Практическое занятие 3 **Приложения операционного исчисления**

3.1 Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами
3.2 Решение систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами
3.3 Использование операционного исчисления в электротехнике

3.1 Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть имеется линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t),$$

удовлетворяющее начальным условиям Коши

$$y(0) = c_0,\ y'(0) = c_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

где c_0, $c_1, \ldots,$ c_{n-1} – заданные числа, функция $y(t)$ вместе с ее рассматриваемыми производными и функция $f(t)$ являются оригиналами.

Для того чтобы найти решение $y(t)$ применим к обеим частям дифференциального уравнения преобразование Лапласа, т. е. от оригиналов $y(t)$ и $f(t)$ переходим к изображениям $Y(p)$ и $F(p)$ соответственно. В результате получается операторное уравнение:

$$a_0\left(p^n Y - p^{n-1}c_0 - p^{n-2}c_1 - \ldots - c_{n-1}\right) + a_1\left(p^{n-1}Y - p^{n-2}c_0 - \ldots - c_{n-2}\right) + \ldots +$$
$$+ a_{n-1}(pY - c_0) + a_n Y = F$$

Разрешая полученное операторное уравнение относительно $Y(p)$, находим

$$Y(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)},$$

где $Q_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$,

$$R_{n-1}(p) = c_0\left(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\right) + c_1\left(a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}\right) +$$
$$+ \ldots + c_{n-1} a_0 .$$

Полученное решение называется *операторным решением* искомого дифференциального уравнения.

Определяя оригинал $y(t)$, соответствующий найденному изображению $Y(p)$, получается искомое решение .

Полученное решение $y(t)$ во многих случаях оказывается справедливым при всех $t \in \mathrm{R}$, а не только при $t \geq 0$.

При нулевых начальных условиях решение операторного уравнения примет вид $Y(p) = \dfrac{F(p)}{Q_n(p)}$.

Если $\tilde{y}(t)$ – решение дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 1$$

при начальных условиях $y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0$, то решением уравнения $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t)$ при тех начальных условиях является функция

$$y(t) = \int_0^t \tilde{y}'(\tau) f(t-\tau) d\tau .$$

Данная формула позволяет находить решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами при нулевых начальных условиях, не находя изображения правой части.

3.2 Решение систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$y_1' + a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n = f_1(t),$$
$$y_2' + a_{21}y_1 + \ldots + a_{2n}y_n = f_2(t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y_n' + a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n = f_n(t),$$

удовлетворяющая начальным условиям Коши

$$y_1(0)=c_1,\ y_2(0)=c_2,\ \dots,\ y_n(0)=c_n,$$

где c_0, $c_1,\dots$, c_n – заданные числа, функции $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., $y_n(t)$ вместе с их первыми производными и функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$ являются оригиналами.

Пусть $y_k(t)\doteq Y_k(p)$, $f_k(t)\doteq F_k(p)$, $k=1,2,\dots,n$. Применяя преобразование Лапласа к каждому уравнению системы и учитывая правила дифференцирования оригинала, получим:

$$\begin{gathered}pY_1-c_1+a_{11}Y_1+\dots+a_{1n}Y_n=F_1(t),\\ pY_2-c_2+a_{21}Y_1+\dots+a_{2n}Y_n=F_2(t),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ pY_n-c_n+a_{n1}Y_1+\dots+a_{nn}Y_n=F_n(t),\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}(p+a_{11})Y_1+a_{12}Y_2\dots+a_{1n}Y_n=c_1+F_1(t),\\ a_{21}Y_1+(p+a_{21})Y_1+\dots+a_{2n}Y_n=c_2+F_2(t),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ a_{n1}Y_1+a_{n2}Y_2+\dots+(p+a_{nn})Y_n=c_n+F_n(t).\end{gathered}$$

Данная система называется *системой операторных* уравнений.

Пусть

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}+p & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}+p & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+p\end{vmatrix}$$

есть определитель системы операторных уравнений и Δ_{km} – алгебраические дополнения элементов, находящихся на пересечении k-1 строки и m-го столбца. Если определитель $\Delta\neq0$, то применяя правило Крамера, получим:

$$Y_k(p)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i(p)+c_i)\Delta_{km}}{\Delta},\ k=1,2,\dots,n.$$

Для нахождения решения исходной системы определяются оригиналы, соответствующие полученным изображениям.

Если определитель $\Delta=0$, то система операторных уравнений решения не имеет, следовательно, и исходная система не имеет решения.

При помощи операционного исчисления можно находить решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, уравнениями в частных производных, уравнений в конечных разностях, проводить суммирование рядов, вычислять интегралы. При этом решение этих и других задач значительно упрощается.

