limits_{\Omega}zdydz-4ydzdx+8x^2dxdy$, где Ω – часть поверхности $z=x^2+y^2$, отсекаемая плоскостью $z=1$ (нормаль внешняя),

д) $\iint\limits_{\Omega}(x+y)dydz+(y-x)dzdx+(z-2)dxdy$, где Ω – часть конуса $x^2+y^2=z^2$, $z\ge 0$, отсекаемая плоскостью $z=1$;

е) $\iint\limits_{\Omega}xdydz+zdxdy$, где Ω – внешняя сторона боковой поверхности цилиндра $y=\sqrt{4-x^2}$, ограниченной плоскостями $z=0$ и $z=2$;

ж) $\iint\limits_{\Omega}x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, где Ω – внешняя сторона полной поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$ $0\le z\le 1$;

и) $\iint\limits_{\Omega}\left(4y^2+4x-5z^2\right)dydz$, где Ω – внутренняя сторона части поверхности $y^2=4x$, отсеченной плоскостями $x=4$, $z=0$, $z=3$;

к) $\iint\limits_{\Omega}x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$, где Ω – внешняя сторона на поверхности пирамиды, образованной плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

л) $\iint\limits_{\Omega}\left(x+z^2\right)dydz+\left(2x^2+y\right)dxdz$, где Ω – внешняя сторона части параболоида $y=x^2+z^2$, отсеченной плоскостью $y=2$ и расположенной над плоскостью Oxy;

м) $\iint\limits_{\Omega}xdydz+ydxdz+zdxdy$, где Ω – внешняя сторона цилиндра $x^2+y^2=4$ с основаниями $z=0$ и $z=H$.

Задания для домашней работы

1 Вычислить поверхностные интегралы 1-го рода по поверхностям:

а) $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+4x^2+4y^2}dS$, где Ω – часть поверхности $z=1-x^2-y^2$, отсеченная плоскостью $z=0$;

б) $\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+3y^2+z^2+5\right)dS$, где Ω – часть поверхности $y=\sqrt{x^2+z^2}$, отсеченная плоскостями $y=0$, $y=2$;

в) $\iint\limits_{\Omega}\left(x^4+y^2+2x^2z^2+z^4\right)dS$, где Ω – часть плоскости $x+y+z=4$, вырезанная цилиндром $x^2+z^2=4$;

г) $\iint\limits_{\Omega}y\left(x+z\right)dS$, где Ω – часть поверхности $y=\sqrt{9-z^2}$, отсеченная плоскостями $x=0$, $x=2$;

д) $\iint\limits_{\Omega}zdS$, где Ω – часть поверхности $2z=x^2+y^2$, вырезанная поверхностью $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

е) $\iint\limits_{\Omega}\frac{x^2+y+2z}{\sqrt{1+4x^2}}dS$, где Ω – часть цилиндрической поверхности $y=x^2-4$, отсеченная плоскостями $z=-2y$, $z=0$.

2 Найти площадь части плоскости $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$, заключенной между координатными плоскостями.

3 Найти массу части цилиндрической поверхности $y=\sqrt{9-z^2}$, отсеченной плоскостями $x=0$, $x=2$, если $\rho\left(x,y,z\right)=y\left(x+z\right)$.

4 Вычислить площадь части поверхности параболоида $x=1-y^2-z^2$, вырезанной цилиндром $y^2+z^2=1$.

5 Найти площадь части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанную цилиндром $\left(x^2+y^2\right)^2=4\left(x^2-y^2\right)$.

