## Тема 2 Операционное исчисление

### *Практическое занятие 1* Преобразование Лапласа



### 1.1 Оригиналы и их изображения

Комплекснозначная функция $f(t)$ называется *оригиналом*, если она удовлетворяет условиям:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2) при $t \ge 0$ функция $f(t)$ кусочно-непрерывна;

3) при $t \to \infty$ функция $f(t)$ имеет ограниченную степень роста, т. е. существует такое положительное число $M$ и такое неотрицательное число $s_0$, что для всех $t \ge 0$ выполняется неравенство:

$$|f(t)| \le M \cdot e^{s_0 t}, \; M > 0, \; s_0 \ge 0.$$

Число $s_0$ называется *показателем роста* функции $f(t)$.

Если $f_1(t)$, $f_2(t)$, …, $f_n(t)$ – оригиналы с показателями роста $s_1$, $s_2$, …, $s_n$, то функция $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots c_n f_n(t)$, $c_i \in \mathbb{C}$, является также оригиналом с показателем роста $s_0 = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$.

Пусть функция $f(t)$ – оригинал с показателем роста $s_0$. Тогда являются оригиналами следующие функции:

а) $|f(t)|$ с показателем роста $s_0$;

б) $f_1(t) = f(\alpha \cdot t)$, $\alpha > 0$, с показателем роста $\alpha \cdot s_0$;

в) $f_2(t) = e^{\lambda t} f(t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, показатель роста которой равен

$$s = \begin{cases} s_0 + \operatorname{Re}\lambda, & \text{если } s_0 + \operatorname{Re}\lambda > 0, \\ 0, & \text{если } s_0 + \operatorname{Re}\lambda < 0; \end{cases}$$



г) $f_3(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < \tau, \\ f(t-\tau), & \text{если } t \ge \tau, \end{cases}$

с показателем роста $s_0$, $\tau > 0$;

д) $f_4(t) = t^z \cdot f(t)$, $z \in \mathbb{C}$, с показателем роста $s_0$;

– $g(t) = \int\limits_0^t f(z)dz$, $0 \le t < \infty$, с показателем роста $s_0$.

### 1.2 Преобразование Лапласа

*Изображением* (*интегралом Лапласа*) оригинала $f(t)$ называется несобственный интеграл вида

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-pt} dt,$$

зависящий от комплексного параметра $p$.

*Преобразованием Лапласа* называется операция перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$.

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывается в виде

$$f(t) \doteqdot F(p).$$

Пусть функция $f(t)$ оригинал с показателем роста $s_0 > 0$.

*Теорема 1 (существование изображения) Для оригинала* $f(t)$ *с показателем роста* $s_0 > 0$ *изображение* $F(p)$ *существует в полуплоскости* $\operatorname{Re} p = u > s_0$, *причем функция* $F(p)$ *является аналитической в этой полуплоскости.*

*Теорема 2 (необходимый признак существования изображения) Если функция* $F(p)$ *является изображением оригинала* $f(t)$, *то* $\lim\limits_{\operatorname{Re} p \to \infty} F(p) = 0$.

*Теорема 3 (единственность оригинала) Если функции* $F(p)$ *и* $\Phi(p)$ *совпадают, то совпадают между собой и соответствующие оригиналы* $f(t)$ *и* $\varphi(t)$ *во всех точках, в которых они непрерывны.*

## 1.3 Свойства преобразования Лапласа

Преобразование Лапласа обладает *свойствами*:

– *линейность:* линейной комбинации оригиналов соответствует линейная комбинация изображений, т. е. если $f_1(t) \doteq F_1(p)$ и $f_2(t) \doteq F_2(p)$ и $c_1$, $c_2$ – постоянные числа, то

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \doteq c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p);$$

– *подобие:* если $f(t) \doteq F(p)$ и $\lambda > 0$, то

$$f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} \cdot F\left(\frac{p}{\lambda}\right);$$