3.3 Использование операционного исчисления в электротехнике

Методы операционного исчисления широко используются в электротехнике при исследовании переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами r, L и C, поскольку явления, происходящие в таких цепях, описываются обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями и их системами, которые легко решаются с помощью операционного исчисления.

Переходным процессом называется явление, наблюдающееся в цепи при переходе от одного установившегося режима к другому. Переходные процессы возникают в электрических цепях в результате коммутаций (включения или выключения э. д. с., различных переключений, короткого замыкания в цепи, внезапного изменения параметров в цепи и т. д.). Эти процессы в электрических цепях всегда являются *электромагнитными*. Они протекают обычно с очень большой скоростью и, как правило, заканчиваются по истечении долей секунды. При этом возможны случаи, когда напряжения и токи цепи или на отдельных ее элементах при переходном процессе значительно превосходят их значения в установившемся режиме. Последнее может привести к выходу из строя некоторых элементов цепи.

При протекании переходных процессов в электрических цепях всегда выполняются законы коммутации (законы переходных процессов):

а) ток в индуктивности L не может измениться скачком. В начальный момент (непосредственно после коммутации) он сохраняет то значение, которое было в момент, непосредственно предшествующий коммутации:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = i_L(0);$$

б) напряжение на емкости C не может измениться скачком. В начальный момент (непосредственно после коммутации) оно сохраняет то значение, которое было в момент, непосредственно предшествующий коммутации:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0).$$

Значения токов в индуктивностях и напряжений на обкладках конденсаторов в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации в цепи, $i_L(0)$ и $u_C(0)$, определяют начальные условия переходного процесса. При расчете переходного процесса в электрической цепи эти условия необходимо выявить до выполнения всех остальных вычислений. Если все $i_L(0)$ и $u_C(0)$ равны нулю, то в цепи имеют место нулевые начальные условия, а токи в индуктивностях и напряжения на конденсаторах в переходном процессе начнут изменяться от нулевых значений. При ненулевых начальных условиях для определения знаков $i_L(0)$ и $u_C(0)$ надо задаться направлениями обхода контуров цепи, в которых будет происходить переходный процесс. Положительные знаки $i_L(0)$ и $u_C(0)$ сохранятся, если их направления совпадают с направлением обхода контура. В противном случае знаки $i_L(0)$ и $u_C(0)$ изменятся на противоположные. Здесь токи в индуктивностях и напряжения на конденсаторах в переходном процессе начнут изменяться от тех значений, которые они имели в момент, непосредственно предшествующий коммутации (с учетом установленных знаков соответствующих величин).

Пусть в электрической цепи, изображенной на рисунке 3. 1, рубильник P переключается из положения 1 в положение 2. Тогда в контуре r, L и C возникнет переходный процесс. При-

мем, что его начальные условия ненулевые: $i_L(0) \neq 0$ и $u_C(0) \neq 0$. При направлениях тока в индуктивности и напряжения на обкладках конденсатора в начальный момент переходного процесса, показанных на рисунке 3. 1, выбранном направлении обхода контура имеем $i_L(0) > 0$ и $u_C(0) > 0$.

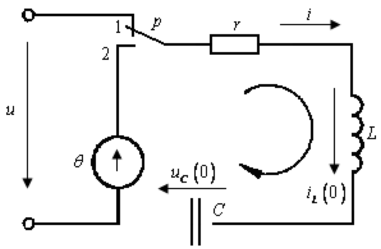

Рисунок 3. 1 – Электрическая цепь

Возьмем направление мгновенного значения тока переходного процесса $i = i(t)$, совпадающие с направлением обхода контура. Так как направление источника э. д. с. $e = e(t)$, действующего в контуре r, L и C во время переходного процесса, совпадает с направлением обхода этого контура, то по второму закону Кирхгофа получаем уравнение:

$$ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t idt + u_C(0) = e.$$

Обозначим $i(p) = i \doteq I(p)$ – изображение тока переходного процесса в контуре; $e(p) = e \doteq E(p)$ – изображение внешней э. д. с., действующей в контуре.