6 Вычислить поверхностные интегралы 2-го рода по поверхностям:

а) $\iint\limits_{\Omega}z^2dxdy$, где Ω – внешняя сторона поверхности эллипсоида $x^2+y^2+2z^2=2$;

б) $\iint\limits_{\Omega}yzdydz+xzdxdz+xydxdy$, где Ω – внешняя сторона плоскости $x+y+z=4$, отсеченной координатными плоскостями;

в) $\iint\limits_{\Omega}x^2dydz+zdxdy$, где Ω – часть поверхности параболоида $z=x^2+y^2$, отсекаемая плоскостью $z=4$;

г) $\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\right)dxdy$, где Ω – внешняя сторона части поверхности $z=4-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}$, отсеченной плоскостью $z=0$;

д) $\iint\limits_{\Omega}\left(ax^2+by^2+cz^2\right)dydz$, где Ω – внутренняя сторона поверхности $x=\sqrt{y^2+z^2}$, отсеченной плоскостями $x=0$, $x=a$;

е) $\iint\limits_{\Omega}\left(ax^2+by+cz^2\right)dxdz$, где Ω – внутренняя сторона поверхности $x^2=2y$, отсеченной плоскостями $y=2$, $z=0$, $z=2$;

ж) $\iint\limits_{\Omega}\left(2x^2+3y^2+5z^2\right)dydz$, где Ω – внутренняя сторона части полусферы $x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$, вырезанной конусом $x=\sqrt{y^2+z^2}$;

и) $\iint\limits_{\Omega} xdydz+z^3dxdy$, где Ω – сфера $x^2+y^2+z^2=1$ (внешняя нормаль);

к) $\iint\limits_{\Omega} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где Ω – внешняя сторона поверхности куба $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$;

л) $\iint\limits_{\Omega} 2xdydz-ydxdz+zdxdy$, где Ω – внешняя сторона замкнутой поверхности, образованной параболоидом $3z=x^2+y^2$ и полусферой $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

Практическое занятие 7 Кратные и поверхностные интегралы

7.1 Формула Остроградского-Гаусса
7.2 Формула Стокса

7.1 Формула Остроградского-Гаусса

Формула Остроградского-Гаусса устанавливает связь между поверхностными интегралами 2-го рода по замкнутой поверхности и тройными интегралами по пространственной области, ограниченной этой поверхностью.

Теорема 1 Пусть

1) Q – элементарная относительно оси Oz замкнутая область, ограниченная поверхностью Ω;

2) функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в области Q.

Тогда справедлива формула Остроградского-Гаусса

$$\iint\limits_{\Omega} Pdydz+Qdzdx+Rdxdz=\iiint\limits_{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz \quad (7.1)$$

Формула Остроградского-Гаусса (7.1) справедлива для любой области Q, которую можно разбить на конечное число элементарных областей. Также формулу Остроградского-Гаусса можно использовать для вычисления поверхностных интегралов 2-го рода по замкнутым поверхностям.

Для вычисления объема тела, ограниченного замкнутой поверхностью Ω, используется формула:

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Omega} xdydz+ydzdx+zdxdy. \quad (7.2)$$

7.2 Формула Стокса

Формула Стокса устанавливает связь между поверхностными интегралами и криволинейными интегралами.

Т е о р е м а 2 Пусть

1) Ω – элементарная относительно оси Oz поверхность, заданная уравнением $z = z(x;y)$, где функции $z(x;y)$, $z_x(x;y)$, $z_y(x;y)$ – непрерывны в замкнутой области G, проекции Ω на Oxy ;

2) Γ – контур, ограничивающий область Ω, Γ_1 – его проекция на плоскость Oxy, являющаяся контуром, ограничивающим область G ;

3) функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на выбранной стороне поверхности Ω.

Тогда имеет место формула Стокса

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_{\Omega^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx . \tag{7.3}$$

С л е д с т в и е. Если

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \ \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \text{ то}$$

1) $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$;

2) подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(z;y;z)$, для которой:

$$Pdx + Qdy + Rdz = dU .$$

Формула Стокса справедлива для любой области, которую можно разбить на конечное число элементарных областей указанного вида.