– *запаздывание:* если $f(t) \doteq F(p)$ и $\tau > 0$, то

$$f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau} \cdot F(p);$$

– *опережение*: если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$f(t+\tau) \doteq e^{p\tau}\left[F(p) - \int_0^{\tau} f(t) e^{-pt} dt\right];$$

– *изображение периодической функции:* пусть оригинал $f(t)$ имеет период $T$ и он может быть представлен в виде сходящегося ряда

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(t - nT),$$

где $f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } 0 < t < T, \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > T. \end{cases}$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_0(t - nt) \doteq F_0(p) \cdot \frac{1}{1 - e^{-pT}};$$

– *смещение*: если $f(t) \doteq F(p)$ и $a \in \mathbb{C}$, то

$$e^{at} \cdot f(t) \doteq F(p-a);$$

– *дифференцирование оригинала*: если $f(t) \doteq F(p)$ и функции $f'(t)$, $f''(t), \ldots$, $f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то для любого $k = 1, 2, \ldots, n$

$$f^{(k)}(t) \doteq p^k \cdot F(p) - p^{k-1} \cdot f(0) - \ldots - f^{(k-1)}(0),$$



в частности $f'(t) \doteq p \cdot F(p) - f(0)$;

– *дифференцирование изображения:* если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t), \; n = 1, 2, \ldots;$$

– *интегрирование оригинала:* если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$\int_0^t f(z) dz \doteq \frac{1}{p} F(p);$$

– *интегрирование изображения*: если $f(t) \doteq F(p)$ и интеграл $\int_p^{\infty} F(\rho) d\rho$ сходится, то

$$\int_p^{\infty} F(\rho) d\rho \doteq \frac{f(t)}{t};$$

– пусть $\frac{f(t)}{t}$ – оригинал непрерывный на $0 \le t < \infty$, $f(t) \doteq F(p)$ и несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ сходится. Тогда имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} F(x) dx;$$

– *умножение изображений*: если $f_1(t) \doteq F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > s_1$, и $f_2(t) \doteq F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > s_2$, то

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau;$$

– *теорема Бореля*: свертке оригиналов

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_2(y) \cdot f_1(t-y) dy$$

соответствует произведение изображений

$$f_1(t) * f_2(t) \doteq F_1(p) \cdot F_2(p);$$

– *интеграл Дюамеля*: если $f(t) \doteq F(p)$ и $g(t) \doteq G(p)$, то

$$pF(p)G(p) \doteqdot f(0)g(t) + f'(t) * g(t),$$
$$pF(p)G(p) \doteqdot g(0)f(t) + g'(t) * f(t).$$

Ниже приведены изображения некоторых функций:

$1 \doteqdot \dfrac{1}{p}$;

$e^{at} \doteqdot \dfrac{1}{p-a}$;

$t \doteqdot \dfrac{1}{p^2}$;

$t^n \doteqdot \dfrac{n!}{p^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$;

$e^{at} \cdot t^n \doteqdot \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$;

$\sin wt \doteqdot \dfrac{w}{p^2 + w^2}$;

$\cos wt \doteqdot \dfrac{p}{p^2 + w^2}$;

$\operatorname{sh} wt \doteqdot \dfrac{w}{p^2 - w^2}$;

$\operatorname{ch} wt \doteqdot \dfrac{p}{p^2 - w^2}$;

$e^{at} \cdot \operatorname{sh} wt \doteqdot \dfrac{w}{(p-a)^2 - w^2}$;

$e^{at} \cdot \operatorname{ch} wt \doteqdot \dfrac{p-a}{(p-a)^2 - w^2}$;

$t \cdot \sin wt \doteqdot \dfrac{2wp}{(p^2 + w^2)^2}$;

$t \cdot \cos wt \doteqdot \dfrac{p^2 - w^2}{(p^2 + w^2)^2}$;

$t \cdot \operatorname{sh} wt \doteqdot \dfrac{2wp}{(p^2 - w^2)^2}$;

$t \cdot \operatorname{ch} wt \doteqdot \dfrac{p^2 + w^2}{(p^2 - w^2)^2}$;

$e^{at} \cdot \sin wt \doteqdot \dfrac{w}{(p-a)^2 + w^2}$;

$e^{at} \cdot \cos wt \doteqdot \dfrac{p-a}{(p-a)^2 + w^2}$..