Тогда уравнение цепи r, L и C в операторной форме примет вид:

$$rI(p) + L(pI(p) - i_L(0)) + \frac{1}{pC}I(p) + \frac{u_C(0)}{p} = E(p).$$

Это уравнение можно записать так:

$$\left(r + Lp + \frac{1}{pC}\right)I(p) = E(p) + Li_L(0) - \frac{u_C(0)}{p}.$$

Откуда находится выражение для изображения тока переходного процесса в виде:

$$I(p)=\frac{E(p)+Li_L(0)-\frac{u_C(0)}{p}}{r+Lp+\frac{1}{pC}}.$$

Полученная зависимость представляет собой закон Ома в операторной форме. Его можно записать так:

$$I(p)=\frac{F(p)}{Z(p)},$$

где $F(p)=E(p)+Li_L(0)-\frac{u_C(0)}{p}$ – изображение всех (внешних и внутренних) э. д. с., действующих в контуре; $Z(p)=r+Lp+\frac{1}{pC}$ – операторное сопротивление контура r, L и C; $-\frac{u_C(0)}{p}$ – изображение начальной э. д. с. емкости (включая знак «минус»), уравновешивающей начальное напряжение на обкладках конденсатора и направленной навстречу $u_C(0)$.

Операторное сопротивление $Z(p)=r+Lp+\frac{1}{pC}$ контура r, L и C получено из выражения комплекса полного сопротивления этого контура

$$Z=r+i\omega L+\frac{1}{i\omega C}$$

путем замены $i\omega$ на p, $i^2=-1$.

Закон Ома в операторной форме позволяет, непосредственно исследовать переходные процессы только в неразветвленных электрических цепях. При рассмотрении переходных процессов в разветвленных и сложных электрических цепях необходимо использовать первый и второй законы Кирхгофа, которые имеют в операторной форме следующий вид:

первый закон – $\sum_{k=1}^{n} I_k(p)=0$;

второй закон – $\sum_{k=1}^{m} Z_k(p)I_k(p)=\sum_{k=1}^{l} F_k(p)$.

При составлении уравнений цепи по этим законам «правила знаков» остаются такими же, как и при расчете установившихся режимов в электрических цепях постоянного и переменного тока. В частности, если мгновенное значение тока переходного процесса $i_n(t)$ протекающего в ветви n, принято направленным к заданному узлу (для которого составляется уравнение по первому закону Кирхгофа), то изображение этого тока $I_n(p)$ берется с одним знаком (например, со знаком «плюс»). Если же ток $i_m(p)$ направлен от узла, то его изображение $I_m(p)$ берется с другим знаком (со знаком «минус»).

Составляя уравнения по второму закону Кирхгофа, необходимо учитывать, что кроме внешних э. д. с. $e_k(t)=e_k$ в контурах, содержащих индуктивности и емкости при ненулевых начальных условиях, действуют еще и внутренние э. д. с. (начальные э. д. с.: самоиндукции и емкости). Причем, если направление $i_{L_k}(0)$ совпадает с направлением обхода контура, то слагаемое $L_k i_{L_k}(0)$ следует брать со знаком «плюс», если же и $u_{C_k}(0)$ направлено по обходу контура, то результирующий знак слагаемого $\frac{u_{C_k}(0)}{p}$ должен быть «минус», так как начальная э. д. с. емкости всегда направлена навстречу начальному напряжению на обкладках конденсатора $u_C(0)$.

Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме имеют тот же вид, что и при установившихся режимах в цепях постоянного и переменного тока. Поэтому, применяя операционное исчисление для расчета переходных процессов, в принципе можно использовать все методы расчета сложных линейных электрических цепей с постоянными параметрами. При исследовании переходных процессов в сложных и разветвленных электрических цепях (в последнем случае при ненулевых начальных условиях) наибольшее применение получили метод уравнений Кирхгофа, метод контурных токов и метод наложения. При расчете переходных процессов в неразветвленных цепях, также в простых разветвленных цепях при нулевых начальных условиях применяется закон Ома в операторной форме. При этом в разветвленной цепи непосредственно определяется только ток переходного режима в ветви, содержащей источник э. д. с. (вся цепь нереально сводится к простой неразветвленной цепи).

Во всех случаях расчета переходных процессов в электрических цепях операторным методом сохраняется такая последовательность операций: сначала определяются начальные условия, затем записывается уравнение или система уравнений для заданной цепи в операторной форме, что позволяет найти изображения искомых токов или напряжений. По полученным изображениям отыскиваются оригиналы – мгновенные значения токов или напряжений переходного режима.

Вопросы для самоконтроля

1 Как используется преобразование Лапласа при решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?

2 Как используется преобразование Лапласа при решении систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?

3 При исследовании каких процессов используется операционное исчисление в электротехнике?

Решение типовых примеров

1 Решить уравнение $x'' + 4x = t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$.

Решение. Пусть $x(t) \doteq X(p)$.