Учитывая, что

$$\cos\gamma\, dS = dxdy \, , \ \cos\beta\, dS = dzdx \, , \ \cos\alpha\, dS = dydz \, ,$$

формулу Стокса можно записать в виде:

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_{\Omega^+} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta \right] dS.$$

Данную формулу легко запомнить, используя для подынтегрального выражения определитель:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Напишите формулу Остроградского-Гаусса и сформулируйте условия, при которых эта формула верна.

2 Напишите формулу Стокса и сформулируйте условия, при которых эта формула верна.

Решение типовых примеров

1 Вычислить интеграл $\oiint_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy$, где поверхность Ω есть внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z - 1 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (рисунок 7. 1).

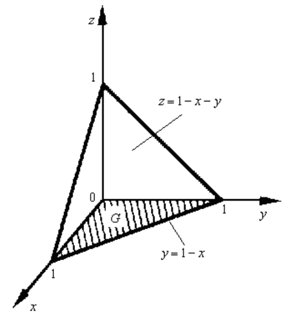

Рисунок 7. 1 – Поверхность интегрирования к типовому примеру 1

Р е ш е н и е. Используя формулу Остроградского-Гаусса (7.1), имеем

$$\oiint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint\limits_{V}(1+1+1)\,dxdydz = 3\iiint\limits_{V} dxdydz =$$

$$=3\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} dz = 3\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(z\Big|_0^{1-x-y}\right)dy = 3\int_0^1\left(y - xy - \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x}\right)dx =$$

$$=3\int_0^1\left(1-x-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right)dx = 3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

2 Вычислить

$$I=\iint\limits_{\Omega}\left(e^{2y}+x\right)dydz+\left(x-2y\right)dzdx+\left(y^2+3z\right)dxdy,$$

где Ω – внешняя сторона поверхности шара

$$(x-1)^2+y^2+(z+5)^2=9.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$P(x,y,z)=e^{2y}+x$; $Q(x,y,z)=x-2y$; $R(x,y,z)=y^2+3z$.

Отсюда

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1-2+3=2.$$

По формуле Остроградского-Гаусса (7.1) получим

$$I=2\iiint\limits_{Q}dxdydz=2\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot3^3=72\pi,$$

так как $\iiint\limits_{Q}dxdydz$ численно равен объему шара радиуса $R=3$.

3 Вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma}x^2y^3dx+dy+zdz$, используя формулу Стокса, где

$$\Gamma=\left\{(x;y;z)\Big|x^2+y^2=R^2,\ z=0\right\},$$

взяв в качестве поверхности полусферу (рисунок 7. 2)

$$\Omega=\left\{(x;y;z)\Big|z=+\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\}.$$

Р е ш е н и е. Так как

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-3x^2y^2,\ \frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0,\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0,$$

по формуле Стокса (7.3), получаем

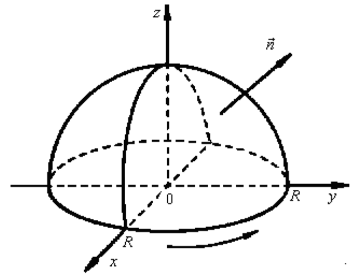

Рисунок 7. 2 – Поверхность интегрирования к типовому примеру 3

$$\oint\limits_{\Gamma^+}x^2y^3dx+dy+zdz=-3\iint\limits_{\Omega^+}x^2y^2dxdy=-3\iint\limits_{G}x^2y^2dxdy=$$

$$=\left[\begin{array}{l}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\\ 0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le2\pi,\\ J=r.\end{array}\right]=-3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R r^5\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\,dr=$$

$$=-3\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^R r^5dr=-\frac{R^6}{2}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\,d\varphi=$$

$$=-\frac{R^6}{8}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos4\varphi)\,d\varphi=-\frac{R^6}{16}\varphi\Big|_0^{2\pi}+0=-\frac{\pi R^6}{8}.$$