## Вопросы для самоконтроля

1 Какая функция называется оригиналом?
2 Какой интеграл называется изображением?
3 При каких условиях изображение существует?
4 Сформулируйте необходимый признак существования изображения?
5 Сформулируйте теорему единственности оригинала?
6 Какая операция называется преобразованием Лапласа?
7 Какими свойствами обладает преобразование Лапласа?



## Решение типовых примеров

**1** Проверить, является ли оригиналом функция:

$$f(t) = \begin{cases} e^{2t} \sin t, \text{ при } t > 0, \\ 0, \text{ при } t < 0. \end{cases}$$

*Решение*. Проверим, удовлетворяет ли данная функция условиям 1-3 определения оригинала.

В самом деле:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2) при $t \ge 0$ функция непрерывна;

3) для любых $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство
$$\left| e^{2t} \sin t \right| \le e^{2t}.$$

Отсюда $M = 1$, $s_0 = 2$.

**2** Найти изображения функций:

а) Хевисайда
$$\eta(t) = \begin{cases} 1 \quad \text{при } t \ge 0, \\ 0 \quad \text{при } t < 0, \end{cases}$$

б) $f(t) = e^{4t}$.

*Решение*. а) функция $\eta(t)$ является оригиналом с показателем роста $s_0 = 0$. Тогда согласно определению изображения получим:

$$F(p) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{N \to \infty} \int_0^N 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{N \to \infty} \left( -\frac{1}{p} \cdot e^{-pt} \Big|_0^N \right) = \frac{1}{p}$$

при $u = \operatorname{Re} p > 0$;

б) функция $f(t) = e^{4t}$ является оригиналом с показателем роста $s_0 = 4$. Поэтому изображение $F(p)$ может быть определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 4$. Имеем:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{4t} \cdot e^{-pt} dt = \lim_{N \to \infty} \int_0^N e^{-(p-4)t} dt = -\lim_{N \to \infty} \left( \frac{1}{p-4} e^{-(p-4)t} \Big|_0^N \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{p-4} - \frac{e^{-(p-4)N}}{p-4}\right) = \frac{1}{p-4}.$$

Функция $F(p) = \dfrac{1}{p-4}$ является аналитической не только в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 4$, но и на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением точки $p = 4$. Такая особенность наблюдается и для многих изображений.

**3** Пользуясь определением, найти изображение функции

$$f(x) = \sin t.$$

*Решение*. Для $\operatorname{Re} p > 0$ имеем:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-px} dt = \begin{bmatrix} u = e^{-pt};\ du = -pe^{pt}dt; \\ dv = \sin t\, dt;\ v = -\cos t \end{bmatrix} =$$

$$= -e^{-pt}\cos t\Big|_0^{+\infty} - p\int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-pt} dt = \begin{bmatrix} u = e^{-pt};\ du = -pe^{-pt}dt; \\ dv = \cos t\, dt;\ v = \sin t \end{bmatrix} =$$

$$= 1 - p\left( pe^{-pt}\sin t\Big|_0^{+\infty} - p\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-pt} dt \right) =$$

$$= 1 - p^2\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-pt} dt.$$

Отсюда

$$\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-pt} dt = 1 - p^2\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-pt} dt.$$

Выразим искомый интеграл:

$$\left(1 + p^2\right)\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-pt} dt = 1.$$

Тогда

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-pt} dt = \frac{1}{1+p^2}.$$



**4** Пользуясь свойством подобия, найти изображение функции

$$f(t) = \sin 2t.$$

*Решение*. Так как $\sin t = \dfrac{1}{p^2+1}$, $\operatorname{Re} p > 0$, то по свойству подобия получим:

$$\sin 2t \doteq \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2}\frac{4}{p^2+4} = \frac{2}{p^2+4},\ \operatorname{Re} p > 0.$$