По свойству дифференцирования оригинала

$$x''(t) \doteq p^2 X(p) - px_0 - x_1;\ f(t) \doteq t = \frac{1}{p^2}.$$

В результате приходим к алгебраическому уравнению:

$$p^2 X(p) - px_0 - x_1 + 4X(p) = \frac{1}{p^2}$$

Отсюда получаем:

$$X(p) = \frac{1}{p^2(p^2+4)} + \frac{px_0}{p^2+4} + \frac{x_1}{p^2+4}$$

Разложив изображение $X(p)$ на простейшие дроби и используя таблицу изображений, находим решение задачи Коши:

$$X(p) = \frac{1}{4p^2} - \frac{1}{4(p^2+4)} + \frac{px_0}{p^2+4} + \frac{x_1}{p^2+4} \doteq$$

$$\doteq x(t) = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin 2t + x_0 \cos 2t + \frac{x_1}{2}\sin 2t.$$

2 Решить уравнение $y''' - y'' - 6y' = 0$ удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 15$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 56$.

Решение. Пусть $y(t) \doteq Y(p)$. Тогда

$$y'(t) \doteq p \cdot Y(p) - y(0) = pY(p) - 15,$$

$$y''(t) \doteq p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - 15p - 2,$$

$$y'''(t) \doteq p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot y(0) - p \cdot y'(0) - y''(0) =$$

$$= p^3 F(p) - 15p^2 - 2p - 56.$$

Подставляя в дифференциальное уравнение и преобразовывая, получим:

$$Y(p) = \frac{15(p^2 - p - 6) + 2(p-1) + 56}{p^3 - p^2 - 6p} = \frac{15p^2 - 13p - 36}{p(p+2)(p-3)} =$$

$$= \frac{6}{p} + \frac{5}{p+2} + \frac{4}{p-3}.$$

По таблице оригиналов находим:

$$\frac{1}{p} \doteq 1,\ \frac{1}{p+2} \doteq e^{-2t},\ \frac{1}{p-3} \doteq e^{3t}.$$

Тогда получаем:

$$y(t)=6+5\,\mathrm{e}^{-2t}+4\,\mathrm{e}^{3t}.$$

3 Решить задачу Коши

$$x''+4x=f(t),$$
$$x(0)=x'(0)=0,$$

где

$$f(t)=\begin{cases} 0, & \text{при } t<0, \\ 2t, & \text{при } 0\le t\le 1, \\ 4-2t, & \text{при } 1\le t\le 2, \\ 0, & \text{при } t>2. \end{cases}$$

Решение. С помощью единичной функции Хевисайда запишем $f(t)$ одним аналитическим выражением:

$$f(t)=2t\eta(t)-2t\eta(t-1)+(4-2t)\eta(t-1)-(4-2t)\eta(t-2)=$$
$$=2t\eta(t)-4(t-1)\eta(t-1)+2(t-2)\eta(t-2).$$

Применяя формулу

$$f(t-\tau)\doteq e^{-p\tau}F(p),$$

получим

$$f(t)\doteq\frac{2}{p^2}-\frac{4}{p^2}e^{-p}+\frac{2}{p^2}e^{-2p}=\frac{2}{p^2}\left(1-2e^{-p}+e^{-2p}\right).$$

Полагая $x(t)\doteq X(p)$ и учитывая начальные условия, получим

$$x''(t)\doteq p^2X(p)$$

Операторное уравнение имеет вид

$$p^2X(p)+4X(p)=\frac{2}{p^2}\left(1-2e^{-p}+e^{-2p}\right).$$

Откуда

$$X(p)=\frac{2\left(1-2e^{-p}+e^{-2p}\right)}{p^2\left(p^2+4\right)}=\left(\frac{1}{2p^2}-\frac{1}{2\left(p^2+4\right)}\right)\left(1-2e^{-p}+e^{-2p}\right).$$

Итак,

$$X(p)=\frac{1}{2p^2}-\frac{e^{-p}}{p^2}+\frac{e^{-2p}}{2p^2}-\frac{1}{2\left(p^2+4\right)}+\frac{e^{-p}}{p^2+4}-\frac{e^{-2p}}{2\left(p^2+4\right)}\doteq$$
$$\doteq\frac{1}{2}t\eta(t)-(t-1)\eta(t-1)+\frac{1}{2}(t-2)\eta(t-2)-\frac{1}{4}\sin 2t\eta(t)+$$
$$+\frac{1}{2}\sin 2(t-1)\eta(t-1)-\frac{1}{4}\sin 2(t-2)\eta(t-2).$$

Преобразуя, получим:

$$x(t)=\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right)\eta(t)+\left(\frac{\sin 2(t-1)}{2}-(t-1)\right)\eta(t-1)+$$
$$+\left(\frac{1}{2}(t-2)-\frac{\sin 2(t-1)}{4}\right)\eta(t-2).$$

4 Решить задачу Коши

$$x''(t)+x'(t)=t,$$
$$x(1)=1,\ x'(1)=0.$$

Решение. Положим $t=\tau+1$. Тогда $x(t)=x(\tau+1)=\tilde{x}(\tau)$. Значит,

$$\tilde{x}''(\tau)+\tilde{x}'(\tau)=\tau+1,$$
$$\tilde{x}(0)=1,\ \tilde{x}'(0)=0,$$

так как значению $t=1$ отвечает значение $\tau=0$.