4 Вычислить

$$I=\oint\limits_{\Gamma}(x+y)dx+(x-z)dy+(y+z)dz$$

по контуру, где $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$

Р е ш е н и е. Имеем

$$P=x+y,\ Q=x-z,\ R=y+z.$$

Тогда по формуле Стокса (7.3) получим

$$I=\iint\limits_{\Omega}(1+1)dydz+(0-0)dzdx+(1-1)dxdy=$$

$$=\iint_{\Omega} 2dtdz = 2\iint_{G} dydz = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

где G – плоскость ΔABC (внешняя сторона); это плоскость, отсекающая на осях координат отрезки длины единицы. Так как нормаль к внешней стороне плоскости образует с осью Ox угол $\alpha < \frac{\pi}{2}$, то по правилу вычисления поверхностных интегралов 2-го рода можно записать:

$$\iint_{\Omega} dydz = \iint_{D} dydz .$$

Имеем $\iint_{D} dydz = S$, где D – треугольник прямоугольный в плоскости $x=0$ с катетами длины 1 (D – проекция плоскости ΔABC на плоскость $x=0$), а S – площадь этого треугольника

$$S = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Задания для аудиторной работы

1 По внешней стороне замкнутой поверхности Ω тела Q, заданного неравенствами $x^2 + y^2 \le z^2$, $0 \le z \le 1$, вычислить интеграл $\iint_{\Omega} x^2 zdydz + ydzdx + zdxdy$.

2 Вычислить $\iint_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy$, где Ω – внешняя сторона поверхности $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

3 Вычислить $\oint_{\Gamma} (x+3y+2z)dx + (2x+z)dy + (x-y)dz$, где Γ – контур ΔABC с вершинами $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,1)$ в положительном направлении.

4 Вычислить $\oint_{\Gamma} (z^2 - x^2)dx + (x^2 - y^2)dy + (y^2 - z^2)dz$ по контуру Γ, являющимся линией пересечения поверхностей $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и пробегаемый в положительном направлении ($z > 0$).

5 Вычислить $\oint_{\Gamma} 2(x^2 + y^2)dx + (x+y)^2 dy$, где Γ – контур ΔABC: $A(1;1)$, $B(2;2)$, $C(1;3)$, пробегаемый в положительном направлении.

6 Вычислить $\iint_{\Omega} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, где Ω – внешняя полная поверхность конуса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 0$ $(0 \le z \le 3)$.

7 Вычислить $\iint_{\Omega} x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy$, где Ω – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

8 Вычислить $\oint_{\Gamma} y^2 dx - x^2 dy + z^2 dz$, где Γ – линия пересечения параболоида $x^2 + z^2 = 1 - y$ с координатными плоскостями.

9 Вычислить $\oint_{\Gamma} (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, где Γ – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x + y + z = 0$.

Задания для домашней работы

1 Вычислить $\iint_{\Omega} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, где Ω – внешняя сторона поверхности куба $0 \le x \le 5$, $0 \le y \le 5$, $0 \le z \le 5$.

2 Вычислить $\iint_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy$, где Ω – внешняя сторона пирамиды, ограниченной поверхностями $x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

3 Вычислить $\oint_{\Gamma} zdx + (x+y)dy + ydz$, где Γ – контур треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $2x + y + 2z = 2$ с координатными плоскостями в положительном направлении.

4 Вычислить $\oint\limits_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, где Γ – эллипс $x^2+y^2=1$, $x+z=1$.

5 Вычислить $\iint\limits_{\Omega} xdydz-ydzdx+z^2dxdy$, где Ω – внешняя сторона замкнутой поверхности: $x^2+y^2=3z$, $x^2+y^2+z^2=4$ (часть сферы, накрывающая параболоид).

6 Вычислить $\iint\limits_{\Omega} 2xydydz-y^2dzdx+z^3dxdy$, где Ω – внешняя сторона замкнутой поверхности $x^2+y^2+z^2=4z$, $\sqrt{x^2+y^2}=z\sqrt{3}$.