**5** Пользуясь свойством смещения, найти изображение оригинала $f(t) = e^{-t}\cos 2t$.

*Решение*. Так как $\cos 2t \doteq \dfrac{p}{p^2+4}$ и $a = -1$, то по свойству смещения получим:

$$e^{-t}\cos 2t \doteq \frac{p+1}{(p+1)^2+4}.$$

**6** Пользуясь свойством запаздывания, найти изображение оригинала

$$f(t-1) = (t-1)^2\eta(t-1).$$

*Решение*. Для функции $f(t) = t^2\eta(t)$ имеем $f(t) \doteq \dfrac{2}{p^3}$. По свойству запаздывания находим:

$$(t-1)^2\sigma(t-1) \doteq e^{-p}\frac{2}{p^3}.$$

**7** Найти изображение оригинала $f(t)$, заданного графиком на рисунке 1. 1.

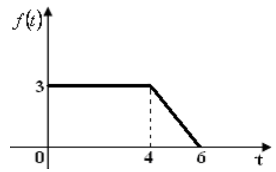


Рисунок 1. 1 – График функции $f(t)$ к типовому примеру 7

*Р е ш е н и е*. Аналитическое выражение для функции $f(t)$ имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases}0,\ \text{при}\ \ t<0,\\ 3,\ \text{при}\ \ 0\le t<4,\\ 9-\dfrac{3}{2}t,\ \ \text{при}\ \ 4\le t<6,\\ 0,\ \text{при}\ \ t\ge 6.\end{cases}$$

С помощью единичной функции Хевисайда функцию $f(t)$ можно записать следующим образом:

$$f(t)=3\eta(t)-3\eta(t-4)+\left(9-\frac{3}{2}t\right)\eta(t-4)-\left(9-\frac{3}{2}t\right)\eta(t-6)=$$

$$=3\eta(t)+\left(6-\frac{3}{2}t\right)\eta(t-4)-\left(9-\frac{3}{2}t\right)\eta(t-6).$$

Для нахождения изображения этой функции представим ее в форме:

$$f(t)=3\eta(t)+\varphi_1(t-4)\eta(t-4)+\varphi_2(t-6)\eta(t-6),$$

Имеем:

$$f(t)=3\eta(t)-\frac{3}{2}(t-4)\eta(t-4)+\frac{3}{2}(t-6)\eta(t-6).$$

Отсюда $\varphi_1(t)=-\dfrac{3}{2}t$, $\varphi_2(t)=\dfrac{3}{2}t$. Так как

$$\varphi_1(t)=-\frac{3}{2}t\doteq-\frac{3}{2p^2},\ \varphi_2(t)=\frac{3}{2}t\doteq\frac{3}{2p^2},$$

то по свойству запаздывания находим изображение

$$f(t)\doteq\frac{3}{p}-\frac{3}{2p^2}e^{-4p}+\frac{3}{2p^2}e^{-6p}.$$

**8** Найти изображение $\pi$ -периодичной функции

$$f(t)=|\sin t|$$

при $0\le t\le\pi$, график которой представлен на рисунке 1. 2.



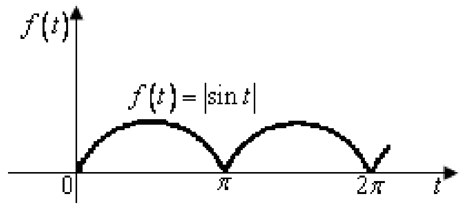


Рисунок 1. 2 – График $\pi$ -периодичной функции $f(t)=|\sin t|$

*Р е ш е н и е*. Учитывая типовой пример 3 и свойство изображения периодической функции, имеем:

$$|\sin t|\doteq\frac{1}{1-e^{-\pi\cdot p}}\cdot\int_0^{\pi}\sin t\cdot e^{-pt}dt=\frac{1}{1-e^{-\pi\cdot p}}\cdot\left.\frac{e^{-pt}(p\sin t-\cos t)}{p^2+1}\right|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1+e^{-\pi p}}{\left(1-e^{-\pi p}\right)\cdot\left(p^2+1\right)}.$$