Пусть $\tilde{x}(\tau)\doteq X(p)$.

Тогда

$$\tilde{x}'(\tau)=pX(p)-1,$$
$$\tilde{x}''(\tau)=p^2X(p)-p,$$

и операторное уравнение примет вид:

$$p^2X(p)-p+pX(p)-1=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}.$$

Решая уравнение, находим $X(p)$

$$X(p)=\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p}=\frac{\tau^2}{2}+1\doteq\tilde{x}(\tau)$$

Заменив τ на $t-1$, получим решение $x(t)$ исходной задачи Коши

$$x(t)=\frac{(t-1)^2}{2}+1.$$

5 Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y'-2y-4z=\cos t, \\ z'+y+2z=\sin t, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$ и $z(0)=0$.

Решение. Пусть $y(t)\doteq Y(p)$ и $z(t)\doteq Z(p)$. Применяя преобразование Лапласа к данной системе, получим систему операторных уравнений

$$\begin{cases} (-2+p)Y-4Z=\dfrac{p}{p^2+1}, \\ Y+(2+p)Z=\dfrac{1}{p^2+1}. \end{cases}$$

Определитель данной системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} -2+p & -4 \\ 1 & 2+p \end{vmatrix}=p^2.$$

Тогда решение относительно изображений есть

$$Y(p)=\frac{p^2+2p+4}{p^2(p^2+1)}=\frac{4}{p^2}+\frac{2}{p}-\frac{2p+3}{p^2+1},$$

$$Z(p)=-\frac{2}{p^2(p^2+1)}=-\frac{2}{p^2}+\frac{2}{p^2+1}.$$

Переходя от найденных изображений к оригиналам, при $t>0$ получим:

$$y(t)=4t+2-2\cos t-3\sin t,$$

$$z(t)=-2t+2\sin t.$$

6 Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'-2x-3y=3e^{2t}, \\ y'+3x-2y=0, \end{cases}$$

удовлетворяющую начальным условиям $x(0)=0$, $y(0)=1$

Решение. Пусть $x(t)\doteq X(p)$, $y(t)\doteq Y(p)$. Тогда

$$x'(t)\doteq pX(p),$$

$$y'(t)\doteq pY(p)-1,$$

$$e^{2t}\doteq\frac{1}{p-2}.$$

Переход к уравнениям в изображениях дает систему операторных уравнений

$$\begin{cases} pX(p)-2X(p)-3Y(p)=\dfrac{3}{p-2}, \\ pY(p)+3X(p)-2Y(p)=1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} X(p)(p-2)-3Y(p)=\dfrac{3}{p-2}, \\ Y(p)(p-2)+3X(p)=1. \end{cases}$$

Решаем систему по формулам Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} p-2 & -3 \\ 3 & p-2 \end{vmatrix}=(p-2)^2+9,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} \dfrac{3}{p-2} & -3 \\ 1 & p-2 \end{vmatrix}=3+3=6,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} p-2 & \dfrac{3}{p-2} \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=p-2-\frac{9}{p-2}=\frac{(p-2)^2-9}{p-2}.$$

Тогда

$$X(p)=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{6}{(p-2)^2+9}\doteq 2e^{2t}\sin 3t;$$

$$Y(p)=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{(p-2)^2-9}{(p-2)\left((p-2)^2-9\right)}=\frac{2(p-2)}{(p-2)^2+9}-\frac{1}{p-2}\doteq$$
$\doteq 2e^{2t}\cos 3t-e^{2t}$.

Итак, решение системы
$$\begin{cases}x=2e^{2t}\sin 3t,\\ y=e^{2t}(2\cos 3t-1).\end{cases}$$

7 Решить дифференциальное уравнение $x''-x=\dfrac{1}{e^t+2}$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=x'(0)=0$.

Решение. Рассмотрим вспомогательное уравнение $\tilde{x}''-\tilde{x}=1$, удовлетворяющее начальным условиям $\tilde{x}(0)=\tilde{x}'(0)=0$.

Применяя операционный метод, находим изображение:
$$\tilde{X}(p)=\frac{1}{p\left(p^2-1\right)}$$
и соответствующий ему оригинал $\tilde{x}(t)=\int\limits_0^t \operatorname{sh}\tau\,d\tau=\operatorname{ch}t-1$.

Тогда решение исходного дифференциального уравнения есть:
$$x(t)=\int\limits_0^t \frac{1}{1+e^\tau}\operatorname{sh}(t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}\left(e^t-te^t-1\right)+\operatorname{sh}t\ln\frac{1+e^t}{2}.$$

8 Найти переходные значения тока и напряжений (i,u_r,u_C) в цепи, изображенной на рисунке 3. 2, при переключении рубильника P из положения 1 в положение 2, если $U=100$ В, $r=100$ Ом, $C=10$ мкФ.

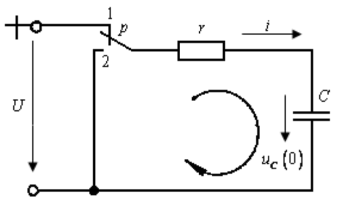

Рисунок 3. 2 – Электрическая цепь к типовому примеру 7

Решение. Будем считать, что до переключения рубильника из положения 1 в положение 2 конденсатор C был заряжен до напряжения источника U. Если обход контура взять совпадающим с ходом стрелки часов, то начальное напряжение на конденсаторе $u_C(0)$ считается положительным: $u_C(0)=U=100$ В.

Операторное сопротивление контура
$$Z(p)=r+\frac{1}{pC}.$$

Внешних источников э. д. с. в контуре нет.

Изображение внутренней э. д. с. (начальной э. д. с. емкости) есть
$$\frac{-u_C(0)}{p}=\frac{-U}{p}=F(p).$$

По закону Ома в операторной форме имеем
$$I(p)=\frac{F(p)}{Z(p)}=\frac{\dfrac{-U}{p}}{r+\dfrac{1}{pC}}=\frac{-UC}{rCp+1}.$$

Изображение тока переходного процесса удовлетворяет условиям применения второй теоремы разложения. Поэтому можно записать
$$I(p)=\frac{-UC}{rCp+1}=\frac{P(p)}{Q(p)},$$
где $P(p)=-UC=-100\cdot 10\cdot 10^{-6}=-10^{-3}$,

$Q(p)=rCp+1$,

$\alpha_1=-\dfrac{1}{rC}=-\dfrac{1}{100\cdot 10\cdot 10^{-6}}=-10^3$,

$P(\alpha_1)=-10^{-3}$,

$Q'(p)=rC=100\cdot 10\cdot 10^{-6}=10^{-3}$,

$Q'(\alpha_1)=10^{-3}$.

В результате получаем мгновенное значение тока переходного процесса в виде:

$$i = i(t) = \frac{P(\alpha_1)}{Q^{'}(\alpha_1)} e^{\alpha_1 t} = \frac{-10^{-3}}{10^{-3}} e^{-10^3 t} = -e^{-1000t} \text{ А.}$$

Отрицательный знак тока означает, что при разряде конденсатора C через явное сопротивление r ток $i(t)$ направлен в сторону, противоположную направлению обхода контура, выбранного раньше. Мгновенное значение напряжения на активном сопротивлении в переходном процессе также отрицательно:

$$u_r = ri = -100e^{1000t} \text{ В.}$$

Мгновенное значение переходного напряжения на конденсаторе, определяемое по второму закону Кирхгофа $u_C + ri = 0$ есть

$$u_C = -ri = -u_r = 100e^{-1000t} \text{ В.}$$

Характер изменения i и u_C в переходном режиме показан на рисунке 3. 3.

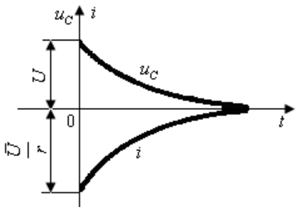

Рисунок 3. 3 – Характер изменения i и u_C в переходном режиме

Задания для аудиторной работы

1 Решить задачи Коши:

1) $x' + x = e^{-t}$, $x(0) = 1$;

2) $x' + 2x = \sin t$, $x(0) = 0$;

3) $x'' + x' = 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

4) $x'' + 2x' - 3x = e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

5) $x'' - 2x' + 2x = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$;

6) $x'' + x' = \cos t$, $x(0) = 2$, $x'' + x' = 0$;

7) $x''' + x' = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$;

8) $x''' - x'' = \sin t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$;

9) $x''' + x' = e^{t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$;

11) $x'' + x' = 4\sin^2 t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$;

12) $x^4 - x'' = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = x'''(0) = 0$;