**9** Найти изображение функции $f(t)=\sin^2 t$.

*Р е ш е н и е*. Пусть $f(t)\doteq F(p)$. Тогда

$$f'(t)\doteq pF(p)-f(0).$$

Так как $f(0)=\sin^2 0=0$, и

$$\left(\sin^2 t\right)'=2\sin t\cos t=\sin 2t\doteq\frac{2}{p^2+4},$$

то

$$\frac{2}{p^2+4}=pF(p).$$

Откуда

$$F(p)=\frac{2}{p\left(p^2+4\right)}.$$

Значит,

$$\sin^2 t\doteq\frac{2}{p\left(p^2+4\right)};$$

**10** Найти изображение функции $f(t)=t^2e^{3t}$.

*Решение*. Имеем $e^{3t} \doteq \dfrac{1}{p-3}$.

Применяя свойство дифференцирования изображения, получаем

$$t^2 e^{3t} \doteq (-1)^2 \left(\frac{1}{p-3}\right)'' = \left(-\frac{1}{(p-3)^2}\right)' = \frac{2}{(p-3)^3}.$$

**11** Найти изображение оригинала $\int\limits_0^t \tau e^{\tau} d\tau$.

*Решение*. Так как $e^t \doteq \dfrac{1}{p-1}$, то по свойству дифференцирования изображения имеем:

$$te^t \doteq -\left(\frac{1}{p-1}\right)' = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

По свойству интегрирования оригинала получим:

$$\int\limits_0^t \tau e^{\tau} d\tau = \frac{1}{p(p-1)^2}.$$

**12** Используя свойство интегрирования изображения, найти изображение интегрального синуса $\operatorname{Si} t = \dfrac{\sin t}{t}$.

*Решение*. Так как $\sin t \doteq \dfrac{1}{p^2+1}$, то по свойству интегрирования изображения получим:

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \int\limits_p^{\infty} \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p \Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arctg} p.$$

**13** Найти изображение оригинала $\psi(t) = \int\limits_0^t (t-\tau) e^{\tau} d\tau$.

*Решение*. Оригинал $\psi(t)$ есть свертка оригиналов $g(t) = t$, $f(t) = e^t$. По свойству свертки имеем:



$$\psi(t) \doteq \Psi(p) = F(p)G(p) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

**Задания для аудиторной работы**

**1** Проверить, какие из указанных функций являются функциями оригиналами:

а) $f(t) = 2^t \eta(t)$;

б) $f(t) = \operatorname{ch}(2-i)t\,\eta(t)$;

в) $f(t) = \dfrac{1}{t-3}\eta(t)$;

г) $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}\eta(t)$.

**2** Найти изображения следующих функций:

1) $2t+3$;

2) $te^{2t}$;

3) $\sin 3t$;

4) $\int\limits_0^t (t-\tau)^2 \operatorname{ch} \tau d\tau$;

5) $t + 2\sin t$;

6) $4t + 4\operatorname{sh} t + 2e^t$;

7) $e^{4t}$;

8) $\sin wt$;

9) $\sin^2 t$;

10) $e^{2t} \sin 2t$;

11) $e^{-t} t^3 + e^{4t} \operatorname{sh} t$;

12) $\int\limits_0^t \tau \operatorname{sh} 2\tau d\tau$;

13) $\dfrac{\sin^2 t}{t}$;

14) $\cos^2 t$;

19) $\sin(t-2)\eta(t-2)$;

20) $\dfrac{e^t - 1}{t}$;

21) $e^{t-2}\eta(t-2)$;

22) $\int\limits_0^t e^{t-\tau} \sin \tau d\tau$;

23) $\sin 2t \cos 4t$;

24) $2\operatorname{ch}^2 2t - 4e^{5t}$;

25) $e^{-4t} \sin^2 t$;

26) $\cos^2(t-1)\eta(t-1)$;

27) $(t-1)^2 \eta(t)$;

28) $\sin^3 t$;

29) $(t^3 + t)\sin 2t$;

30) $\int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$;

31) $\dfrac{\cos t - \cos 2t}{t}$;

32) $3 + 4t + 2t^2$;

15) $t\cos 3t$;

16) $t^2\cos 2t$;

17) $t^2\left(e^{2t}+\operatorname{ch}3t\right)$;

18) $\int\limits_0^t \sin\tau d\tau$;

33) $1+e^{-2t}+t^2$;

34) $t\sin wt$;

35) $e^{2t}\sin t$;

36) $\int\limits_0^t \frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}d\tau$.

**3** По графику оригинала (рисунок 1. 3) найти изображение.

**Задания для домашней работы**

**1** Проверить, какие из указанных функций являются функциями оригиналами:

а) $f(t)=e^{(2+4i)t}\eta(t)$;

б) $f(t)=\operatorname{tg}t\cdot\eta(t)$;

в) $f(t)=\frac{1}{t+5}\eta(t)$;

г) $f(t)=e^{-t}\cos t\,\eta(t)$.

**2** Найти изображение следующих функций:

1) $2te^{3t}$;

2) $\cos 2t$;

3) $\frac{1-\cos t}{t}$;

4) $\int\limits_0^t \cos^2 2\tau d\tau$;

5) $4t^2-\operatorname{ch}t+te^t$;

6) $t^2-4t+3\cos t$;

7) $\cos 3t$;

8) $\cos wt$;

9) $\cos^3 t$;

10) $e^{-3t}\cos 4t$;

19) $t^3-2t+1$;

20) $\operatorname{ch}4t$;

21) $\frac{e^t-e^{-t}}{t}$;

22) $\int\limits_0^t (\cos t-\tau)e^{2\tau}d\tau$;

23) $\cos mt\cos nt$;

24) $\sin^4+5\operatorname{sh}^2 3t$;

25) $e^{5t}\cos^2 t$;

26) $e^t\eta(t-3)$;

27) $t^2\cdot\eta(t-1)$;

28) $\cos^4 t$;



11) $e^t\left(t^2+2t+\operatorname{ch}t\right)$;

12) $\cos(t-3)\eta(t-3)$;

13) $\sin^2(t-2)\eta(t-2)$;

14) $t\sin 2t$;

15) $te^t$;

16) $t\left(\sin t+e^{4t}\right)$;

17) $t^2\left(e^{2t}-\operatorname{sh}t\right)$;

18) $\int\limits_0^t (\tau+1)\cos 2\tau d\tau$;

29) $\left(t^2-t+2\right)\cos 3t$;

30) $\int\limits_0^t \tau^2\operatorname{sh}\tau d\tau$;

31) $\frac{e^t-1-t}{t}$;

32) $\int\limits_0^t e^{2(\tau-t)}\tau^2 d\tau$;

33) $\int\limits_0^t e^{2(t-\tau)}\sin\tau\cos\tau d\tau$;

34) $1+e^{-2t}+t^2$;

35) $t\sin wt$;

36) $\int\limits_0^t \frac{1-e^{-\tau}}{\tau}d\tau$.

**3** По графику оригинала (рисунок 1. 4) найти изображение.

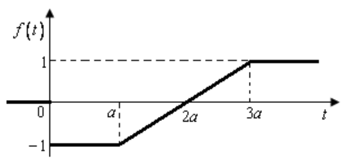


Рисунок 1. 3 – Рисунок к задаче 3 аудиторной работы

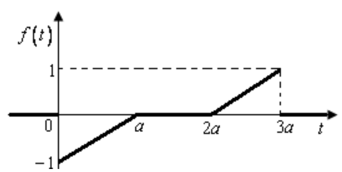


Рисунок 1. 4 – Рисунок к задаче 3 домашней работы