13) $x''(t) + x'(t) = 2t$, $x(1) = 1$, $x'(1) = -1$;

14) $x''(t) + x(t) = -2\sin t$, $x(\pi/2) = 0$, $x'(\pi/2) = 1$;

15) $x' - 2x = 1$, $x(0) = 14$

16) $x'' + x' = e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$;

17) $x' + 3x = t^2$, $x(0) = 0$;

18) $x'' + 4x = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$, $f(t)$ изображена на рисунке 3. 4;

19) $x'' + x = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$, $f(t)$ изображена на рисунке 3. 5;

10) $x'' - 2x' = e^{2t}$,
$x(0) = x'(0) = 0$;

20) $x'' - x = \dfrac{1}{e^t + 2}$,
$x(0) = x'(0) = 0$.

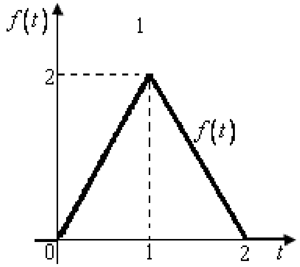

Рисунок 3. 4 – График $f(t)$ для задачи 1 (18) аудиторной работы

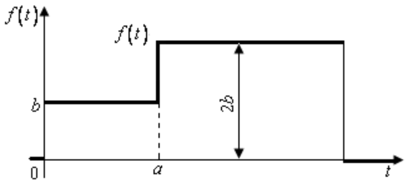

Рисунок 3. 5 – График $f(t)$ для задачи 1 (19) аудиторной работы

2 Решить системы уравнений с заданными начальными условиями:

1) $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \end{cases}$
$x(0) = 1$, $y(0) = -1$;

2) $\begin{cases} x + x' = y + e^t, \\ y + y' = x + e^t, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 1$;

3) $\begin{cases} y' + z = 2\sin t, \\ z' + y = -1, \end{cases}$
$y(0) = 0$, $z(0) = 1$;

4) $\begin{cases} y' + y - 3z = 2, \\ z' - y - z = 5\cos t, \end{cases}$,
$y(0) = 1$, $z(0) = 0$;

8) $\begin{cases} y' - 4z = 4t, \\ z' - y = 5\cos t, \end{cases}$
$y(0) = 2$, $z(0) = 0$;

9) $\begin{cases} y' + 9z = 3e^t, \\ z' + y = 8\,\mathrm{sh}\, t, \end{cases}$
$y(0) = 0$, $z(0) = 2$;

10) $\begin{cases} y' + 9z = 3e^t, \\ z' + y = 8\,\mathrm{sh}\, t, \end{cases}$
$y(0) = 0$, $z(0) = 2$;

11) $\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = x'(0) = 0$;

5) $\begin{cases} y' - y + z = \mathrm{sh}\, t, \\ z' + y + z = t, \end{cases}$
$y(0) = 0$, $z(0) = -1$;

6) $\begin{cases} y' - y + 3z = 4\sin 2t, \\ z' + y + z = 4t, \end{cases}$
$y(0) = 1$, $z(0) = -1$;

7) $\begin{cases} y' + y - z = t^2, \\ z' - y - z = \mathrm{ch}\, t, \end{cases}$
$y(0) = -1$, $z(0) = 1$;

12) $\begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0, \\ -x' + x + y'' - 5y' + 4y = 0, \end{cases}$,
$x(0) = x'(0) = y'(0) = 0$;
$y(0) = 1$;

13) $\begin{cases} x' = -y - z, \\ y' = -x - z, \\ z' = -x - y, \end{cases}$
$x(0) = -1$,
$y(0) = 0$,
$z(0) = 1$.

3 Частица массы m движется прямолинейно под действием восстанавливающей силы $m\lambda x$ пропорциональной смещению, и силы сопротивления $2m\mu v$, пропорциональной скорости. В момент времени $t = 0$ частица находится на расстоянии x_0, от положения равновесия и обладает скоростью v_0. Показать, что если имеет место равенство $n^2 = \lambda^2 - \mu^2$, то смещение частицы определяется выражением $\dfrac{1}{n} e^{-\mu t}\left(n x_0 \cos nt + (v_0 + \mu x_0)\sin nt\right)$.

4 Для электрической цепи (рисунок 3. 6) определить напряжение на элементе L_1 цепи при подключении постоянной э. д. с. $e(t) = E$ (в случае необходимости положить $u_C(0) = 0$.

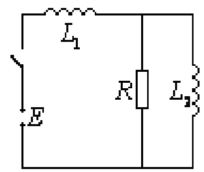

Рисунок 3. 6 – Электрическая цепь к задаче 4 аудиторной работы

Задания для домашней работы

1 Решить задачи Коши:

1) $x' - x = 1$,
$x(0) = -1$;

2) $x'' + 2x' = t\sin t$,
$x(0) = x'(0) = 0$;

3) $x'' + 2x' + x = \sin t$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = -1$;

4) $x'' - 2x' + x = e^t$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

5) $x'' - 2x' + 5x = 1 - t$,
$x(0) = x'(0) = 0$;

6) $x'' - x' = te^t$,
$x(0) = x'(0) = 0$;

7) $x' - x = e^t$, $x(0) = 2$;

8) $x'' - x = \sin t$,
$x(0) = -1$, $x'(0) = 0$;

9) $x'' - 2x' + x = t - \sin t$,
$x(0) = x'(0) = 0$;

10) $x''' + x' = t$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = 0$;

13) $x''' - 2x'' + x' = 4$,
$x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = -2$;

14) $x''' + x = 0{,}5t^2e^t$,
$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$;

15) $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1$,
$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$;

16) $x''' + x' = t$,
$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$;

17) $x'' - x' = t^2$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

18) $x''' + x'' = \sin t$,
$x(0) = x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$;

19) $x' + 2x = e^{2t}$, $x(0) = -1$;

20) $x'' + 4x = t$,
$x(0) = 1$, $x'(0) = 0$;

21) $x'' - x' + x = e^{-t}$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

22) $x^4 + 2x'' + x = t\sin t$,
$x(0) = x'(0) = 0$,
$x''(0) = x'''(0) = 0$;

11) $x'' - x' = -2t$,
$x(0) = 8$, $x'(0) = 6$;

12) $x'' + 9x = f(t)$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = 1$,
$f(x)$ изображена на рисунке 3. 7

23) $x'' - x' = \dfrac{1}{e^t + 3}$,
$x''(0) = x'(0) = x(0) = 0$;

24) $x'' + 3x' = e^t$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.

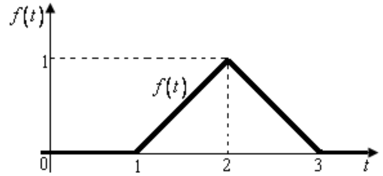

Рисунок 3. 7 – К задаче 1 (12) домашней работы

2 Решить системы уравнений с заданными начальными условиями:

1) $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 1$;

2) $\begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t}, \\ y' - 2x + y = 7e^{2t}, \end{cases}$
$x(0) = 1$, $y(0) = 3$;

3) $\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ -2x + y' - y = t, \end{cases}$
$x(0) = 2$, $y(0) = 4$;

4) $\begin{cases} y' - 2y - 4z = \cos t, \\ z' + y + 2z = \sin t, \end{cases}$
$y(0) = 1$, $z(0) = -1$;

7) $\begin{cases} y' - z = t^3, \\ z' + y = 3\sin 2t, \end{cases}$
$y(0) = -2$, $z(0) = 0$;

8) $\begin{cases} y' - 9z = 8\,\mathrm{ch}\,t, \\ z' - y = e^{-2t}, \end{cases}$
$y(0) = 2$, $z(0) = 0$;

9) $\begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1, \\ x' + 4y' + 3y = 0, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 0$;

10) $\begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0, \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases}$,
$x(0) = x'(0) = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$;

5) $\begin{cases} x' + y = e^t, \\ x + y' = e^{-t}, \end{cases}$
$x(0) = 1$, $y(0) = -1$;

11) $\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases}$,
$x(0) = y(0) = 0$;

6) $\begin{cases} x' = 3y - x, \\ y' = y + x + e^{3t}, \end{cases}$
$x(0) = 1$, $y(0) = 1$;

12) $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \\ z' = 3x + y, \end{cases}$
$x(0) = 0$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

3 Материальная точка массы 2 грамма движется прямолинейно под действием силы F, возрастающей на a Н в секунду. В начальный момент точка находилась в начале координат и имела скорость $v_0 = 10$ см/с. Зная, что начальная величина силы F_0=4 Н и что на расстоянии 450 см от начала координат скорость $v = 105$ см/с, определить значение величины a.

4 Для электрической цепи (рисунок 3. 8) определить напряжение на элементе L цепи при подключении постоянной э. д. с. $e(t) = E$ (в случае необходимости положить $u_C(0) = 0$).

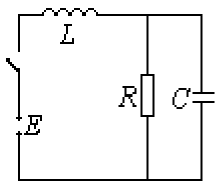

Рисунок 3. 8 – Электрическая цепь к задаче 4 домашней работы